

UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMAN

S I M U L A C I O N

A N A L O G I C A

María de las Mercedes Torres de Zamora

Cátedra de Servomecanismos



**Facultad de Ciencias
Exactas y Tecnología**

S I M U L A C I O N

A N A L O G I C A

María de las Mercedes Torres de Zamora

Cátedra de Servomecanismos

Instituto de Ingeniería Eléctrica

Junio de 1982

Serie: Educación y Aprendizaje
N° EA 1 - 47/82

Este apunte ha surgido de la experiencia docente realizada en la cátedra "Servomecanismos" sobre el tema simulación analógica.

En él se describen técnicas simples de simulación analógica de modelos matemáticos que representan a sistemas reales.

Los simuladores analógicos son muy útiles para lograr una mejor comprensión del significado físico de los modelos matemáticos realizados con ecuaciones diferenciales.

En ellos se observan directamente los valores que toman las distintas variables en función del tiempo.

1.- Representación de sistemas reales.

1.1.- Ecuación diferencial de orden n .

1.2.- Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

1.3.- Función de transferencia.

1.4.- Diagramas de bloques.

1.5.- Ejemplos.

1.6.- Ejemplos de aplicación.

2.- Simulación de un sistema real mediante circuitos. Descripción de las partes de un simulador analógico.

2.1.- Multiplicadores.

2.2.- Inversores.

2.3.- Sumadores.

2.4.- Integradores.

2.5.- Integrador-Sumador.

2.6.- Ejemplos

3.- Factores de escala.

3.1.- Factores de escala de amplitud.

3.2.- Ejemplo.

3.3.- Factores de escala de tiempo. Ejemplo.

Introducción

La Simulación consiste en resolver mediante circuitos, una ecuación diferencial que representa a un sistema real.

El Simulador analógico es un equipo que permite comprobar el comportamiento dinámico del sistema.

Normalmente en un simulador analógico se parte de un sistema cuyo comportamiento se desconoce y se lo utiliza precisamente para descubrirlo. O bien, se parte de un sistema con características conocidas y se usa el simulador para verificarlas.

Simulación

Existen tres tipos de computadoras para simular sistemas físicos:

- Analógicas: para sistemas continuos.
- Digitales: para funcionamiento discreto
- Híbridas : combinación de ambos.

Simulación Analógica

- Involucra la representación de un sistema mediante un modelo matemático: sistema de ecuaciones diferenciales.

- Se basa en:

"a igualdad de modelos matemáticos \implies igualdad de comportamiento"

- Permite investigar la respuesta dinámica del sistema observando directamente la respuesta en forma continua y actuando sobre el mismo.

Ventajas

- Un sistema dado puede ser probado en forma no destructiva.
- Sistemas propuestos o existentes pueden ser modificados para mejorar su comportamiento. Por ejemplo, sistema en una planta cuyo proceso no puede detenerse.
- Verificación del comportamiento de sistemas.

En resumen, la computadora analógica es una de las herramientas más útiles disponibles en ingeniería para el análisis y diseño de sistemas.

1.- REPRESENTACION DE SISTEMAS REALES

Los sistemas reales pueden representarse por medio de modelos matemáticos. Los siguientes tipos de modelos son los más importantes:

- Una ecuación diferencial de orden n .
- Un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden, (variables de estado).
- Función de transferencia.
- Diagramas de bloques.

Sea un sistema de orden n tal que $y(t)$ sea la salida del sistema y $u(t)$ la entrada, se lo puede representar mediante:

1.1.- Una ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)}(t) + a_n y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y(t) = c_{m+1} u^{(m)}(t) + c_m u^{(m-1)}(t) + \dots + c_1 u(t) \quad (1.1)$$

donde: $y^{(n)}(t) = d^n y(t)/dt^n$

1.2.- Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) \quad (1.3)$$

1.3.- Función de transferencia

Función de transferencia es el cociente entre las transformadas de Laplace de la salida y de la entrada.

Se puede obtener la función de transferencia mediante la transformada de Laplace de la ecuación diferencial(1.1), y suponiendo condiciones iniciales iguales a cero:

$$\begin{aligned} (s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_1) y(s) &= \\ (c_{m+1} s^m + c_m s^{m-1} + \dots + c_1) u(s) & \end{aligned}$$

Por lo tanto la función de transferencia es:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{c_{m+1} s^m + c_m s^{m-1} + \dots + c_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1} \quad (1.4)$$

1.4.- Diagramas de bloques

De las ecuaciones (1.1) a (1.4) se puede obtener el diagrama de bloques del sistema.

Usando una variable auxiliar x tal que:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{y(s)}{x(s)} \cdot \frac{x(s)}{u(s)} \quad (1.5)$$

definiendo como:

$$\frac{x(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1} \quad (1.6)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = c_{m+1} s^m + c_m s^{m-1} + \dots + c_1 \quad (1.7)$$

De las ecuaciones (1.6) y (1.7) se deduce fácilmente el siguiente diagrama de bloques:

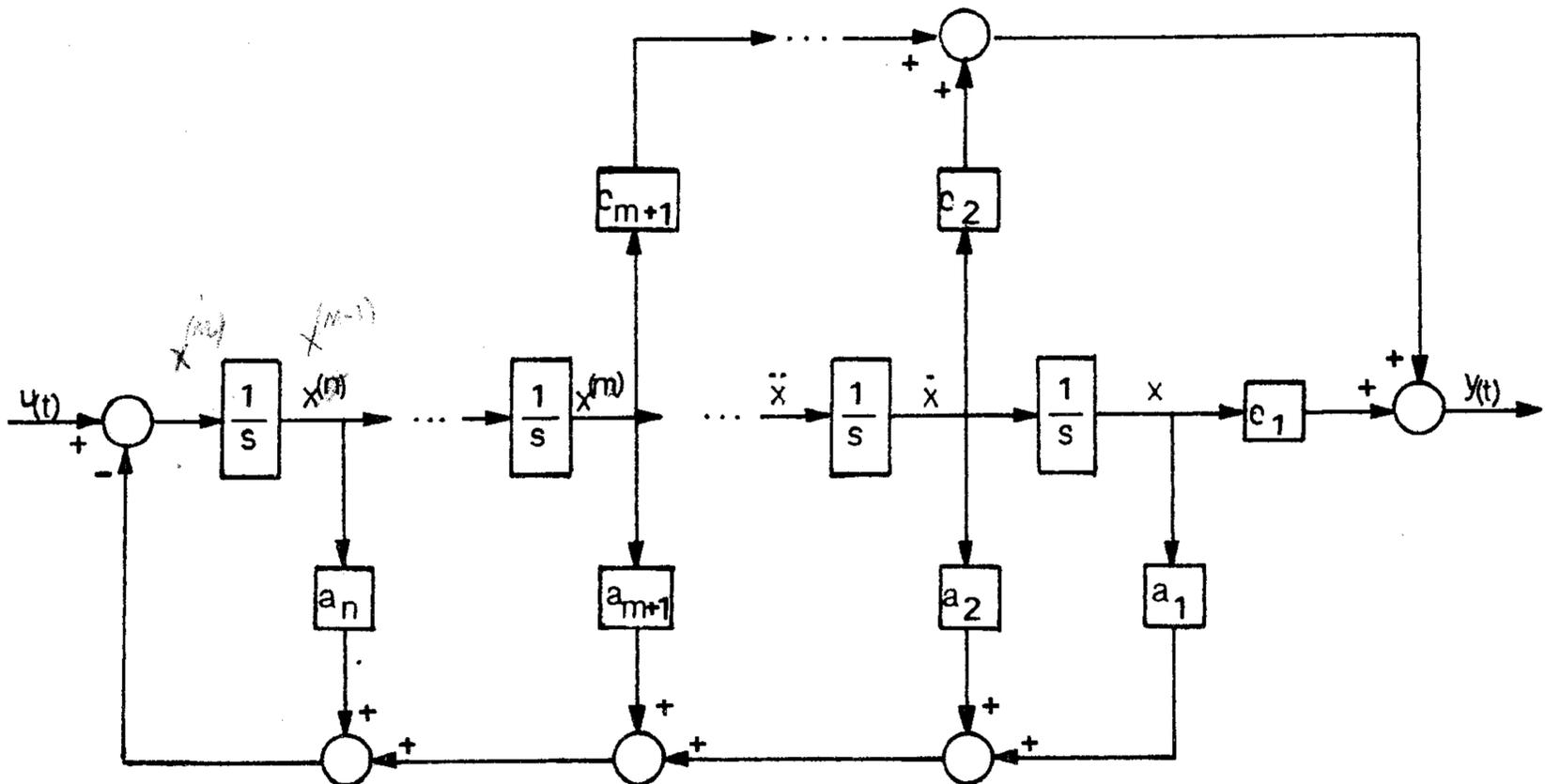


Fig. 1.1

La fig. 1.1 muestra la representación en diagrama de bloques de la ecuación diferencial de orden n .

Puede observarse la necesidad de usar únicamente sumadores, inversores, integradores y multiplicadores.

1.5.- Ejemplos

Sistemas que pueden representarse mediante ecuaciones diferenciales y sus respectivos diagramas de bloques.

1.5.1.- Sistemas de primer orden

i) Sistema de primer orden sin cero:

La ecuación diferencial que representa a un sistema de primer orden sin cero es la siguiente:

$$\dot{y}(t) T + y(t) = u(t) \tag{1.8}$$

de donde resulta:

$$\dot{y}(t) = \frac{u(t) - y(t)}{T} \tag{1.9}$$

La función de transferencia del sistema sería:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s T + 1} \tag{1.10}$$

De las ecuaciones (1.9) y (1.10) se puede deducir el diagrama de bloques correspondiente, como se muestra en la fig. 1.2.-

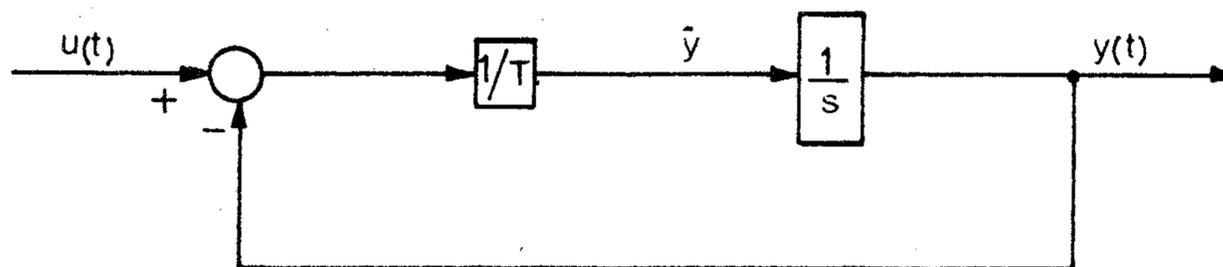


Fig. 1.2

ii) Sistema de primer orden con un cero:

La función de transferencia de un sistema de primer orden con un cero es la siguiente:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s + a}{s + b} \quad (1.11)$$

Usando la variable x tal que:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{x(s)}{u(s)} \cdot \frac{y(s)}{x(s)} \quad (1.12)$$

donde:

$$\frac{x(s)}{u(s)} = \frac{1}{s + b} \quad (1.13a)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = s + a \quad (1.13b)$$

De estas funciones de transferencias se puede obtener las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}(t) + b x(t) = u(t)$$

de donde:

$$\dot{x}(t) = u(t) - b x(t) \quad (1.14a)$$

$$y(t) = \dot{x}(t) + a x(t) \quad (1.14b)$$

Partiendo de las ecuaciones diferenciales(1.14) puede obtenerse el diagrama de bloques siguiente:

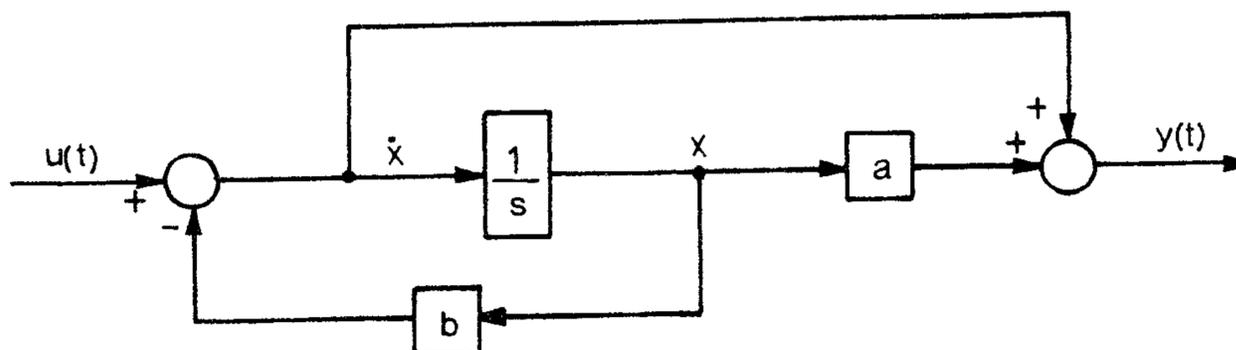


Fig. 1.3

1.5.2.- Sistemas de segundo orden

i) Sistemas de segundo orden sin ceros:

La ecuación diferencial que representa un sistema de segundo orden sin ceros es:

$$\ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_1 y(t) = u(t) \quad (1.15)$$

La función de transferencia es:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2 + a_2 s + a_1} \quad (1.16)$$

Despejando la derivada de mayor orden de $y(t)$ de la ecuación (1.15) resulta:

$$\ddot{y}(t) = u(t) - a_2 \dot{y}(t) - a_1 y(t)$$

De donde se obtiene la representación mediante el diagrama de bloques que se muestra en la fig. 1.4.-

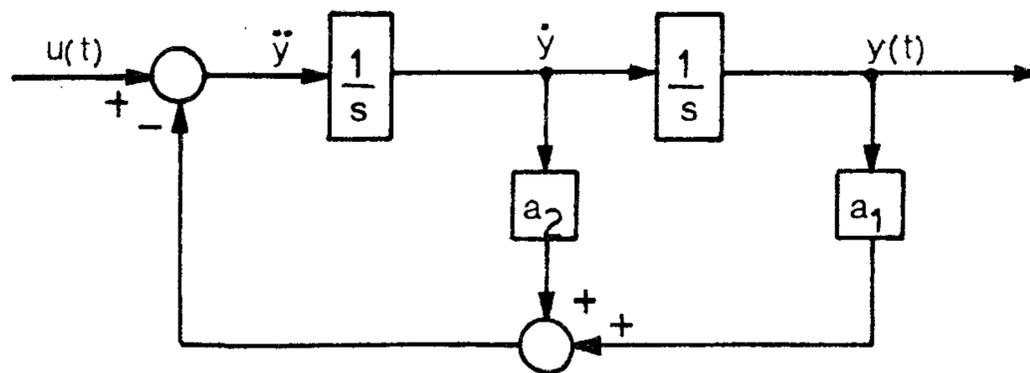


Fig. 1.4

ii) Sistema de segundo orden con un cero:

La función de transferencia es:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s + d}{s^2 + a_2 s + a_1} \quad (1.17)$$

Haciendo:

$$\frac{x(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2 + a_2 s + a_1} \quad (1.18)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = s + d \quad (1.19)$$

De las ecuaciones (1.18) y (1.19) se pueden escribir las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$\ddot{x}(t) = u(t) - a_2 \dot{x}(t) - a_1 x(t) \quad (1.20a)$$

$$y(t) = \dot{x}(t) + d x(t) \quad (1.20b)$$

A partir de las ecuaciones (1.20) se puede dibujar el diagrama de bloques correspondiente.

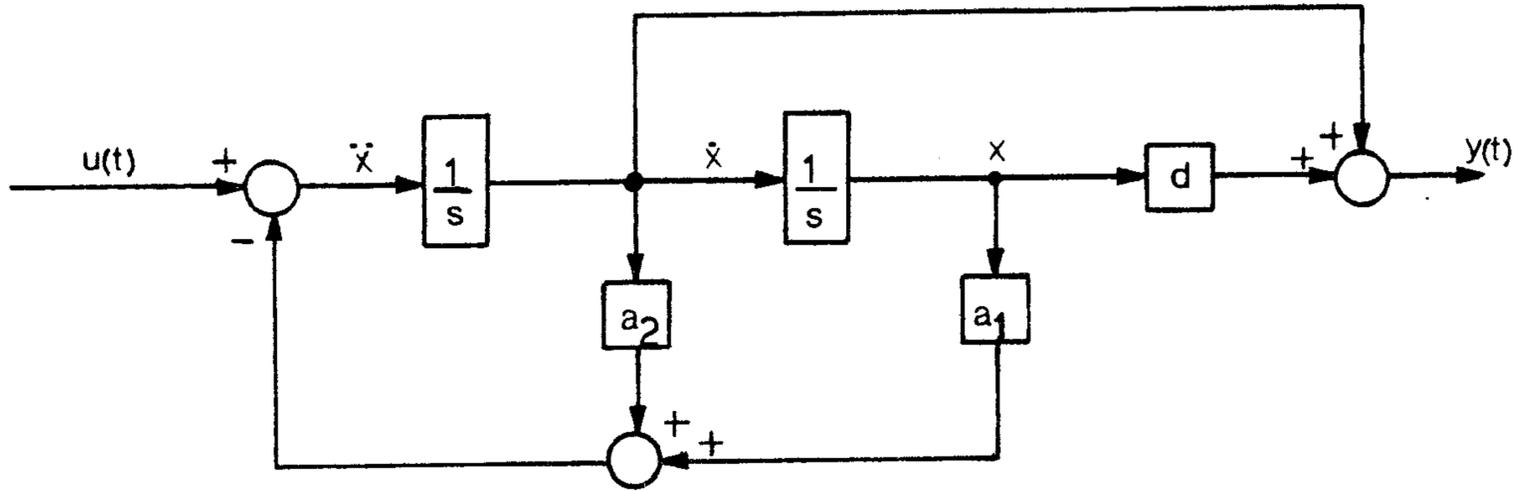


Fig. 1.5

1.5.3.- sistema de orden superior

i) Sistema de orden superior sin ceros: (Ejemplo: sistema de quinto orden)

Dada la función de transferencia:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^5 + a_5 s^4 + a_4 s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1} \quad (1.21)$$

La ecuación diferencial correspondiente es:

$$y^{(5)}(t) + a_5 y^{(4)}(t) + a_4 \ddot{y}(t) + a_3 \ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_1 y(t) = u(t) \quad (1.22)$$

Despejando la derivada de mayor orden de $y(t)$:

$$y^{(5)}(t) = u(t) - a_1 y(t) - a_2 \dot{y}(t) - a_3 \ddot{y}(t) - a_4 \dddot{y}(t) - a_5 y^{(4)}(t) \quad (1.23)$$

El diagrama de bloques que representa esta ecuación diferencial se muestra en la fig. 1.6.-

