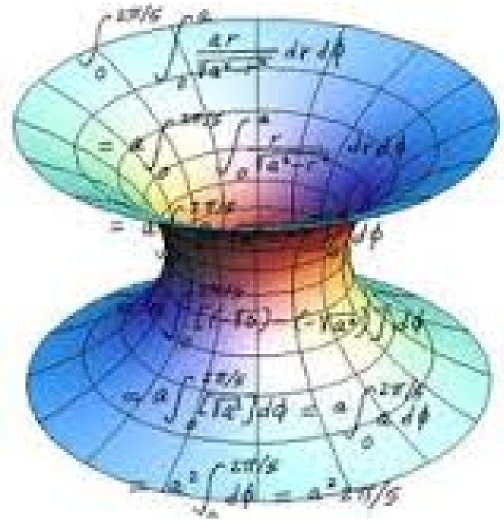
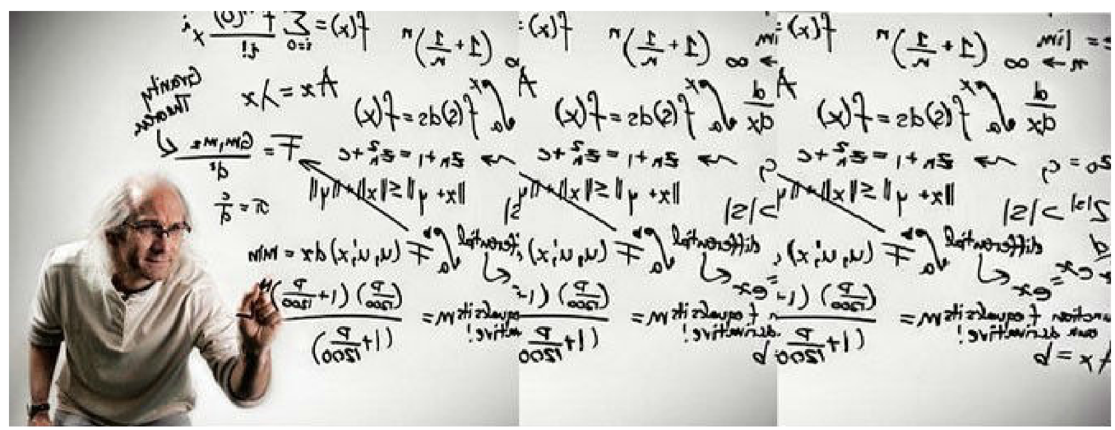


DEPARTAMENTO DE MECÁNICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXÁCTAS Y TECNOLOGÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN

INSTRODUCCIÓN AL MODELADO Y ANÁLISIS DE SISTEMAS

Prof. Esp. Ing. Marcos A. Golato



Modelos y análisis de sistemas (conceptos generales)

Los sistemas dinámicos (mecánicos, eléctricos, térmicos, hidráulicos, económicos, biológicos, etc.), pueden ser caracterizados por medio de Ecuaciones Diferenciales (ED).

Entonces, resolviendo las ED de los sistemas se obtienen las respuestas de los mismos.

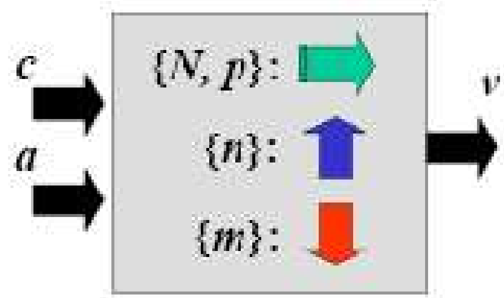
Propiedades y características de un sistema

- Un sistema es una entidad física, intangible o abstracta, capacitada para generar, consumir, recibir, modificar y\o entregar información.
- **Sistema aislado:** cuando solo genera, consume y\o modifica la información.
- **Sistema interactivo:** cuando intercambia (recibe y\o entrega) información al medio.

Representación de sistemas mediante diagramas de bloques

Sistemas interactivos: existen tres tipos de variables: de entrada, de salida e internas, representados por:

Variables	*Información*
c, a, v:	Intercambiadas
N, p:	Modificadas
n:	Generada
m:	Consumida



Un sistema interactivo arbitrario, se representa de la siguiente manera:

Variables de *entrada*: $\{u_1, \ldots, u_p\}$

Variables de *salida*: $\{y_1, \ldots, y_m\}$

Variables *internas*: $\{x_1, \ldots, x_n\}$

Tipos de variables de un sistemas

Variables de entrada a un sistema

Son impuestas al sistema desde el medio exterior. Pueden ser generadas por un dispositivo externo o por el usuario.

Se clasifican en: 1- Manipuladas, 2- Perturbaciones

Variables internas de un sistema

Son las restantes variables del sistema (las que no son de entrada).

Variables de salida de un sistema

Son las de mayor interés para el estudio del sistema. Son los valores que se desea o necesita conocer a lo largo del tiempo.

Comportamiento de un sistema

- El comportamiento de un sistema se vera directamente afectado por las variables de entrada.
- Una variable de entrada nunca podrá ser modificada por ninguna otra variable del sistema.
- Variables de salida, según selección del analista, proveen información parcial del sistema.
- Un diagrama de bloques del sistema establece una relación causa-efecto.
- Se deben seleccionar variables manipuladas rápidas y de acción directa sobre las variables de salida.

Modelo matemático de un sistema

Es un conjunto de ecuaciones que permiten calcular la evolución temporal de las variables internas y de salida.

Un modelo matemático permite describir el funcionamiento de un sistema por medio de ecuaciones genéricas de la forma:

Variables internas: $x_i(t) = f_i[k_1, ..., k_N; u_1(t), ..., u_p(t)]$; $i = 1, ..., n$

Variables de salida: $y_j(t) = h_i[k_1, ..., k_N; x_1(t), ..., x_n(t); u_1(t), ..., u_p(t)]$; $j = 1, ..., m$

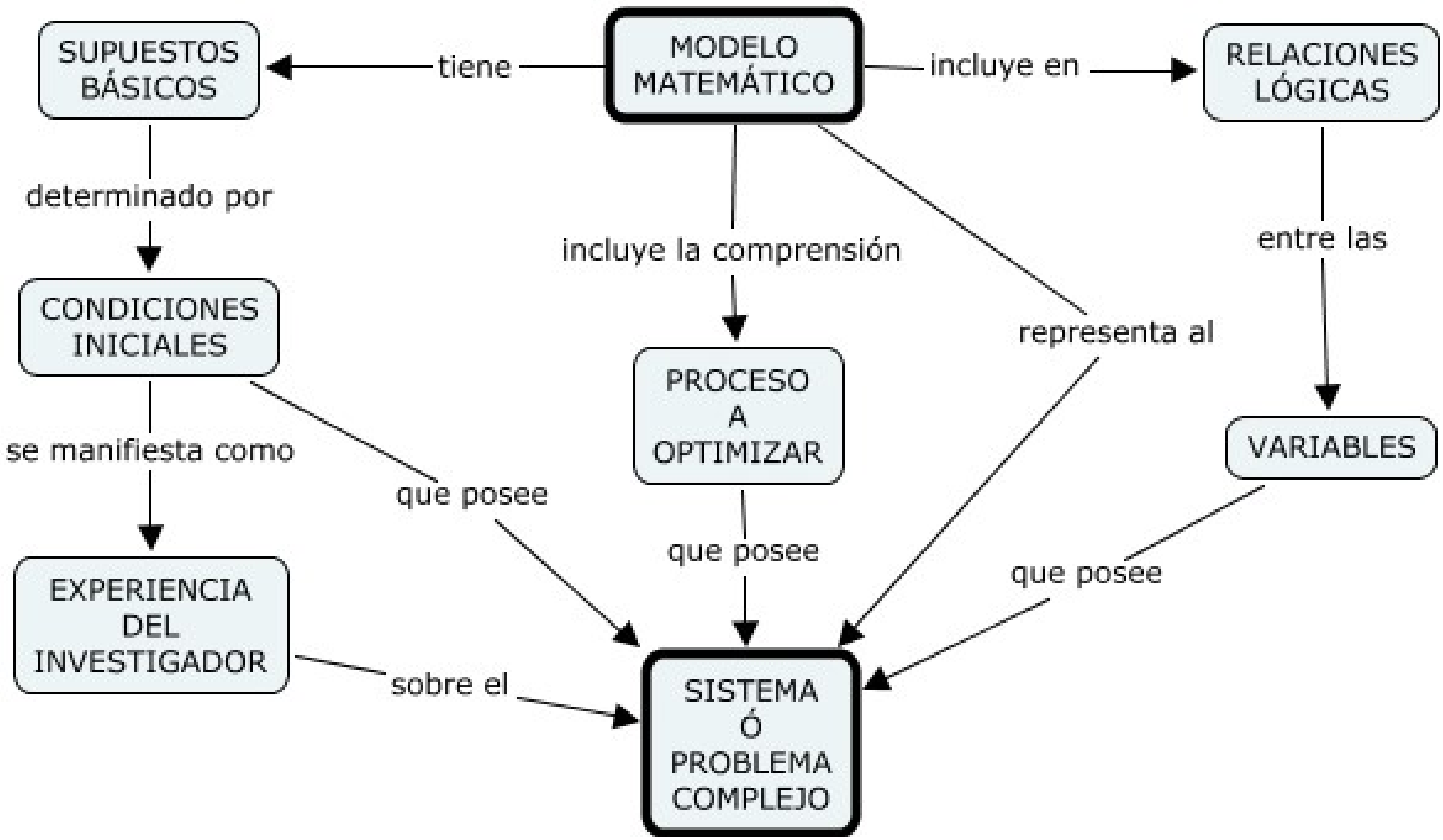
Donde:

$(k_1,\ldots,k_N)$ = parámetros del modelo (Cte. o variante).

Objetivo del modelado

- Entender los fundamentos de la dinámica del proceso y el diseño de su sistema de control.
- Convertir una ecuación diferencial lineal en una ecuación algebraica.

Del modelo al sistema (o problema complejo)



Desarrollo de un modelo (dos etapas) → **Planteo**, **Validación**

Utilidad de los modelos:

- Aprender sobre el funcionamiento del sistema.
- Predecir el comportamiento del sistema ante condiciones no habituales.
- Identificar rangos de operación del sistema para funcionamiento confiable.
- Diseñar estrategias de control.

Estado estacionario (EE)

El EE de un modelo dinámico se alcanza cuando todas variables internas y de salida permanecen constantes a lo largo del tiempo (variables de entrada Cte.).

Observaciones importantes:

- Todo sistema dinámico e invariante tiene al menos un EE.
- Un sistema dinámico lineal tiene un único EE.
- Un sistema dinámico no lineal tiene múltiples EE.
- El EE de un sistema dinámico es independiente de las condiciones iniciales.
- Un EE puede ser estable o inestable.

Clasificación de los sistemas y de los modelos matemáticos

	Clasificación	Característica determinante
Según las Variables de E/S del Sistema	SISO SIMO MISO MIMO	Una entrada / Una salida Una entrada / Múltiples salidas Múltiples entradas / Una Salida Múltiples entradas / Múltiples salidas
Según las Variables del Modelo Matemático	Continuo Discreto	Variables continuas Variables discretas
	Determinístico Estocástico	Variables determinísticas (todas) Variables aleatorias (alguna)
Según las Ecuaciones del Modelo Matemático	Estático Dinámico	Ecuaciones algebraicas (todas) Ecuaciones diferenciales o en diferencias (alguna)
	Lineal No Lineal	Ecuaciones lineales (todas) Ecuaciones no lineales (alguna)
Según los Parámetros del Modelo Matemático	Invariante Variante	Parámetros constantes (todos) Parámetros variables (alguno)

Clasificación de los sistemas de control de procesos

Nombre	Tipos de control y principales características (*)
Automatización total	Sistemas informáticos integrados – Mínima intervención humana – Control y decisión a cargo del sistema
Jerárquico (gerencial)	Sistemas de control avanzado – Bases de datos – Reconciliación de datos – SPC – Políticas de producción – Relación con factores económicos/financieros – Sistemas de cómputo potente ("mainframe") – Sistemas expertos y de inteligencia artificial – CIM
Avanzado	DCS – Interfaces gráficas – Interfaces hombre/máquina – Control por computadora – Algoritmos de control (por realimentación de estados, óptimo, adaptable, no lineal, diagnosis de fallas, etc.) – SCADA – Comunicaciones digitales por radio y telefónicas
Clásico	Mediciones "en línea" – Comunicaciones analógicas y digitales – Control automático a lazo cerrado – Simulación dinámica – Controladores PID – Dispositivos digitales – PLC – Interfaces digitales ("displays")
Manual	Órganos de accionamiento manual – Ausencia de mediciones "en línea" – Interfaces con el operador inexistentes o inadecuadas – Dispositivos analógicos

(*) PLC: controlador de lógica programable; DCS: sistema de control distribuido; SCADA: adquisición de datos y control supervisor; SPC: control estadístico de procesos; CIM: producción integralmente computarizada.

