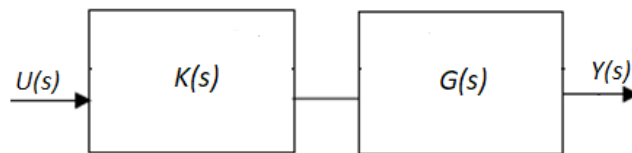


Efectos de agregar ceros o polos en la ganancia de lazo. Acciones de control

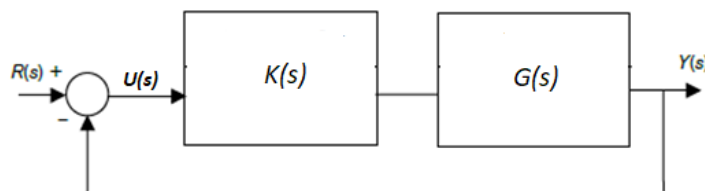
Ya se estudió el efecto de agregar en cascada con una función $G(s)$ otra función $K(s)$ que podía ser un cero o un polo, es decir en el esquema siguiente



Se concluyó que

- ✓ Agregar un cero hacia que el sistema total sea más rápido (menor tiempo de subida t_R) y menos estable (mayor sobrepico en la respuesta al escalón SP%).
- ✓ Agregar un polo hacia al sistema más lento (mayor tiempo de subida) y más estable (menor sobrepico en la respuesta al escalón)

Ahora estudiaremos que pasa cuando se agrega el polo o cero y además se efectúa realimentación como se muestra en el esquema realimentado de la figura siguiente



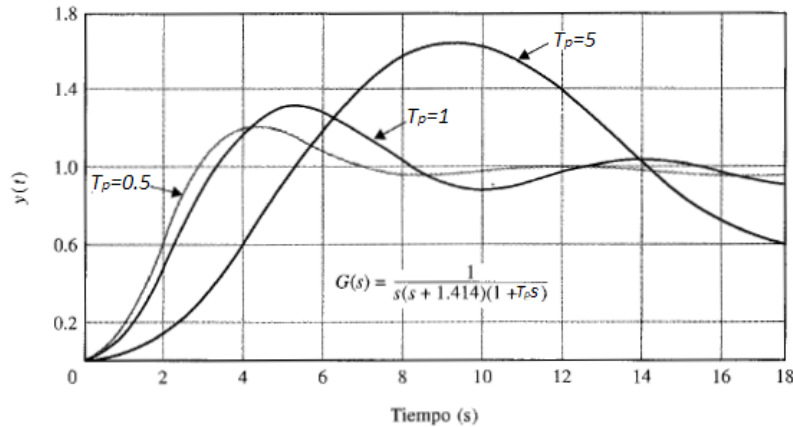
Se estudia entonces que pasará con el comportamiento del sistema a lazo cerrado cuando se agrega $K(s)$ a la ganancia de lazo.

1) Efecto de agregar un polo

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s \cdot (s + 2\xi\omega_n)} \quad \text{y} \quad K(s) = \frac{1}{1 + T_p s}$$
$$K(s) \cdot G(s) = G_{+p}(s) = \frac{\omega_n^2}{s \cdot (s + 2\xi\omega_n) \cdot (1 + T_p s)}$$

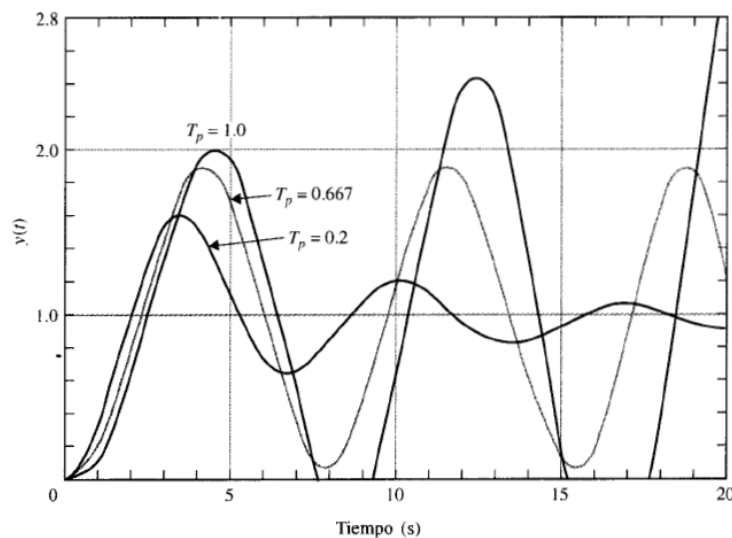
$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{(+p)}(s)}{1 + G_{(+p)}(s)} = \frac{\omega_n^2}{T_p s^3 + (1 + 2\xi\omega_n T_p)s^2 + (2\xi\omega_n)s + \omega_n^2}$$

La figura siguiente muestra la respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado para $\xi = 0.707$, $\omega_n = 1$ con $T_p = 0.5, 1$ y 5



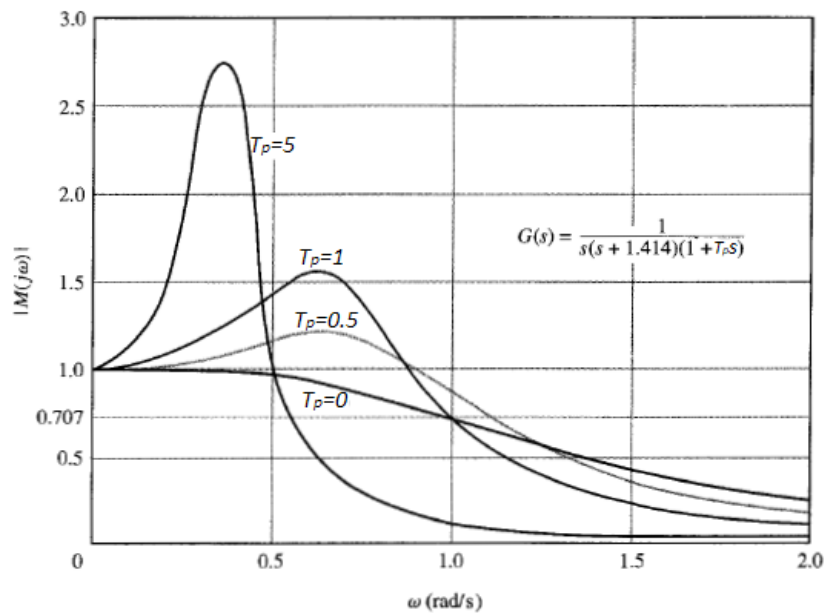
Claramente, a medida que T_p crece (polo más cerca del origen del plano s) aumenta el sobrepico de la respuesta al escalón a lazo cerrado. También se puede ver que aumenta el tiempo de subida, es decir se lentifica el sistema.

Se debe hacer notar que como ahora el sistema es de 3^{er} orden, es posible que se vuelva inestable para algunos valores de los parámetros del sistema. Esto se muestra en la figura siguiente que representa la respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado para $\xi = 0.25$, $\omega_n = 1$, con $T_p = 0.2, 0.667$ y 1



En este caso cuando $T_p = 0.667$ el sistema es marginalmente estable y cuando es mayor que 0.667 la amplitud de la respuesta al escalón se incrementa a medida que transcurre el tiempo resultando un sistema inestable.

