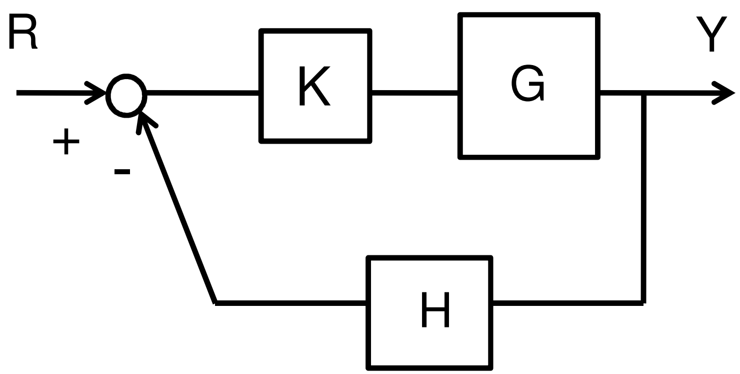
EL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

Propiedades y lineamientos para su trazado

Ogata 3°Ed. cap. 6 ; Kuo 7°Ed. cap. 8

EL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES (LR)



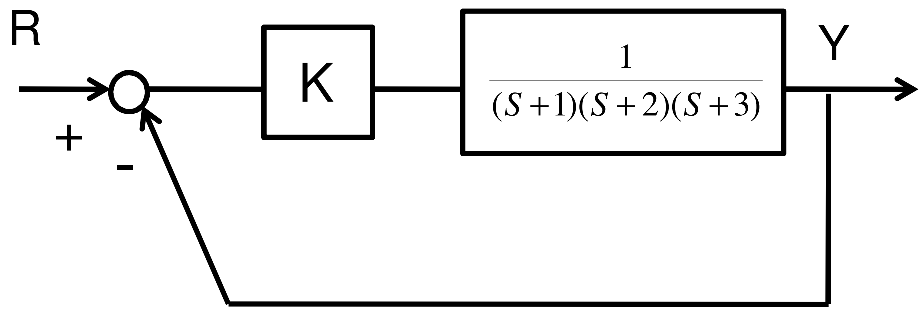
$$T_{(s)} = \frac{Y}{R} = \frac{K\,G_{(s)}}{1+KG_{(s)}H_{(s)}}$$

ESTABILIDAD

POLOS de T

CEROS de la diferencia de retorno (1+KGH)

Ejercicio propuesto:



$$T = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)+K}$$

Los polos de lazo cerrado serán los ceros de: $(s+1)(s+2)(s+3)+K=0$

(Para encontrar algunos valores de K importantes puede servir Routh-Hurwitz)

El cálculo de raíces AISLADAS da información importante, pero…

Resulta un poco confuso entender el efecto de K sobre la estabilidad.

Mejor Idea: dibujar en el plano S la posición de las raíces

Ventajas:

* Se tiene una rápida noción de la estabilidad relativa vs. K
* La gráfica será una ayuda para el diseño

Contra:

El procedimiento manual punto x punto es muy laborioso

Reglas para la construcción del lugar geométrico de las raíces

(Desarrolladas por el Ing. Walter R. Evans)

$$T = \frac{Y}{R} = \frac{KG}{1 + KGH}$$

$$1 + KGH = 0$$

(Ecuación característica)

$$G_{(s)} H_{(s)} = \frac{-1}{K}$$

(K≥0)

(Ganancia de lazo)

$$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{-1}{K}$$

(K≥0)

$$\arg\{G_{(s)}H_{(s)}\} = 180^0(2k+1)$$

$$\left|G_{(s)}H_{(s)}\right| = \left|\frac{1}{K}\right|$$

Todo punto que verifique la ecuación característica verifica estas 2 condiciones

Condición de ángulo

Condición de módulo

Condición de ángulo: $$\arg\{G_{(s)}H_{(s)}\} = 180^0(2k+1)$$

Para (K≥0) $$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{-1}{K}$$

<u>Lugar de las Raíces directo</u> (Realimentación negativa)

Si, en cambio (K≤0) $$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{1}{|K|}$$

Condición de ángulo: $$\arg\{G_{(s)}H_{(s)}\} = 360^0 k$$

<u>Lugar de las Raíces inverso</u> (Realimentación positiva)

Además de la condiciones de módulo y ángulo hay otras propiedades del LR

Regla 1:

Cantidad de ramas del Lugar de las Raíces: igual a la cantidad de polos de GH.

Regla 2:

las ramas del LR comienzan en polos y terminan en los ceros de GH.

Con $G = \dfrac{Z_G}{P_G}$ y $H = \dfrac{Z_H}{P_H}$ resulta: $T = \dfrac{KG}{1+KGH} = \dfrac{K.Z_G P_H}{P_G P_H + K.Z_G Z_H}$

Regla 3:

simetría con respecto al eje real.

Regla 4:

Cantidad de asíntotas: cantidad de polos menos cantidad de ceros de GH. (n-m)

Procedimiento para dibujar el Lugar de las Raíces

1) Ubicar los polos y ceros de GH.

2) Ubicar los puntos del eje real que pertenecen al LR.

3) Encontrar los puntos de salida y entrada al eje real.

4) Dibujar las asíntotas y su centroide.

5) Encontrar los puntos de cruce con el eje imaginario.

6) Calcular los ángulos de salida y llegada desde los polos y hacia los ceros de GH.

7) Bosquejo de las ramas del LR.

Preguntas interesantes:

¿Cuál es el efecto de los ceros de GH?

¿Cómo se manifiestan en T?

$$T = \frac{K_l G}{1 + K_l GH} = K_l \cdot \frac{Z_G P_H}{P_G P_H + K_l . Z_G Z_H}$$