Transformada de Laplace

- Herramienta útil para el análisis de la dinámica de procesos y diseño de sistemas de control.
- Proporciona una visión general del comportamiento de gran variedad de procesos e instrumentos.
- Nos permite resolver ecuaciones diferenciales lineales que representan modelos dinámicos de un sistema de control.

Definición de transformada

La transformada de Laplace de una "función del tiempo" se define como:

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \, . \, e^{-st} \, dt$$

Donde:

f(t): es una función del tiempo.

F(s): es la transformada de Laplace correspondiente.

s: es la variable de la transformada de Laplace.

t: es el tiempo.

Observación

- La transformada de Laplace se aplica únicamente a las variables del sistema (funciones del tiempo). No se aplica a los procesos e instrumentos.

Transformada de señales de entrada comunes

Para el estudio de comparación de respuestas de sistemas de control, se analizan las siguientes señales:

» Función de escalón unitario.

» Función pulso.

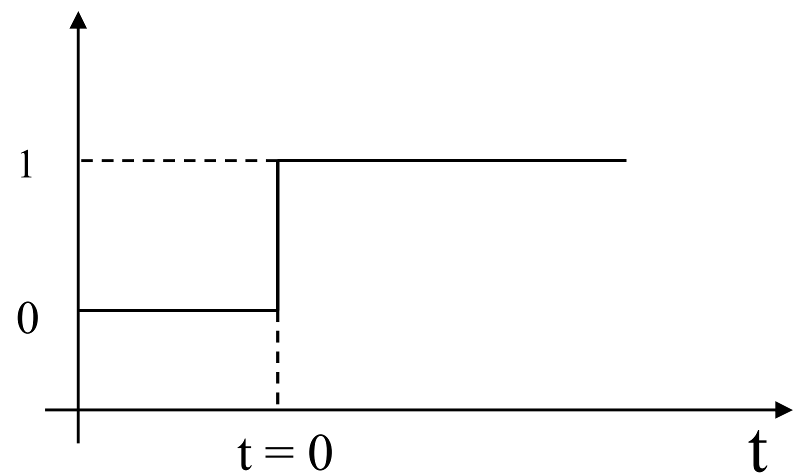
» Función de impulso unitario.

» Función senoidal.

Función de escalón unitario

* Representa un cambio súbito de magnitud unitaria en un tiempo igual a cero.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



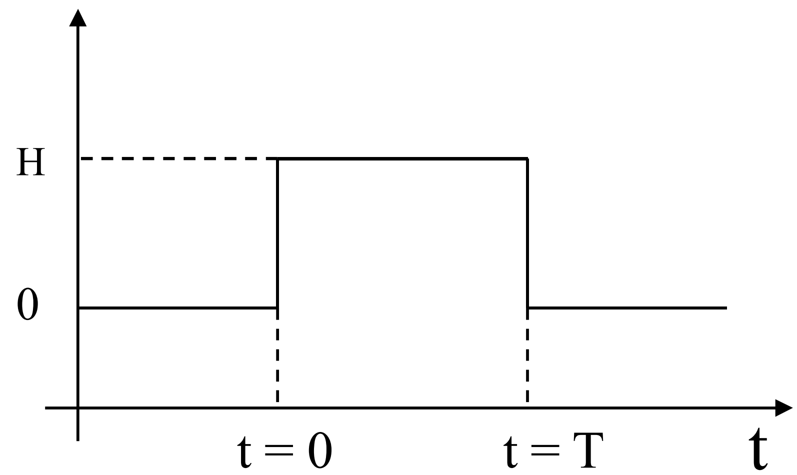
Aplicando la definición:

$$F(s) = \mathscr{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} u(t) \,.\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{s} \; e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s} \;(0 - 1)$$

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

Función pulso
(magnitud H y duración T)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0,\ t \geq T \\ H & 0 \leq t < T \end{cases}$$



Aplicando la definición:

$$F(s) = \mathscr{L}\,[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\ .\ e^{-st}\,dt = \int_0^{T} H\ .\ e^{-st}\,dt = -\,\frac{H}{s}\,(e^{-st} - 1)$$

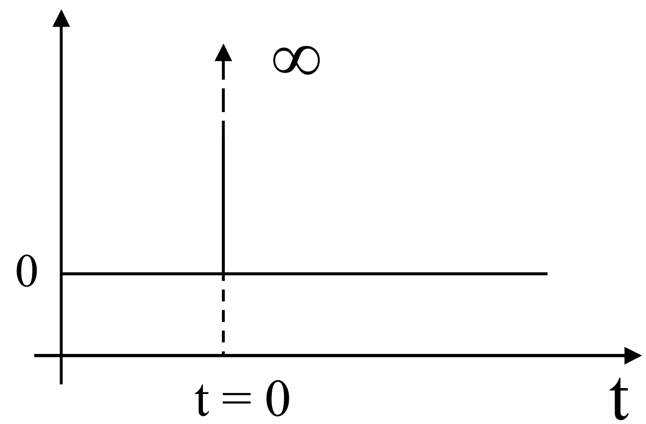
$$F(s) = \frac{H}{s}\,(1 - e^{-st})$$

Función impulso unitario

* Representa un pulso ideal de amplitud infinita y duración cero.

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} f(t)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0,\ t \geq T \\ H & 0 \leq t < T \end{cases}$$



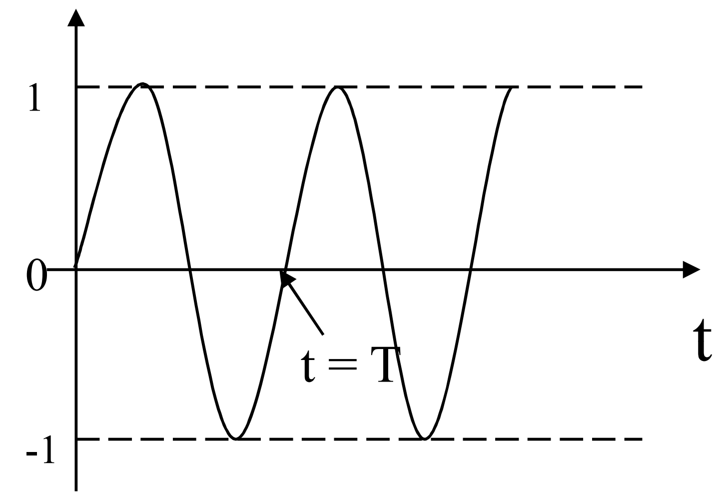
Aplicando la definición: $F(s) = \mathscr{L}[\delta(t)] = \lim_{T \to 0} \dfrac{1}{T\,s}(1 - e^{-sT})$; p/ H.T = 1

$$F(s) = \mathscr{L}[\delta(t)] = \lim_{T \to 0} \frac{\dfrac{d}{dT}(1 - e^{-sT})}{\dfrac{d}{dT}(T\,s)} = \lim_{T \to 0} \frac{s\,.\,e^{-sT}}{s} \rightarrow F(s) = 1$$

Función senoidal
(amplitud 1 y frecuencia ω).

Representación de la onda senoidal
en forma exponencial:

$$\text{Sen } \omega t = \frac{e^{\,i\omega t} - e^{\,-i\omega t}}{2i} \qquad \text{Con } i = \sqrt{-1}$$



Aplicando la definición:

$$F(s) = \mathscr{L}\,[\text{sen } \omega t] = \int_0^{\infty} \text{sen } \omega t \,.\, e^{-st}\, dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{\,i\omega t} - e^{\,-i\omega t}}{2i}\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{2i}\left[\int_0^{\infty} e^{-st + i\omega t}\, dt - \int_0^{\infty} e^{-st - i\omega t}\, dt\right] =$$

$$F(s) = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{-st + i\omega t}}{s - i\omega} + \frac{e^{-st - i\omega t}}{s + i\omega}\right]\Bigg|_0^{\infty} = \longrightarrow \mathscr{L}\,[\text{sen } \omega t] = \left[\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}\right]$$

Tabla de Transformadas de Laplace

Función temporal: $f(t)$	Transformada de Laplace: F(s)
Impulso unitario: $\delta_0(t)$	1
Escalón unitario: $H_0(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa unitaria: t	$\frac{1}{s^2}$
t^n ; $(n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t^n e^{-at}$; $(n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$; $(a \neq b)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{b-a}\left(b\,e^{-bt} - a\,e^{-at}\right)$; $(a \neq b)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
sen (ωt)	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
cos (ωt)	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi\omega t}\, \mathrm{sen}\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\, t\right)$; $(\xi<1)$	$\frac{\omega^2}{s^2+2\xi\omega s+\omega^2}$
e^{-at} sen (ωt)	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
e^{-at} cos (ωt)	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Principales propiedades de la Transformada de Laplace

Se presentan a continuación las dos propiedades principales de la transformada de Laplace que se utilizan para la resolución de PVIs.

1. *Linealidad.* $L[\alpha\, f(t) + \beta\, g(t)] = \alpha\, L[f(t)] + \beta\, L[g(t)] = \alpha\, F(s) + \beta\, G(s)$
2. *Derivadas:* $L[df(t) \,/\, dt] = L[f\,'(t)] = s\, F(s) - f(t_0)$

   $L[d^2f(t) \,/\, dt^2] = L[f\,''(t)] = s^2\, F(s) - s\, f(t_0) - f\,'(t_0)$

   $L[d^3f(t) \,/\, dt^3] = L[f\,'''(t)] = s^3\, F(s) - s^2\, f(t_0) - s\, f\,'(t_0) - f\,''(t_0)$

   Etc.

Otras propiedades de la Transformada de Laplace

1. *Integración.* $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \dfrac{F(s)}{s}$

2. *Traslación Compleja.* $\mathcal{L}[e^{a\,t} f(t)] = F(s-a)$

3. *Traslación Temporal.* $\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-T\,s}\, F(s)$

4. *Teorema Valor Inicial.* $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$

5. *Teorema Valor Final.* $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$; (sólo válido si $s\,F(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho, ni sobre el eje imaginario).

Solución de ecuaciones diferenciales por medio de la Transformada de Laplace

Consideremos la siguiente EDOL:

$$a_2 \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b \cdot x(t)$$

Donde:

y(t): variable de salida o "función de salida", es la función que satisface la ED.

x(t): variable de entrada o "función de forzamiento".

t: variable independiente (tiempo).

"Una Ecuación Diferencial generalmente representa la forma en que se relaciona la señal de salida y(t), con la variable de entrada x(t)".

$$\longrightarrow \quad a_2 \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b \cdot x(t)$$

Solución de la ED

PRIMER PASO

Se transforma la ED en una ecuación algebraica aplicando Laplace miembro a miembro.

$$\mathscr{L}\left[a_2 \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t)\right] = \mathscr{L}\left[b \cdot x(t)\right]$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{L}\left[a_2 \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] = a_2 \cdot \left[s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - \frac{dy}{dt}(0)\right] \\
&\mathscr{L}\left[a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt}\right] = a_1 \cdot \left[s \cdot Y(s) - y(0)\right] \\
&\mathscr{L}\left[a_0 \cdot y(t)\right] = a_0 \cdot Y(s) \\
&\mathscr{L}\left[b \cdot x(t)\right] = b \cdot X(s)
\end{aligned}\right\}$$

Reemplazando y ordenando, se tiene una ecuación algebraica en términos de "s".

$$(a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0) \cdot Y(s) - (a_2 \cdot s + a_1) \cdot y(0) - a_2 \cdot \frac{dy}{dt}(0) = b \cdot X(s)$$

SEGUNDO PASO

Se despeja la variable de salida Y(s) en términos de la variable de entrada X(s) y de las condiciones iniciales.

$$(a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0) \cdot Y(s) - (a_2 \cdot s + a_1) \cdot y(0) - a_2 \cdot \frac{dy}{dt}(0) = b \cdot X(s)$$

$$\longrightarrow Y(s) = \frac{b \cdot X(s) + (a_2 \cdot s + a_1) \cdot y(0) + a_2 \cdot \frac{dy}{dt}(0)}{(a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0)}$$

Ecuación o polinomio característico

TERCER PASO

Se aplica la "Antitransformada de Laplace" a Y(s) para obtener la función de salida en el dominio del tiempo "t".