El aumento del tiempo de subida tiene una explicación sencilla: el tercer polo disminuyó el ancho de banda y con ello la velocidad de respuesta del sistema. La figura siguiente representa el módulo de la respuesta en frecuencia a lazo cerrado para $\xi = 0.707$, $\omega_n = 1$, con $T_p = 0, 0.5, 1$ y 5:

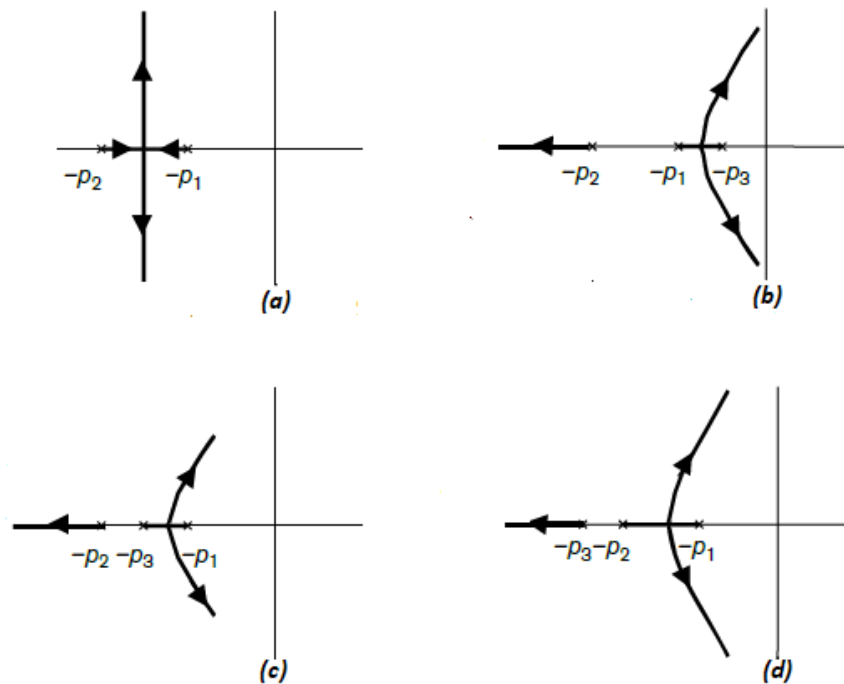


Claramente a medida que aumenta T_p , disminuye el ancho de banda y por otro lado es visible que el máximo pico de la respuesta M_r también aumenta lo que significa menos estabilidad (M_r infinito implica marginalmente estable).

Se puede concluir entonces que

En general el efecto de añadir un polo a la ganancia de lazo de un sistema realimentado hace que el sistema a lazo cerrado sea menos estable, más lento y por lo tanto disminuye el ancho de banda.

La figura siguiente pretende una justificación de lo afirmado mediante el lugar de las raíces para un sistema con 2 polos reales en $s=-p_1$ y $s=-p_2$ al que se le agrega un tercer polo de posición variable $s=-p_3$ y se modifica la ganancia K .



En la parte (a) de la figura se tiene el LR sin el agregado del polo; en (b) el polo agregado se ubica más cerca del origen que el más próximo del sistema: se obtiene la peor situación. En (c) se ubica entre los 2 polos del sistema: similar a (b) pero no tan desestabilizante. En (d) el polo agregado se ubica más lejos del origen que los polos del sistema: sigue el efecto desestabilizante pero disminuye a medida que el polo agregado se aleja para finalmente para $(-p_3 \rightarrow -\infty)$ se vuelve al diagrama (a).

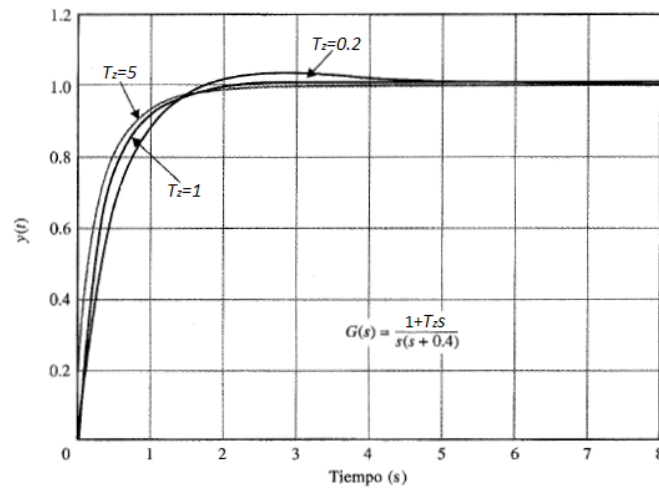
2) Efecto de agregar un cero

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s \cdot (s + 2\xi\omega_n)} \quad \text{y} \quad K(s) = 1 + T_z s$$

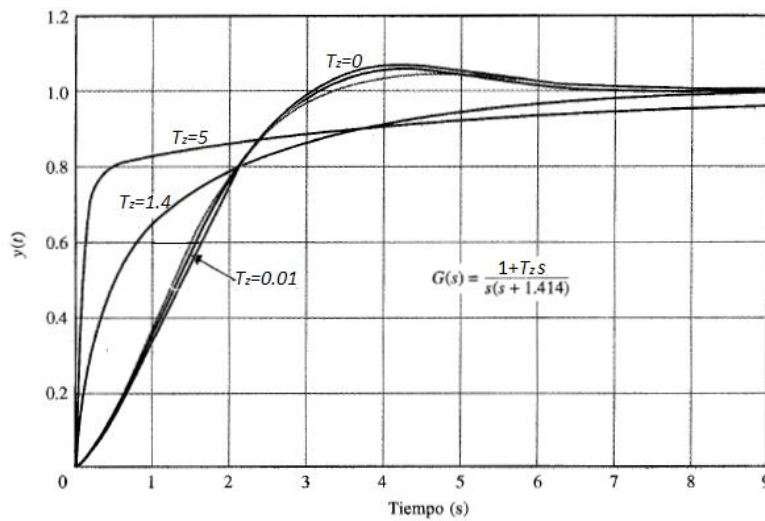
$$K(s) \cdot G(s) = G_{+z}(s) = \frac{\omega_n^2 \cdot (1 + T_z s)}{s \cdot (s + 2\xi\omega_n)}$$

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{(+z)}(s)}{1 + G_{(+z)}(s)} = \frac{\omega_n^2 \cdot (1 + T_z s)}{s^2 + (2\xi\omega_n + T_z \omega_n^2) \cdot s + \omega_n^2}$$

La respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado correspondiente a $\omega_n = 1$, $\xi = 0.2$ y $T_z = 0.2$, 1 y 5 se muestra en la figura siguiente



Es de destacar que si T_z es grande, si bien el tiempo de subida disminuye, el tiempo de establecimiento se hace bastante más largo ya que T_z aumenta bastante la constante de tiempo del par de polos de lazo cerrado. Esto es más evidente si se considera el sistema a lazo abierto tiene $\omega_n = 1$, $\xi = 0.707$; en la figura siguiente se muestran para este caso las curvas para varios valores de T_z donde se puede apreciar lo afirmado



Por ejemplo, para $T_z=5$ la función de transferencia de lazo cerrado queda

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(1 + 5s)}{s^2 + 6.4s + 1}$$

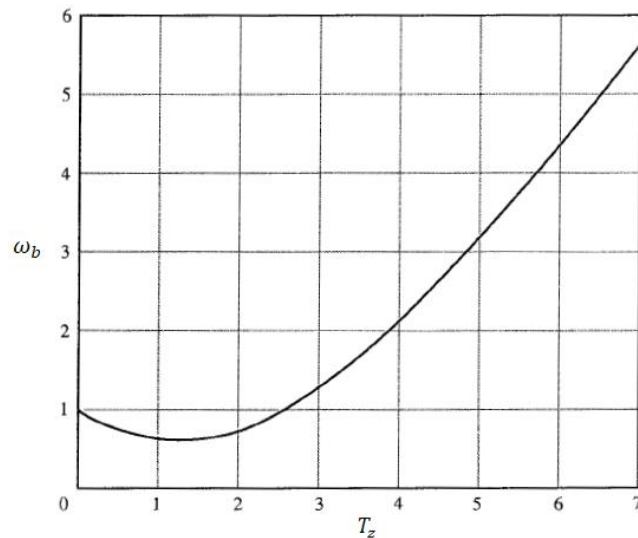
De modo que si bien el cero provoca una rápida subida (tiempo de subida t_R corto), el establecimiento de la respuesta será lento ya que la constante de tiempo del par vale $6.4/2 = 3.2$.