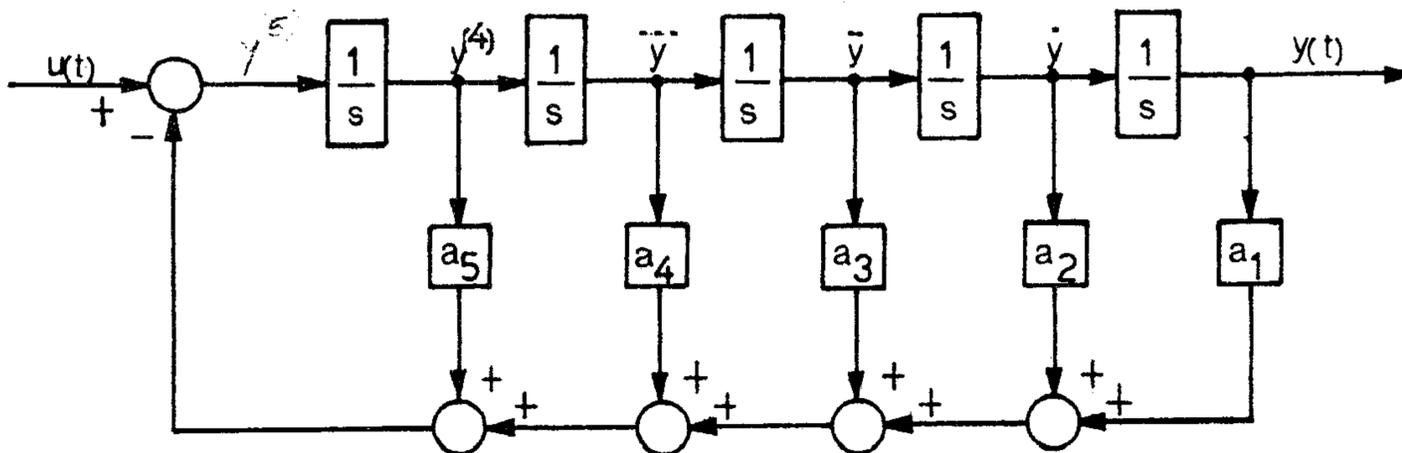


Fig. 1.6

ii) Sistema de orden superior con ceros: (Ejemplo: sistema de cuarto orden con dos ceros)

La función de transferencia es:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{c_3 s^2 + c_2 s + c_1}{s^4 + a_4 s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1} \quad (1.24)$$

Usando la variable auxiliar x tal que:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{x(s)}{u(s)} \cdot \frac{y(s)}{x(s)}$$

$$\frac{x(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^4 + a_4 s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1} \quad (1.25)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = c_3 s^2 + c_2 s + c_1 \quad (1.26)$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$x^{(4)}(t) = u(t) - a_1 x(t) - a_2 \dot{x}(t) - a_3 \ddot{x}(t) - a_4 \ddot{\ddot{x}}(t) \quad (1.27)$$

$$y(t) = c_3 \ddot{\ddot{x}}(t) + c_2 \ddot{x}(t) + c_1 x(t)$$

De las ecuaciones (1.27) se dibuja el diagrama de bloques:

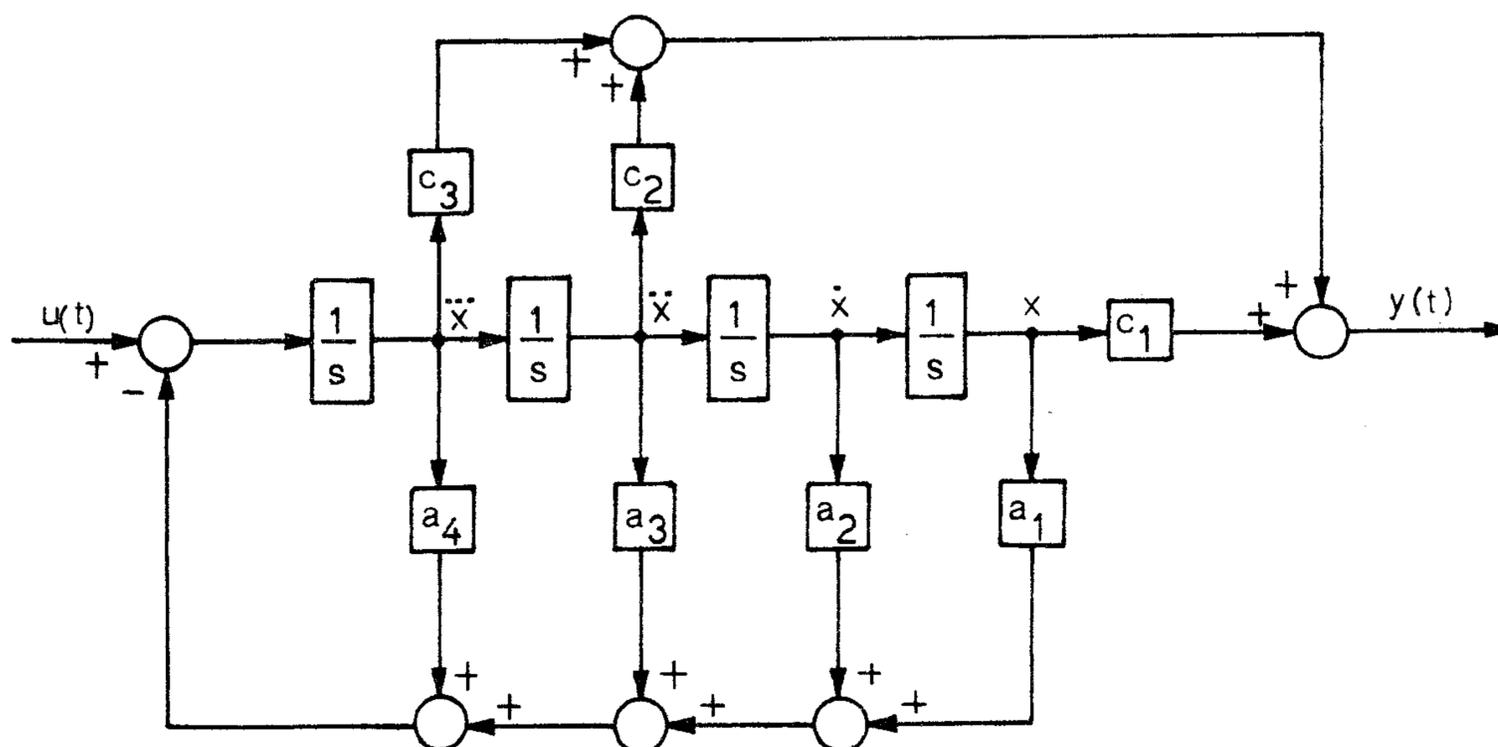


Fig. 1.7

Observaciones

Los diagramas de bloques mostrados en las fig. (1.2) a (1.7) indican que cualquier sistema lineal que pueda ser escrito mediante:

- Una ecuación diferencial de orden n ,
- Un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden,
- Una función de transferencia,

puede representarse en diagramas de bloques usando:

- Sumadores
- Inversores
- Multiplicadores por una constante
- Integradores.

1.6.- Ejemplos de aplicación

Sistemas lineales de segundo orden:

Sistema mecánico de segundo orden:

Supóngase el sistema mostrado en la figura 1.8

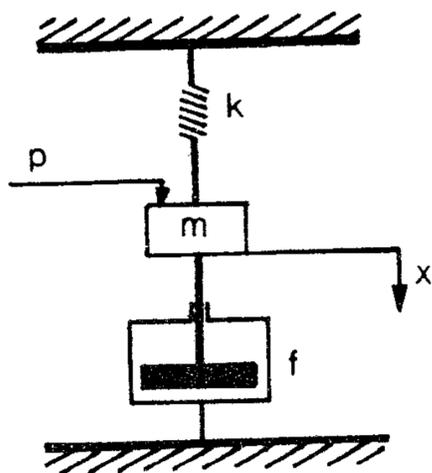


Fig. 1.8

La ecuación diferencial para este sistema es:

$$m \ddot{x}(t) + f \dot{x}(t) + k x(t) = p(t) \quad (1.28)$$

Sistema eléctrico de segundo orden:

Supóngase el sistema eléctrico de segundo orden mostrado en la fig 1.9.

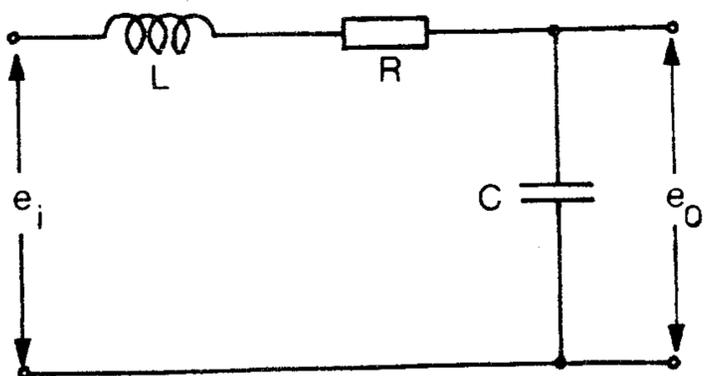


Fig. 1.9

La ecuación diferencial en función de la carga eléctrica es:

$$L \ddot{q}(t) + R \dot{q}(t) + \frac{1}{C} q(t) = e_i(t) \quad (1.29)$$

Puede observarse que ambos sistemas tienen la misma ecuación diferencial, es decir tienen el mismo modelo matemático, que puede escribirse en forma normalizada como:

$$\ddot{y}(t) + 2 z \omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t) \quad (1.30)$$

Los diagramas de bloques para ambos sistemas se muestran en la fig. 1.10.-

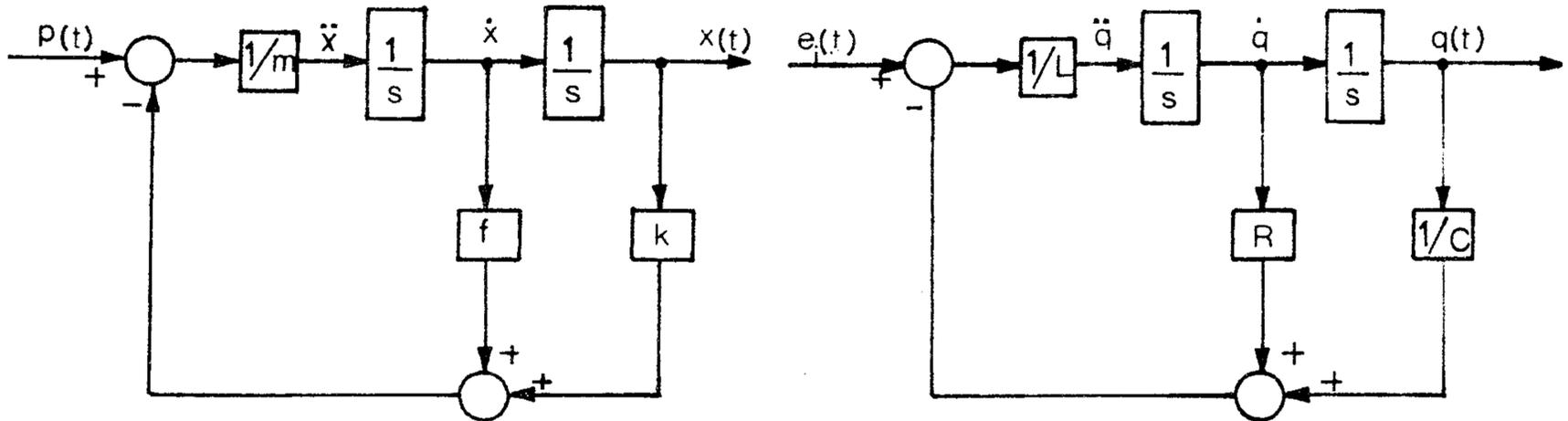


Fig. 1.10

Motor de corriente continua controlado por campo:

Como ejemplo se verá el motor de corriente continua controlado por campo mostrado en la figura 1.11.

La corriente de armadura se supone constante.

La entrada es la tensión $e(t)$ y la salida la posición $\theta_o(t)$,

i_f = corriente de campo,

I_a = corriente de armadura,

$T(t)$ = torque,

R_f = resistencia de campo,

R_a = resistencia de armadura,

L_f = inductancia de campo,

β = coeficiente de fricción equivalente del motor y carga,

J = momento de inercia del motor y carga.

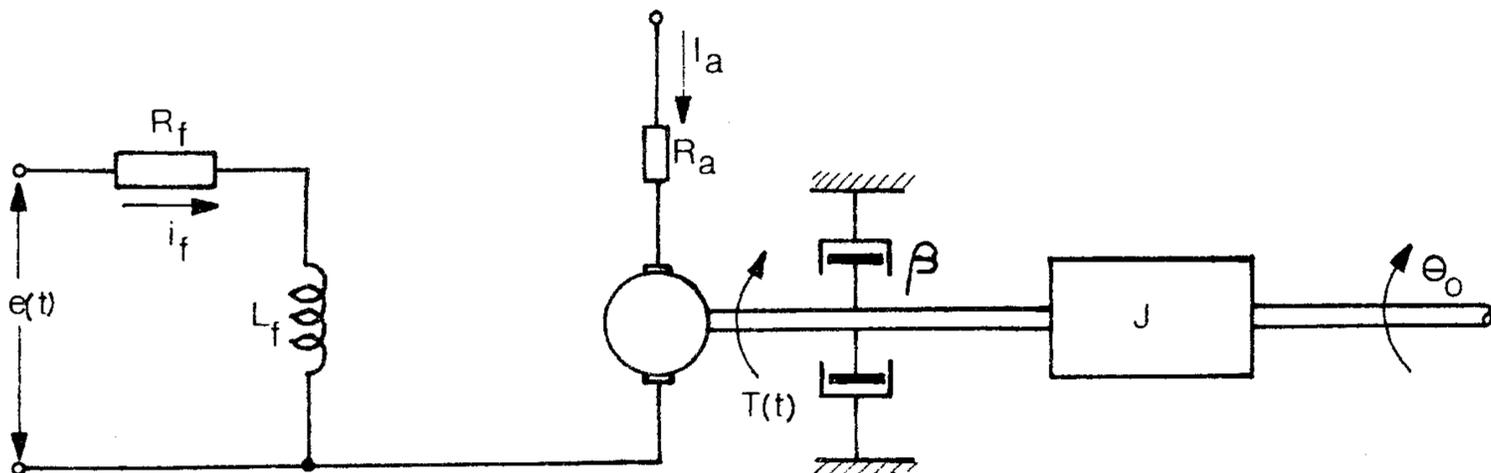


Fig. 1.11

Las ecuaciones correspondientes al sistema son:

$$L_f \dot{i}_f(t) + R_f i_f(t) = e(t)$$

$$J \ddot{\theta}_o(t) + \beta \dot{\theta}_o(t) = T(t) \quad (1.31)$$

$$T(t) = K_T i_f(t)$$

Siendo K_T una constante electromecánica.

Aplicando transformada de Laplace y operando resulta:

$$\frac{\theta_o(s)}{e(s)} = \frac{K_T}{J L_f s^3 + (L_f \beta + R_f J) s^2 + \beta R_f s} \quad (1.32)$$

La ecuación diferencial puede escribirse como:

$$J L_f \ddot{\theta}_o(t) + (L_f \beta + R_f J) \dot{\theta}_o(t) + \beta R_f \theta_o(t) = K_T e(t) \quad (1.33)$$

El diagrama de bloques del motor de corriente continua controlado por campo se muestra en la fig. 1.12.

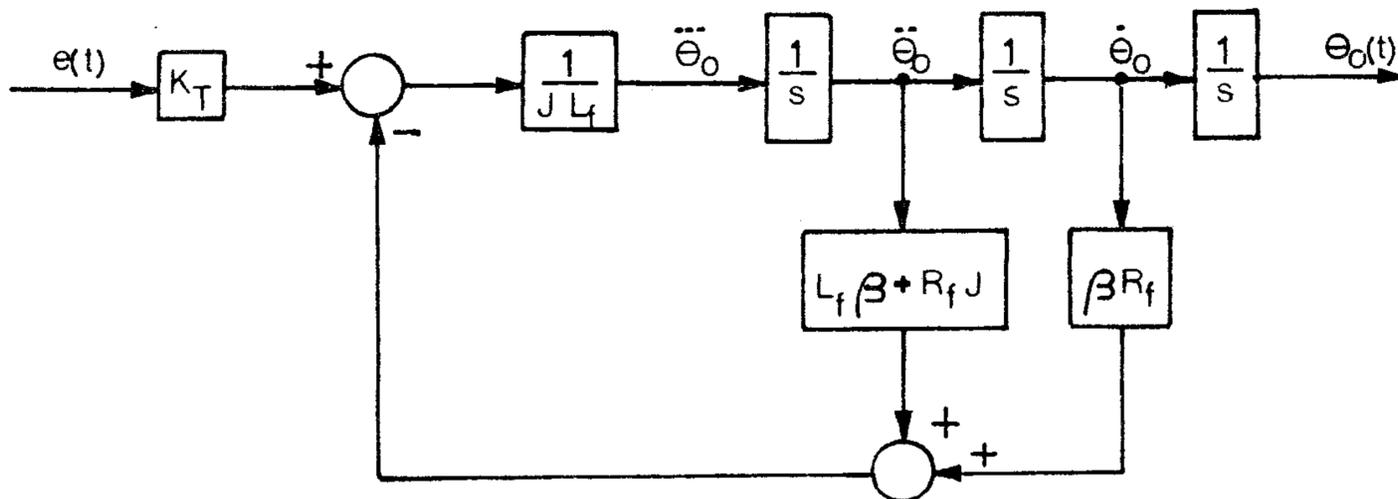


Fig. 1.12

2.- Simulación de un sistema real mediante circuitos

Si un sistema real puede representarse mediante diagramas de bloques elementales, o sea diagramas de bloques compuestos por:

- Sumadores
- Inversores
- Multiplicadores (de una variable por una constante)
- Integradores,

puede estudiarse su comportamiento en un simulador analógico analizando la solución del sistema.

Debe notarse que no se obtiene la ecuación de la variable de salida del sistema sino valores que la caracterizan, ya que se verá la gráfica de la misma.

Por ejemplo, en el simulador analógico puede obtenerse la solución de la ecuación diferencial que representa al sistema LCR (figura 1.9). Puede conocerse el amortiguamiento, el tiempo en el cual el condensador se carga casi al valor de fuente, se conocerán por lo tanto las características más importantes del circuito y el comportamiento de la carga en el condensador.