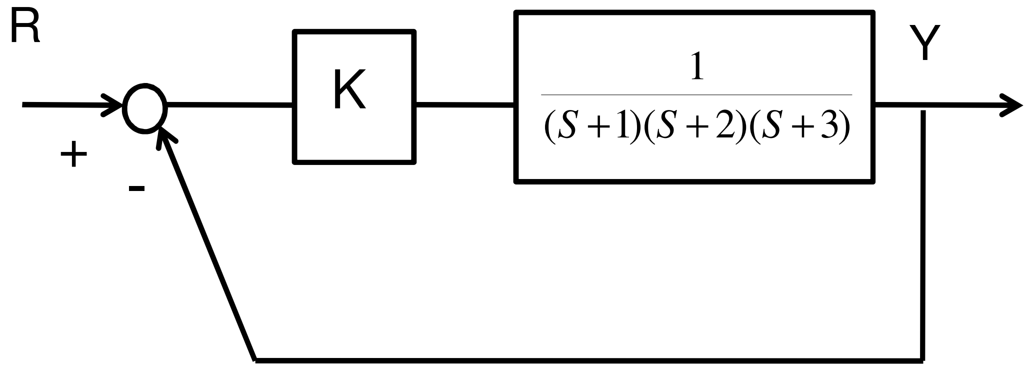
Son atractivos para las ramas del LGR

Si están en el SPI: Resultan estabilizantes para el sistema a LC

Si están en el SPD: Resultan **DES**estabilizantes

Funcionan similar a cargas + frente a cargas -

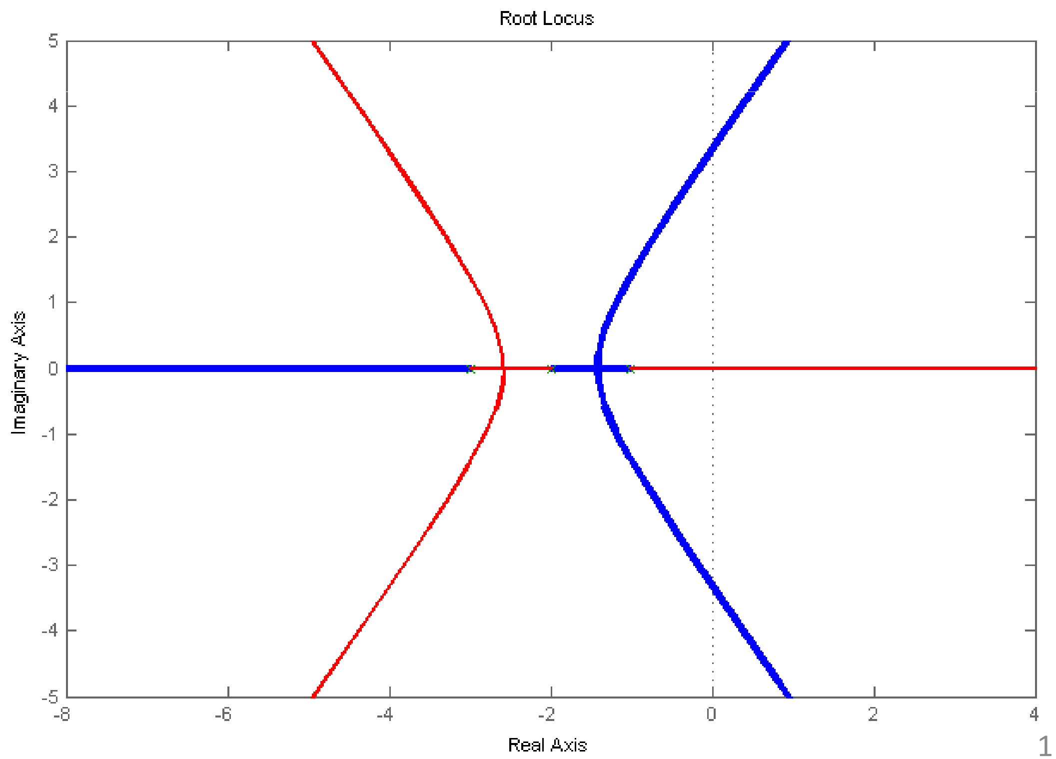
Ejercicio propuesto:



$$T = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)+K}$$

LGR para K≥0

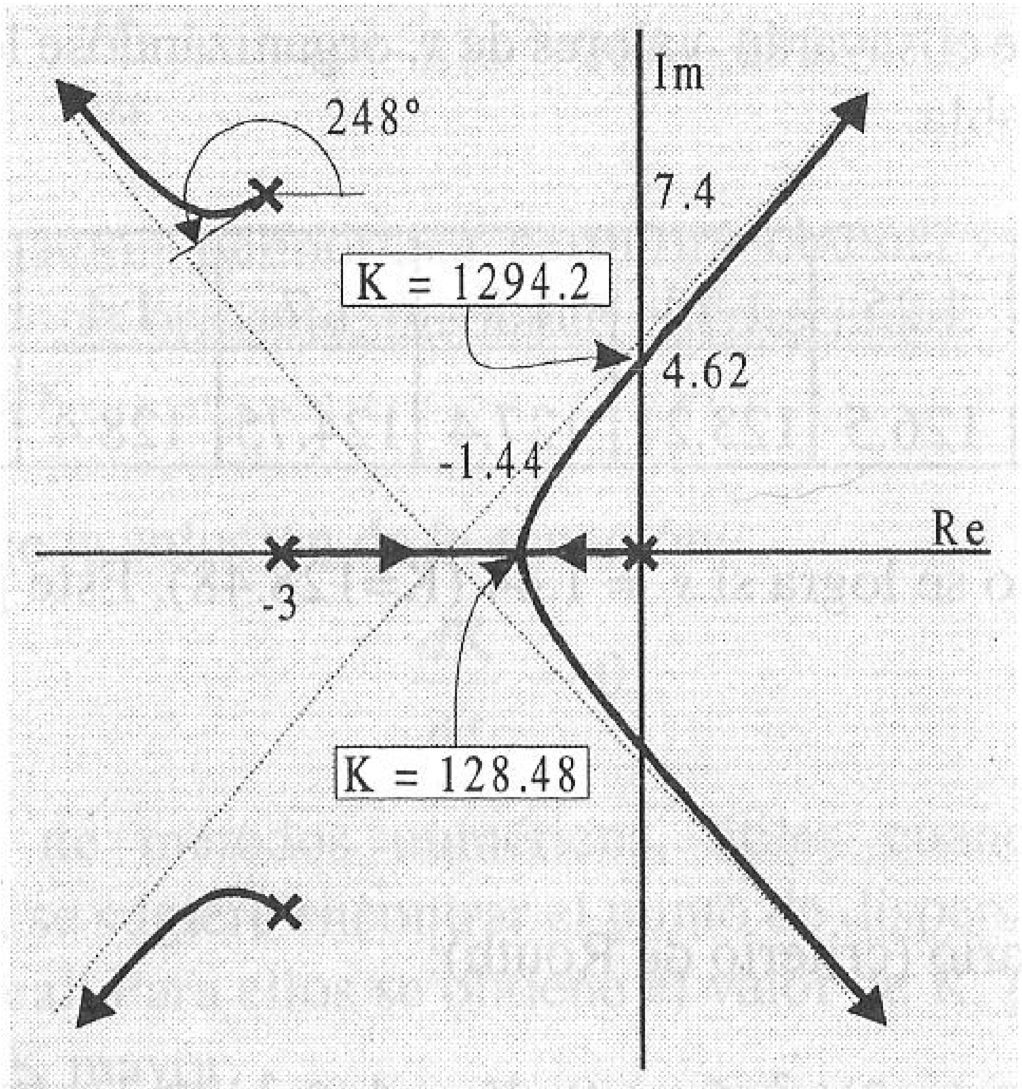
LGR para K≤0)



Ejemplo 1 $G = \dfrac{1}{S(S+3)(S^2+6S+64)} = \dfrac{1}{S(S+3)\left[(S+3)^2+7{,}4^2\right]}$