El hecho que el tiempo de subida se reduzca, como la relación con el ancho de banda es inversamente proporcional ($t_R \cdot \omega_b = constante$), estamos en condiciones de concluir que el ancho de banda aumentó.

Ancho de banda:

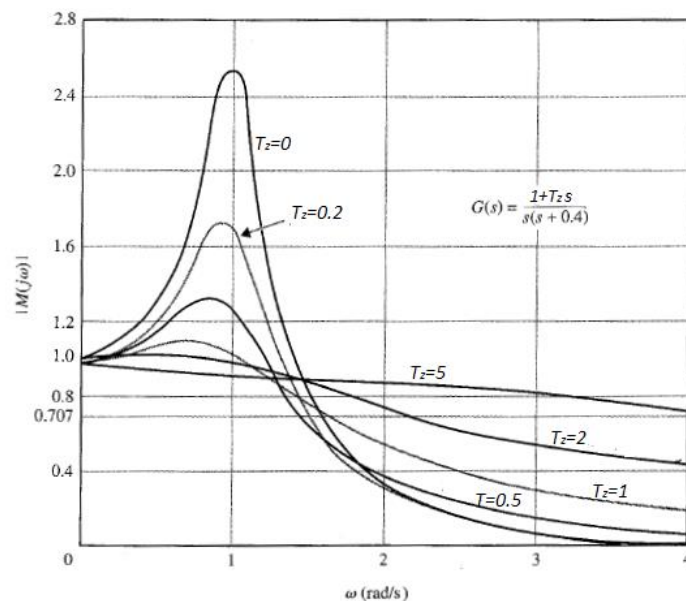
$$\omega_b = \sqrt{-a + 0.5\sqrt{a^2 + 4\omega_n^4}} \quad \text{con } a = 4\xi^2\omega_n^2 + 4\xi\omega_n^3T_z - 2\omega_n^2 - \omega_n^4T_z^2$$

La figura siguiente representa el ancho de banda en función de T_z



Como se aprecia para bajos valores de T_z se tiene que el ancho de banda disminuye lo cual implica que el tiempo de subida t_R es mayor (menos rápido).

La siguiente figura avala lo afirmado: se presenta el módulo de la respuesta en frecuencia de lazo cerrado para $\omega_n = 1$, $\xi = 0.2$ y $T_z = 0, 0.2, 0.5, 1, 2$ y 5



Se puede apreciar que el ancho de banda primero disminuye para posteriormente a partir de $T_z=1$ comienza a aumentar a medida que aumenta T_z .

Se puede decir entonces que:

En general añadir un cero en la función de transferencia de lazo abierto incrementa el ancho de banda del sistema de lazo cerrado y por lo tanto disminuye el tiempo de subida de la respuesta al escalón a lazo cerrado.

Se subraya lo de “**en general**” porque en el caso de agregar un cero, el efecto va a depender no solo de la posición en que se agrega el cero sino también mucho del sistema mismo; el siguiente ejemplo pone de manifiesto lo concluido. Sea la función de transferencia de lazo abierto siguiente

$$G(s) = \frac{6}{s \cdot (s + 1) \cdot (s + 2)}$$

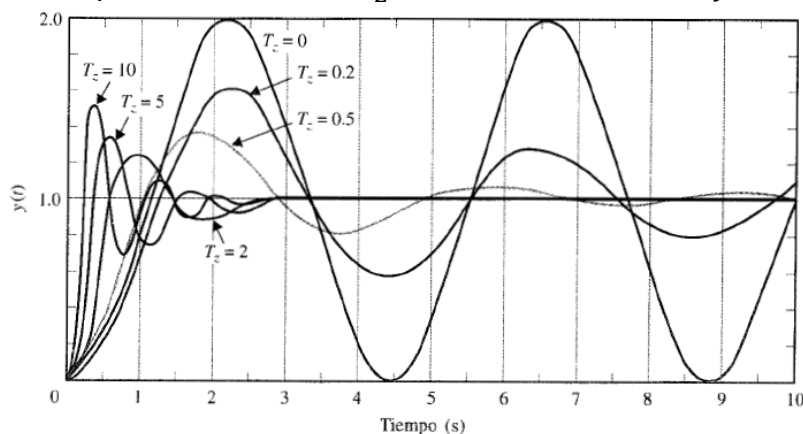
Se agrega un cero a la función de transferencia del lazo de modo que se tiene

$$G_{+z}(s) = \frac{6 \cdot (1 + T_z s)}{s \cdot (s + 1) \cdot (s + 2)}$$

La función de transferencia de lazo cerrado resulta

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{+z}(s)}{1 + G_{+z}(s)} = \frac{6 \cdot (1 + T_z s)}{s^3 + 3s^2 + (2 + 6T_z) \cdot s + 6}$$

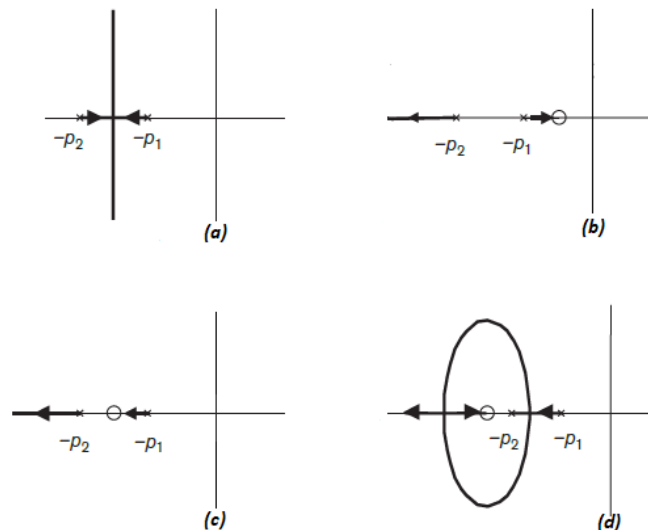
La figura siguiente es la respuesta a lazo cerrado para una señal de entrada escalón para distintos T_z : $T_z = 0, 0.2, 0.5, 2, 5$ y 10



Para $T_z=0$ no se agrega el cero o está muy lejano sobre el eje real negativo: el sistema es marginalmente estable. A medida que el cero se aproxima al origen ($T_z>0$) el sistema comienza a estabilizarse, en un comienzo disminuye el sobrepico pero a partir de aproximadamente $T_z=1$ el

sobrepico vuelve a incrementarse como consecuencia de que el cero aparece a lazo cerrado y cada vez más próximo al origen. En cuanto al tiempo de subida este siempre mejora.

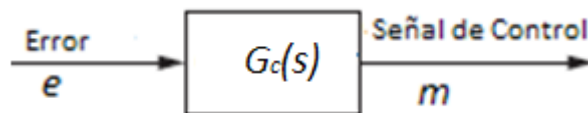
Igual que para el caso de agregar un polo, se busca justificar lo analizado mediante el LR para el sistema con 2 polos reales en $s=-p_1$ y $s=-p_2$ al que se le agrega un cero de posición variable $s=-z$ y se modifica la ganancia K .