Descripción de las partes de un simulador analógico

Un simulador analógico está formado por:

- Multiplicadores
- Inversores
- Sumadores
- Integradores
- Combinaciones de los anteriores

2.1.- Multiplicadores

Como multiplicadores de una variable por una constante se usan:

- Divisores resistivos
- Potenciómetros

2.1.1.- Divisor resistivo

Sea el circuito mostrado en la fig. 2.1. La tensión de salida x_0 se puede escribir como:

$$x_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} x_i \quad (2.1)$$

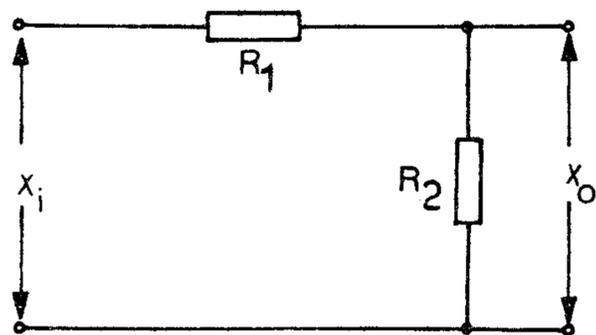


Fig. 2.1

La ecuación 2.1 se puede escribir como:

$$x_o = \alpha x_i \quad (2.2)$$

Donde:

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.3)$$

O sea que si x_i representa una variable de un sistema, la podemos multiplicar por un factor constante α mediante el divisor resistivo, donde $0 \leq \alpha \leq 1$.

Por ejemplo, si x_i representa la posición del eje de un motor, y mediante una reducción obtenemos la posición de salida x_o , entonces α será la relación de engranajes.-

2.1.2.- Potenciómetros:

La ventaja del potenciómetro frente al divisor resistivo es poder variar en forma continua el factor de multiplicación de la variable.

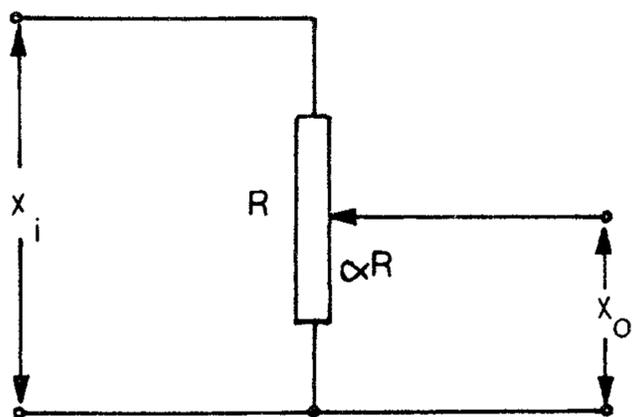


Fig. 2.2

La tensión de salida es:

$$x_o = \frac{\alpha R}{R} x_i \quad (2.4)$$

$$x_o = \alpha x_i \quad (2.5)$$

Donde:

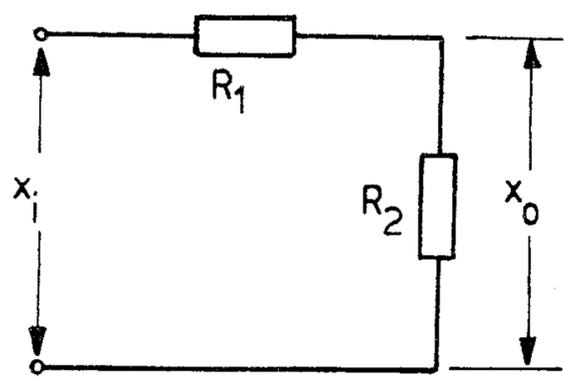
$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Por ejemplo si se quiere analizar el efecto que produce el cambio del valor de una constante de un sistema en la salida del mismo, se puede simular esa constante mediante un potenciómetro.

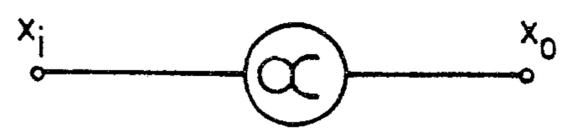
Los símbolos usados en simulación analógica para los divisores resistivos y potenciómetros son los mostrados en las figuras 2.3 y 2.4.-

Divisor Resistivo

Circuito



Símbolo



Ecuación

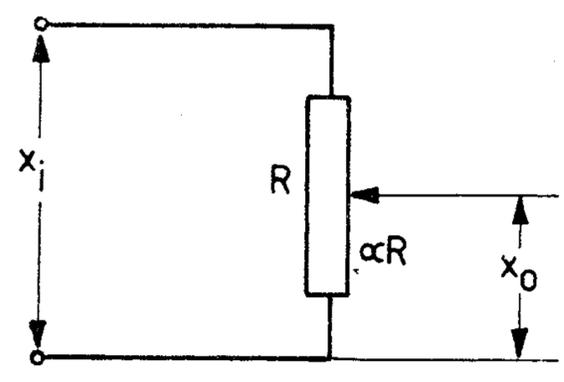
$$x_0 = \alpha x_i$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

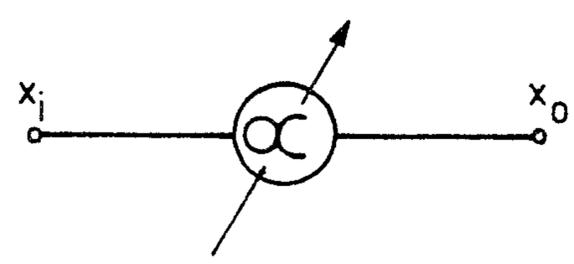
Fig. 2.3

Potenciómetro

Circuito



Símbolo



Ecuación

$$x_0 = \alpha x_i$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Fig. 2.4

2.

2.2.- Inversores

Como inversor, o sea para cambiar el signo de una variable, se usa un amplificador operacional como se muestra en la fig. 2.5.

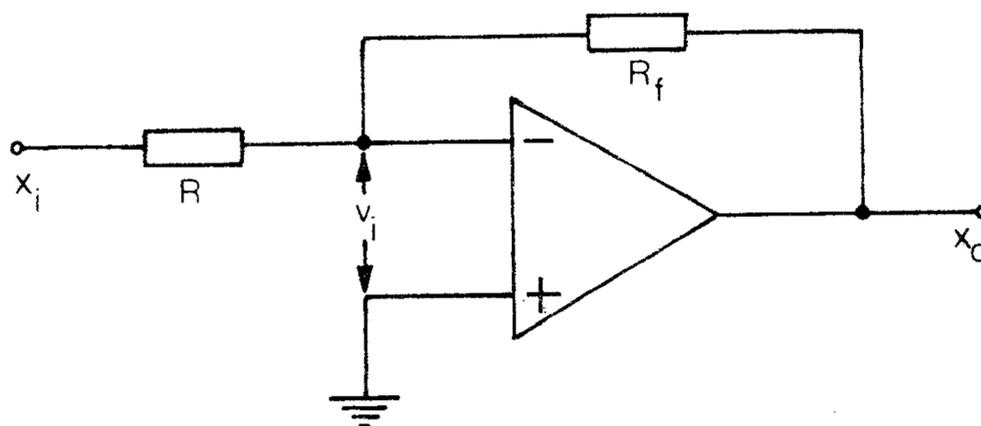


Fig. 2.5

Esta configuración, llamada inversora, entrega una tensión proporcional a la tensión de entrada pero cambiada de signo.

Función de transferencia de un amplificador operacional

Suponiendo un amplificador operacional ideal, cuyas características son:

- Impedancia de entrada: infinita - $z_i = \infty$
- Impedancia de salida : cero - $z_o = 0$
- Ganancia : infinita - $A = \infty$

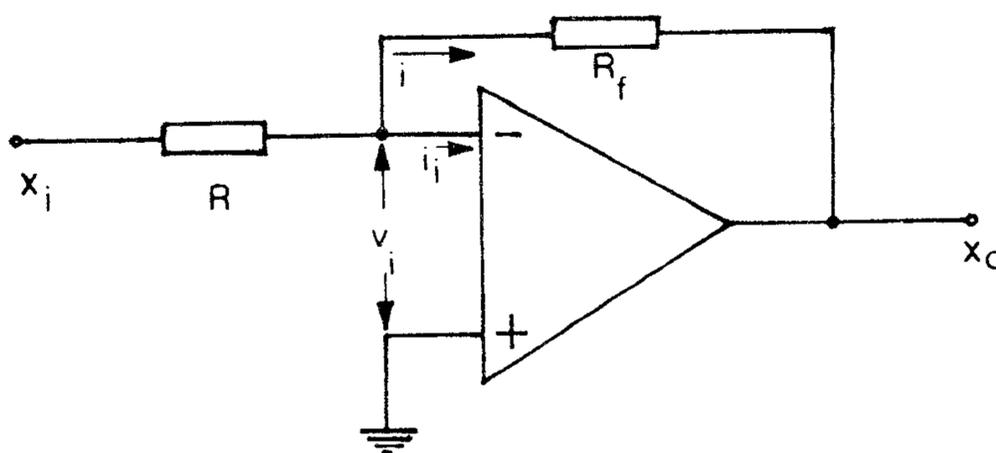


Fig. 2.6

De la fig. 2.6 y considerando un amplificador operacional ideal, se puede escribir:

$$i_i = 0 \quad , \quad v_i = 0$$

$$x_i = i R \tag{2.6}$$

$$x_o = - i R_f \tag{2.7}$$

De las ecuaciones 2.6 y 2.7 se obtiene la función de transferencia del circuito de la fig. 2.6.-

2.2.1.- Inversor:

Si $R_f = R$ se obtiene:

$$x_o = - x_i \quad (2.8)$$

De donde resulta la función de transferencia:

$$\frac{x_o}{x_i} = - 1 \quad (2.9)$$

2.2.2.- Multiplicador-Inversor

Si $R_f \neq R$ tal que:

$$\frac{R_f}{R} = A \quad (2.10)$$

O sea que:

$$x_o = - A x_i \quad (2.11)$$

De donde resulta la función de transferencia:

$$\frac{x_o}{x_i} = - A \quad (2.12)$$

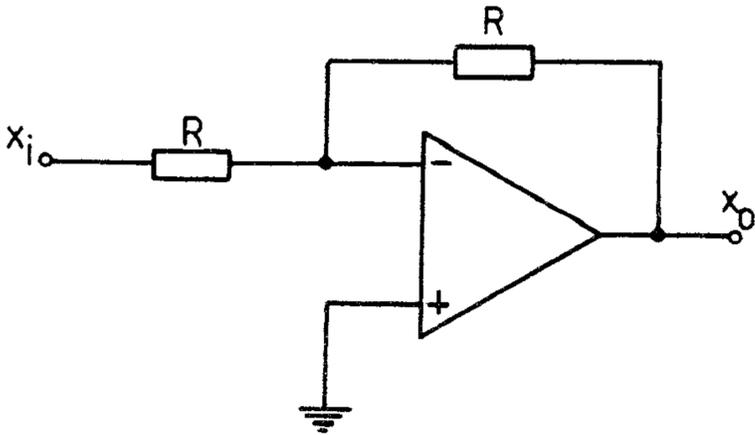
En este caso se usa el amplificador no solo para invertir el signo de una variable sino también para multiplicarla por una constante.

La constante dada por un amplificador operacional, a diferencia de un divisor resistivo, puede tomar tanto valores menores que la unidad como valores mayores que la unidad. Por ejemplo, si $R_f = 100K\Omega$ y $R = 1K\Omega$ entonces $A = 100$.-

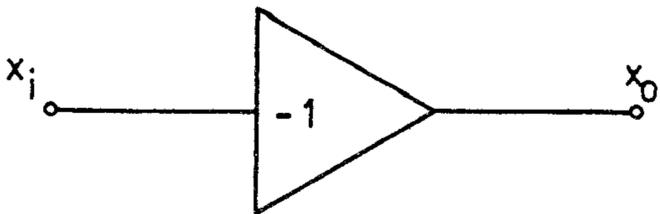
Los símbolos usados en simulación analógica se muestran en las figuras 2.7 y 2.8.-

Inversor

Circuito



Símbolo



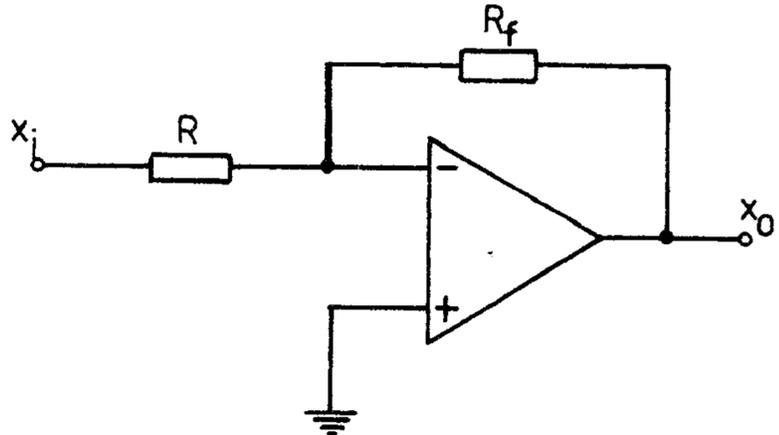
Ecuación

$$x_o = - x_i$$

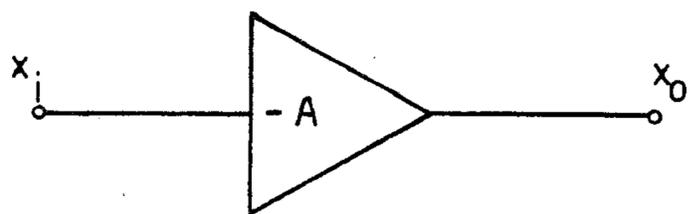
Fig. 2.7

Multiplicador-Inversor

Circuito



Símbolo



Ecuación

$$x_o = - A x_i$$

$$A = R_f / R$$

Fig. 2.8

2.3.- Sumador

Como sumador se usa un amplificador operacional en la siguiente configuración:

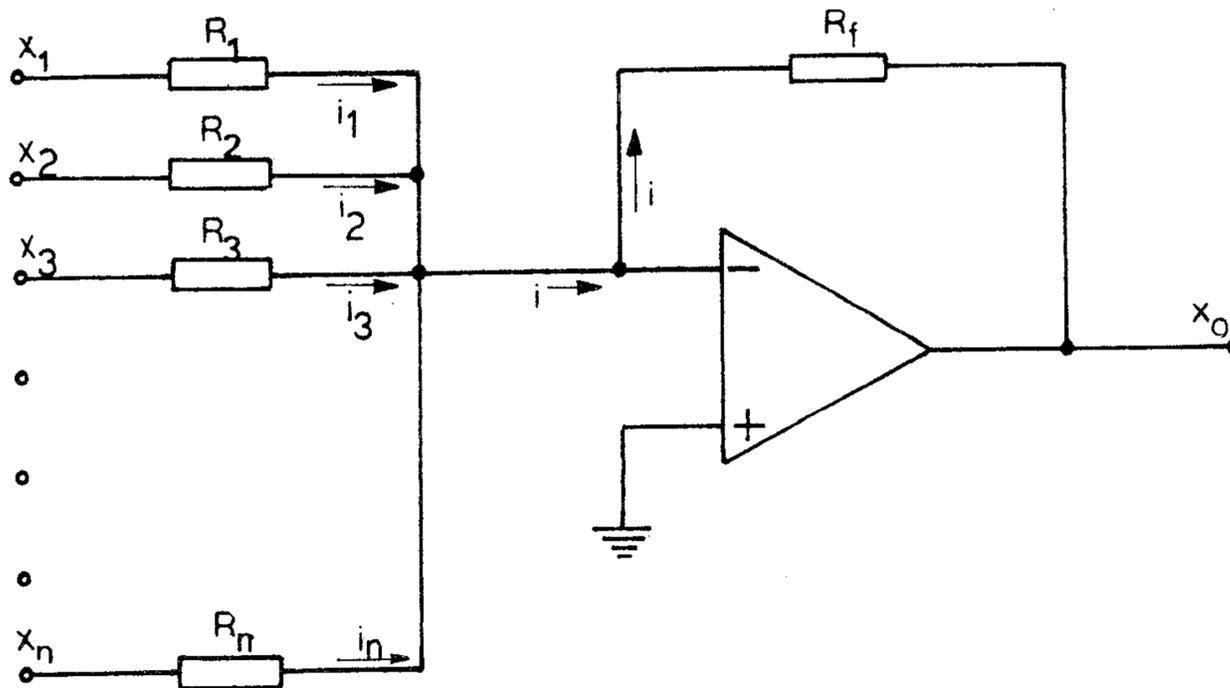


Fig. 2.9

En un amplificador operacional ideal se cumple que:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n \quad (2.13)$$

$$x_o = - i R_f$$

Donde:

$$i_1 = \frac{x_1}{R_1}, \quad i_2 = \frac{x_2}{R_2}, \quad \dots, \quad i_n = \frac{x_n}{R_n} \quad (2.14)$$

De las ecuaciones (2.13) y (2.14) resulta:

$$x_o = - \left(\frac{R_f}{R_1} x_1 + \frac{R_f}{R_2} x_2 + \dots + \frac{R_f}{R_n} x_n \right)$$

Si se llama A_i al cociente entre R_f y R_i (con $i=1,2,\dots,n$) resulta la ecuación:

$$x_o = - \left(A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n \right) \quad (2.15)$$

2.3.1.- Sumador-Inversor:

Si $R_f = R_i$ (con $i=1,2,\dots,n$) resulta:

$$A_i = A_1 = A_2 = \dots = A_n = 1$$

La ecuación (2.15) queda:

$$x_o = - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \tag{2.16}$$

2.3.2.- Sumador-Amplificador-Inversor

Si se necesita la suma de las variables pero además multiplicadas por constantes, entonces deben seleccionarse adecuadamente los valores de R_i (con $i=1,2,\dots,n$), tal que:

$$x_o = - (A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n) \tag{2.17}$$

Los símbolos usados en simulación analógica y los circuitos correspondientes se muestran en las figuras (2.10) y (2.11).