$H = 1$

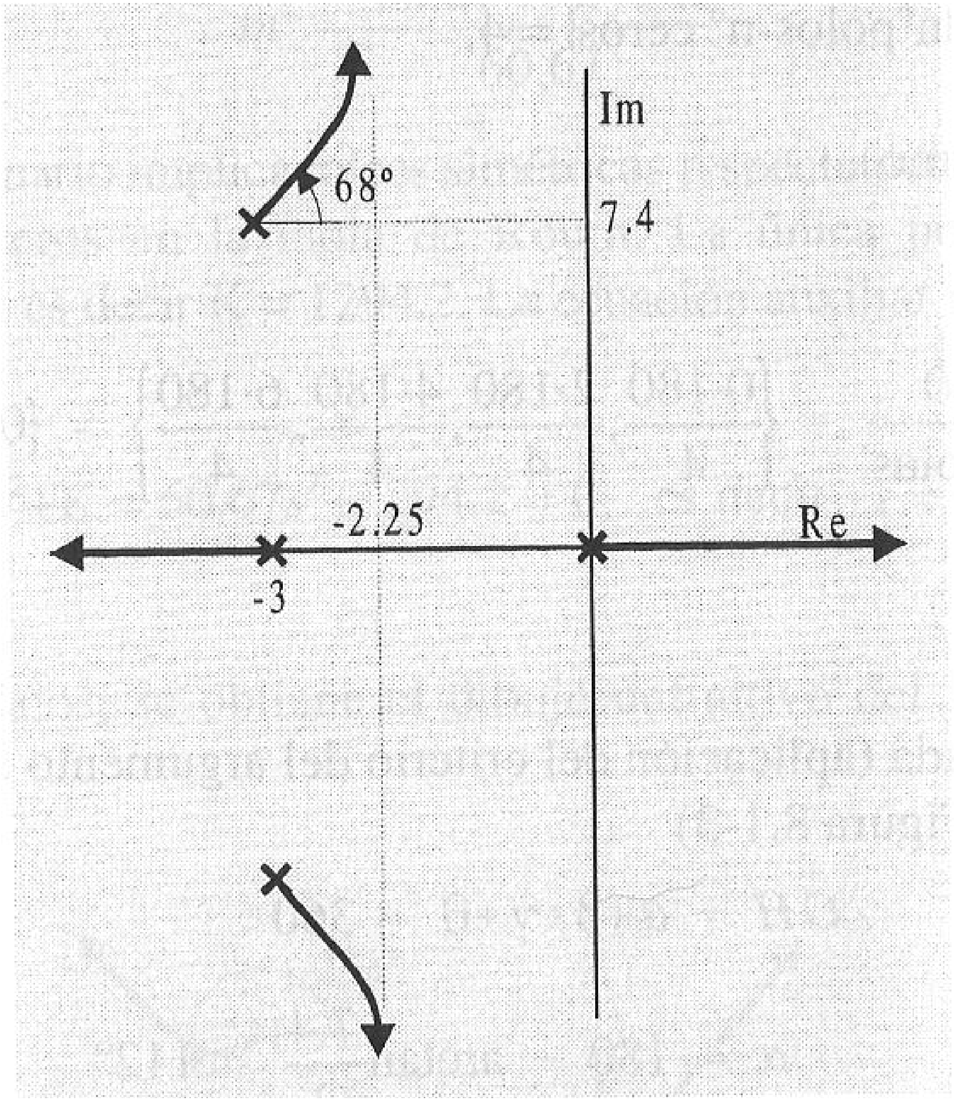
K≥0: “lugar directo”



Ejemplo 1 $G = \dfrac{1}{S(S+3)(S^2+6S+64)} = \dfrac{1}{S(S+3)\left[(S+3)^2+7{,}4^2\right]}$

$H = 1$

K≤0: “lugar inverso”

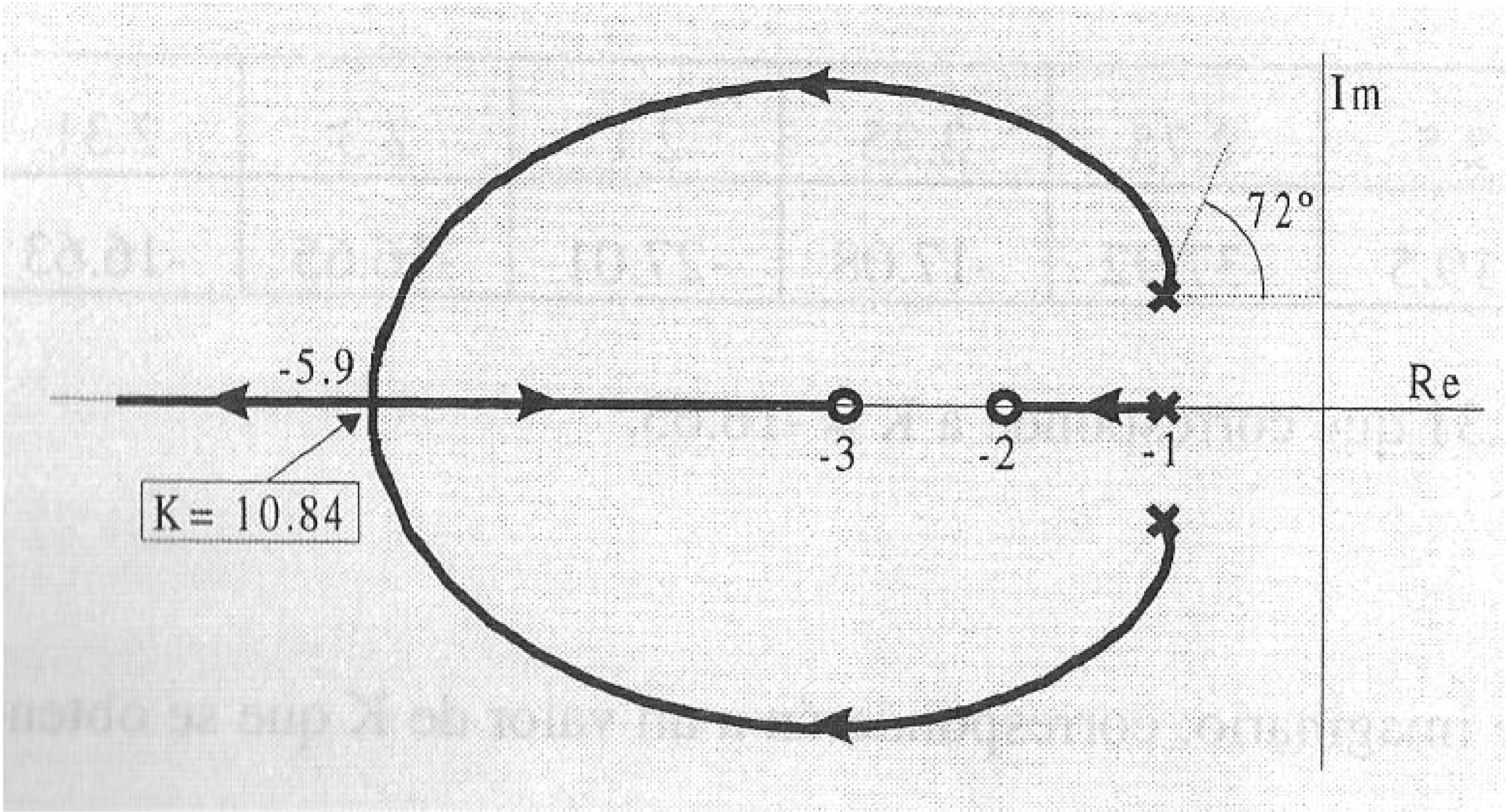


Ejemplo 2

$$G = \frac{(S+3)(S+2)}{(S+1)(S^2+2S+2)} = \frac{(S+3)(S+2)}{(S+1)\left[(S+1)^2+1^2\right]}$$

$$H = 1$$

K≥0: “lugar directo”