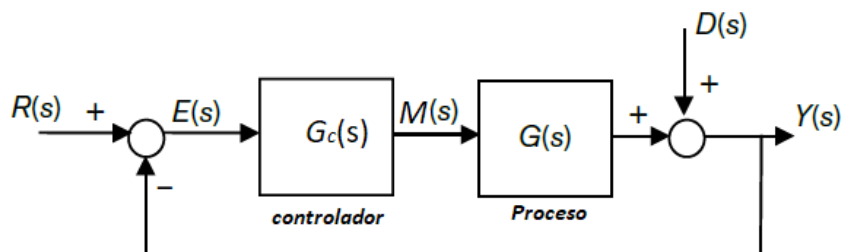
- ✓ en la parte (a) de la figura el cero no está o está en $-\infty$.
- ✓ En la parte (b) el cero se ubica más próximo al origen que los polos del sistema: el sistema realimentado será siempre sobreamortiguado; esta no es una situación favorable de diseño.
- ✓ En parte (c) el cero se ubica entre los polos del sistema: en este caso también el sistema a lazo cerrado presentará 2 polos reales y por lo tanto será sobreamortiguado, pero como esta vez ambos polos están alejándose del origen el sistema presentará respuestas más rápidas que en (b).
- ✓ En la parte (d) el cero se ubica a la izquierda de los polos del sistema dando lugar a la mejor configuración: en este caso las 2 ramas salen del eje real y se introducen en el plano s pero ambas retornan al eje real de modo que es posible conseguir respuestas subamortiguadas con un buen amortiguamiento relativo ξ y valores elevados de ω_n en la medida que el cero se aleje más del origen. Es decir en esta configuración, ajustando la posición del cero y el valor de K se pueden ajustar la estabilidad (ξ) y la velocidad (ω_n) de respuesta de lazo cerrado.

ACCIONES BÁSICAS DE CONTROL

El controlador se representa por una función de transferencia $G_c(s)$ cuya entrada es el error $E(s)$ (transformada de Laplace de $e(t)$); la salida del controlador es la señal de control representada por $M(s)$ (transformada de Laplace de $m(t)$) ya que ***esta será la encargada movilizar al actuador***. Esto se representa en el esquema en bloques siguiente:



Según lo planteado, la ubicación del controlador en un lazo con realimentación unitaria es la mostrada en la figura siguiente



$E(s)$ es el error: diferencia entre la “Variable de Referencia” $R(s)$ y la “Variable de salida” $Y(s)$.

$D(s)$ es una perturbación aplicada a la salida del proceso

La finalidad del controlador es permitir un funcionamiento adecuado del sistema realimentado tanto en el transitorio (velocidad y estabilidad) como en el estado estacionario (exactitud) y para seguimiento de la señal de referencia y rechazo de la señal perturbadora.

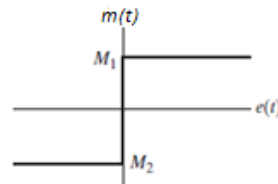
La inteligencia del controlador la determina la complejidad de las operaciones matemáticas que es capaz de realizar. En este sentido la acción ON-OFF es la más elemental que se puede plantear; la complejidad va incrementándose al utilizar acciones P, I y D. En esta parte se estudian las características de cada una de las acciones de control: P, I y D y la de las posibles combinaciones entre ellas (se incluye material sobre la acción ON-OFF).

ACCIÓN “ON-OFF”

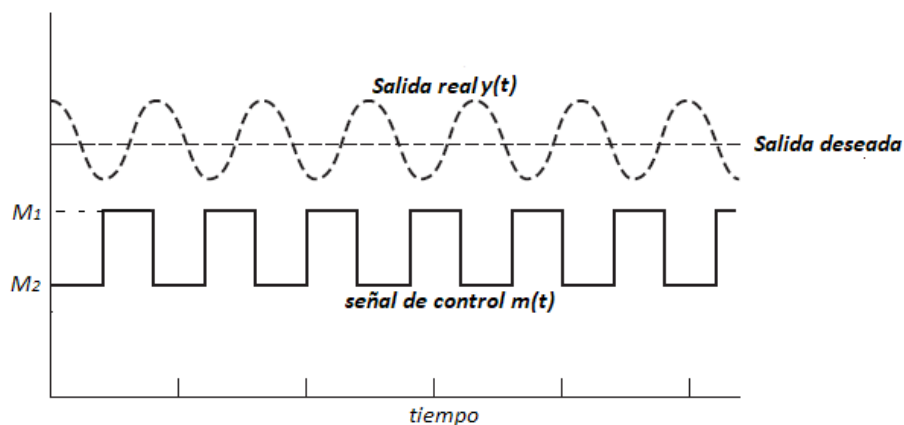
Es la estrategia de control más antigua y más simple de implementar. Matemáticamente el algoritmo de control On-Off es como sigue:

$$m(t) = \begin{cases} M_1 & \text{si } e(t) > 0 \\ M_2 & \text{si } e(t) < 0 \end{cases}$$

Gráficamente, la relación entre la señal de control y el error, es la siguiente:



En la mayoría de las aplicaciones los parámetros M_1 y M_2 corresponden a las posiciones "On" y "Off" del dispositivo de actuación. Cuando la salida real es menor que la salida deseada, $e(t) > 0$ y la señal de control es M_1 o nivel alto (suponiendo que con este nivel el actuador hará lo necesario para llevar la salida real cada vez más hacia la salida deseada y viceversa). Es de destacar que el actuador opera entre 2 estados extremos: abierto-cerrado, encendido-apagado, etc. Es una forma discontinua de control. La salida del proceso con este modo de control indefectiblemente es una oscilación ya que la señal de control conmuta continuamente entre M_1 y M_2 ; la oscilación es la característica típica de este tipo de control y se la puede ver gráficamente en la siguiente figura:



En esta forma de control **no se tiene en cuenta la amplitud del error** solo si es positivo o negativo y ante un error reacciona produciendo una salida $m(t)$ de igual amplitud para un error grande o chico.

Es una técnica sencilla y económica, parece muy bruta, pero aporta solución en muchos casos donde es aceptable una fluctuación en la

variable de salida. Este tipo de control es ampliamente utilizado en aplicaciones industriales y domésticas.

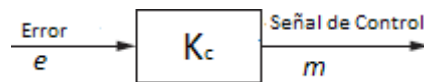
ACCIÓN PROPORCIONAL

Esta acción de control recibe el nombre de “**proporcional**” como consecuencia de que existe una relación directamente proporcional entre el valor del error “ **$E(s)$** ” y la variable de salida del controlador **$M(s)$** o “**Variable de Control**” o “**Variable Manipulada**” o lo que es lo mismo la posición del elemento final de control.

Por lo tanto en esta acción de control la salida del controlador, a diferencia del control On-Off, proporciona una salida $m(t)$ que es proporcional a la amplitud del error. Matemáticamente se escribe entonces:

$$\Delta V_M = K_c \cdot \Delta E$$

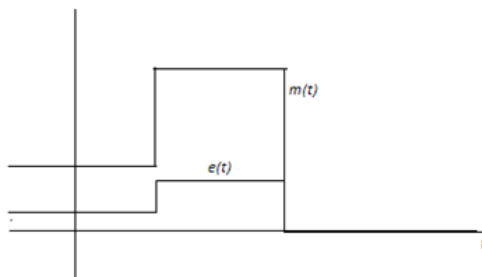
Donde K_c recibe el nombre de “**Constante de Acción Proporcional**”.



La acción Proporcional entonces se puede escribir en el tiempo según la siguiente expresión:

$$m(t) = K_c \times e(t)$$

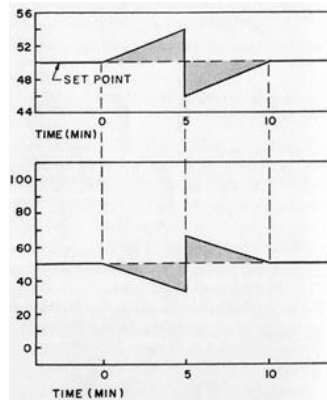
La gráfica siguiente muestra la relación que existe entre la entrada y la salida de un controlador proporcional:



Claramente a mayor error $e(t)$, mayor salida del controlador $m(t)$

Sin embargo, para actuar con efectividad en el lazo de control, la salida del controlador debe oponerse al sentido de cambio del error; esto se

muestra en la siguiente figura para una variación del error en forma de una rampa con salida invertida en signo.