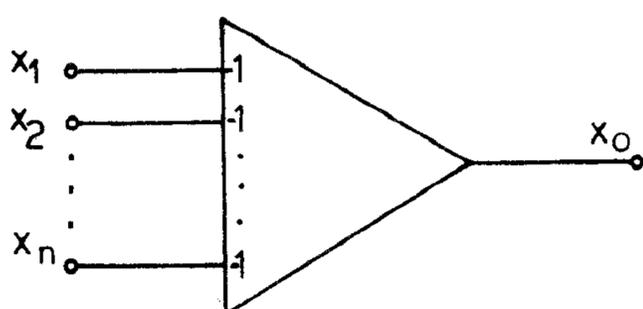
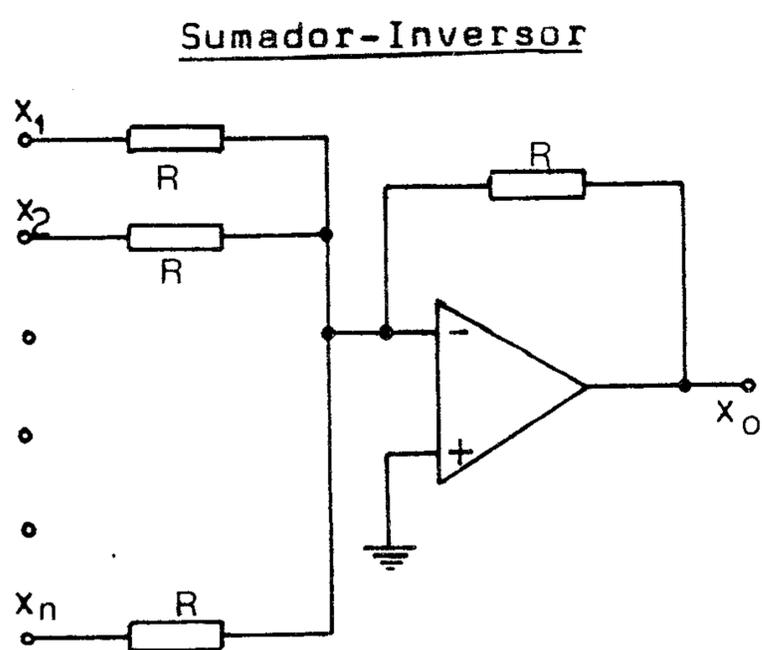


Fig. 2.10

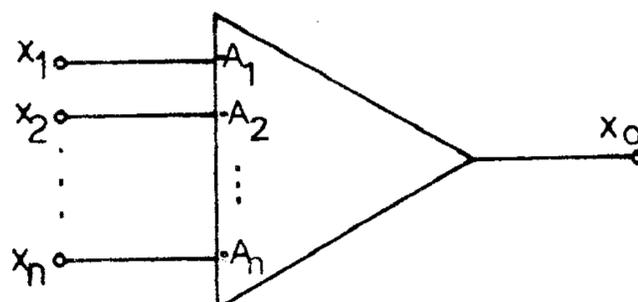
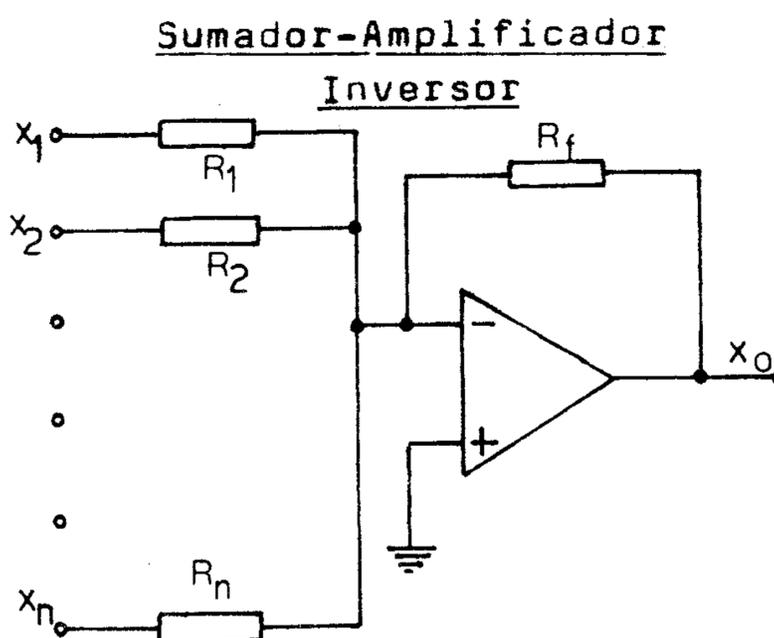


Fig. 2.11

2.4.- Integrador

Como integrador se usa un amplificador operacional cuya configuración se muestra en la fig. 2.12.

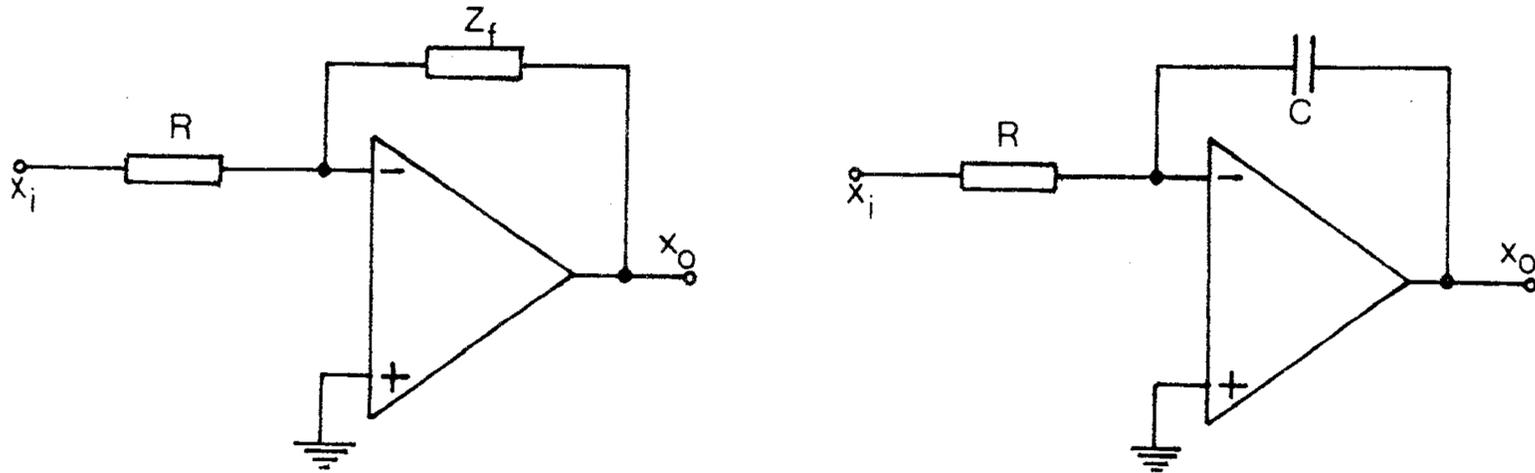


Fig. 2.12

Se sabe que:

$$\frac{x_o}{x_i} = - z_f / R \quad (2.18)$$

Si $z_f = 1/sC$ (fig.2.12.b), la función de transferencia será:

$$\frac{x_o}{x_i} = - \frac{1}{s C R} \quad (2.19)$$

2.4.1.- Integrador-Inversor

Si $CR = 1$, se obtiene el integrador-inversor, cuya función de transferencia es:

$$\frac{x_o}{x_i} = - 1/s \quad (2.20)$$

2.4.2.- Integrador-Amplificador-Inversor

Si $CR = 1/A$, se obtiene la función de transferencia:

$$\frac{x_o}{x_i} = - A \frac{1}{s} \quad (2.21)$$

O sea, la salida es la integral de la entrada amplificada e invertida.

2.4.3.- Condiciones iniciales

Si aplicamos antitransformada a la expresión:

$$x_0 = -A \frac{x_i}{s}$$

resulta:

$$x_0 = -\int A x_i dt + C \quad (2.22)$$

donde C depende de las condiciones iniciales, o sea, el valor de la variable para $t=0$. Es importante, por lo tanto, tener en cuenta el valor de las condiciones iniciales de cada variable.

Simulación de una condición inicial:

Si una variable del sistema tiene condición inicial distinta de cero, a ésta se la simula mediante la carga del condensador del amplificador operacional del circuito integrador.

El circuito que resulta al considerar las condiciones iniciales se muestra en la fig. 2.13.

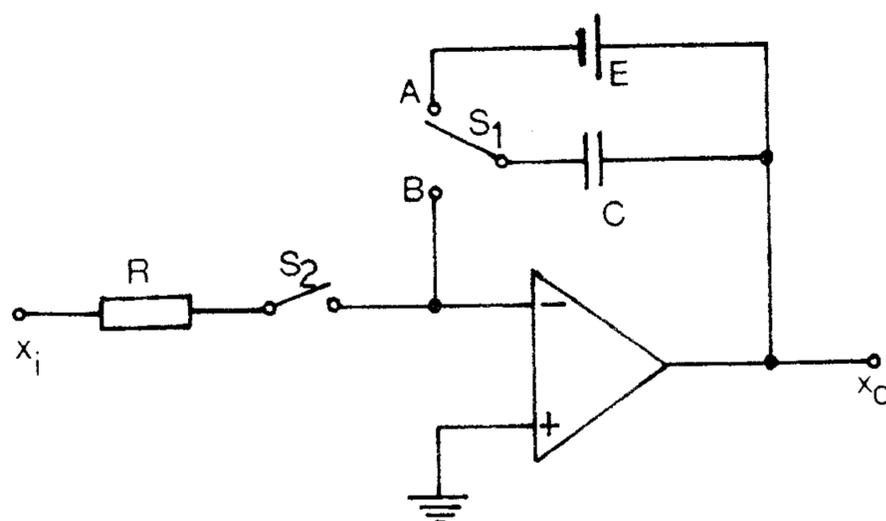
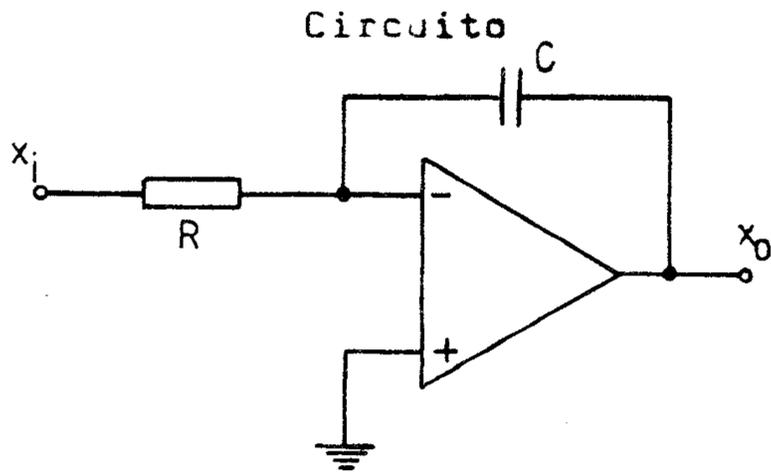


Fig. 2.13

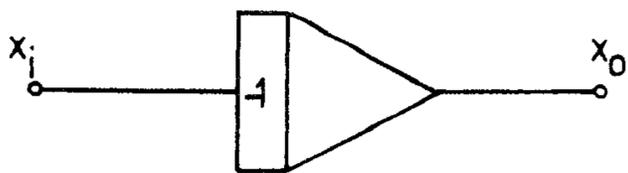
Inicialmente se conecta el condensador a la fuente de tensión para que se cargue a un valor constante, que será la condición inicial de la variable, (llave S_1 en A y S_2 abierta), luego se conecta el condensador a la entrada inversora del amplificador para realizar la integración, (llaves: S_1 en B y S_2 cerrada).

Los símbolos usados en simulación analógica, considerando las condiciones iniciales se muestran en las fig.(2.14) a (2.17).

Integrador-Inversor



Símbolo

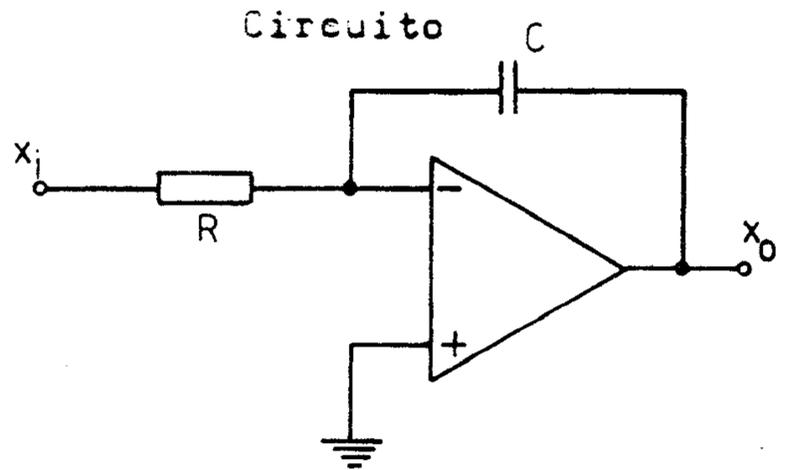


Ecuación

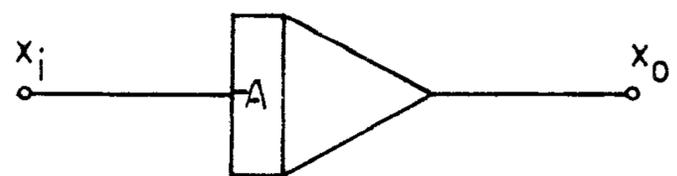
$$x_o = -\frac{1}{s} x_i$$

Fig. 2.14

Integrador-Inversor-
Amplificador



Símbolo

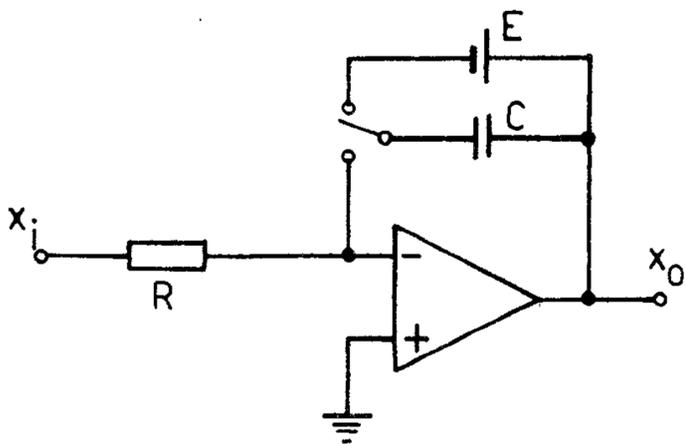


Ecuación

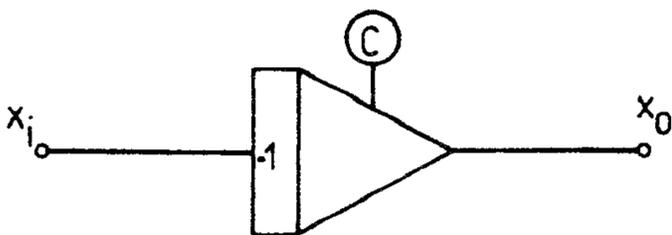
$$x_o = -\frac{A}{s} x_i$$

Fig. 2.15

Considerando las condiciones iniciales:



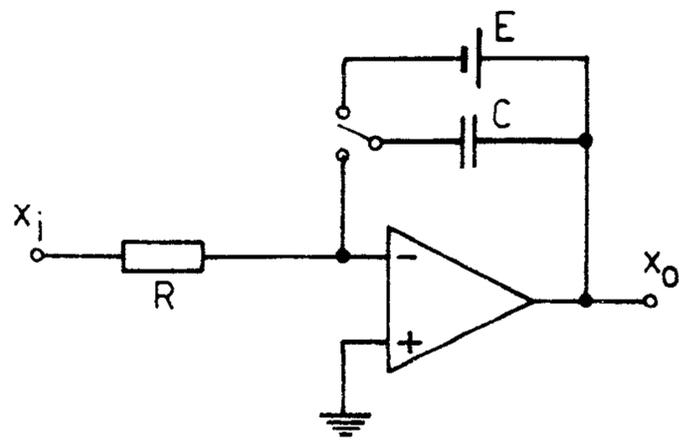
Símbolo



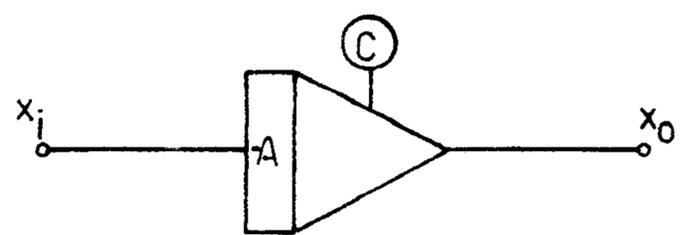
Ecuación

$$x_o = -\int x_i(t) dt + C$$

Fig. 2.16



Símbolo



Ecuación

$$x_o = -A \int x_i(t) dt + C$$

Fig. 2.17

2.5.- Integrador-Sumador-Inversor

La ecuación de salida de un sumador, con una impedancia z en el lazo de realimentación es:

$$x_o = - \left(\frac{z}{R_1} x_1 + \frac{z}{R_2} x_2 + \dots + \frac{z}{R_n} x_n \right)$$

si $z = 1/sC$, resulta:

$$x_o = - \left(\frac{1}{sCR_1} x_1 + \frac{1}{sCR_2} x_2 + \dots + \frac{1}{sCR_n} x_n \right) \quad (2.23)$$

Si $CR=1$, se obtiene el Integrador-Sumador-Inversor, la ecuación de salida es:

$$x_o = - \frac{1}{s} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (2.24)$$

Si $CR \neq 1$, entonces la ecuación (2.23) se escribe como:

$$x_o = - \frac{1}{s} (A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n) \quad (2.25)$$

siendo $A_i = 1/CR_i$, con $i=1,2,\dots,n$.