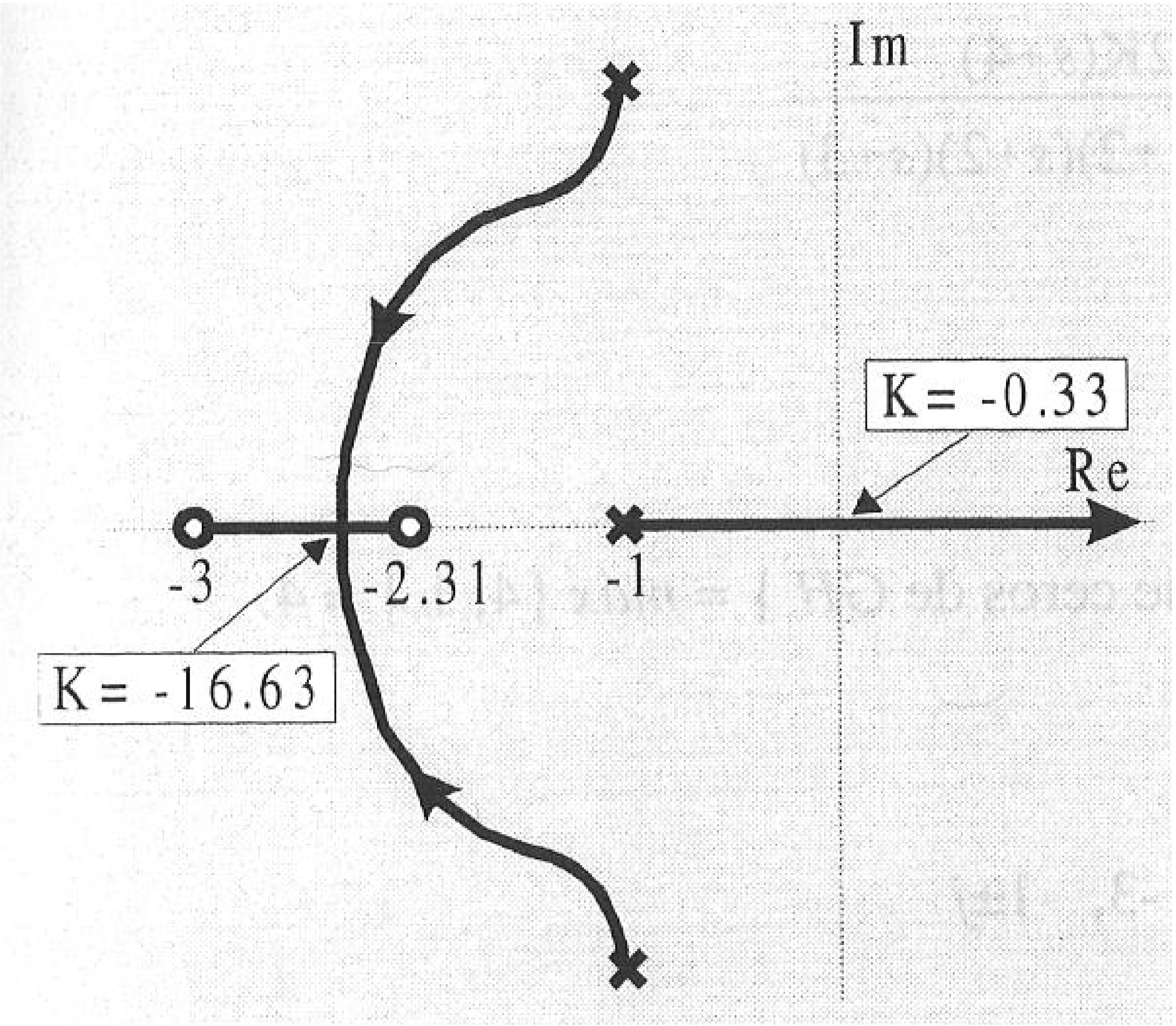


Ejemplo 2

$$G = \frac{(S+3)(S+2)}{(S+1)(S^2+2S+2)} = \frac{(S+3)(S+2)}{(S+1)\left[(S+1)^2+1^2\right]}$$

$$H = 1$$

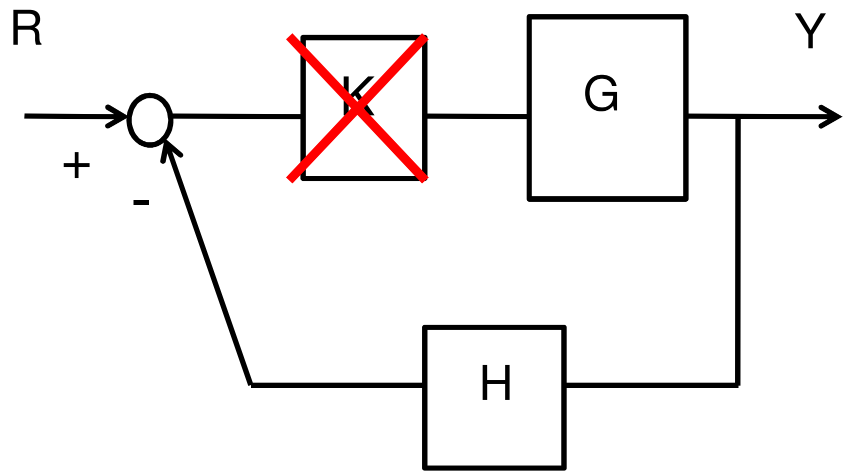
K≤0: "lugar inverso"



Variación útil del LGR: “Contorno de las raíces”

El parámetro variable **no** es el que corresponde a la estructura KGH ó…

hay más de un parámetro Variable.



Ejemplo

(Ogata 3ed. Cap. 6.8)

$$T = \frac{K}{S^2 + aS + K}$$

Se quiere conocer la ubicación de los polos de T al modificar el valor de “a”, tal vez para distintos valores de K.

Contorno de las raíces

Ejemplo

(Ogata 3ed. Cap. 6.8)

$$T = \frac{C}{S^2 + aS + C}$$

Ecuación característica:

$$S^2 + aS + C = 0$$

Se trata de modificar la Ec. Caract. para que tenga una forma similar a:

$$1 + K.G_{(S)}.H_{(S)} = 0$$

$$\frac{S^2}{S^2+C} + \frac{C}{S^2+C} + \frac{aS}{S^2+C} = 0 \longrightarrow 1 + a.\frac{S}{S^2+C} = 0$$

El parámetro “a”, o una fn del mismo, termina comportándose como el “k_l” de la estructura KGH

Contorno de las raíces

<u>Ejemplo</u>

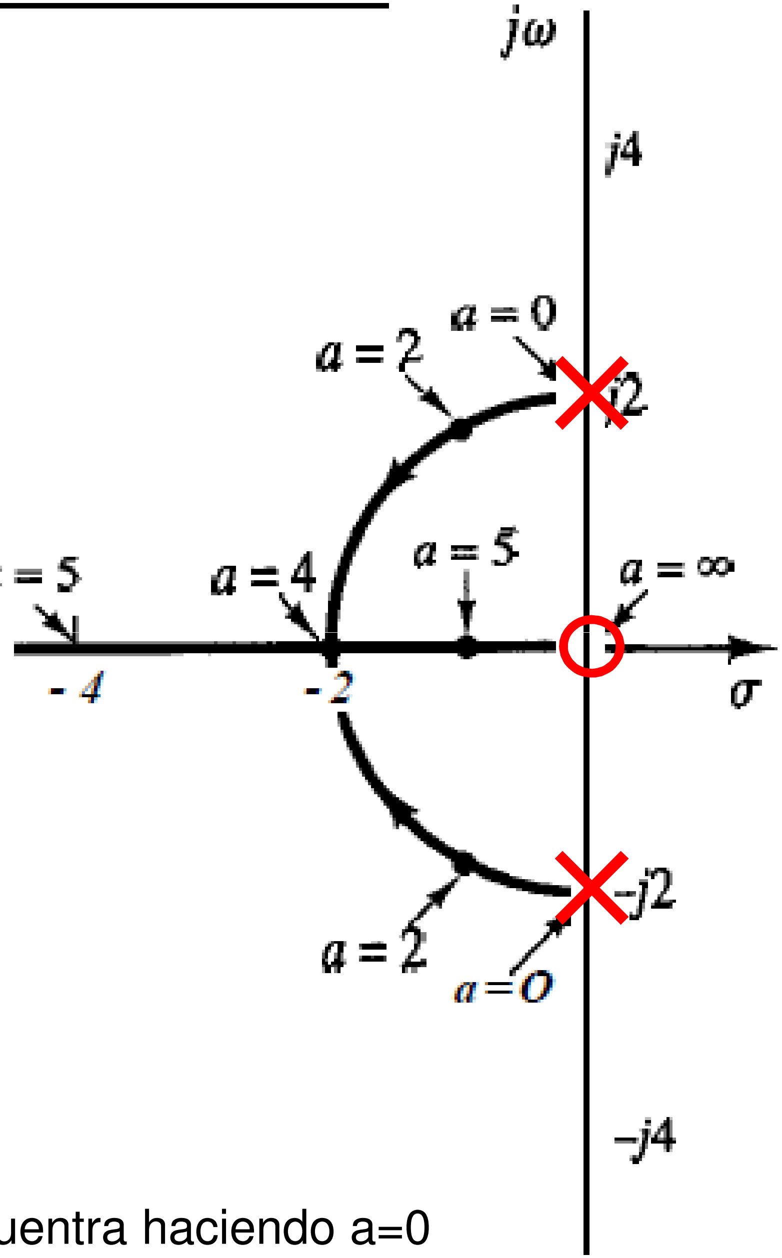
(Ogata 3ed. Cap. 6.8)