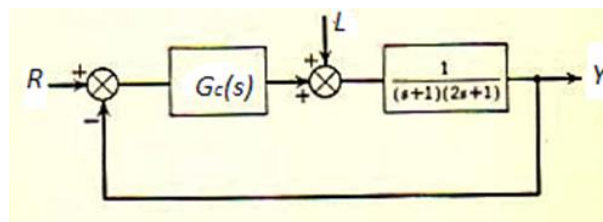


Se puede ver que este tipo de controlador **responde exclusivamente a la señal de error de cada instante y en forma proporcional a la amplitud del mismo**. En el control proporcional cuando el error es grande la acción es grande y viceversa pero siempre en una forma proporcional. Si K_c es pequeña las acciones sobre el actuador serán suaves, la respuesta será lenta y sin oscilaciones; todo lo inverso si K_c es grande.

Un inconveniente serio que presenta esta acción de control es que indefectiblemente deberá existir un error entre el valor deseado y el valor real de la variable controlada (llamado offset) para que el controlador entregue señal.

Ante una perturbación o cambio en la señal de entrada, la acción proporcional no tiene en cuenta errores previos ni futuros, solo toma en cuenta **el valor del error en cada instante de tiempo**. Es por ello que se dice que **“la acción proporcional es un control basado en el presente”**.

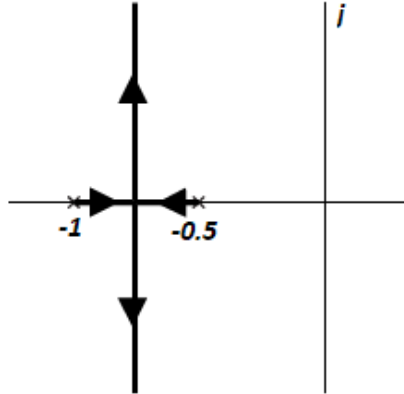
Para el sistema tipo 0 dado en la siguiente figura



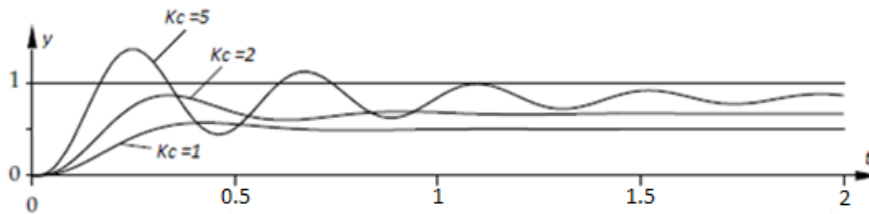
Se le aplica control proporcional, es decir $G_c(s)=K_c$. El lugar de las raíces para la ganancia proporcional K_c variable resulta el mostrado en la figura

siguiente con $K=0.5K_c$ variable porque se debe acomodar $G(s)$ en la forma polo-cero resultando la siguiente función a graficar

$$G_c(s)G(s) = K_c \cdot \frac{0.5}{(s+1)(s+0.5)} = K \cdot \frac{1}{(s+1)(s+0.5)} \quad \text{con } K = 0.5 \cdot K_c$$

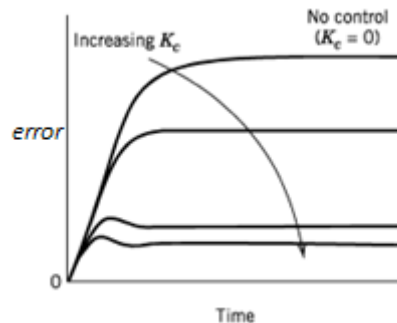


La figura siguiente muestra la evolución en el tiempo de la salida cuando se aplica un escalón unitario en la referencia con acción proporcional.



Se observa que cuanto más grande es K_c menor es el offset o error estacionario, pero como contrapartida, presenta un comportamiento menos estable.

En la gráfica que sigue se observa la salida pero ante una perturbación L tipo escalón.



En este caso, la salida no regresa al valor que tenía antes de la perturbación, es decir se presenta nuevamente un error, más chico cuanto más grande es K_c .

Se puede decir entonces que una ganancia proporcional chica genera respuestas transitorias aceptables pero malas desde el punto de vista del régimen permanente (el error es mayor cuanto más chica es K_c).

ACCIÓN INTEGRAL

La acción integral es un modo de control (**Control Integral**) con el cual se modifica la velocidad de la variable manipulada $m(t)$ en forma directamente proporcional al error. Por ello, al controlador que utiliza acción integral, en algunos textos antiguos se le llama “**Control proporcional de velocidad flotante**” (Proportional-speed floating control). El término flotante proviene del hecho que, como se verá en las líneas que siguen, este tipo de controlador entregará un valor de continua o polarización que estará “*flotando*” acorde a la historia del error.

La acción integral se puede escribir matemáticamente como:

$$\frac{d m(t)}{dt} = \frac{1}{T_i} \cdot e(t)$$

De este modo, si se duplica el valor del error, el elemento final de control se moverá al doble de rápido; si la variable de salida es igual el set-point (error=0) el elemento final de control quedará sin movimiento. Es decir, la velocidad de movimiento del elemento final de control es directamente proporcional al cambio en el error y la constante de proporcionalidad es $\frac{1}{T_i}$.

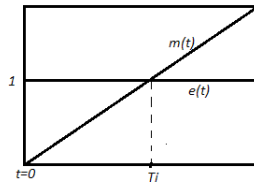
La interpretación más común de la acción Integral (y de allí procede el nombre) es la que se obtiene si se integra la expresión de partida; se llega a la siguiente ecuación como representativa de esta acción de control:

$$m(t) = \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(t) \cdot dt + \bar{m}$$

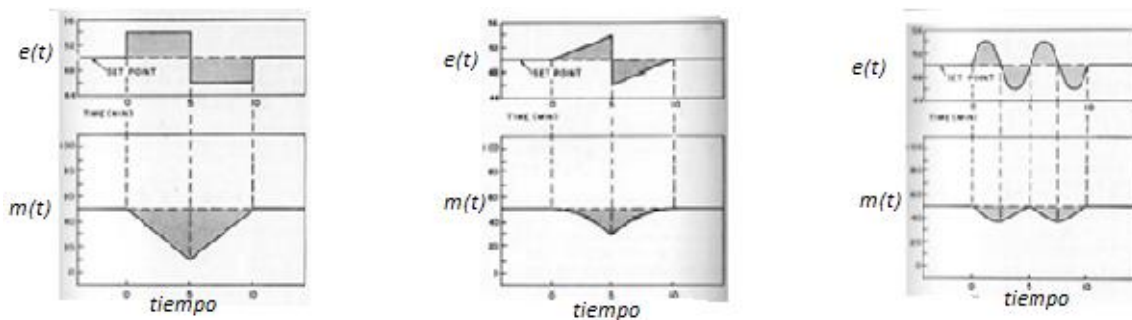
Lo que dice esta ecuación es que la salida del controlador es directamente proporcional a la integral del error y la constante de proporcionalidad es nuevamente el inverso de T_i .

T_i recibe el nombre de “**tiempo de integración**” y para deducir su valor se considera igual al tiempo que transcurre desde que se aplica al controlador un error $e(t)$ = escalón de valor unitario hasta que la salida

$m(t)$ alcanza también el valor unitario. Esto se muestra en la siguiente gráfica:

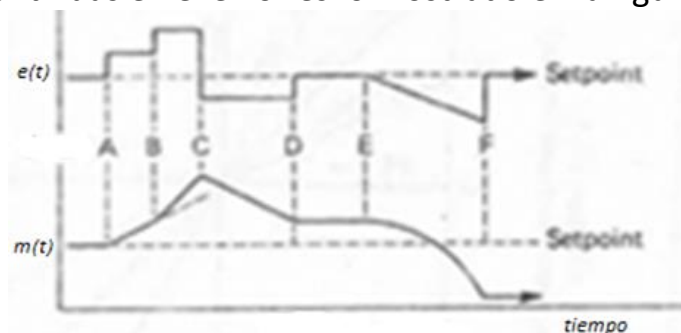


Se concluye de esta manera que la amplitud de la variable de control $m(t)$ cambia linealmente en el tiempo en forma proporcional al área bajo la curva de error $e(t)$. Cuando el error = 0, como se dijo, el actuador queda sin movimiento, pero la posición (\bar{m}) que tendrá depende de la historia del error que está dada por la integral del error. En las gráficas siguientes se puede visualizar la salida de un controlador con acción integral para diferentes formas de señales de error.