Las ecuaciones (2.24) y (2.25) en el dominio de tiempo son:

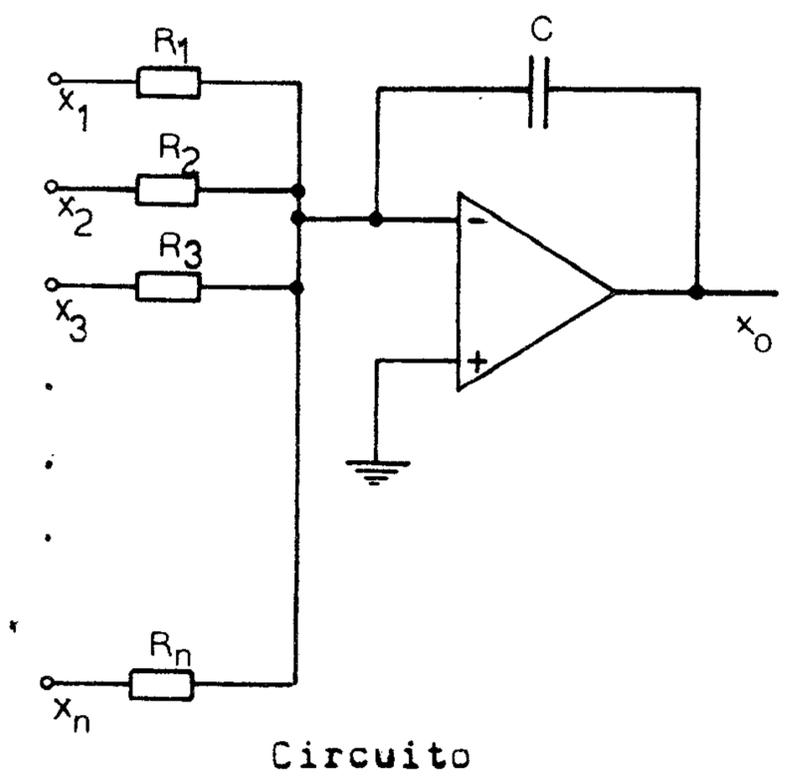
$$x_o = - \int (x_1 + x_2 + \dots + x_n) dt + C \quad (2.26)$$

$$x_o = - \int (A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n) dt + C \quad (2.27)$$

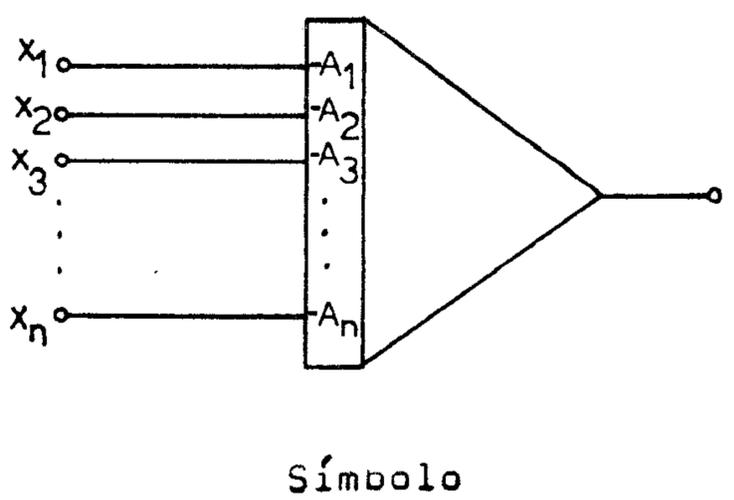
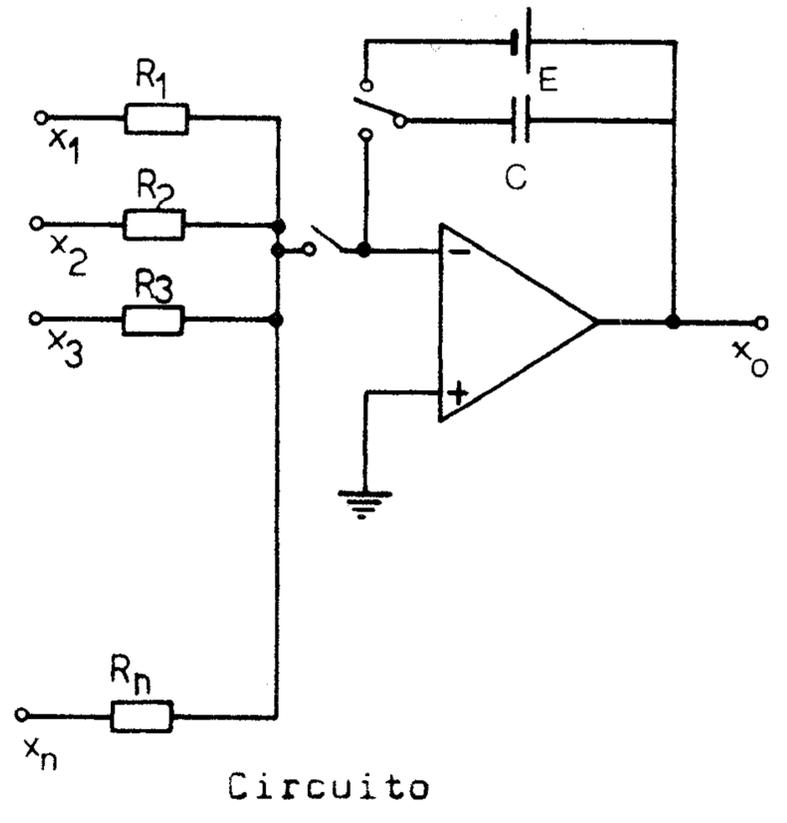
donde C representa la condición inicial.

Los símbolos usados en simulación analógica se muestran en las figuras (2.18) y (2.19).

Inversor
Integrador- Sumador

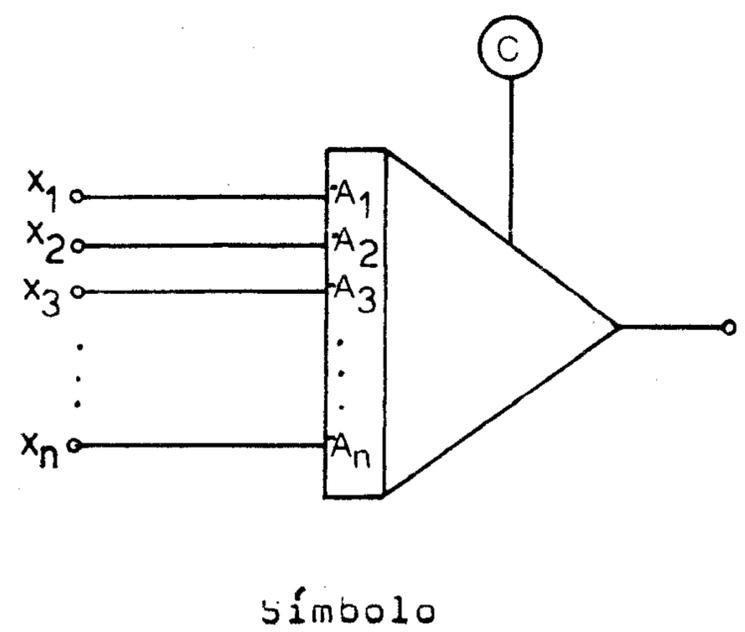


Inversor
Integrador- Sumador
(con condiciones iniciales)



$$x_0 = - \int (A_1 x_1 + \dots + A_n x_n) dt$$

Fig. 2.18



$$x_0 = - \int (A_1 x_1 + \dots + A_n x_n) dt + C$$

Fig. 2.19

2.6.- Simulación de una ecuación diferencial

Supóngase la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales nulas:

$$\ddot{x}(t) + A \dot{x}(t) + B x(t) = 0 \quad (2.28)$$

Los pasos a seguir para obtener el diagrama que simule esta ecuación diferencial son:

a) Suponer que se dispone de la derivada de mayor orden e integrarla.

Despejar la derivada de orden más elevado de la ecuación diferencial. En este caso sería:

$$\ddot{x}(t) = -A \dot{x}(t) - B x(t) \quad (2.29)$$

b) Se representa esta ecuación diferencial mediante un integrador y un sumador. Considerando un integrador-inversor, al integrar $\ddot{x}(t)$ se obtiene $-\dot{x}(t)$, fig. 2.20.

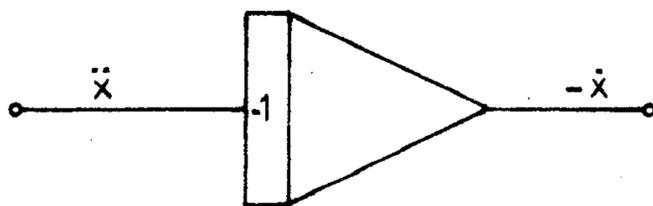


Fig.2.20

c) En la entrada del integrador se compone $\ddot{x}(t)$.

Como la suma de $(-A\dot{x})$ y $(-Bx)$ da como resultado $\ddot{x}(t)$, las entradas del amplificador-sumador-inversor deberán ser $(A\dot{x})$ y (Bx) , fig.2.21

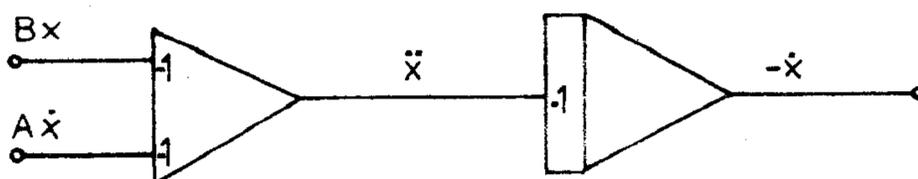


Fig. 2.21

d) Se continúa integrando para obtener las derivadas de menor orden y la variable.

En este ejemplo: la integral de $(-\dot{x}(t))$ es $x(t)$, fig. 2.22.

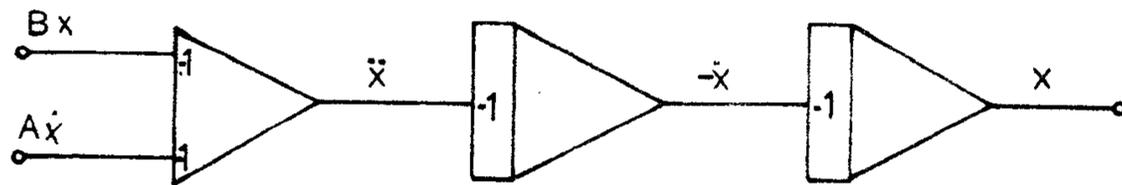


Fig. 2.22

e) Se toman la variable y sus derivadas para multiplicarlas por el factor necesario para obtener la derivada de mayor orden.

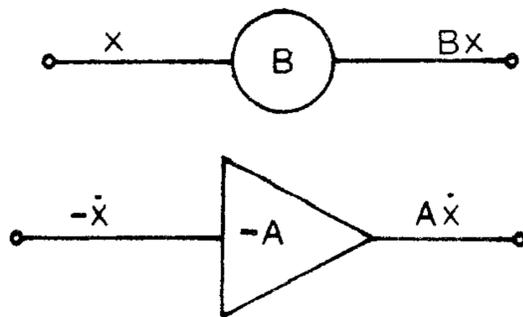


Fig. 2.23

d) Completando el diagrama se obtiene la fig. 2.24, que representa la ecuación diferencial (2.28)

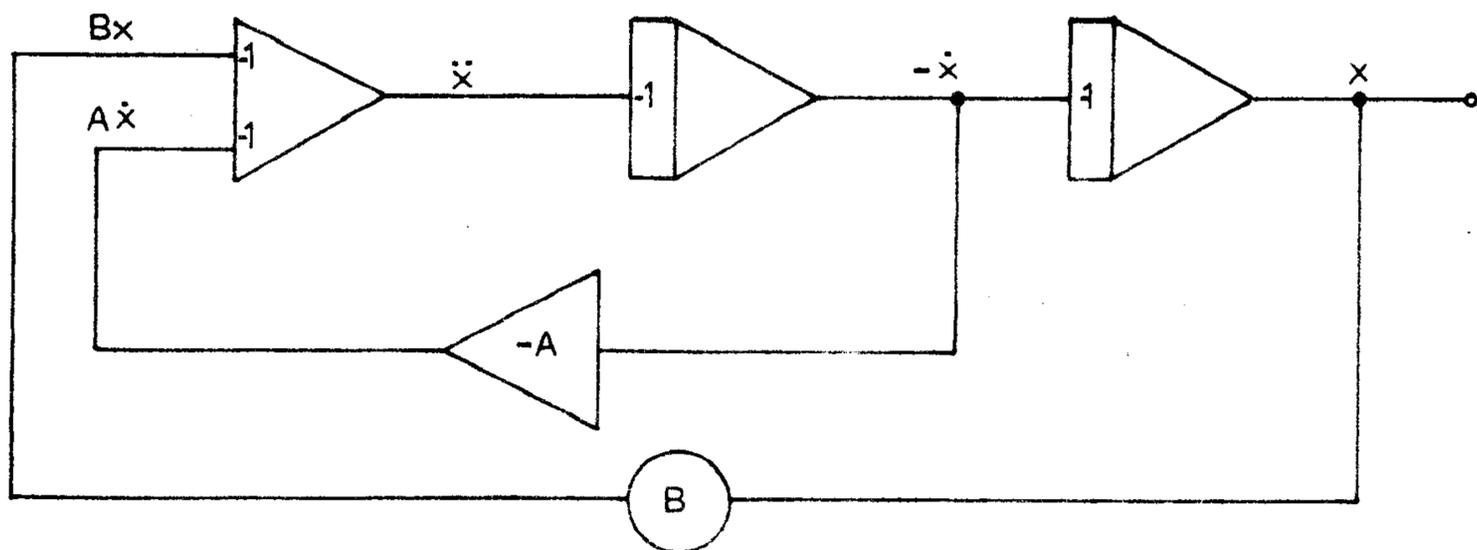


Fig. 2.24

Si se dispone de un Integrador- Sumador- Amplificador- Inversor, los dos amplificadores operacionales mostrados en la fig.2.21, se pueden reducir a:

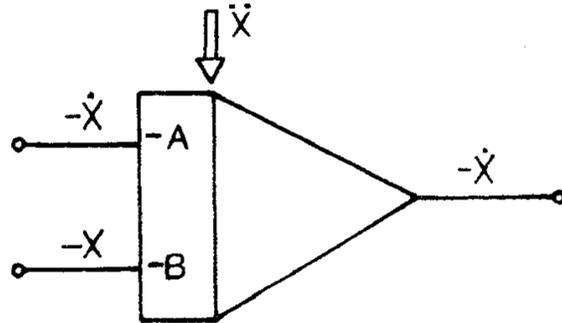


Fig. 2.25

Por lo tanto, ahora solo hace falta acomodar los signos y completar el diagrama como muestra la fig. 2.26.

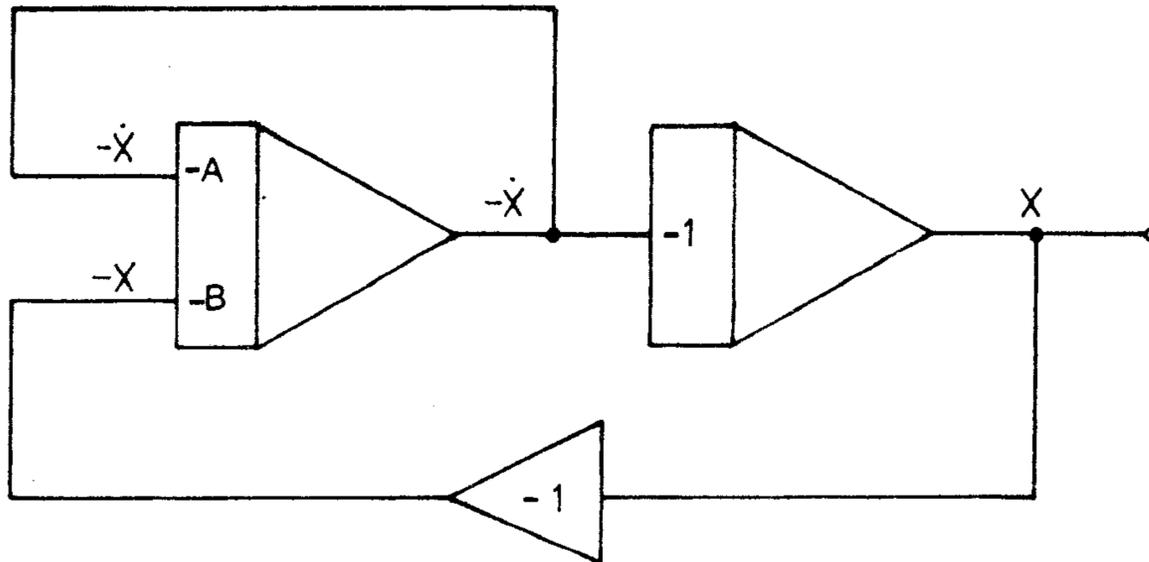


Fig. 2.26

2.7.- Ejemplos

Ejemplo N°1

Simular la siguiente ecuación diferencial:

$$4 \ddot{x}(t) + 5 \dot{x}(t) + 16 x(t) = 0$$

a) Se despeja la derivada de mayor orden, $\ddot{x}(t)$:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{5}{4} \dot{x}(t) - 4 x(t)$$

La simulación de esta ecuación se muestra en la fig. 2.27.

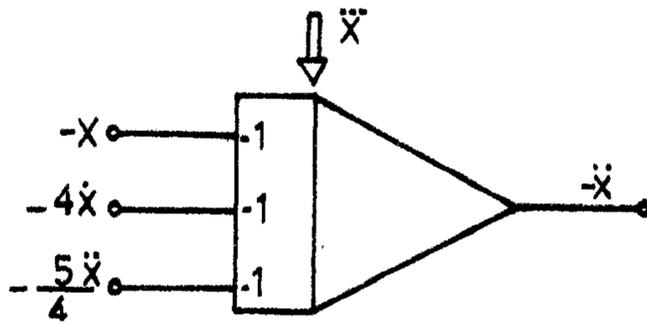


Fig.2.27

b) Se introducen las ganancias de los sumandos:

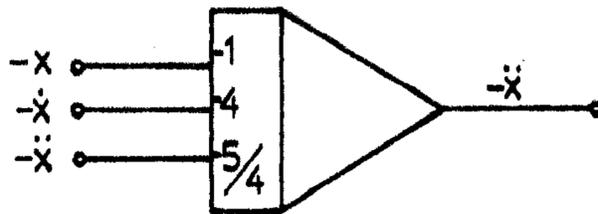


Fig. 2.28

c) Se agregan integradores hasta obtener la variable $x(t)$, fig.2.29

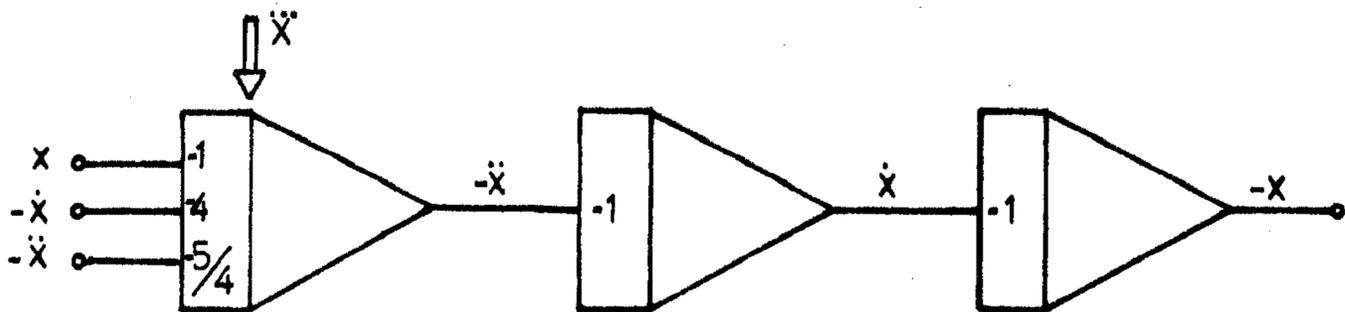


Fig.2.29

d) Se suman la variable y sus derivadas (acomodando los signos) para obtener $\ddot{x}(t)$, en el primer integrador.

En la fig. 2.30 puede observarse que la primera derivada de la variable necesita un cambio de signo antes de conectarse al primer integrador.