$$T = \frac{C}{S^2 + aS + C}$$

Para C=4…

Ec. Caract.:

$$1 + a.\frac{S}{S^2 + 4} = 0$$



(La posición inicial de los polos se encuentra haciendo a=0 en la expresión de T)

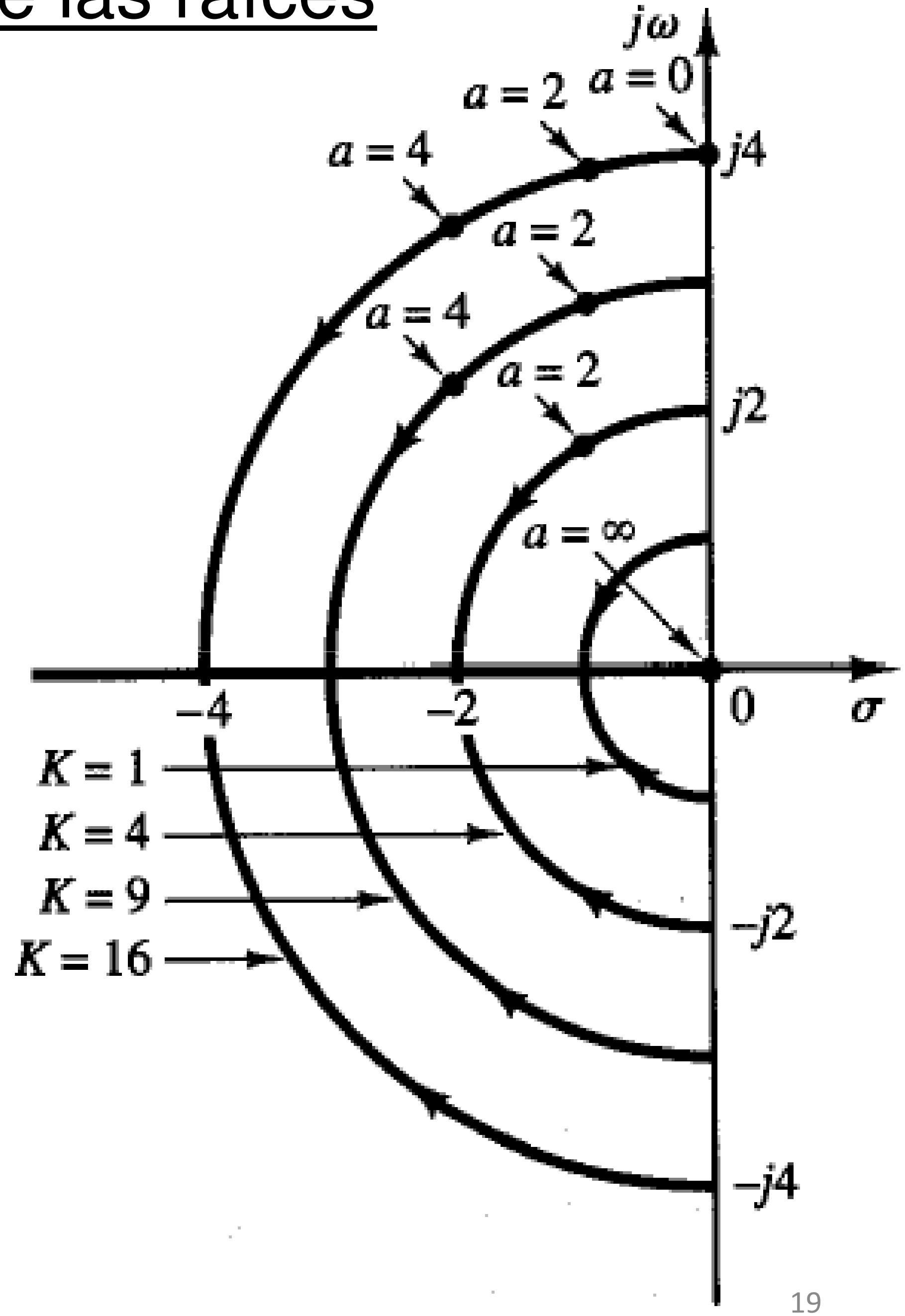
Contorno de las raíces

Ejemplo

(Ogata 3ed. Cap. 6.8)

$$T = \frac{C}{S^2 + aS + C}$$

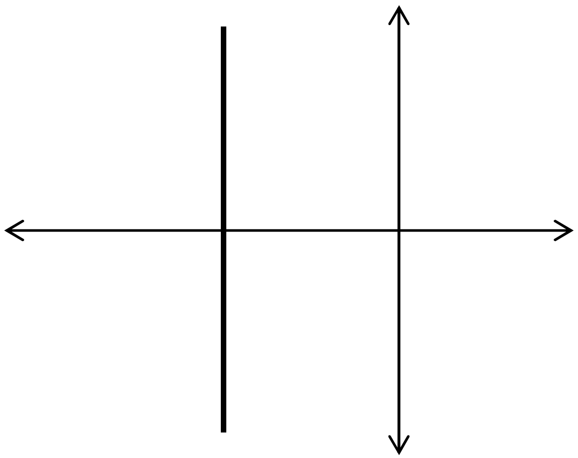
Contornos para otros valores de C.



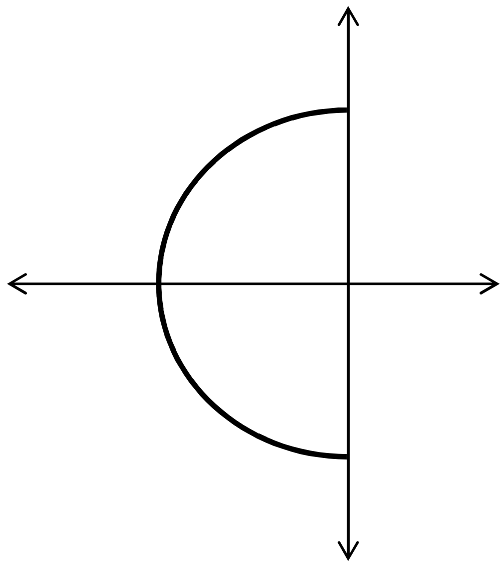
Obligatorio Saber

¿Dónde tiene sus polos?