Se puede observar la correspondiente inversión del signo en la respuesta del controlador. Con esto se está dejando en claro que el controlador debe responder con realimentación negativa, es decir oponiéndose a la dirección del cambio en la variable de salida y por lo tanto **actuará hasta que desaparezca el error**. Observar que como las áreas positivas y negativas del error son iguales, cuando desaparece el error $\bar{m} = 0$

En general la respuesta de un controlador con acción integral para variaciones continuas en el error es lo mostrado en la figura siguiente.



La grafica comienza en $t=0$ con error = 0, por lo tanto al comienzo $\bar{m} = 0$; según se modifica el error, el controlador a la salida devuelve una $m(t)$ proporcional a la integral de error. Finalmente cuando el error se anula, el controlador entrega una señal de polarización \bar{m} que depende de la historia del error.

Se puede concluir entonces que la acción integral además de responder al signo y tamaño del error como la acción proporcional, también **responde a la duración del error**.

Se destaca lo siguiente en la operación de la acción integral: **una vez anulado el error, el controlador modificó su señal de salida $m(t)$ lo necesario para que la salida del proceso alcance y mantenga el valor del set-point y por lo tanto obtener error nulo**.

Lo citado al final del párrafo anterior marca una diferencia fundamental entre la acción proporcional y la acción integral: **mientras que con acción proporcional, si el error es nulo, no se genera una señal de control, con la acción integral, aún con error nulo, se puede generar una señal de control** y más aún, la señal de control recién se estabiliza en un valor determinado cuando el error es nulo lo cual ocurre cuando la variable de salida es igual al set-point o referencia; mientras exista error, la acción integral excitará al actuador en la dirección de reducir el error. Esta propiedad es la que habilita a esta acción de control para solucionar problemas de exactitud de un sistema de control con acción proporcional.

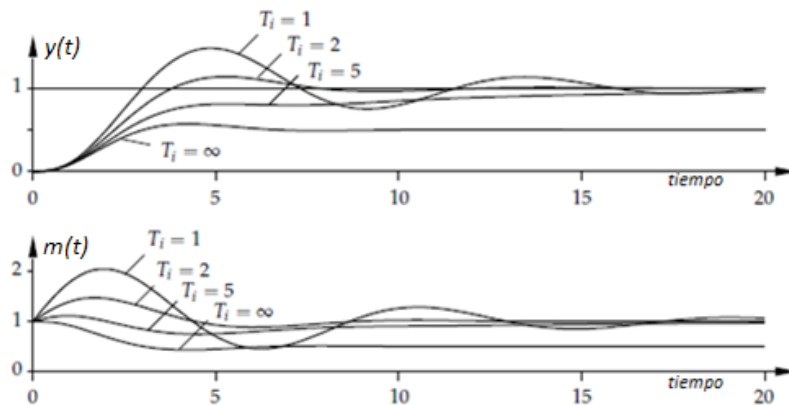
Si se evalúa la función de transferencia de un controlador con acción integral resulta:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{1}{T_i} \cdot \frac{1}{s}$$

Se observa que presenta un polo en el origen. Esto significa que agregar un controlador con acción integral en el camino directo transforma (si no lo era) al sistema en uno tipo 1. Como ya se estudió, un sistema cuyo $Geq(s)$ es tipo 1 se caracteriza por una respuesta al escalón con error nulo. **La rapidez con la que anula el error dependerá del tiempo de integración T_i : cuanto más chico, más rápidamente anula el error**.

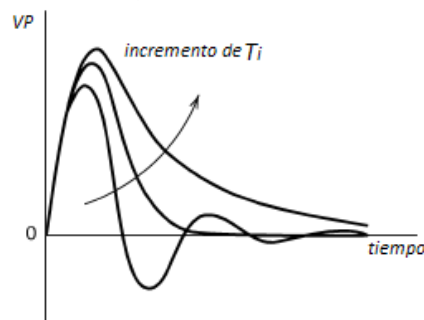
Por otro lado, al agregar un polo en el origen en $Geq(s)$, la estabilidad del sistema a lazo cerrado también dependerá del valor del tiempo de integración T_i , cuanto más chico menos estable. Las gráficas siguientes lo

confirman para un sistema de tercer orden tipo 0 con distintos valores de T_i cuando se aplica un escalón en el set-point:



La gráfica superior muestra la salida $y(t)$ mientras que en la inferior se puede ver la evolución de la variable de control o salida del controlador $m(t)$.

La grafica siguiente muestra cómo se modifica la salida $y(t)$ ante una perturbación escalón a medida que se modifica T_i



En otras palabras, la acción integral utiliza la integral del error para ajustar automáticamente la salida continua o polarización \bar{m} del controlador (“reset automático”) de modo que el sistema realimentado funcione aun con un error = 0.

Combinación de acción Proporcional + acción Integral (PI)

Esta combinación es ampliamente utilizada con la intención de obtener las ventajas de cada una de las acciones por separado. Recibe el nombre de “**Acción Proporcional-Integral**” y el modo de control simplemente “**Control PI**”.

Nota: en la práctica en general, nunca se agrega solo acción integral, siempre va acompañada de acción proporcional.

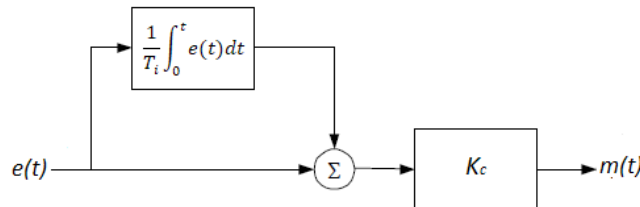
La combinación de ambas acciones generalmente da buenos resultados ya que mientras con la acción proporcional se puede corregir el comportamiento transitorio del sistema, con la acción integral se puede corregir el régimen permanente.

En la práctica ambas acciones de control se combinan según la siguiente expresión matemática:

$$m(t) = K_c \cdot \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(t) \cdot dt \right] + \bar{m} = K_c \cdot e(t) + \frac{K_c}{T_i} \cdot \int_0^t e(t) \cdot dt + \bar{m}$$

$$\frac{d m(t)}{dt} = K_c \cdot \left[\frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T_i} \cdot e(t) \right] = K_c \cdot \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_c}{T_i} \cdot e(t)$$

Una representación en bloques del controlador es la mostrada a continuación

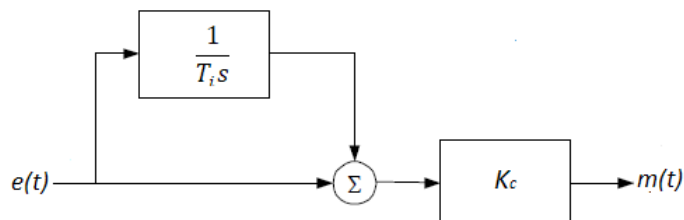


Aplicando Laplace se obtiene la función de transferencia del controlador

$$M(s) = K_c \left[1 + \frac{1}{T_i s} \right] \cdot E(s) \text{ y acomodando se obtiene finalmente}$$

$$G_{pi}(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c \cdot \left(\frac{s + \frac{1}{T_i}}{s} \right)$$

cuya representación en diagrama de bloques es la siguiente



Se ve que el controlador *PI* agrega en el camino directo un polo en el origen y un cero real ubicado, según el valor asignado a T_i , en $s = -\frac{1}{T_i}$.