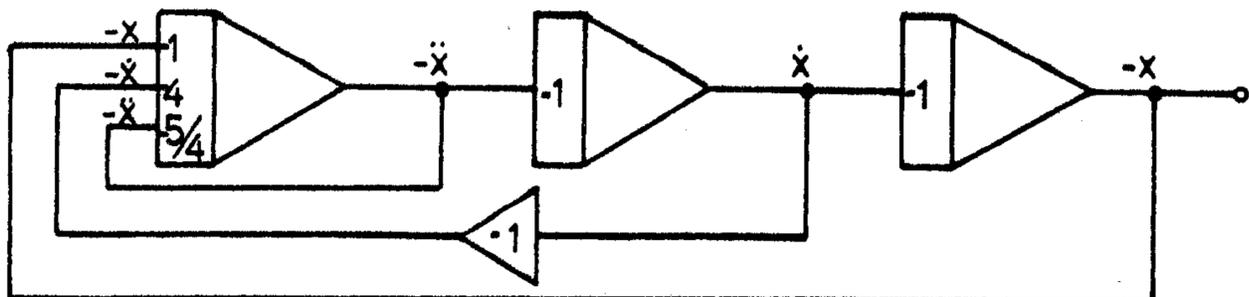


Fig. 2.30

Ejemplo N°_2:

Simular la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{x}(t) + 6 \dot{x}(t) - 16 x(t) = u(t)$$

Despejando la derivada de mayor orden $\ddot{x}(t)$ se obtiene:

$$\ddot{x}(t) = u(t) - 6 \dot{x}(t) + 16 x(t)$$

El diagrama de simulación se muestra en la figura 2.31.

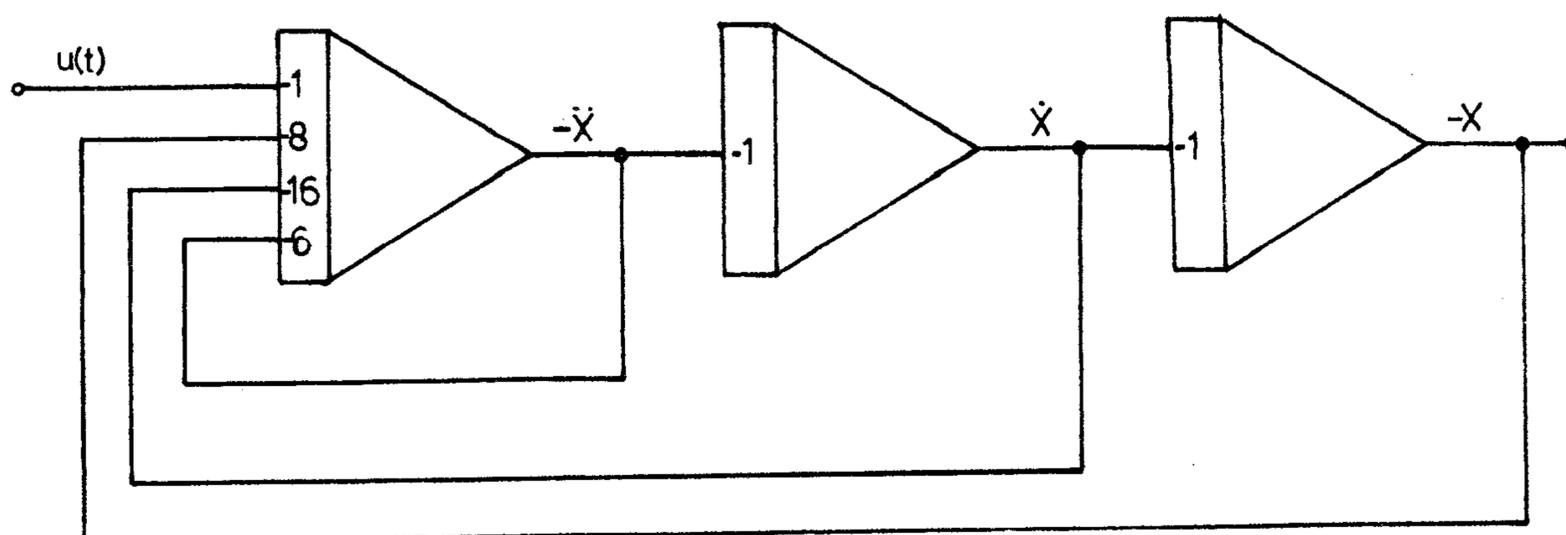


Fig. 2.31

Ejemplo N°_3:

Dada la siguiente función de transferencia encontrar el diagrama de bloques elementales y simularla.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{c_2 s + c_1}{s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Usando la variable auxiliar $x(s)$ tal que:

$$\frac{y(s)}{x(s)} = c_2 s + c_1$$

$$\frac{x(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

De estas ecuaciones se obtiene:

$$y(t) = c_2 \dot{x}(t) + c_1 x(t) \tag{2.30}$$

$$x^{(4)}(t) = u(t) - x(t) - \dot{x}(t) - 2\ddot{x}(t) - 3\dddot{x}(t) \tag{2.31}$$

Los diagramas de bloques elementales y de simulación para obtener la cuarta derivada de $x(t)$ se muestran en las figuras (2.32) y (2.33)

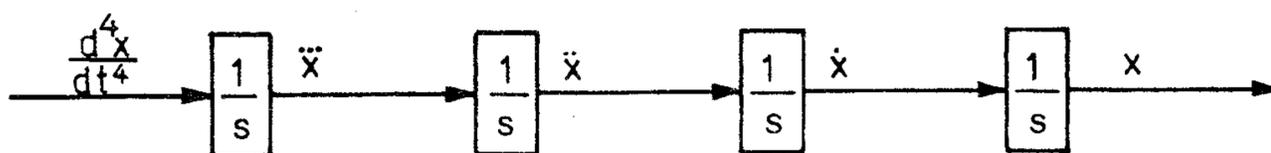


Fig. 2.32

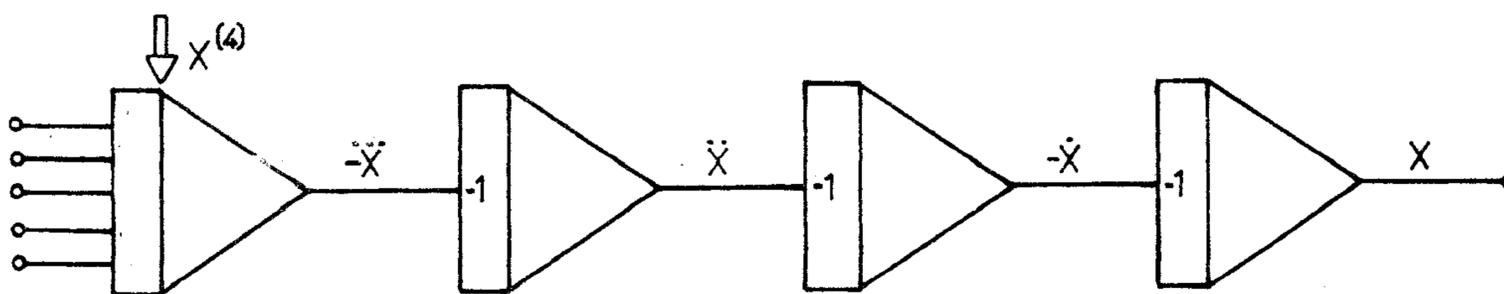


Fig. 2.33

Mediante un sumador se puede obtener la ecuación (2.31), como se muestra en las figuras (2.34) y (2.35)

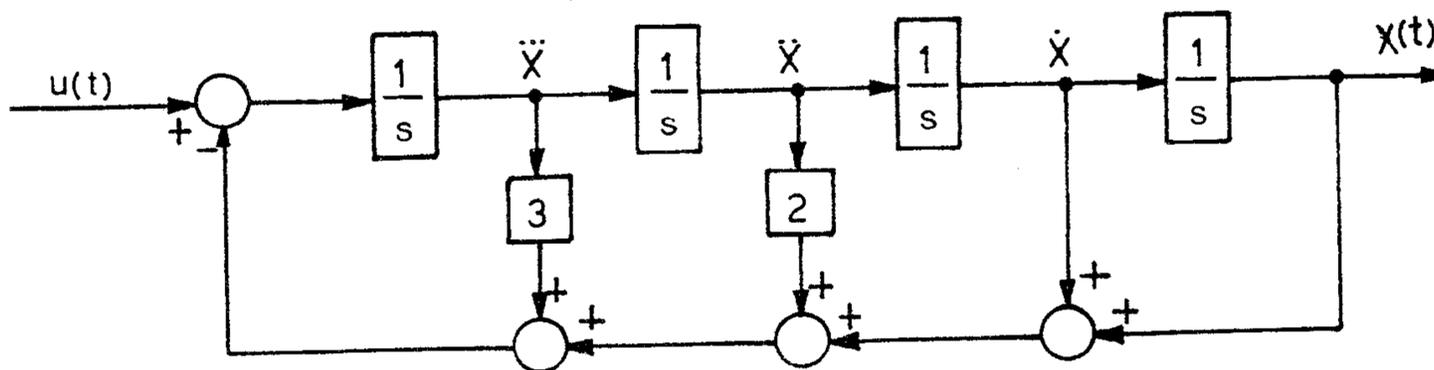


Fig. 2.34

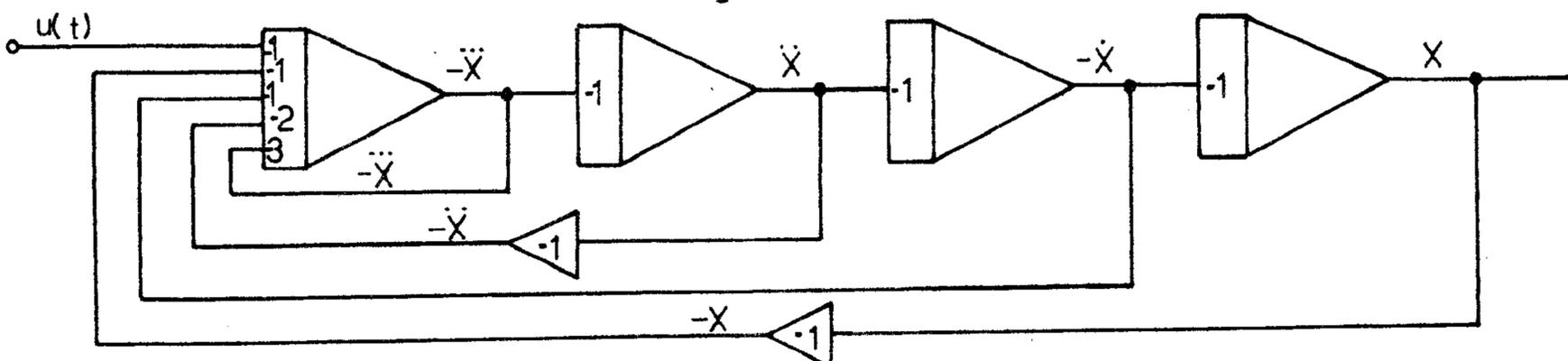


Fig. 2.35

Por medio de otro sumador a la salida se obtiene la ec.(2.30) como muestran las figuras (2.35) y (2.37).

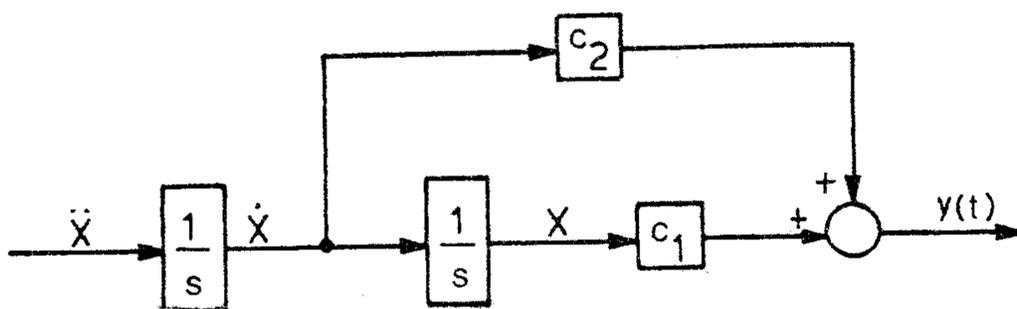


Fig. 2.36

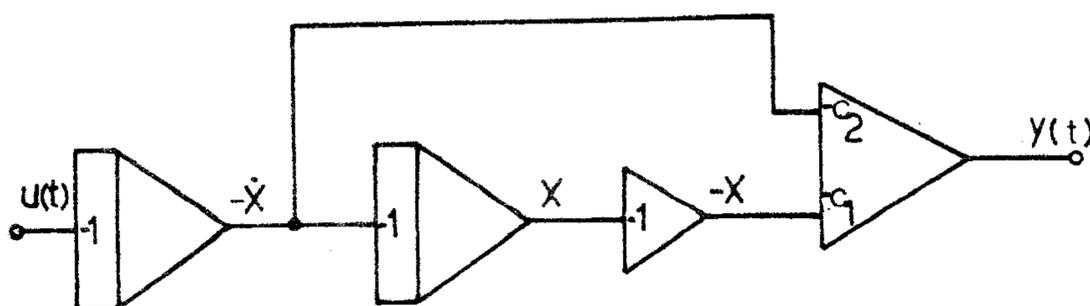


Fig. 2.37

Conectando los diagramas de las figuras (2.34) y (2.36) se obtiene el diagrama de bloques elementales de la función de transferencia dada, (fig.2.38).

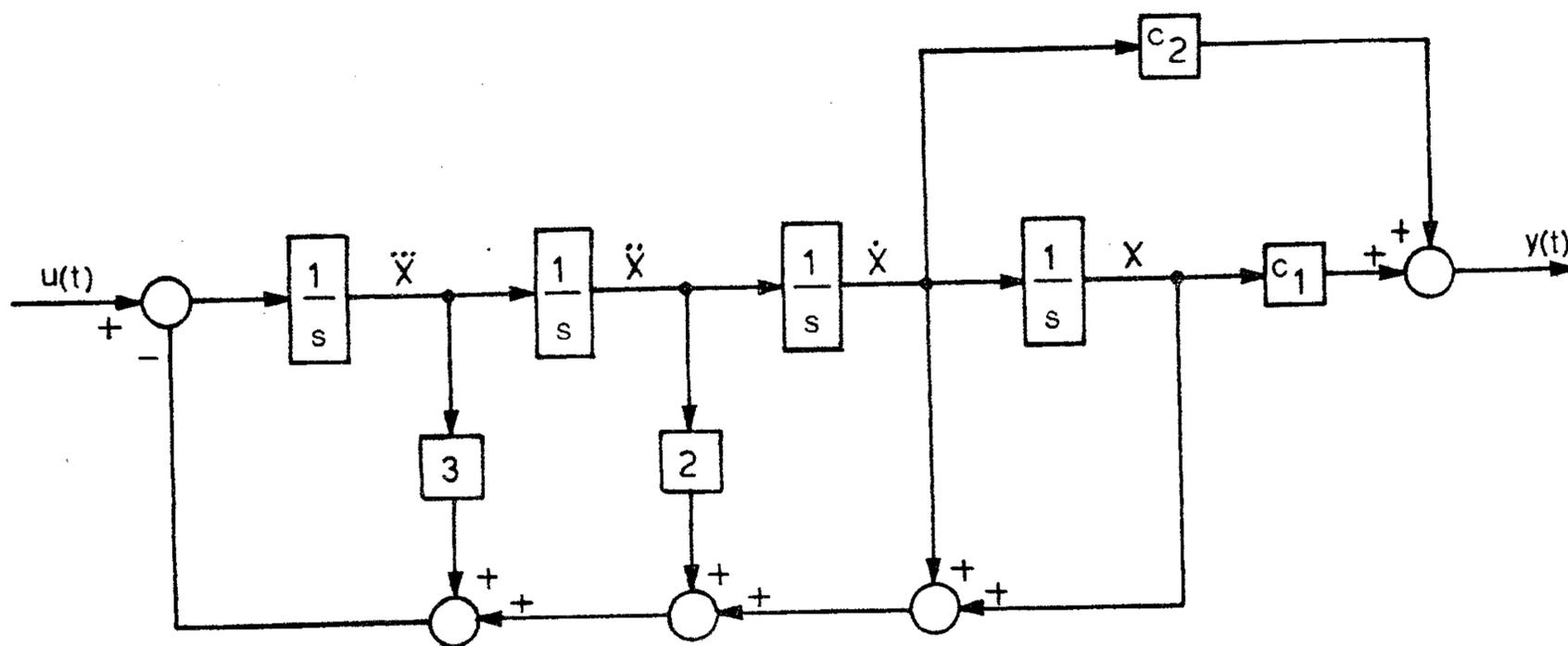


Fig. 2.38

El diagrama de simulación se obtiene de las figura (2.35) y (2.37), como se muestra en la fig. (2.39)

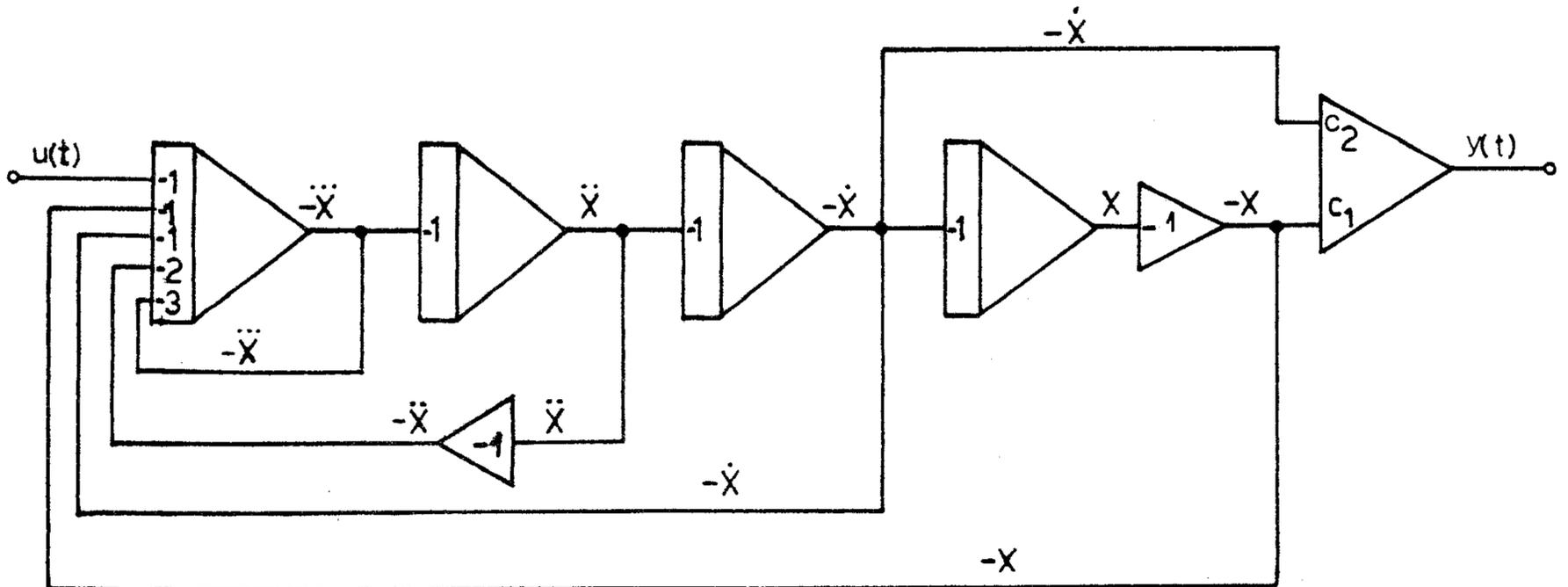


Fig. 2.39

Ejemplo N° 3:

Simular el sistema representado por:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

I.- Escribimos las ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_3 + 2u$$

$$y = x_1 + x_3$$

II.- Realizamos la simulación de cada una de las ecuaciones:

a) $\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3$

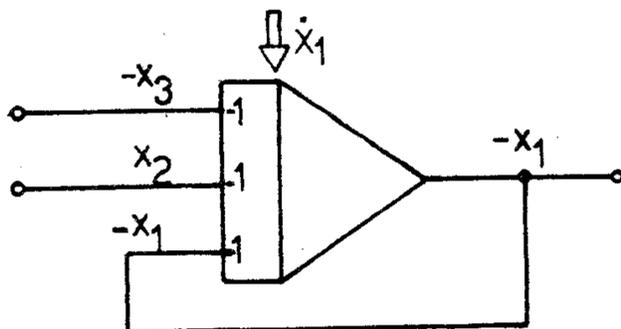


Fig. 2.40

b) $\dot{x}_2 = x_1 + x_3$

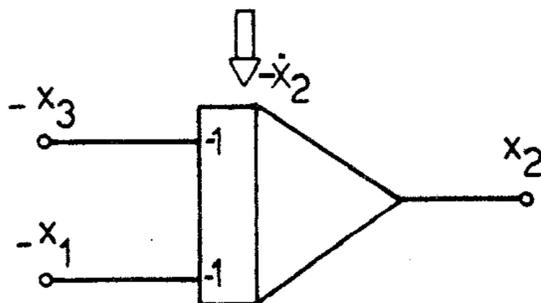


Fig. 2.41

c) $\dot{x}_3 = x_3 + 2u$

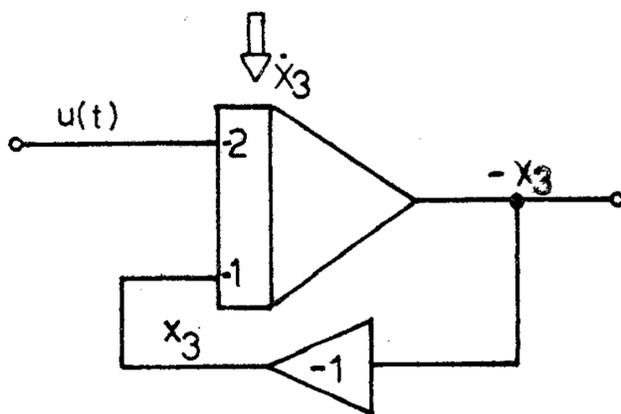


Fig. 2.42

d) $y = x_1 + x_3$

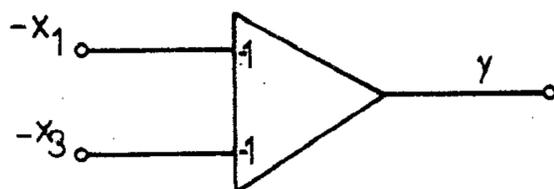


Fig. 2.43

III.- Conectando estos diagramas obtenemos el circuito que simula al sistema dado (fig. 2.44).

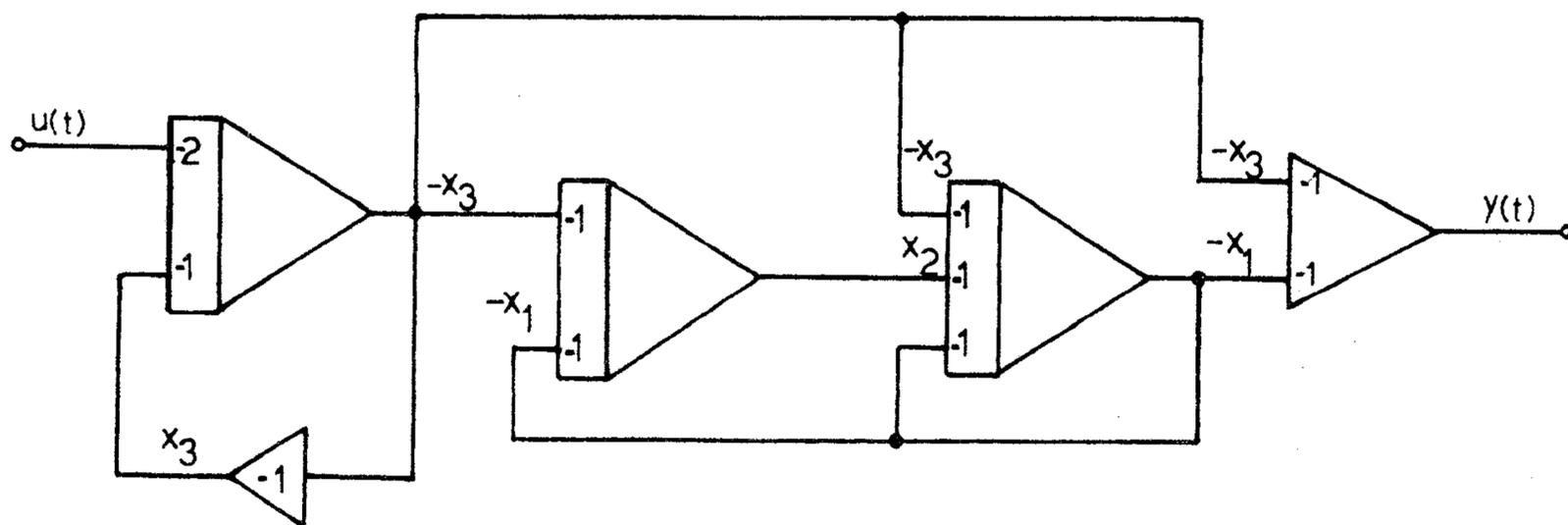


Fig. 2.44

Observaciones

Hemos analizado la configuración inversora de un amplificador operacional, como uno de los elementos de un simulador analógico.

Pero debe tenerse en cuenta que un amplificador operacional puede usarse en configuración no inversora, pudiendo obtenerse de esta forma:

- un multiplicador por una constante, negativa o positiva,
- un sumador generalizado con señales aplicadas a las entradas inversoras y/o no inversoras.

Los elementos señalados como componentes de un computador analógico, son los mínimos necesarios para simular sistemas físicos, pero pueden implementarse otras configuraciones útiles para esta simulación.-

3.- Factores de escala

3.1.- Factores de escala de amplitud

La tensión de salida de cualquier amplificador operacional no debe exceder de un cierto valor para evitar la saturación. La saturación produce errores en la solución.

Se debe lograr, que la tensión que representa a cada variable a la salida de los amplificadores sea siempre menor que la tensión de saturación, de lo contrario, habrá que reducir esta tensión, lo que significa cambiar la escala de la variable.

Por otro lado, la tensión máxima de salida de cualquier amplificador no debe ser demasiado pequeña. En la simulación de un sistema se desea que la máxima variación de la tensión de salida de los distintos amplificadores sea aproximadamente la misma.

Es importante elegir adecuadamente los factores de escala necesarios para representar al sistema real, relacionando las tensiones de salida de los amplificadores operacionales con sus correspondientes cantidades físicas.

3.2.- Ejemplo

Simular la siguiente ecuación diferencial, con condiciones iniciales no nulas.

$$\ddot{x}(t) + A \dot{x}(t) + B x(t) = 0 \quad (3.1)$$

La segunda derivada es:

$$\ddot{x}(t) = -A \dot{x}(t) - B x(t) \quad (3.2)$$

El diagrama de simulación es:

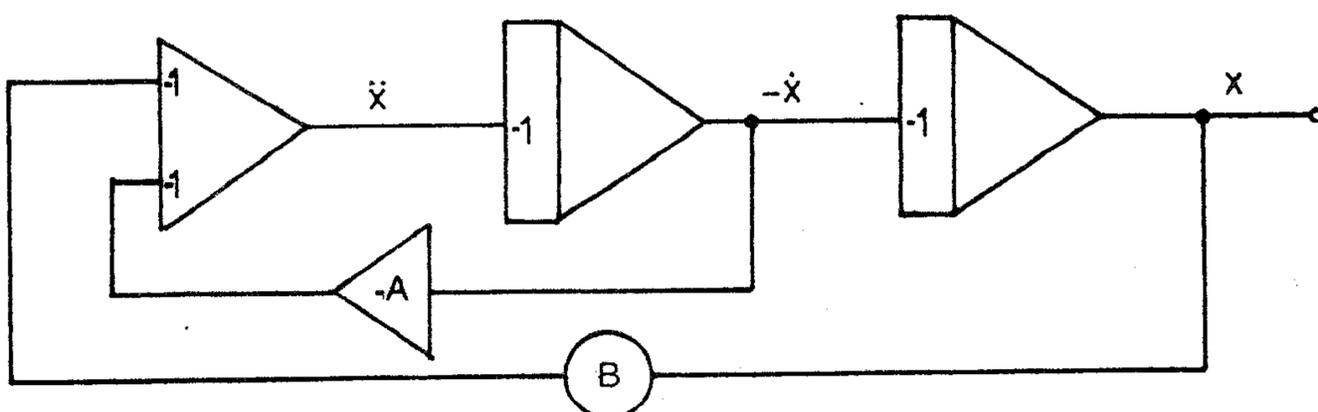


Fig. 3.1

Haremos un cambio de escala porque se desea que las tensiones a la salida de los amplificadores sean: $k_1\ddot{x}(t)$, $k_2\dot{x}(t)$ y $k_3x(t)$ respectivamente. Se definen k_1 , k_2 y k_3 como factores de escala.

Multiplicamos la ecuación (3.2) por k_1 :

$$k_1\ddot{x}(t) = -A k_1 \dot{x}(t) - B k_1 x(t)$$

Si en el segundo miembro de esta ecuación multiplicamos y dividimos por k_2 y k_3 el primer y segundo término respectivamente, obtenemos la siguiente ecuación:

$$k_1\ddot{x}(t) = -\frac{A k_1}{k_2} k_2\dot{x}(t) - \frac{B k_1}{k_3} k_3x(t) \quad (3.3)$$

Definimos las nuevas variables:

$$\begin{aligned} e_1 &= k_1 \ddot{x}(t) \\ e_2 &= k_2 \dot{x}(t) \\ e_3 &= k_3 x(t) \end{aligned}$$

La ecuación (3.3) se escribe como:

$$e_1 = -\frac{A k_1}{k_2} e_2 - \frac{B k_1}{k_3} e_3 \quad (3.4)$$

Redibujamos el diagrama de simulación de la figura (3.1) modificando las ganancias para lograr las nuevas variables e_1 , e_2 y e_3 a la salida de cada amplificador, resultando:

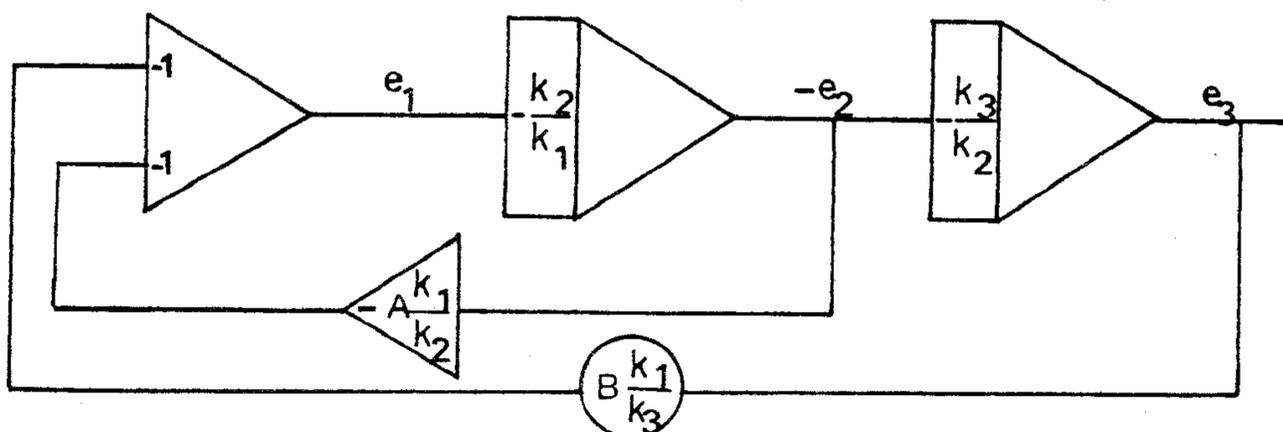


Fig. 3.2

No en todos los casos es posible calcular los valores máximos que tendrán las variables. Entonces, es necesario estimarlos para encontrar los factores de escala. Si los valores máximos estimados están alejados hay que revisar el diagrama de simulación hasta obtener el correcto.

3.2.1.- Ejemplo

Sea el motor de corriente continua controlado por armadura que se muestra en la fig. 3.3. Analizar la respuesta natural del sistema con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \theta_o(0) &= 2 \text{ rad.} \\ \dot{\theta}_o(0) &= 0 \text{ rad/seg} \end{aligned}$$

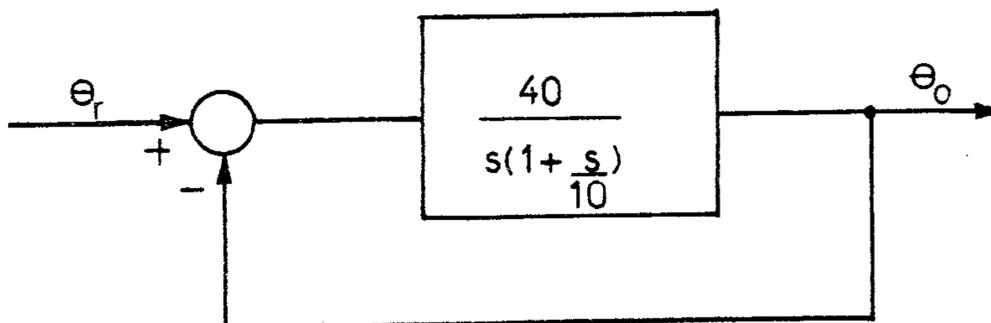


Fig. 3.3

La ecuación diferencial del sistema es:

$$\ddot{\theta}_o(t) + 10 \dot{\theta}_o(t) + 400 \theta_o(t) = 400 \theta_r(t) \tag{3.5}$$

El diagrama de simulación del sistema se muestra en la fig3.4

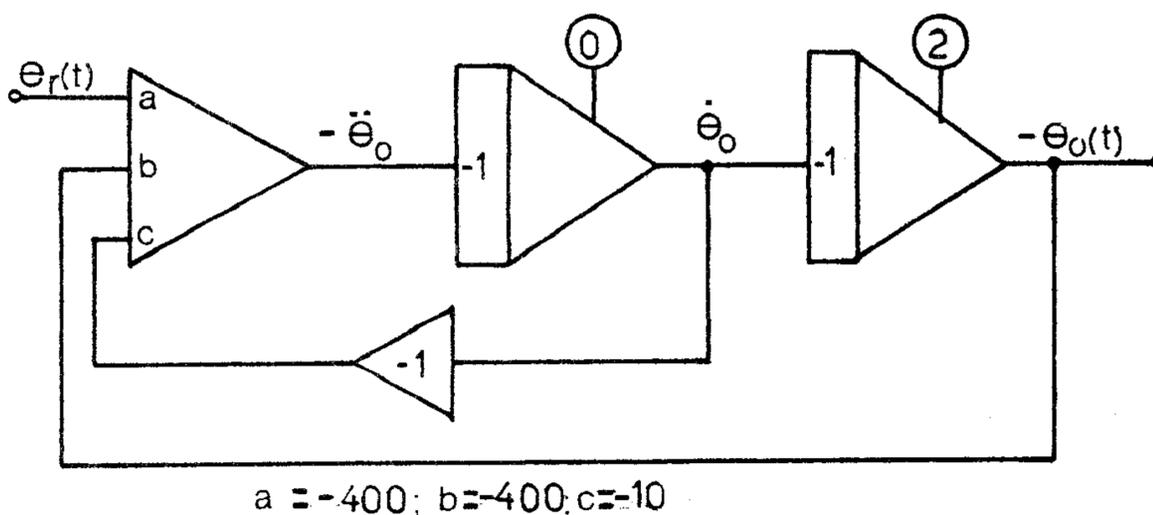


Fig.3.4

De la ecuación (3.5), la frecuencia natural no amortiguada es 20 rad/seg.

Si la entrada $\theta_r(t)$ es nula, en un primer instante la respuesta a las condiciones iniciales se puede escribir:

$$\begin{aligned} \theta_o(t) &= 2 \text{ sen } 20t \\ \dot{\theta}_o(t) &= 40 \text{ cos } 20t \\ \ddot{\theta}_o(t) &= -800 \text{ sen } 20t \end{aligned} \tag{3.6}$$

Obsérvese que esta solución es únicamente válida para valores pequeños del tiempo.

De las ecuaciones (3.6), se obtienen los valores máximos que tendrán las variables:

$$\begin{aligned} |\text{Máximo valor de } \theta_o(t)| &= 2 \text{ rad.} \\ |\text{Máximo valor de } \dot{\theta}_o(t)| &= 40 \text{ rad/seg.} \\ |\text{Máximo valor de } \ddot{\theta}_o(t)| &= 800 \text{ rad/seg}^2 \end{aligned}$$

La tensión máxima de los amplificadores operacionales que se disponen es: ± 15 Volts.

Es necesario un cambio de escala en las variables.

El diagrama de simulación se muestra en la fig. 3.5, donde las nuevas variables: $x_1 = k_1 \ddot{\theta}_o$, $x_2 = k_2 \dot{\theta}_o$, $x_3 = k_3 \theta_o$, son las salidas de los amplificadores.