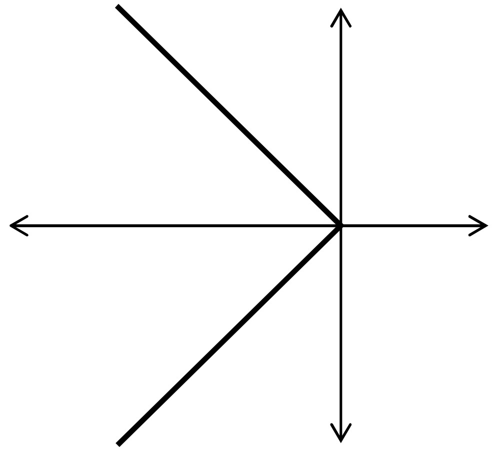
$$T = \frac{\omega_n^{\ 2}}{S^2 + 2\xi\varpi_n S + \varpi_n^{\ 2}}$$



ω_n^2 variable
($2\xi\omega_n$ cte.)



ξ variable

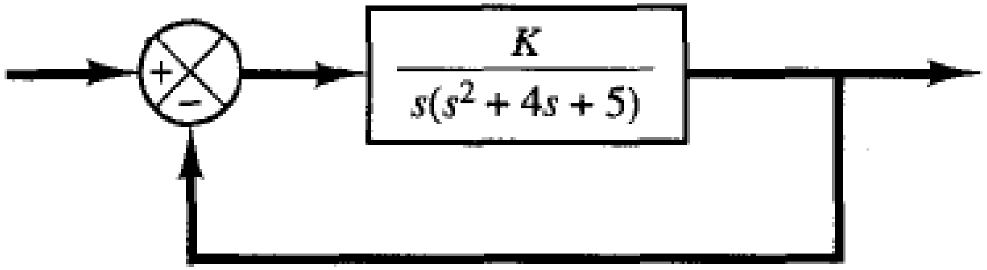


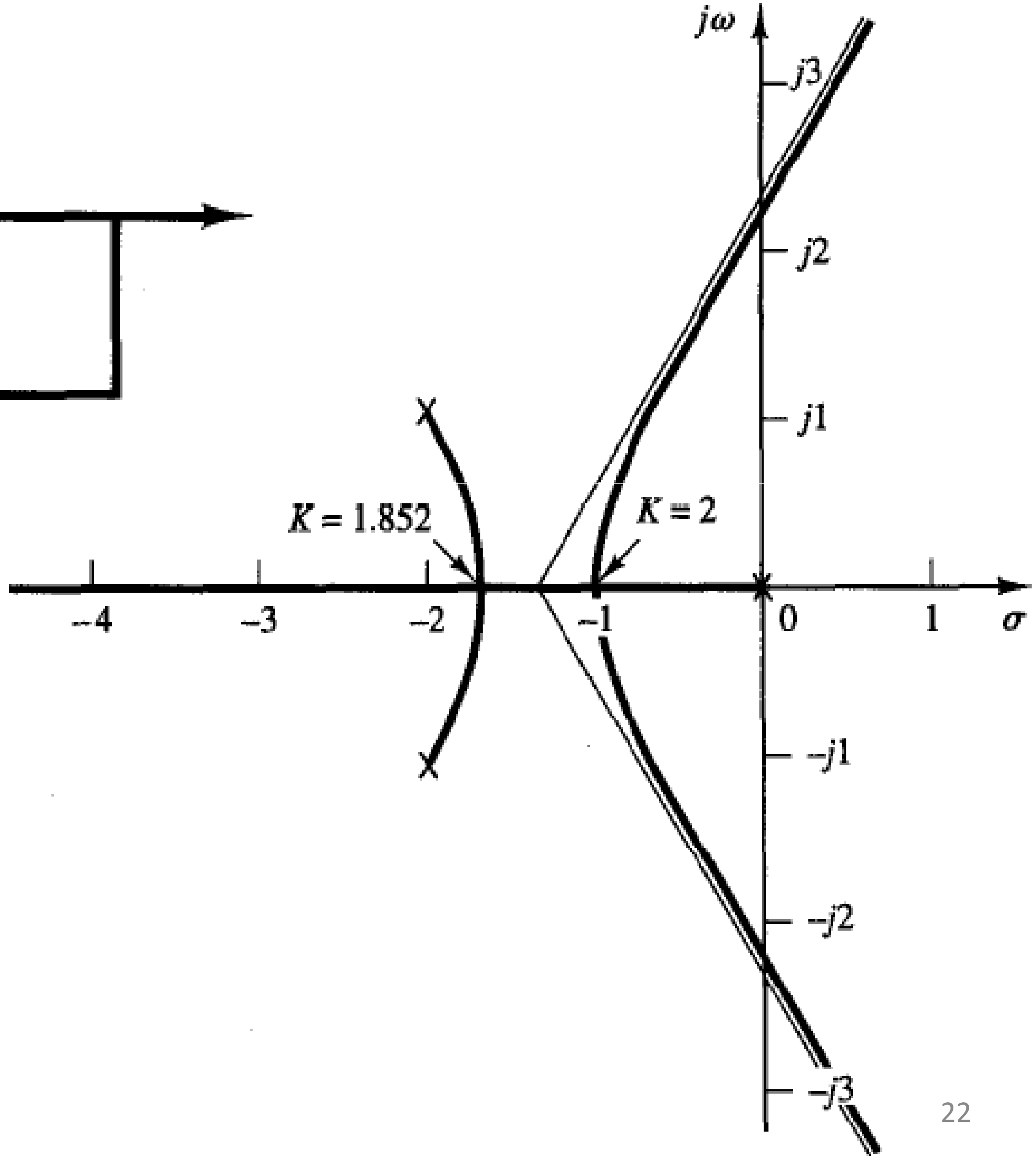
ω_n variable,
ξ fijo

Se pueden encontrar con la técnica del "LGR"

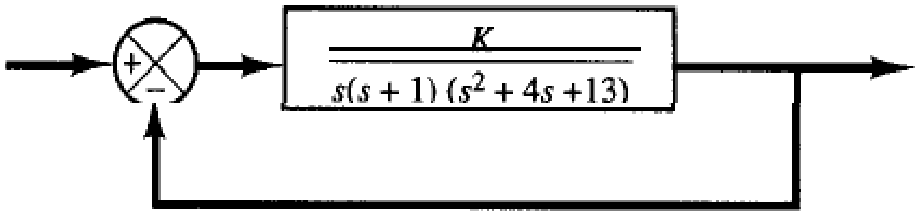
(No "LGR")