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[Y(s) \right]$$

$$\longrightarrow y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{b \cdot X(s) + (a_2 \cdot s + a_1) \cdot y(0) + a_2 \cdot \frac{dy}{dt}(0)}{(a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0)} \right]$$

Observación

La tabla de transformaciones puede usarse tanto para obtener la Transformada de Laplace de una función dada del tiempo “t”, como para hallar la transformada inversa f(t) de una función dada de “s”.

EJEMPLO

Dada la ED:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\,\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2\,.\,x(t)$$

Con condiciones iniciales cero, o sea:

$$y(0) = 0\ ;\ \frac{dy(0)}{dt} = 0\ ;\ \frac{d^2y(0)}{dt^2} = 0\ ;\ \frac{d^3y(0)}{dt^3} = 0$$

PASO 1: Se transforma la ED en términos del operador S:

$$S^3\,.\,Y(s) + 3\,S^2\,.\,Y(s) + 3S\,.\,Y(s) + Y(s) = 2\,.\,X(s)$$

PASO 2: Se resuelve para Y(s) y se sustituye X(s) de la tabla (escalón unitario) :

$$Y(s)\,.\,(S^3 + 3\,S^2 + 3S + 1) = 2\,.\,X(s) = 2.\,\frac{1}{S} \longrightarrow Y(s) = \frac{2}{(S^3 + 3\,S^2 + 3S + 1)\,.S}$$

Polinomio característico

Polinomio Característico

Un sistema de control práctico esta sujeto a una gran variedad de excitaciones de entrada x(t), por lo que resulta imposible calcular la respuesta para cada excitación posible.

Pero puede obtenerse una buena aproximación del comportamiento transitorio del sistema, directamente a partir de los ceros de la ecuación o polinomio característico (raíces de la ecuación).

Raíces del Polinomio (Ceros)

En particular las raíces del polinomio pueden ser:

Distintas

El polinomio característico B(s) puede ser factoreado en la forma:

$$B(s) = (s-r_1).(s-r_2)\ \ldots\ (s-r_n)$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son "n" distintos ceros de B(s).

Repetidas

El polinomio característico B(s) puede ser factoreado en la forma:

$$B(s) = (s-r)^q.(s-r_1).(s-r_n)\ldots(s-r_{n-q})$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son los ceros de B(s) y "q" la cantidad de veces que se repiten.

Expansión en fracciones parciales

La variable Y(s) puede escribirse como una expansión en fracciones parciales según sus raíces:

Raíces distintas

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{K_1}{(s-r_1)} + \frac{K_2}{(s-r_2)} + \ldots + \frac{K_i}{(s-r_i)} + \ldots + \frac{K_n}{(s-r_n)}$$

$$Ki = \lim_{S \to r} [(s-r_i)\ Y(s)] \text{ (coeficiente cte)}$$

$$y(t) = K_1.e^{r1t} + K_2.e^{r2t} + \ldots + K_n.e^{rnt}$$

Solución de la ED

Raíces repetidas

$$Y(s) = \frac{C_q}{(s-r)^q} + \frac{C_{q-1}}{(s-r)^{q-1}} + \ldots + \frac{C_1}{(s-r)} + \frac{K_1}{(s-r_1)} + \ldots + \frac{K_2}{(s-r_2)} + \ldots + \frac{K_{n-q}}{(s-r_{n-q})}$$

$$C_q = \lim_{s \to r} [(s-r)^q\, Y(s)]$$

$$C_{q-1} = \lim_{s \to r} \left\{ \frac{d}{ds} [(s-r)^q\, Y(s)] \right\}$$

$$C_{q-k} = \lim_{s \to r} \left\{ \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [(s-r)^q\, Y(s)] \right\}$$

Solución de la ED

$$\boxed{y(t) = \frac{C_q t^{q-1} e^{rt}}{(q-1)!} + \frac{C_{q-1} t^{q-2}}{(q-2)!} + \ldots + \frac{C_2\, t\, e^{rt}}{1!} + C_1\, t\, e^{rt} + k_1\, e^{r1t} + k_2\, e^{r2t} + \ldots + k_{n-q}\, e^{r_{n-q}t}}$$

Ejemplo (raíces repetidas):

Ejemplo. Deter[...] transformada

$$Y(s) = \frac{C_q}{(s-r)^q} + \frac{C_{q-1}}{(s-r)^{q-1}} + \dots + \frac{C_1}{(s-r)} + \frac{K_1}{(s-r_1)} + \dots + \frac{K_2}{(s-r_2)} + \dots + \frac{K_{n-q}}{(s-r_{n-q})}$$

$$C_q = \lim_{s \to r} [(s-r)^q\, Y(s)]$$

$$Y(s) = \frac{11s+28}{(s+2)^2(s+5)} = \frac{C_2}{(s+2)^2} + \frac{C_1}{s+2} + \frac{K_1}{s+5} \qquad (6.14)$$

Las constantes son

$$C_{q-1} = \lim_{s \to r} \left\{ \frac{d}{ds} [(s-r)^q\, Y(s)] \right\}$$

$$C_2 = \lim_{s \to -2} \frac{11s+28}{s+5} = 2$$

$$C_1 = \lim_{s \to -2} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{11s+28}{s+5} \right) \right] = \lim_{s \to -2} \frac{(s+5)11 - (11s+28)}{(s+5)^2} = 3$$

$$Ki = \lim_{s \to r} [(s-r_i)\, Y(s)]$$

$$K_1 = \lim_{s \to -5} \frac{11s+28}{(s+2)^2} = -3$$

Luego $$Y(s) = \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+2} - \frac{3}{s+5}$$

Según la tabla 5.1,

$$y(t) = 2te^{-2t} + 3e^{-2t} - 3e^{-5t}$$
$$y(t) = (2t+3)e^{-2t} - 3e^{-5t}$$

Ejemplo 2. Hallar $y(t)$, solución del siguiente PVI: $y'(t) + 3\,y(t) = 3\,e^{-2t}$; $y(0) = -1$.

El primer paso consiste en hallar $Y(s) = L[y(t)]$. Para ello, se aplica transformada de Laplace a cada miembro de la expresión original, es decir:

$L[y'(t) + 3\,y(t)] = L[3\,e^{-2t}]$.

Por linealidad: $L[y'(t) + 3\,y(t)] = L[y'(t)] + 3\,L[y(t)]$; y también: $L[3\,e^{-2t}] = 3\,L[e^{-2t}]$.

Aplicando las propiedades de las derivadas: $L[y'(t)] = s\,L[y(t)] - y(0) = s\,Y(s) - y(0)$.

Entonces: $s\,Y(s) - y(0) + 3\,Y(s) = 3\,/\,(s{+}2)$.

Finalmente, con $y(0) = -1$: $$Y(s) = \frac{3}{(s+2)\,(s+3)} - \frac{1}{(s+3)} \qquad (1)$$

Para hallar $y(t)$ hay que antitransformar $Y(s)$, es decir: $y(t) = L^{-1}[Y(s)]$. Esta operación se realiza recurriendo a las tablas de transformadas, para lo cual es conveniente primero expresar $Y(s)$ como suma de fracciones simples. En el caso particular de este ejemplo, debe aplicarse el método de fracciones simples al primer término la ec. (1), resultando:

$$\frac{3}{(s+2)\,(s+3)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+3)} = \frac{A\,(s+3) + B\,(s+2)}{(s+2)\,(s+3)} = \frac{(A+B)\,s + 3A + 2B}{(s+2)\,(s+3)} \qquad (2)$$

Igualando los coeficientes de los numeradores del primero y del último miembro, resulta un sistema de 2 ecuaciones y dos incógnitas: $A + B = 0$; $3\,A + 2\,B = 3$; entonces: $A = 3$ y $B = -3$. Reemplazando en las ecs. (1) y (2), resulta:

$$Y(s) = \frac{3}{(s+2)} - \frac{3}{(s+3)} - \frac{1}{(s+3)} = \frac{3}{(s+2)} - \frac{4}{(s+3)}$$

Antitransformando (por tabla): $y(t) = 3\,e^{-2t} - 4\,e^{-3t}$.

FUNCIÓN TRANSFERENCIA

Es una expresión matemática que relaciona la entrada y la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Se define como la relación entre la Trasformada de Laplace de la salida (función respuesta) y la Transformada de Laplace de la entrada (función excitadota), bajo la suposición de condiciones iniciales cero.

Sea el sistema lineal invariante en el tiempo definido por la siguiente ED:

$$a_o.y^{\,n} + a_1 \,.\, y^{\,(n-1)} + \ldots + a_{\,(n-1)} \,.\, \acute{y} + a_n \,.\, y = b_o \,.\, x^{\,m} + b_1.x^{\,(m-1)} + \ldots + b_{\,(m-1)} \,.\, x + b_m \,.\, x$$

donde: y = salida ; x = entrada.

Aplicando la transformada de Laplace, nos queda:

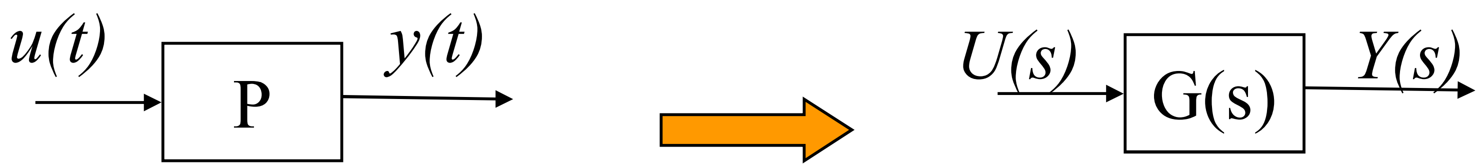
$$(a_o.S^n + a_1.S^{\,(n-1)} + \ldots + a_{\,(n-1)}\,.S + a_n) \,.\, Y_{\,(S)} = (b_o.S^m + b_1.S^{\,(m-1)} + \ldots + b_{\,(m-1)}\,.S + b_m).X_{\,(S)}$$

Despejando la relación entre la salida ($Y_{(s)}$) y la entrada ($X_{(s)}$):

$$G_{(S)} = \frac{Y_{(S)}}{X_{(S)}} = \frac{b_o.S^m + b_1.S^{(m-1)} + \ldots + b_{(m-1)}.S + b_m}{a_o.S^n + a_1.S^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-1)}.S + a_n}$$

Así obtenemos una expresión que relaciona la salida y la entrada de un sistema lineal invariante en el tiempo, en términos de los parámetros del sistema y constituye una propiedad del mismo.

ACLARACIÓN

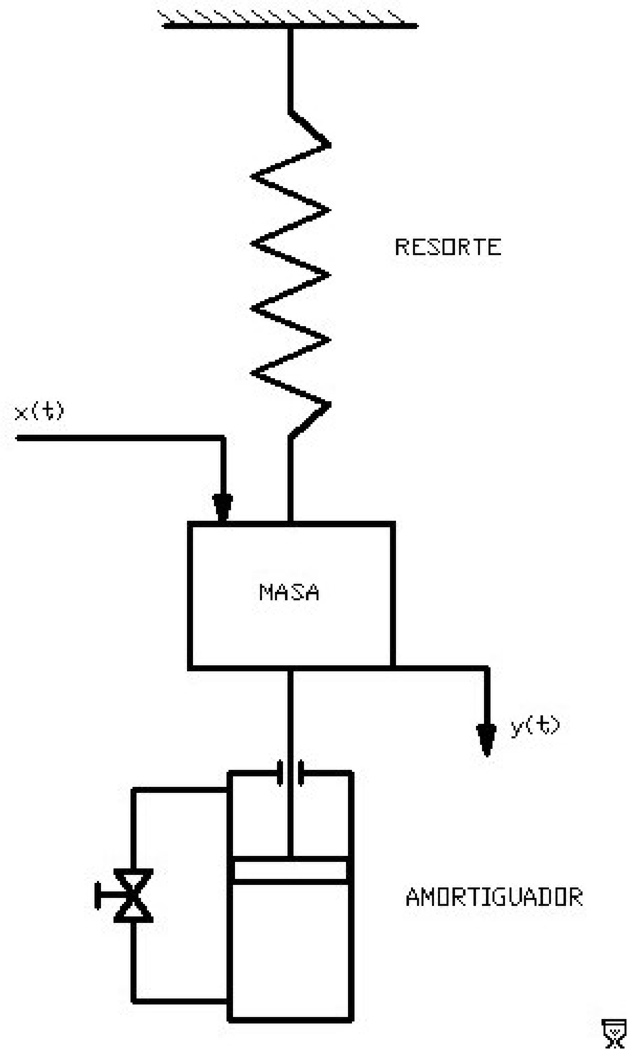


$$\frac{dy(t)}{dt} = b \cdot u(t) - a \cdot y(t)$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b}{s+a}}$$

MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS FÍSICOS (EJEMPLOS)

EJEMPLO 1: SISTEMA MECÁNICO DE TRASLACIÓN



Entrada = Fuerza $x_{(t)}$
Salida = Desplazamiento $y_{(t)}$

Hipótesis:

- **Fuerza de fricción del amortiguador proporcional a ý.**
- **Resorte lineal.**

Indicamos:
m = masa [kg].
f = coeficiente de fricción viscosa [N.s/m].
k = Constante del resorte [N/m].