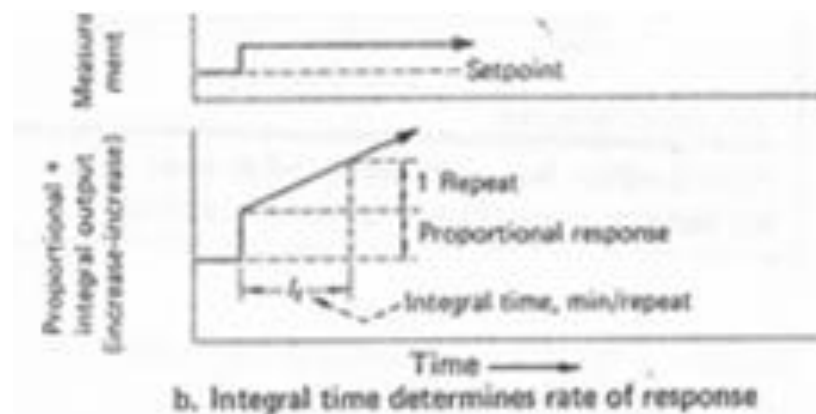
En el caso de sintetizar un controlador *PI* se redefine a T_i (es el mismo, solo cambia el nombre) como:

“Tiempo de Reset T_i ”: es el tiempo requerido por la acción integral para que la salida del controlador sea igual a la salida instantánea debida a la acción proporcional cuando se aplica un escalón de error en la entrada del controlador.

Además se define lo siguiente:

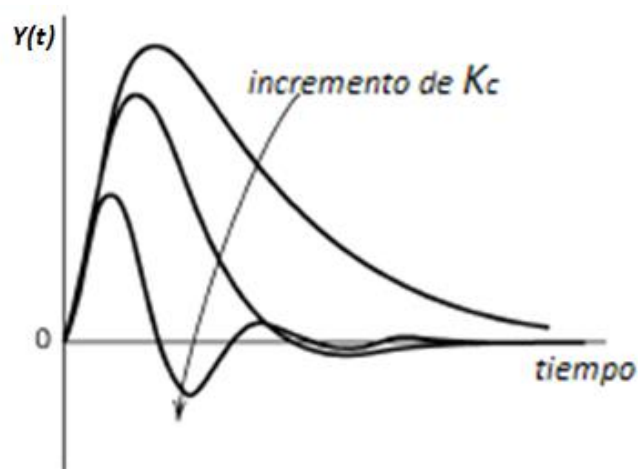
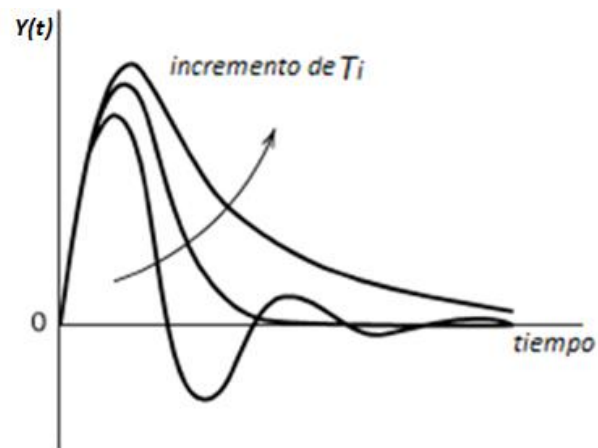
“Razón de Reset” o “Repeticiones por Minuto”: Es el número de veces que la parte proporcional de la respuesta se repite por acción integral en la unidad de tiempo. Es el inverso del Tiempo de Reset T_i .

En la siguiente gráfica se muestra lo definido.

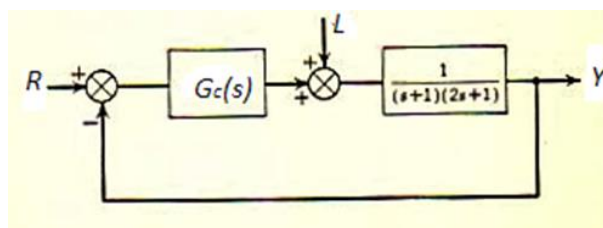


De este modo, cuando la acción proporcional se combina con la acción integral, comúnmente se utiliza el término **“Acción de Reset”** ya que la acción integral es **“equivalente”** a un reseteo manual del set-point luego de cada cambio en la carga.

Las gráficas que siguen indican como modifican los ajustes de T_i y K_c las respuestas ante una perturbación escalón.

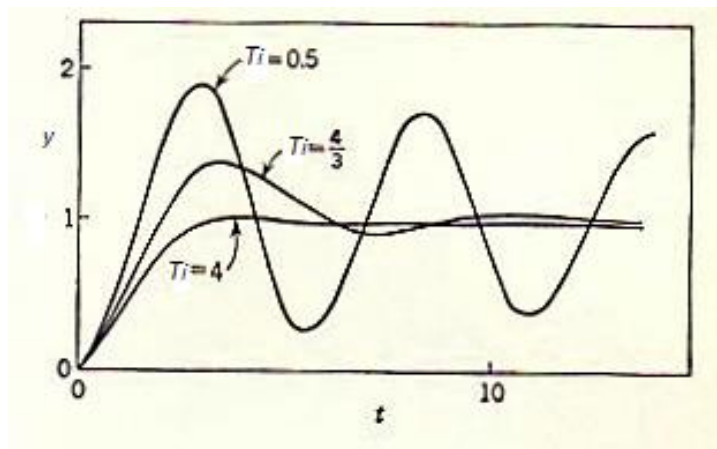
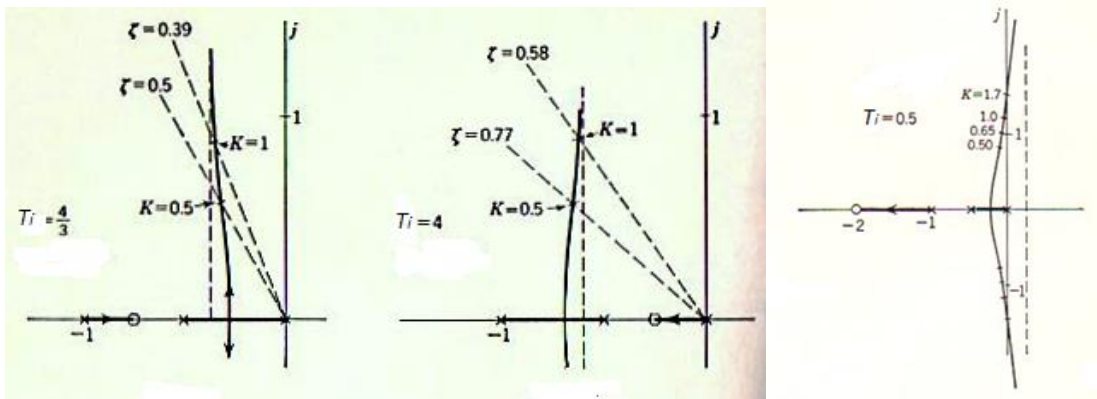


Para el mismo ejemplo utilizado con control proporcional pero ahora con control *PI* se estudia según el lugar de las raíces lo que resulta cuando se modifica K_c para distintos valores de T_i .