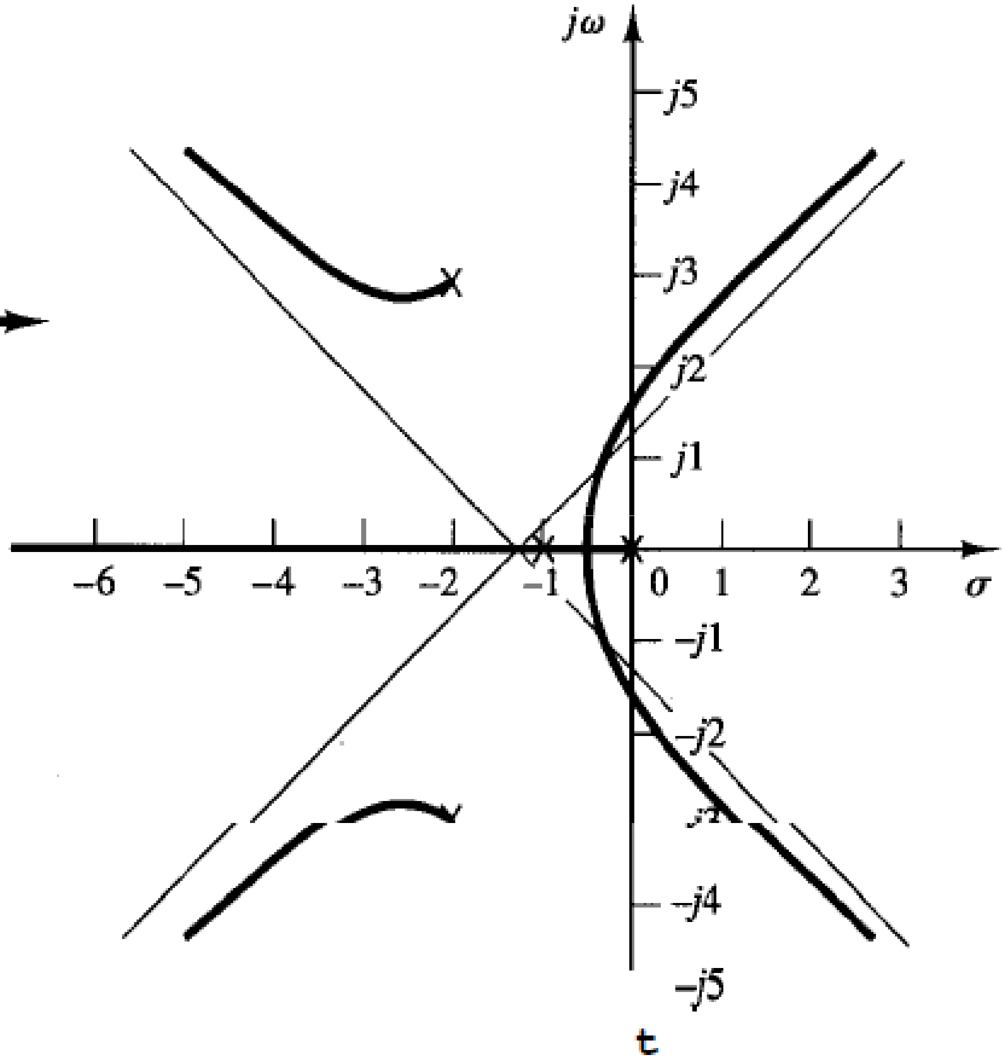
Ejemplos de LGR **resueltos** (Ogata)





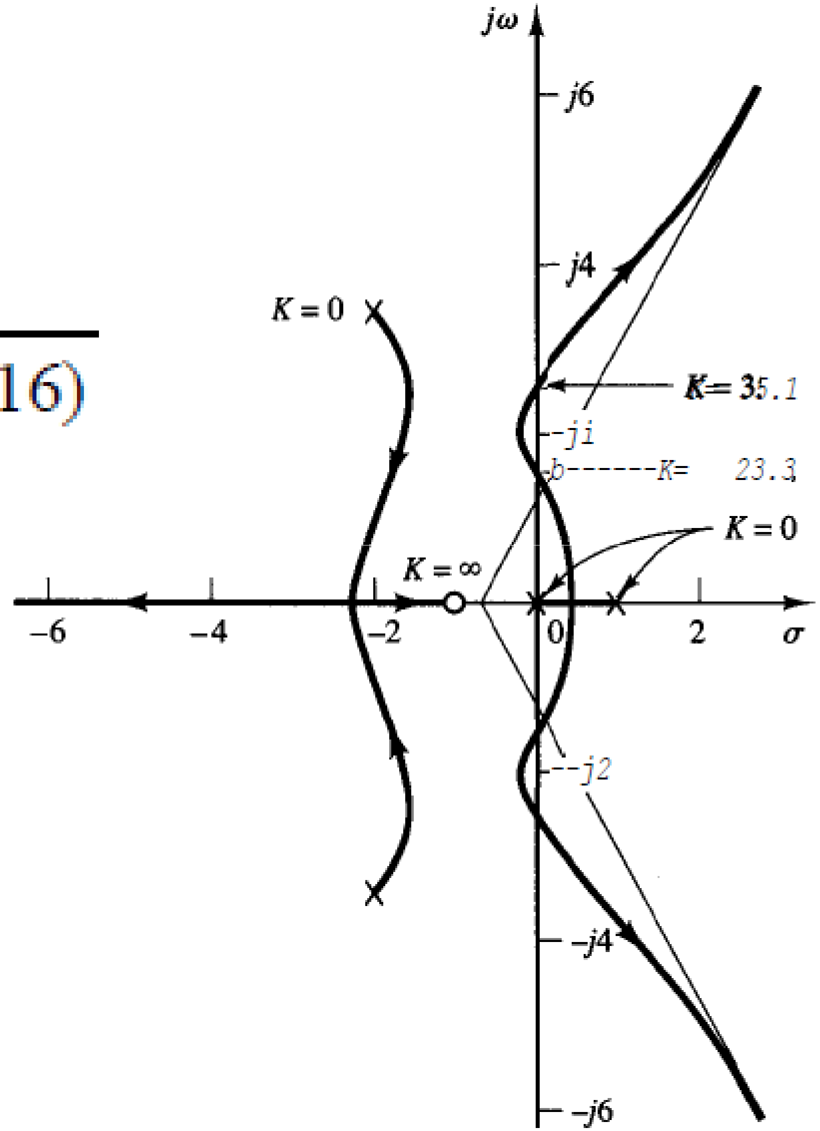
Ejemplos de LGR **resueltos** (Ogata)