Aplicando la Ley de Newton: $\sum F = m \cdot a$

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -f \cdot \frac{dy}{dt} - k \cdot y + x \longrightarrow m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + f \cdot \frac{dy}{dt} + k \cdot y = x$$

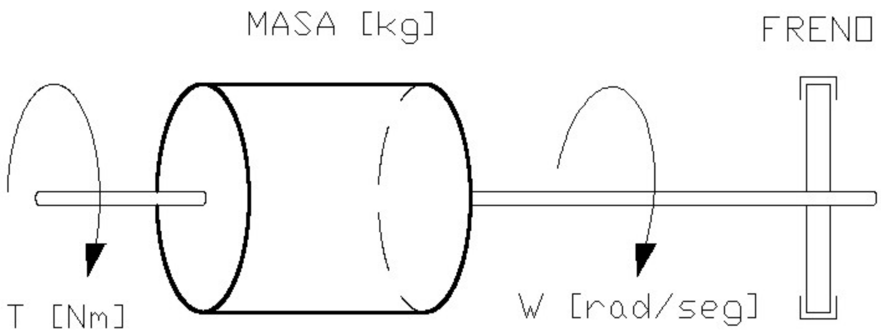
Aplicando Laplace en ambos miembros:

$$[m \cdot S^2 + f \cdot S + k] \cdot Y_{(S)} = X_{(S)}$$

La función transferencia del sistema será:

$$G_{(S)} = \frac{Y_{(S)}}{X_{(S)}} = \frac{1}{m \cdot S^2 + f \cdot S + k}$$

EJEMPLO 2: SISTEMA MECÁNICO DE ROTACIÓN



Entrada = Par T [Nm]
Salida = Velocidad angular W [rad/s]

Hipótesis:
- **Fuerza de fricción del amortiguador proporcional a ý.**

Indicamos:
η = aceleración angular [rad/s²].
J = momento de inercia de la carga [kg . m²/ rad].
f = coeficiente de fricción viscosa [N . m . s/ rad].
W = Velocidad angular [rad / s].

Aplicando la Ley de Newton: $\sum T = J \cdot \eta$

$$T - f \cdot w = J \cdot \frac{dw}{dt} \longrightarrow T = J \cdot \frac{dw}{dt} + f \cdot w$$

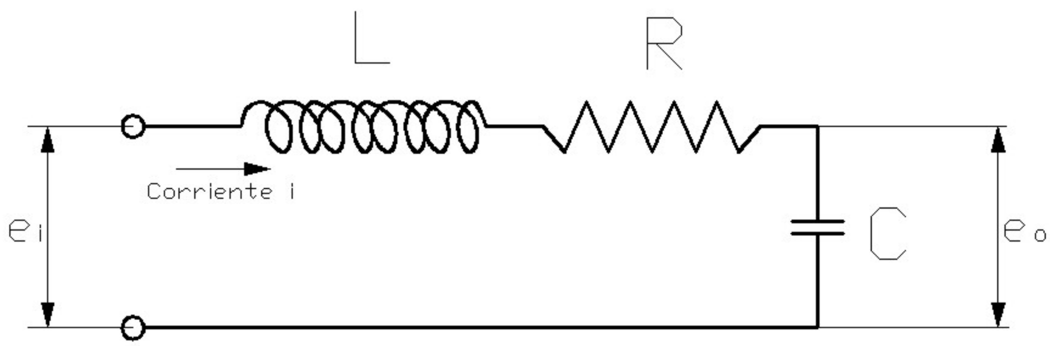
Aplicando Laplace en ambos miembros:

$$T_{(S)} = J \cdot S \cdot W_{(S)} + f \cdot W_{(S)}$$

La función transferencia del sistema será:

$$G_{(S)} = \frac{W_{(S)}}{T_{(S)}} = \frac{1}{J \cdot S + f}$$

EJEMPLO 3: SISTEMA ELÉCTRICO – CIRCUITO RLC



Entrada = Caída de tensión e_i [V]
Salida = Caída de tensió e_o [V]
Indicamos:
L = Inductancia [h].
R = Resistencia [Ω].
C = Capacitancia [F].

Aplicando la Ley de Kirchoff:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = e_i \longrightarrow$$

Aplicando Laplace en ambos miembros:

$$\left(L \cdot S + R + \frac{1}{C \cdot S} \right) \cdot I_{(S)} = E_{i\,(S)}$$

$$\frac{1}{C} \int i \cdot dt = e_o \longrightarrow \frac{I_{(S)}}{C \cdot S} = E_{o\,(S)}$$

La función transferencia del sistema será:

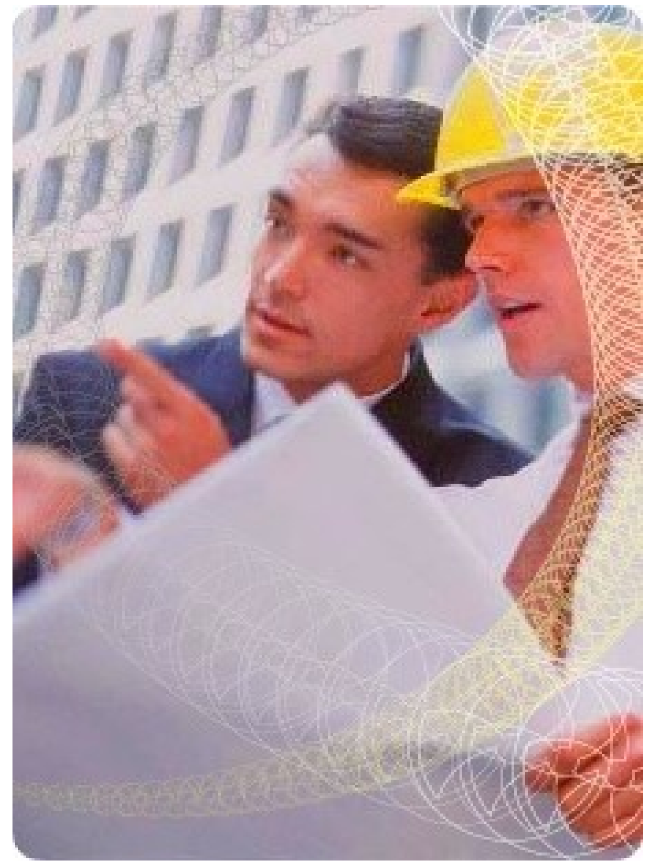
$$G_{(S)} = \frac{E_{o\,(S)}}{E_{i\,(S)}} = \frac{1}{C \cdot L \cdot S^2 + R \cdot C \cdot S + 1}$$

ÁLGEBRA DE BLOQUES

Diagramas de Bloques - Definición

Es una representación gráfica de las funciones realizadas por cada componente del sistema de control y del flujo de señales.

Indican en forma más realista el flujo de señales del sistema de control aplicado.



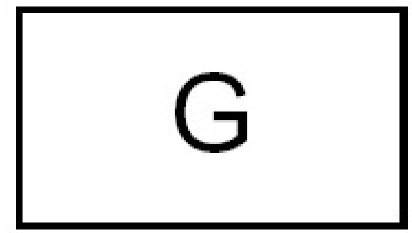
Elementos de un bloque

<u>Señal</u>

Representativa de variables de entrada o salida. La dirección del flujo de información viene dado por el sentido de la flecha. Se caracteriza con una letra minúscula.

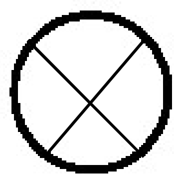
<u>Bloque</u>

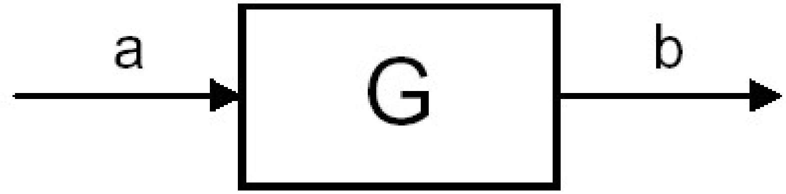
Sirve para representar un sistema al que llega información (variable de entrada) y en el que se produce información (variable de salida). Se lo identifica con una letra Mayúscula que da el valor del bloque.



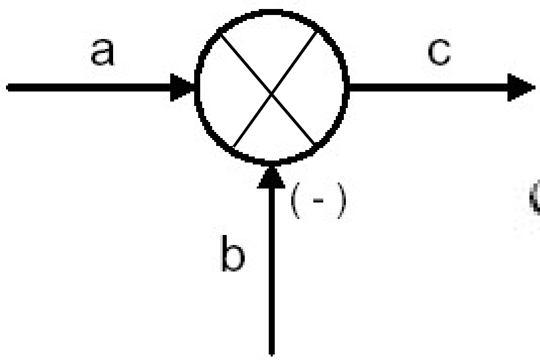
<u>Sumador</u>

Elemento que sirve para combinar dos señales de entrada generando una salida que es su suma (o resta)

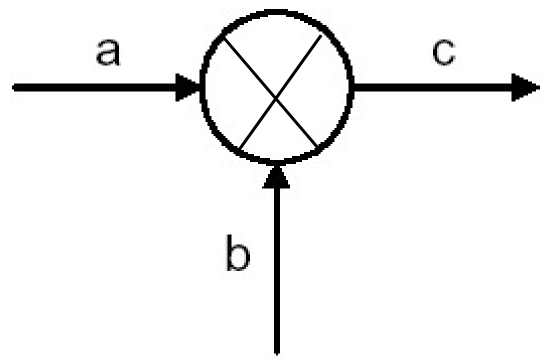




Elemento sumador, detector de error o comparador:

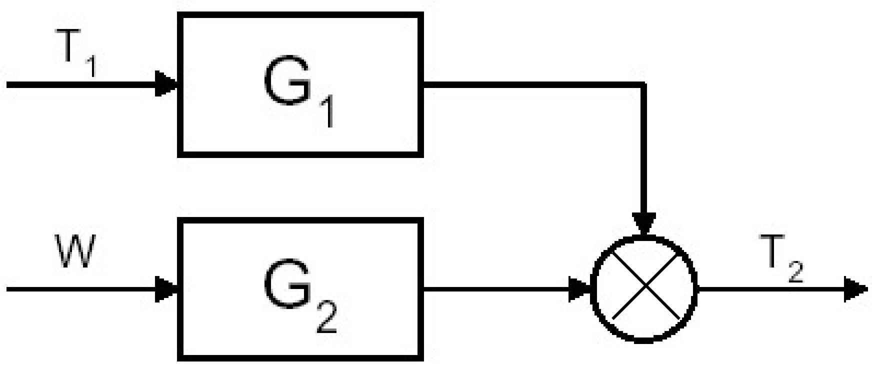


$$c = a - b$$



$$c = a + b$$

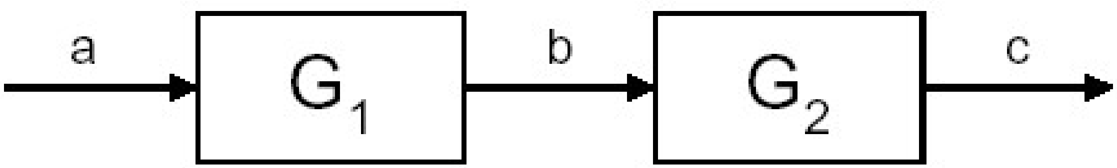
Ejemplo:



$$T_2 = G_1 T_1 + G_2 W$$

Configuraciones de bloques

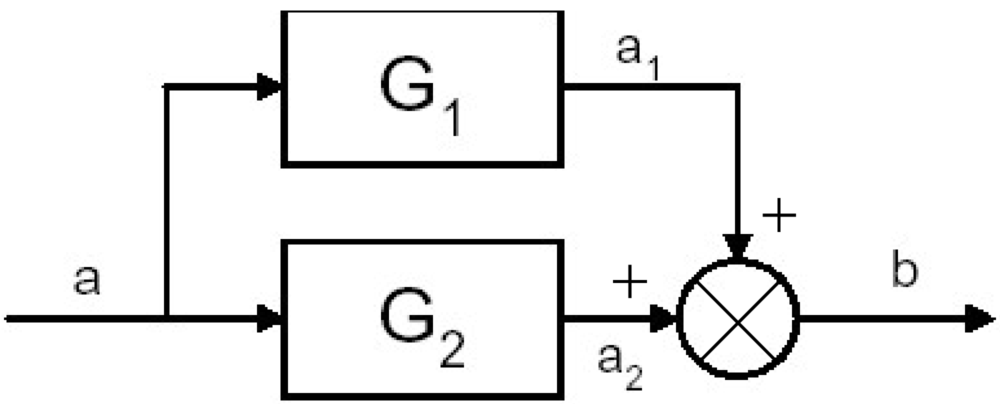
Bloques en Serie

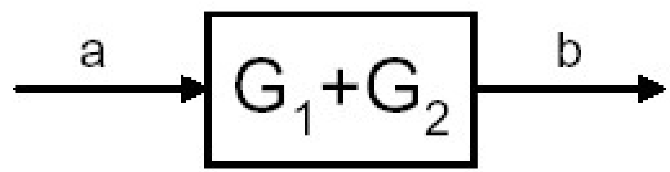


$b = G_1 a \qquad c = G_2 b$

$\Rightarrow \quad c = G_1 G_2 a = Ga$

Bloques en Paralelo

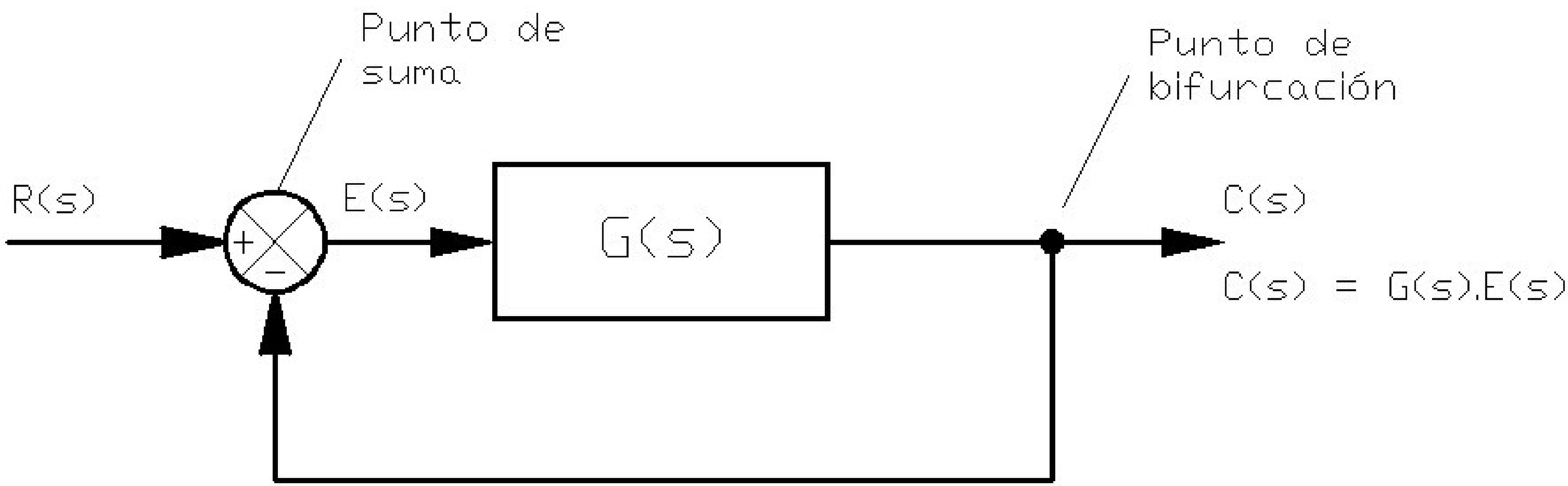




$a_1 = G_1 a \qquad a_2 = G_2 a \qquad b = a_1 + a_2$

$\Rightarrow \quad b = (G_1 + G_2)a = Ga$

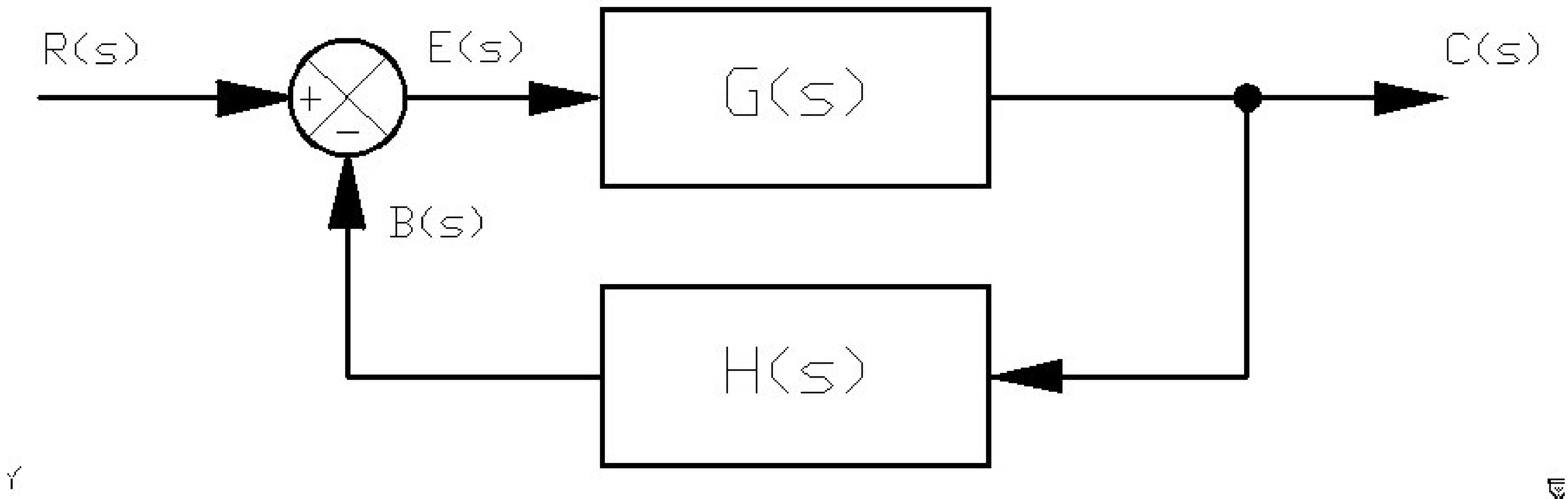
Diagrama de bloques de un sistema de lazo cerrado



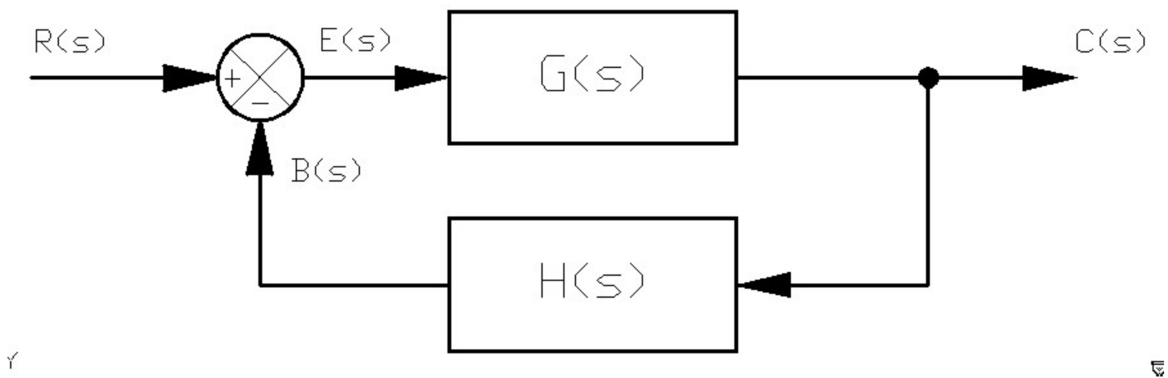
Cualquier sistema de control puede ser representado por un diagrama de bloques consistente en bloques, puntos de suma y puntos de bifurcación.

Diagrama característico de un sistema de lazo cerrado (diagrama canónico)

Normalmente es necesario convertir la señal de salida del sistema a la misma forma de la señal de entrada. Para ello, se utiliza un elemento de realimentación cuya función transferencia es H(s).



Definiciones



Función de transferencia de lazo abierto = $\dfrac{B(s)}{E(s)} = G(s) \,.\, H(s)$

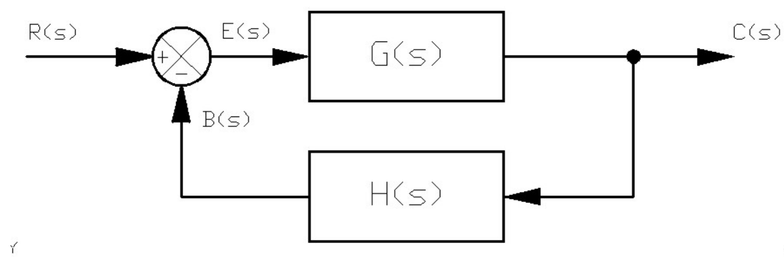
Función de transferencia directa = $\dfrac{C(s)}{E(s)} = G(s)$

¡Si la función de transferencia de realimentación es la unidad, la función transferencia de lazo abierto y la directa son la misma!

Función transferencia de lazo cerrado

Función transferencia del componente G(s):

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} \longrightarrow C(s) = G(s) \,.\, E(s)$$



Analizando el comparador: $E(s) = R(s) – B(s)$

$$\longrightarrow C(s) = G(s) \,.\, E(s) = G(s) \,.\, [R(s) – B(s)]$$

Función transferencia del componente H(s):

$$H(s) = \frac{B(s)}{C(s)} \longrightarrow B(s) = H(s) \,.\, C(s)$$

$$C(s) = G(s) \,.\, E(s) = G(s).[R(s) – H(s).C(s)]$$

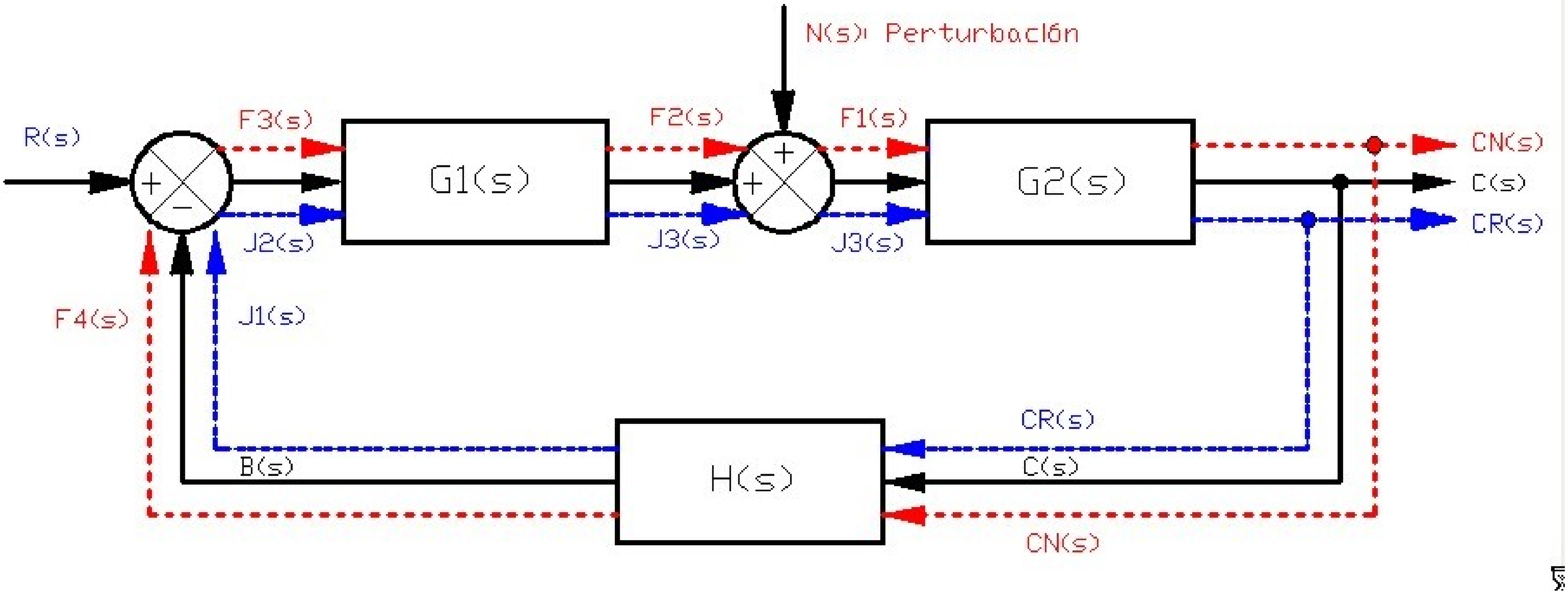
$$C(s) = G(s) \,.\, R(s) – G(s) \,.\, H(s) \,.\, C(s)$$

$$C(s) + G(s) \,.\, H(s) \,.\, C(s) = G(s) \,.\, R(s)$$

$$C(s) \,.\, [1 + G(s) \,.\, H(s)] = G(s) \,.\, R(s) \longrightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s).H(s)}$$

Función transferencia de lazo cerrado

Sistema de lazo cerrado sometido a una perturbación



Sistema lineal de dos entradas: 1- R(s): Señal de entrada o referencia, 2- N(s): Perturbación.