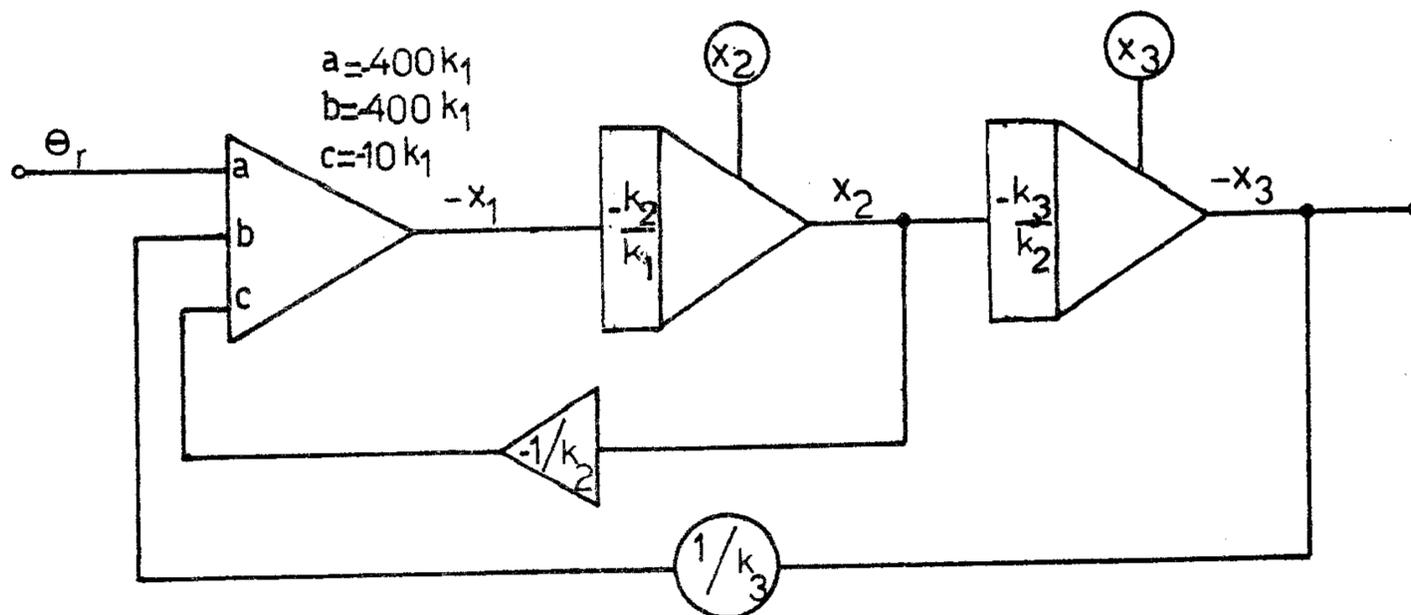


Fig. 3.5.

Se deben calcular k_1 , k_2 y k_3 , de manera tal que los valores máximos de x_1 , x_2 y x_3 sean menores que $\pm 15V$. Elegimos, por ejemplo, que los valores máximos sean igual a $\pm 14V$.

$$k_1 \left| \ddot{\theta}_{om\acute{a}x} \right| = 14V$$

$$k_1 = 14/800 \text{ (V/rad/seg}^2\text{)}$$

$$k_1 = 7/400 \text{ (V/rad/seg}^2\text{)} \quad (3.8)$$

$$k_2 \left| \dot{\theta}_{om\acute{a}x} \right| = 14V$$

$$k_2 = 7/20 \text{ (V/rad/seg)} \quad (3.9)$$

$$k_3 \left| \theta_{om\acute{a}x} \right| = 14V$$

$$k_3 = 7 \text{ (V/rad)} \quad (3.10)$$

Las condiciones iniciales para las nuevas variables serán:

$$\dot{\theta}_o(0) = 0 \text{ rad/seg}$$

$$x_2(0) = k_2 \dot{\theta}_o(0)$$

$$x_2(0) = 0 \text{ V.} \quad (3.11)$$

$$\theta_o(0) = 2 \text{ rad.}$$

$$x_3(0) = k_3 \theta_o(0)$$

$$x_3(0) = 14 \text{ V.} \quad (3.12)$$

El nuevo diagrama de simulación se muestra en la fig. 3.6.

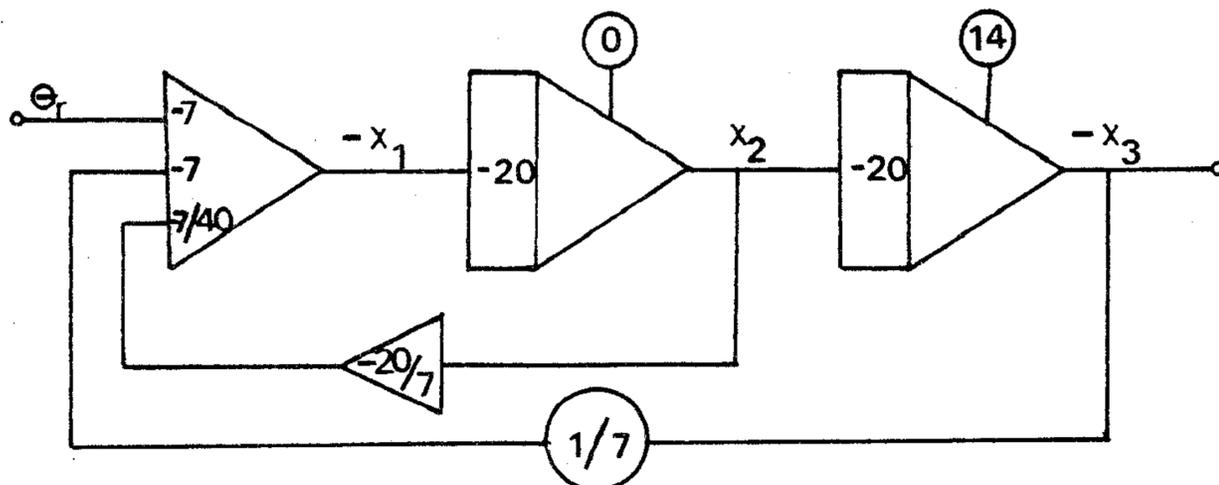


Fig. 3.6

Ordenando las ganancias se redibuja el diagrama de la fig.3.6 como muestra la fig. 3.7.

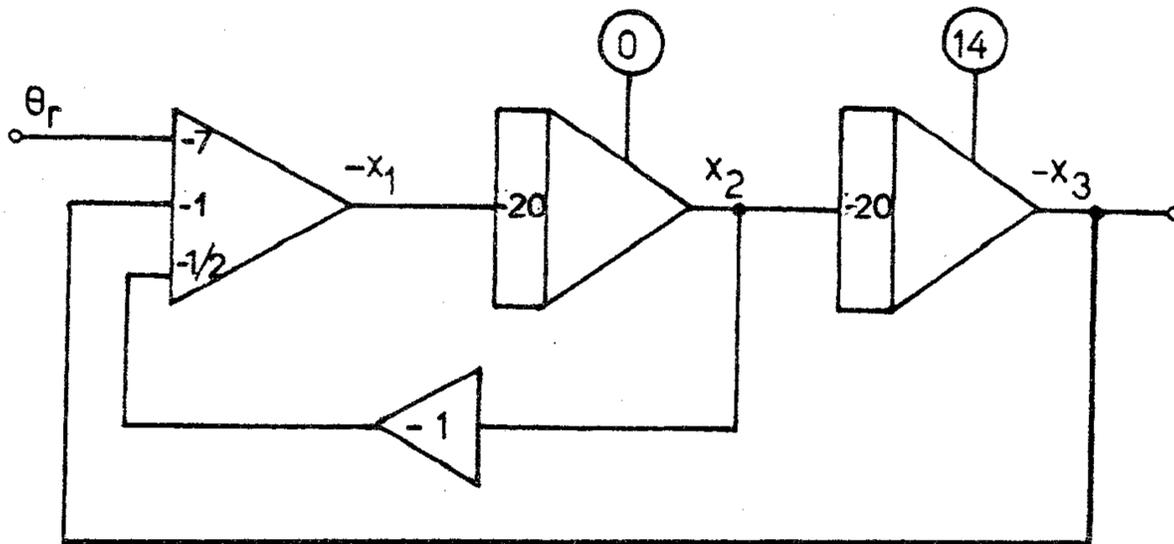


Fig. 3.7

3.3.- Factores de la escala de tiempo

Así como se puede hacer un cambio de escala de las variables del sistema, se puede también hacer un cambio en la escala de tiempo cuando se trata de sistemas demasiado rápidos, por ejemplo.

Sea t =tiempo real del sistema y τ =tiempo en el simulador.

Una ecuación que relaciona estos dos tiempos es:

$$\tau \text{ (seg)} = \lambda t \text{ (seg)} \quad (3.13)$$

3.3.1.- Ejemplo

Supóngase el sistema de la figura 3.3, con una entrada senoidal. La ecuación diferencial del sistema es:

$$\ddot{\theta}_0(t) + 10 \dot{\theta}_0(t) + 400 \theta_0(t) = 400 \text{ sen } \omega t \quad (3.14)$$

y las condiciones iniciales son:

$$\theta_0(0) = 2 \text{ rad.}$$

$$\dot{\theta}_0(0) = 0 \text{ rad/seg.}$$

Si : $\tau = \lambda t$ entonces

$$\frac{d\theta_0(t)}{dt} = \frac{d\theta(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}$$

como $d\tau/dt = \lambda$ entonces se puede escribir:

$$\dot{\theta}_o(t) = \lambda \dot{\theta}_o(\tau) \quad (3.15)$$

$$\ddot{\theta}_o(t) = \lambda^2 \ddot{\theta}_o(\tau)$$

La ecuación (3.14) se reescribe con la nueva variable independiente :

$$\lambda^2 \ddot{\theta}_o(\tau) + 10\lambda \dot{\theta}_o(\tau) + 400 \theta_o(\tau) = 400 \text{sen} \frac{\omega \tau}{\lambda} \quad (3.16)$$

Dividiendo por λ^2 :

$$\ddot{\theta}_o(\tau) + \frac{10}{\lambda} \dot{\theta}_o(\tau) + \frac{400}{\lambda^2} \theta_o(\tau) = \frac{400}{\lambda^2} \text{sen} \frac{\omega \tau}{\lambda} \quad (3.17)$$

Si es necesario cambiar la escala del tiempo en un factor 5, o sea hacer $\tau = 5t$, la ecuación (3.17) se escribe como:

$$\ddot{\theta}_o(\tau) + 2 \dot{\theta}_o(\tau) + 16 \theta_o(\tau) = 16 \text{sen} \frac{\omega \tau}{5} \quad (3.18)$$

Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_o(t) \Big|_{t=0} &= 0 \text{ rad/seg} \\ \dot{\theta}_o(\tau) \Big|_{\tau=0} &= (1/\lambda) \dot{\theta}_o(t) \Big|_{t=0} \\ \dot{\theta}_o(\tau) \Big|_{\tau=0} &= 0 \text{ rad/seg.} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \theta_o(t) \Big|_{t=0} &= 2 \text{ rad.} \\ \theta_o(\tau) \Big|_{\tau=0} &= \theta_o(t) \Big|_{t=0} \\ \theta_o(\tau) \Big|_{\tau=0} &= 2 \text{ rad.} \end{aligned} \quad (3.20)$$

La simulación de la ecuación (3.20) se muestra en la fig. 3.8

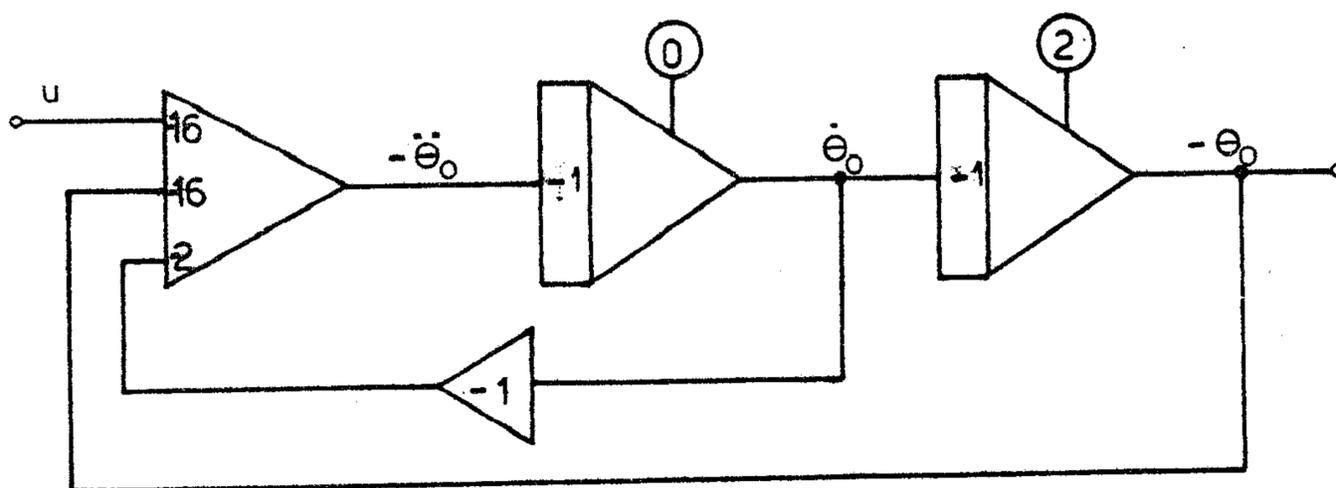


Fig. 3.8

Para mostrar que el cambio de escala en el tiempo no introduce dificultades en el cambio de escala de amplitud continuaremos con el ejemplo.

Haremos un cambio de escala de amplitud.

Para entrada nula consideramos la respuesta a las condiciones iniciales. En un primer instante se obtiene:

$$\begin{aligned}\theta_o(\tau) &= 2 \text{ sen } 4\tau \\ \dot{\theta}_o(\tau) &= 8 \text{ cos } 4\tau \\ \ddot{\theta}_o(\tau) &= -32 \text{ sen } 4\tau\end{aligned}\tag{3.21}$$

De estas ecuaciones resulta:

$$\begin{aligned}|\theta_o(\tau)_{\text{máx}}| &= 2 \\ |\dot{\theta}_o(\tau)_{\text{máx}}| &= 8 \\ |\ddot{\theta}_o(\tau)_{\text{máx}}| &= 32\end{aligned}\tag{3.22}$$

Hacemos un cambio de escala mediante los factores k_1 , k_2 y k_3 resultando:

$$\begin{aligned}x_1 &= k_1 \ddot{\theta}_o \\ x_2 &= k_2 \dot{\theta}_o \\ x_3 &= k_3 \theta_o\end{aligned}\tag{3.23}$$

$$|x_{1\text{máx}}| = |x_{2\text{máx}}| = |x_{3\text{máx}}| = 14V$$

De las ecuaciones (3.23) y (3.22) resulta:

$$k_1 = \frac{|x_{1\text{máx}}|}{|\ddot{\theta}_{o\text{máx}}|}$$

$$k_1 = 7/16 \text{ (V/rad/seg}^2\text{)}\tag{3.24}$$

$$k_2 = \frac{|x_{2\text{máx}}|}{|\dot{\theta}_{o\text{máx}}|}$$

$$k_2 = 7/4 \text{ (V/rad/seg)}\tag{3.25}$$

$$k_3 = \frac{|x_{3\text{máx}}|}{|\theta_{0\text{máx}}|}$$

$$k_3 = 7 \text{ (V/rad)} \tag{3.26}$$

La ecuación que resulta al hacer el cambio de variable es:

$$\begin{aligned} k_1 \ddot{\theta}_0(\tau) + \frac{-2k_1}{k_2} [k_2 \dot{\theta}_0(\tau)] + \frac{16k_1}{k_3} [k_3 \theta_0(\tau)] &= \\ &= 16 k_1 \text{ sen}(\omega\tau/5) \end{aligned}$$

$$x_1(\tau) = -\frac{1}{2} x_2(\tau) - x_3(\tau) + 7 \text{ sen}(\omega\tau/5) \tag{3.27}$$

Las condiciones iniciales son:

$$x_2(0) = k_2 \dot{\theta}_0(0)$$

$$x_2(0) = 0V.$$

$$x_3(0) = k_3 \theta_0(0)$$

$$x_3(0) = 14V.$$

El diagrama de simulación se muestra en la fig. 3.9.

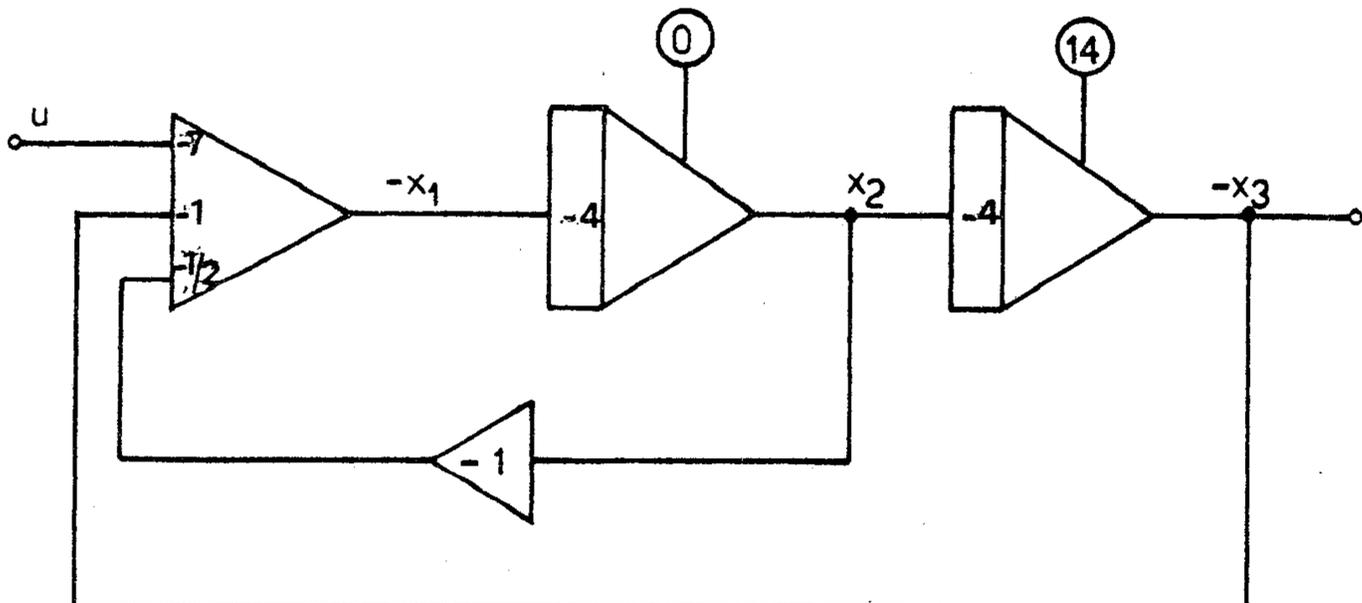


Fig. 3.9

Resumen

En la primera parte se vieron algunos modelos matemáticos útiles para representar un sistema real.

En la segunda parte, se analizaron los distintos elementos que debe tener un simulador analógico, tomando como base que para todo sistema real que pueda representarse mediante una ecuación diferencial, puede dibujarse el diagrama de bloques elementales. Se vieron además, los pasos a seguir para obtener el diagrama de simulación.

En la tercera parte, se trataron las limitaciones que tiene un simulador analógico y la forma de solucionarlas.

Para una mejor comprensión, se dieron ejemplos partiendo de sistemas de primer orden y generalizando con sistemas de orden superior.

Bibliografía

- Stanley M. Shinnars, Modern Control System, Theory and Application. Addison-Wesley Publishing Company-1978
- Chen and Haas, Elements of Control Systems Analysis: Classical and Modern Approaches, Prentice-Hall-1968
- John G. Truxal, Control Engineers' Handbook-Mc Graw-Hill Book Company 3^o Ed. 1958.