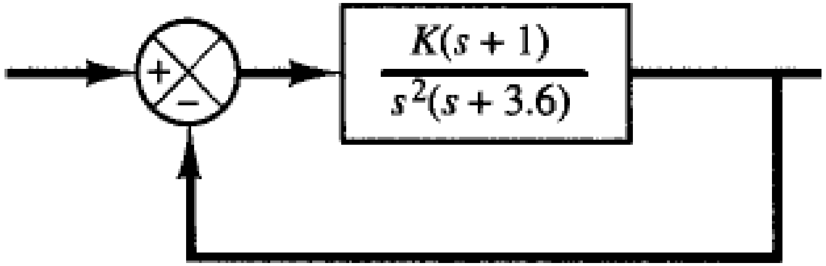


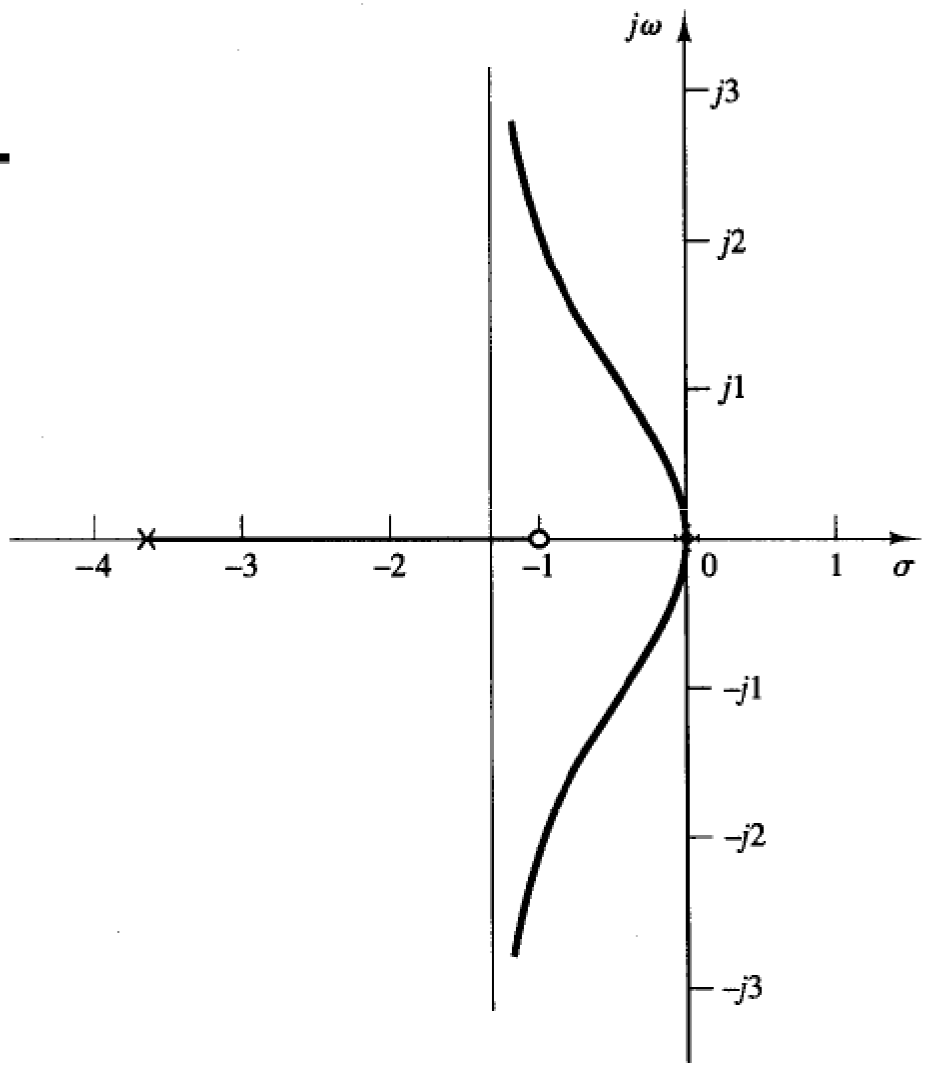
Ejemplos de LGR **resueltos** (Ogata)

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

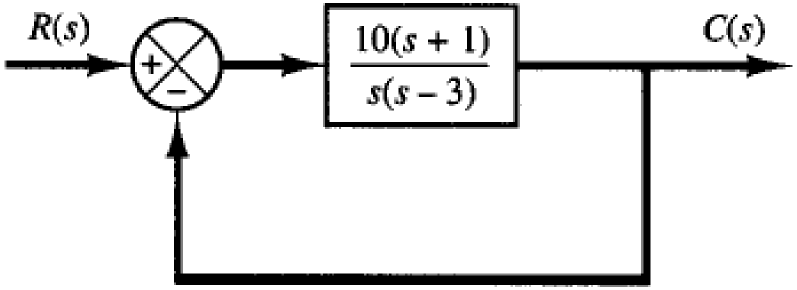


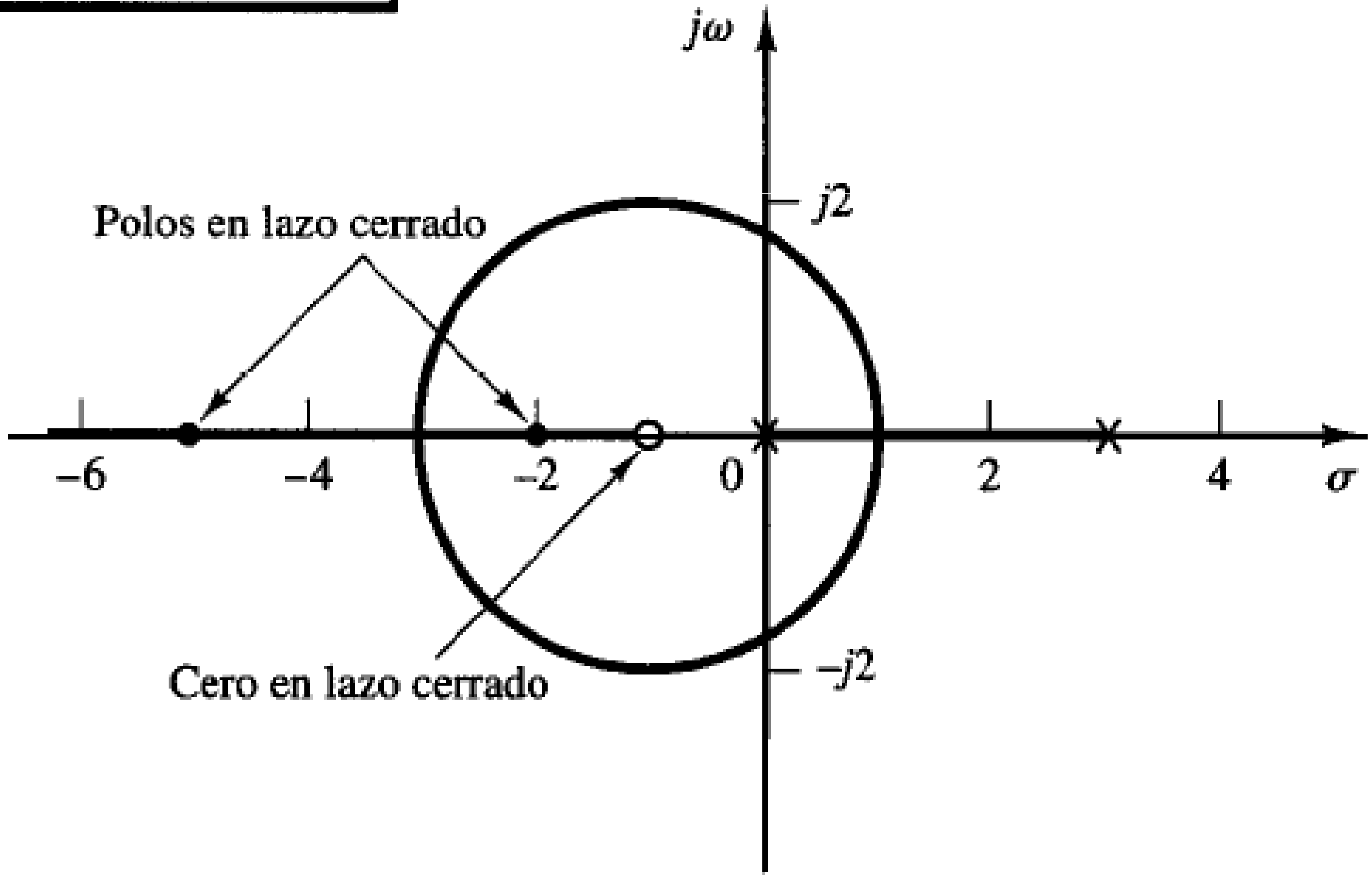
Ejemplos de LGR **resueltos** (Ogata)



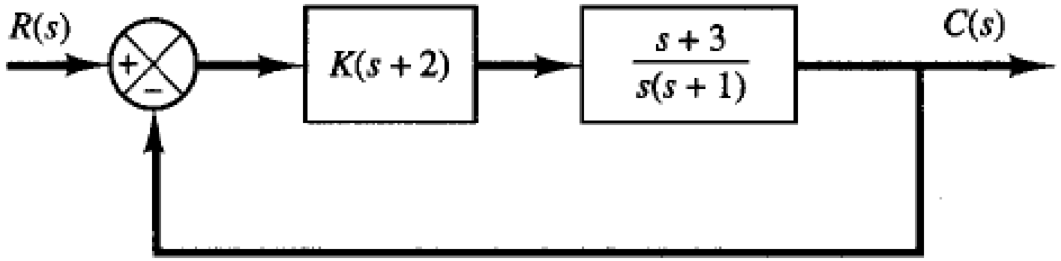


Ejemplos de LGR **resueltos** (Ogata)





Ejemplos de LGR **resueltos** (Ogata)



(a)

Figura 6-42