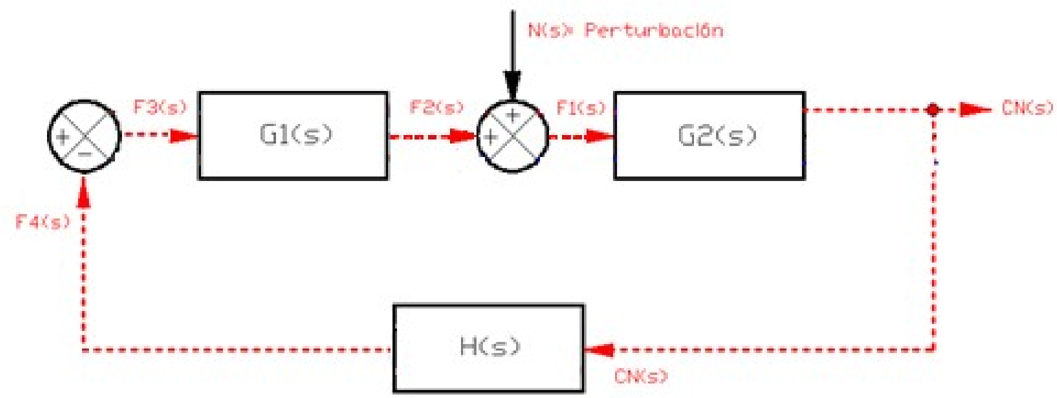
En estos sistemas cada entrada puede ser tratada de manera independiente de la otra (método de superposición). La salida total corresponde a la suma de las salidas parciales.

Efecto de la perturbación N(s) en el sistema (R(s) = 0)

Se supone al sistema inicialmente en reposo con error cero, donde:
CN(s) = Respuesta del sistema a la pertubación N(s).

$$CN(s) = G2(s)\ .\ F1(s) = G2(s).[N(s) + F2(s)]$$

$$CN(s) = G2(s).\ [N(s) + F3(s).G1(s)]$$



Analizando el comparador: $F3(s) = R(s) - F4(s)$

Como $R(s) = 0 \longrightarrow F4(s) = F3(s)$

$$\longrightarrow CN(s) = [N(s) - G1(s).F4(s)]$$

De la Función transferencia del componente H(s): $\longrightarrow F4(s) = H(s)\ .\ CN(s)$

$$CN(s) = G2(s)\ .\ [N(s) - G1(s).H(s).\ CN(s)]$$

$$CN(s) = G2(s)\ .\ N(s) - G2(s).G1(s).H(s).\ CN(s)$$

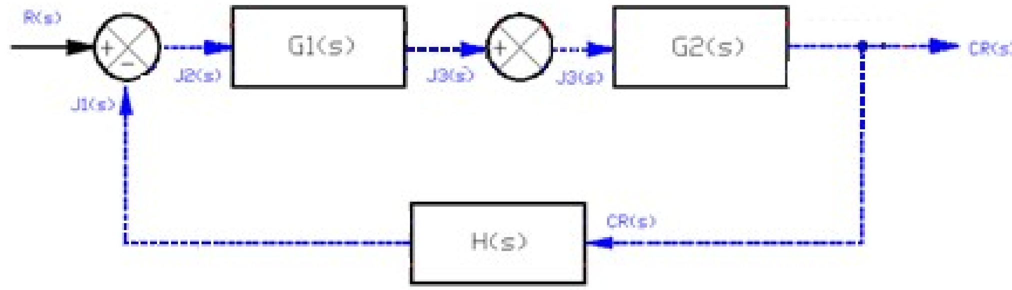
$$CN(s) + G2(s).G1(s).H(s).CN(s) = G2(s).N(s)$$

$$CN(s)\ .\ [1 + G1(s).G2(s).H(s)] = G2(s).N(s) \longrightarrow \frac{CN(s)}{N(s)} = \frac{G2(s)}{1 + G1(s).G2(s).H(s)}$$

Función transferencia de lazo cerrado considerando la perturbación y R(s) = 0

Efecto de la entrada R(s) en el sistema (N(s) = 0)

Se supone al sistema inicialmente en reposo con error cero, donde:
CR(s) = Respuesta del sistema a la entrada R(s).



$$CR(s) = G2(s)\ .\ J3(s) = G2(s).G1(s).J2(s)$$

Analizando el comparador: $J2(s) = R(s) - J1(s)$

$$CR(s) = G2(s).\ G1(s).[R(s) - J1(s)]$$

De la Función transferencia del componente H(s): $\longrightarrow$ $J1(s) = H(s)\ .\ CR(s)$

$$CR(s) = G2(s).G1(s)\ [R(s) - H(s).\ CR(s)]$$

$$CR(s) = G2(s).G1(s).R(s) - G2(s).G1(s).H(s).\ CR(s)$$

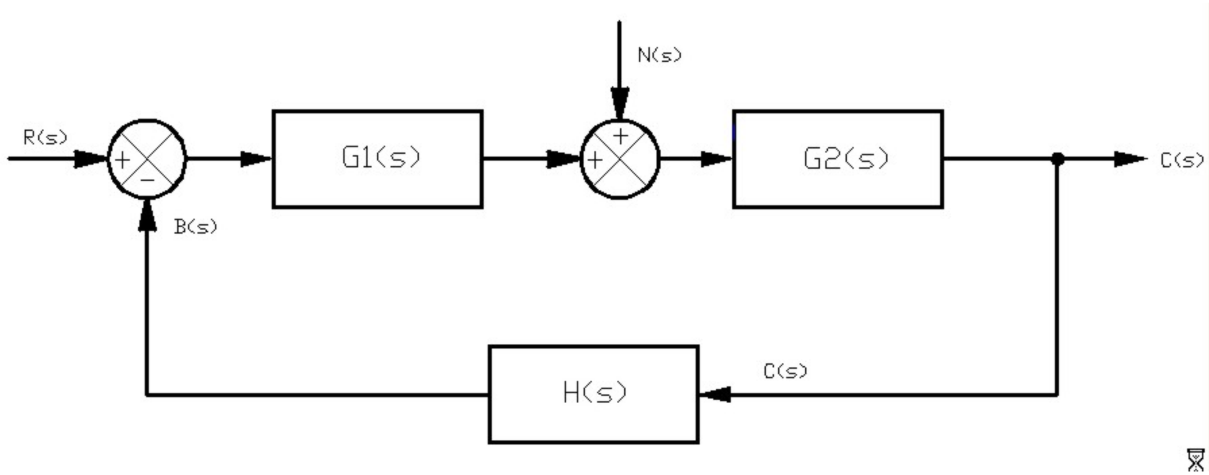
$$CR(s) + G2(s).G1(s).H(s).CR(s) = G2(s).G1(s).R(s)$$

$$CR(s)\ .\ [1 + G1(s).G2(s).H(s)] = G1(s).G2(s).R(s)$$

$$\longrightarrow \quad \frac{CR(s)}{R(s)} = \frac{G1(s).G2(s)}{1 + G1(s).G2(s).H(s)}$$

Función transferencia de lazo cerrado considerando la entrada R(s) y N(s) = 0

Efecto final de la Perturbación en el sistema



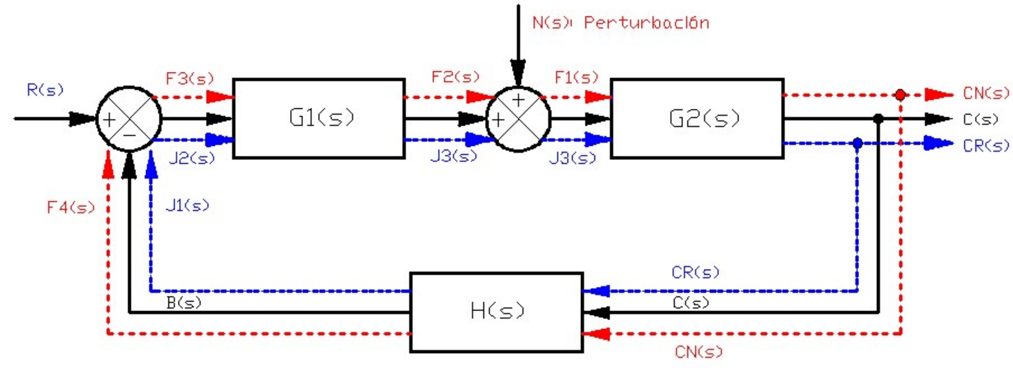
C(s) = CR(s) + CN(s)

$$C(s) = \frac{G1(s).G2(s)}{1 + G1(s).G2(s).H(s)} . R(s) + \frac{G2(s)}{1 + G1(s).G2(s).H(s)} . N(s)$$

$$C(s) = \frac{G1(s).G2(s).R(s) + G2(s).N(s)}{1 + G1(s).G2(s).H(s)} \longrightarrow C(s) = \frac{G2(s).[G1(s).R(s) + N(s)]}{1 + G1(s).G2(s).H(s)}$$

Respuesta del sistema de lazo cerrado sometido a la perturbación N(s)

Observaciones

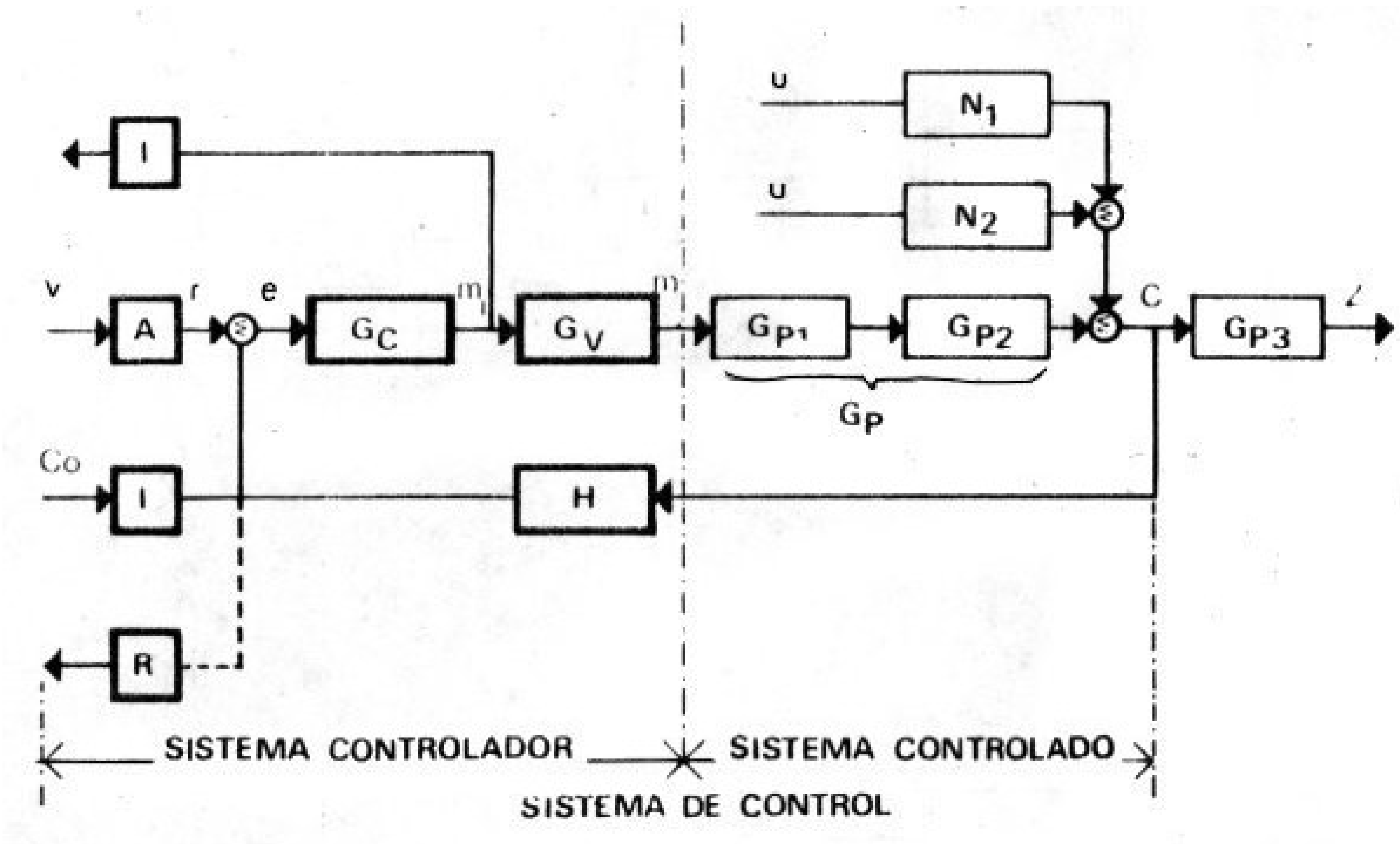


$$C(s) = \frac{G1(s).G2(s)}{1 + G1(s).G2(s).H(s)} . R(s) + \frac{G2(s)}{1 + G1(s).G2(s).H(s)} . N(s)$$

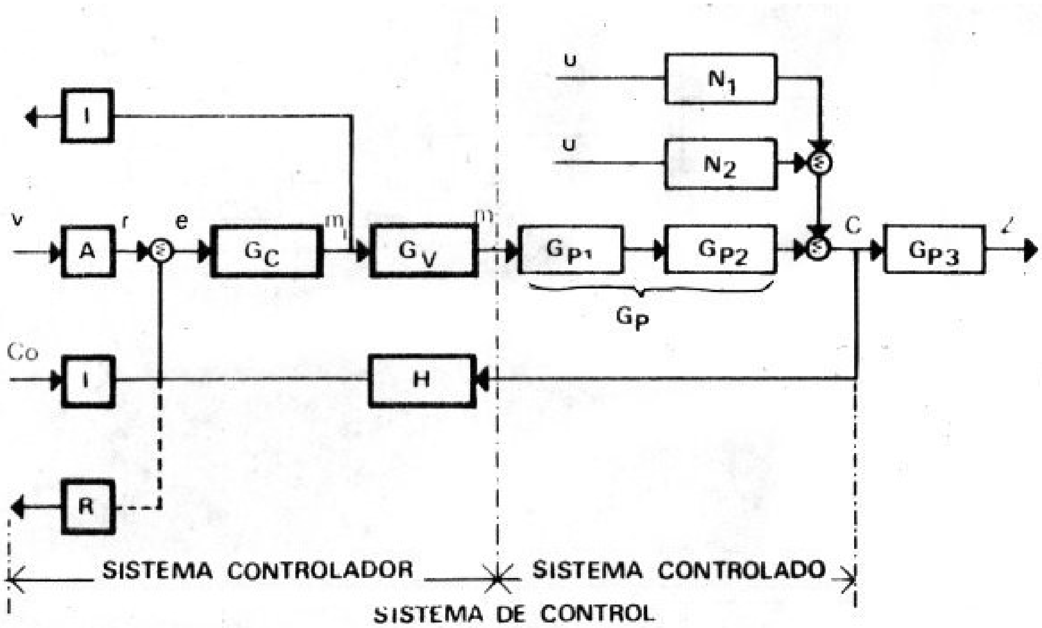
Si suponemos [G1(s).H(s)] >> 1 y [G1(s).G2(s).H(s)] >> 1, la función transferencia de lazo cerrado P/ R(s) = 0, tiende a cero y se elimina el efecto de la perturbación.

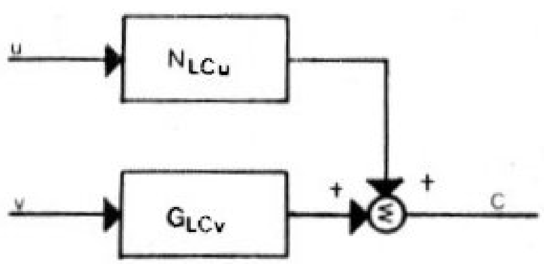
Si ahora suponemos que [G1(s).G2(s).H(s)] >> 1, la función transferencia de lazo cerrado P/ N(s) = 0, se hace independiente de G1(s).G2(s) y se vuelve proporcional a 1/H(s), sin provocar efecto las variaciones de G1(s) y G2(s) sobre el lazo.

Sistema de control con varios elementos de perturbación



Dependencia de la salida C con las variables de entrada u y v





$$r = vA$$

$$e = r - b = vA - cH$$

$$m_1 = e\,G_c = vAG_c - cHG_c$$

$$m = m_1 G_v = vAG_cG_v - cHG_cG_v$$

$$c = m\,G_{p1} + uN = vAG_cG_vG_{p1} - cHG_cG_vG_{p1} + uN$$

$$c\,(1 + HG_cG_vG_{p1}) = vAG_cG_vG_{p1} + uN$$

$$c = \left[\frac{AG_cG_vG_{p1}}{1 + HG_cG_vG_{p1}}\right]v + \left[\frac{N}{1 + HG_cG_vG_{p1}}\right]u$$

$$c = \left[G_{lcv}\right]v + \left[N_{lcu}\right]u$$

Conclusiones

$$C = \left[\frac{A \,.\, Gc \,.\, Gv \,.\, Gpl}{1 + H \,.\, Gc \,.\, Gv \,.\, Gpl}\right] .\, v + \left[\frac{N}{1 + H \,.\, Gc \,.\, Gv \,.\, Gpl}\right] .\, u \longrightarrow C = \left[Glcv \right] .\, v + \left[Nlcu \right] .\, u$$

- Numerador = Producto de los elementos en camino directo de las variables.
- Denominador = Retroalimentación (negativa o positiva) + producto de los elementos ubicados en el camino del lazo.
- Se debe encontrar valores convenientes de GLcv y NLcu, que respondan al valor deseado (SP) y que no permitan que las perturbaciones afecten a la variable controlada.

Procedimientos para trazar diagramas de bloques

Paso 1:

Definir el Modelo Dinámico total o parcial del sistema a analizar. Escribir las ED que describen su comportamiento.

Paso 2:

Aplicar la transformada de Laplace a las ED, suponiendo condiciones iniciales cero.

Paso 3:

Representar individualmente cada ecuación transformada en forma de bloques.

Paso 4:

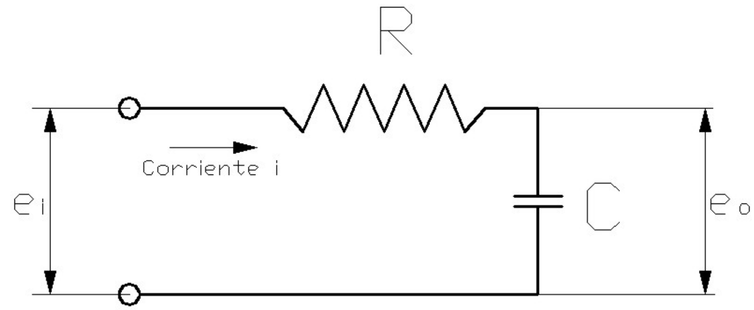
Agrupar los elementos individuales en un diagrama de bloques completo.

Ejemplo: Trazado de un diagrama de bloques para un circuito R-C

Paso 1: Las ecuaciones del circuito son:

$$e_i = i\ .\ R + e_o \longrightarrow \quad i = \frac{e_i - e_o}{R}$$

donde: $e_o = 1/C\ .\ \int i\ .\ dt$

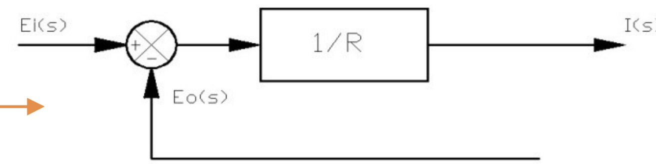


Paso 2: Aplicando transformada de Laplace:

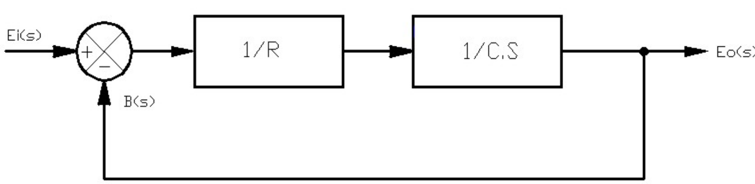
$$I\ (s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R}$$

$$E_o\ (s) = \frac{I(s)}{C.S}$$

Paso 3: Representación en bloques



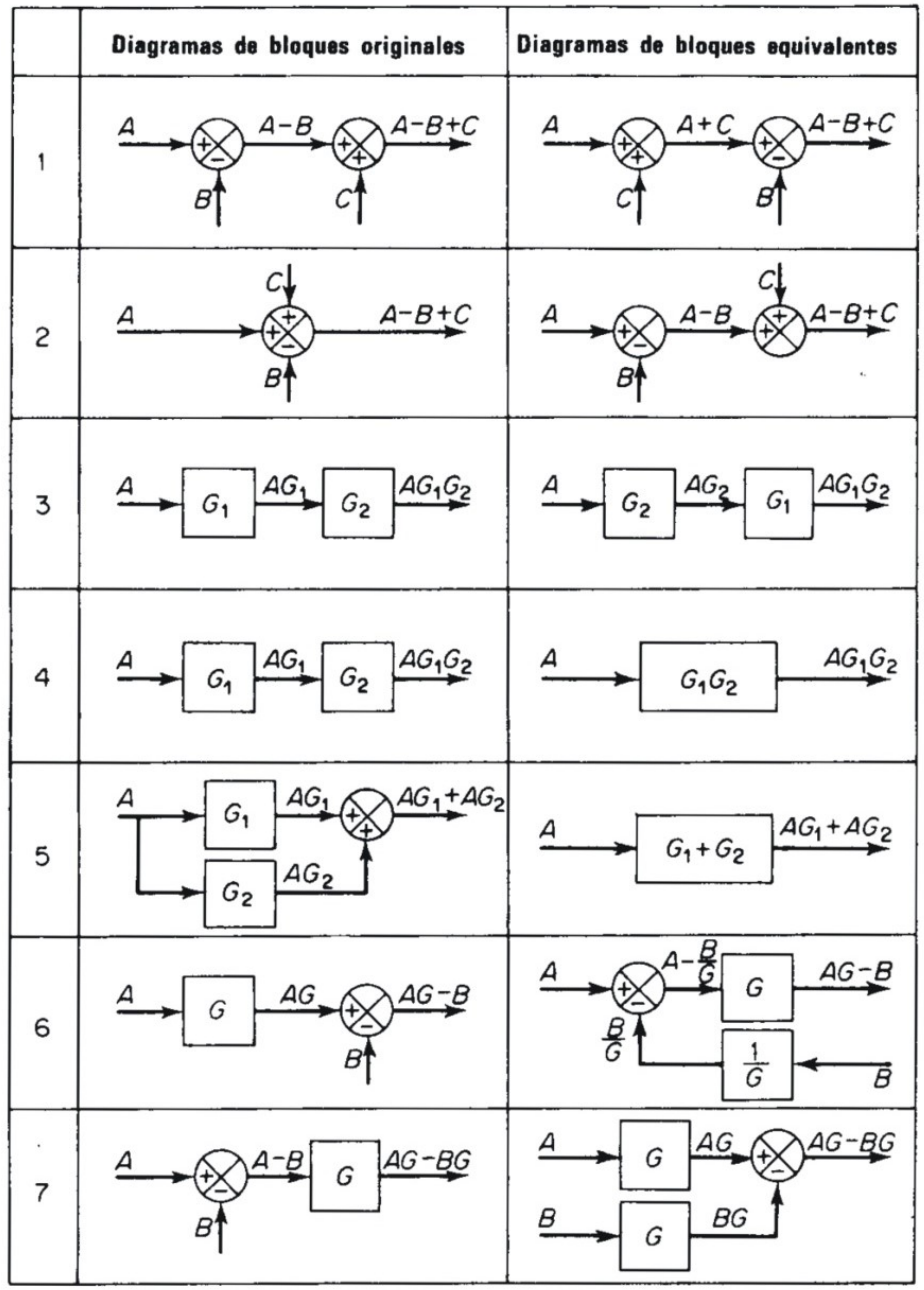
Paso 4: Agrupando los bloques parciales:



<u>Nota:</u> Al agrupar los bloques parciales, debe existir correspondencia entre las señales de los mismos.

Reducción de diagramas de bloques

La simplificación de un diagrama de bloques mediante reordenamiento y sustituciones, reduce de manera considerable la labor necesaria para el análisis matemático subsecuente.



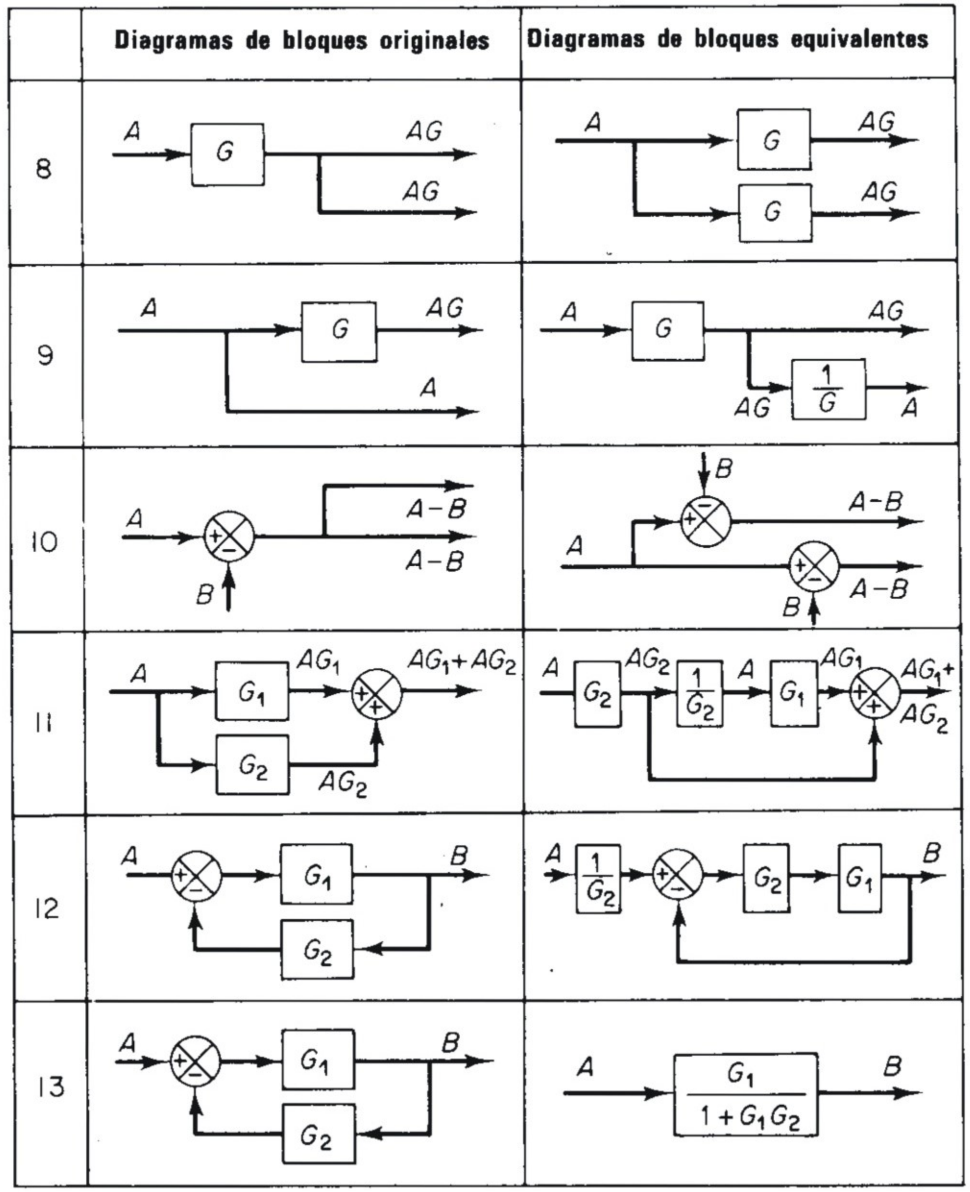
Reducción de diagramas de bloques

Es posible simplificar diagramas de bloques muy complejos por medio del álgebra de bloques, pero hay que tener en cuenta que:

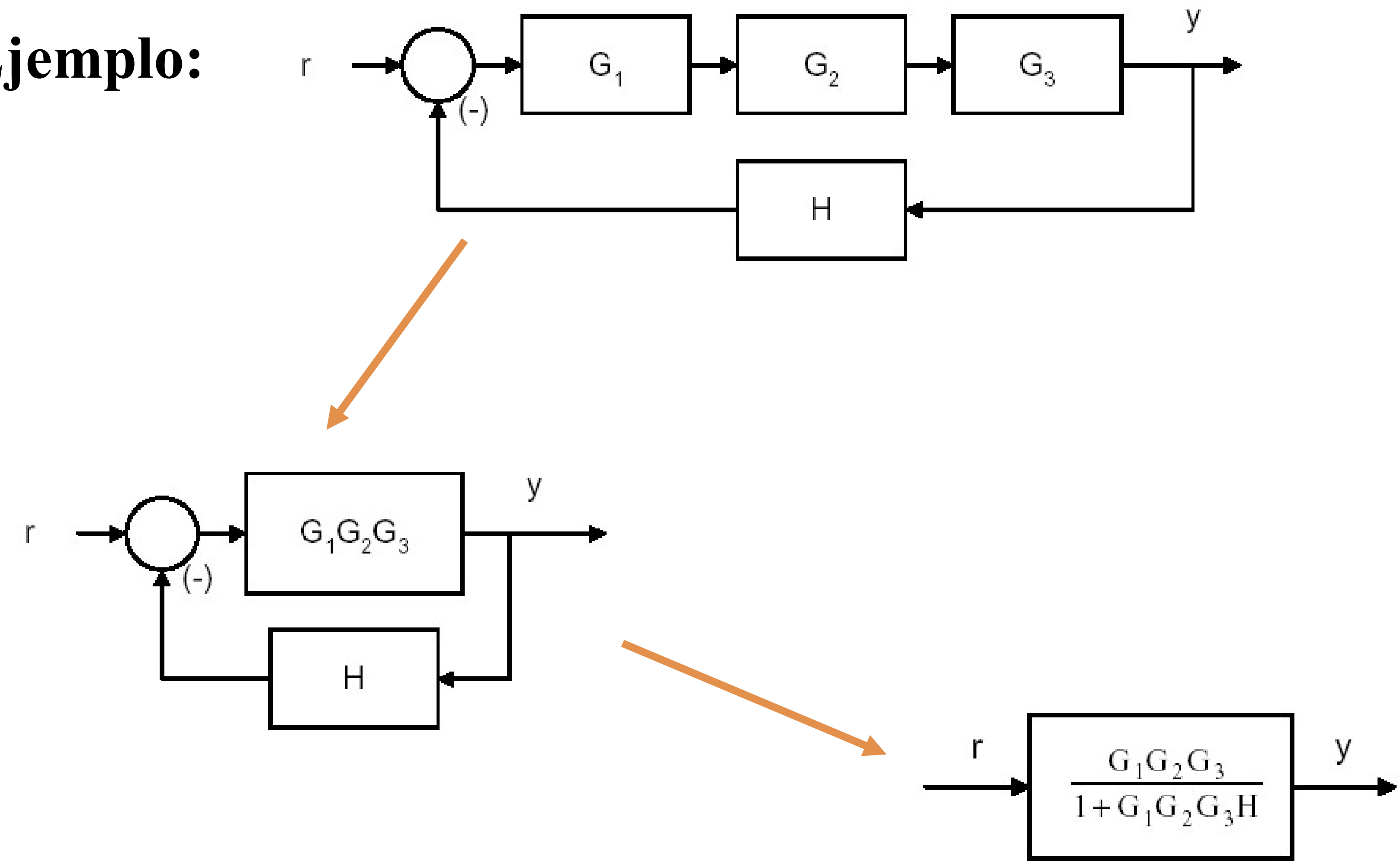
Diagramas complejos → **Bloques simples**

Diagramas simples → **Bloques complejos**

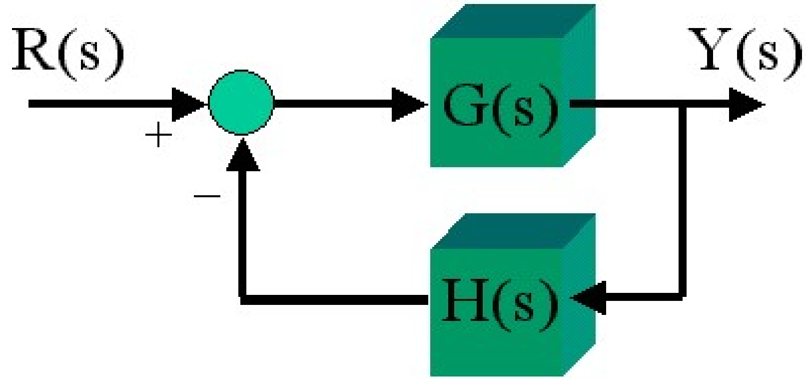
Se generan nuevos polos y ceros



Ejemplo:



Conclusión



Al simplificar un diagrama de bloques hay que tener en cuenta que:

1- Se pueden conectar bloques en serie, únicamente si la salida de un bloque no es afectado por el bloque inmediato siguiente.

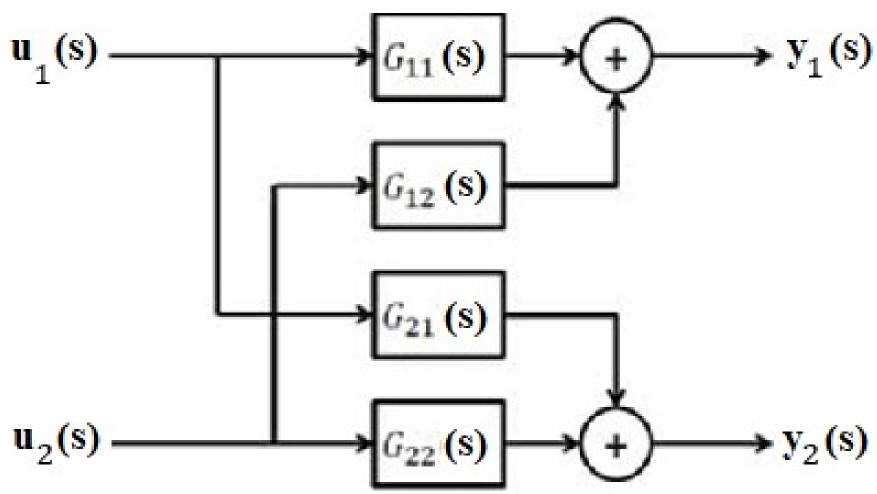
2- Si existiera cualquier efecto de carga entre los componentes, es necesario combinar esos componentes en un mismo bloque.

3- El producto de las funciones de transferencias en la dirección de la trayectoria directa debe ser el mismo.

4- El producto de las funciones de transferencia alrededor del lazo debe ser el mismo.

Sistemas de control multivariables

Son sistemas con varias entradas y salidas (sistemas MIMO), en los que una entrada afecta a varias salidas y recíprocamente una salida es afectada por varias entradas. Existe un efecto de interacción.



Interacción: efecto de un lazo de control sobre otro lazo de control, rebotando el efecto sobre el lazo original.

$$\mathbf{G}_{(s)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} & \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \end{array}$$

Resolución de sistemas MIMO

Los sistemas MIMO se resuelven aplicando las siguientes técnicas:

- Por emparejamiento ("Pairing").
- Por desacoplamiento ("Decoupling").
- Por realimentación de estados ("System feedback Status").
- Por control borroso ("Fuzzy Control").

Consultar:

- file:///C:/Users/Lucita/Downloads/Tecnicas_de_control_adaptativas_aplicadas_a_sistem%20(1).pdf
- http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/tesisuned:IngInf-Jgarrido/Documento.pdf

GRACIAS POR SU ATENCIÓN