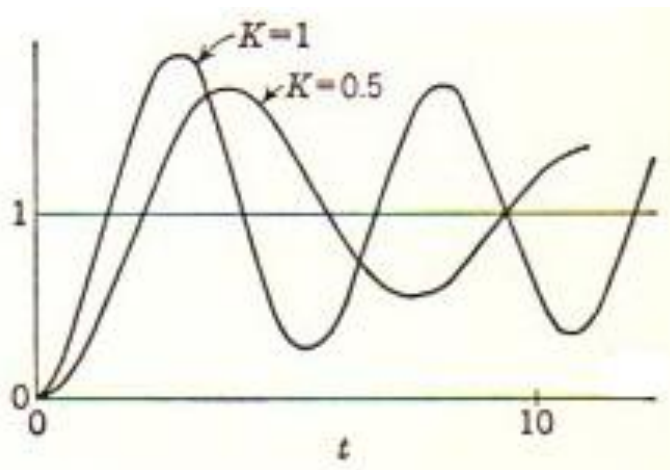
La planta acomodada en la forma polo cero para el trazado del lugar de las raíces es $G(s) = \frac{0.5}{(s+1)(s+0.5)}$ y el controlador es $G_c(s) = K_c \cdot \left(\frac{s+\frac{1}{T_i}}{s}\right)$ de modo que la función a graficarle el lugar de las raíces con la ganancia variable queda

$$G_c(s)G(s) = K_c \cdot \left(\frac{s+\frac{1}{T_i}}{s}\right) \cdot \frac{0.5}{(s+1)(s+0.5)} = K \cdot \left(\frac{s+\frac{1}{T_i}}{s}\right) \cdot \frac{0.5}{(s+1)(s+0.5)} \quad \text{con } K = 0.5 \cdot K_c$$



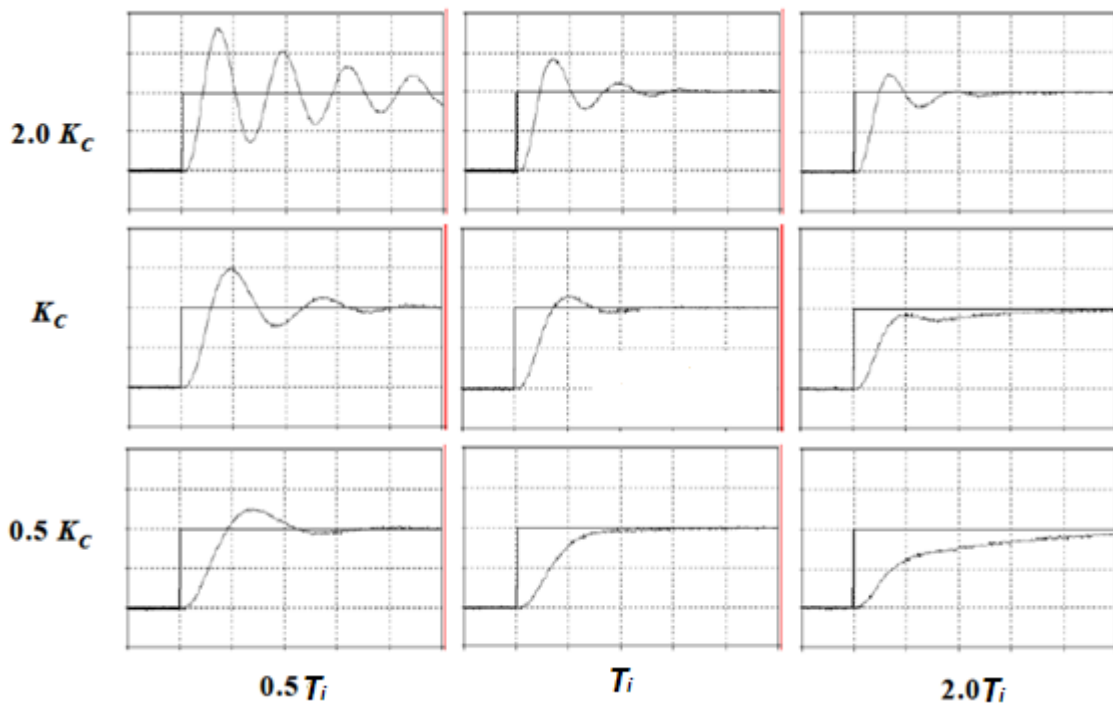
La última grafica muestra la respuesta a un escalón en el set point. Para comparar las respuesta se tomó el valor $K=0.5$ ($K_c=1$). Claramente para el valor de $T_i=4$, que proporciona el cero más cercano al origen, se genera la mejor respuesta: más amortiguada y de menor tiempo de establecimiento.

La grafica que sigue muestra el caso de mantener constante $T_i=0.5$ para 2 valores de la ganancia proporcional: $K_c=1$ ($K=0.5$) y $K_c=2$ ($K=1$).



Como era de esperar, a medida que crece la ganancia proporcional menos estable es el sistema aunque mejora la velocidad desde el punto de vista del tiempo de pico.

La grafica siguiente, referida a un dado sistema al que se le aplica una señal escalón a la referencia, muestra en 9 sub-figuras el efecto de modificar tanto la constante de acción proporcional K_c como el tiempo de reset T_i . En la del centro se ve lo que sería un buen ajuste de ambas y en las restantes el efecto de modificarlas.



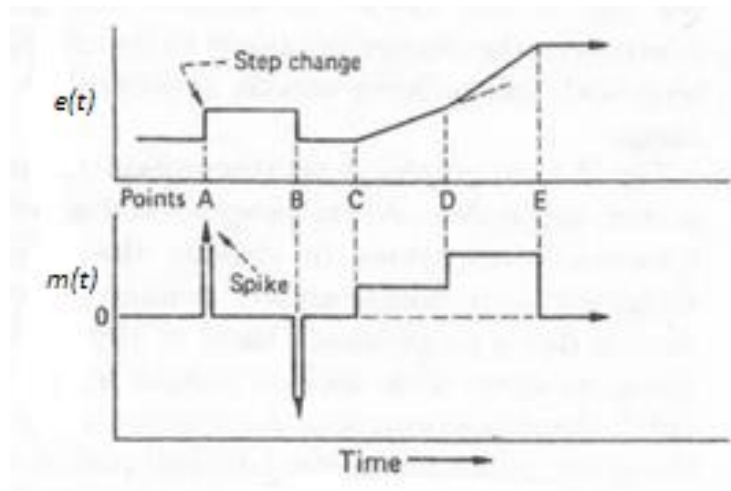
ACCIÓN DERIVATIVA

Matemáticamente la acción derivativa se expresa en función del tiempo como sigue:

$$m(t) = T_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

En este caso que la salida del controlador es directamente proporcional a la derivada del error.

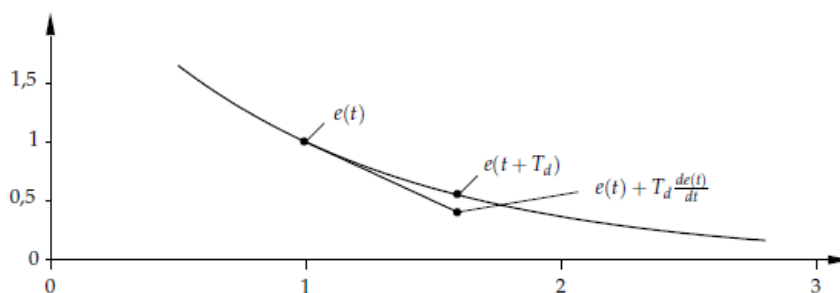
Gráficamente se tiene lo siguiente:



Se ve perfectamente que esta acción genera una salida cuando el error está cambiando y es nula si el error no se modifica. Entonces ¿dónde está el beneficio de agregar al controlador esta acción? Se conoce que esta acción de control apunta a mejorar el régimen transitorio del sistema a lazo cerrado, especialmente la estabilidad. ¿Cómo es que lo hace?

Para responder a estas preguntas, por un lado comenzamos recordando que la inestabilidad que se genera en un sistema a lazo cerrado se puede entender intuitivamente tomando en cuenta que la dinámica del proceso es siempre agregar retardos (atrasos en la fase del sistema). Estos retardos provocan que un cambio en la variable de control $m(t)$ llevará algún tiempo ser detectable en la salida del proceso; como consecuencia de esto último, *todo error en la variable de salida sufrirá un retardo en ser corregida*.

Por otra parte, la acción derivativa se puede interpretar como que “**predice**” la salida del proceso, es decir se anticipa a lo que ocurrirá en el proceso. Para entender esta “**predicción**” se efectúa una extrapolación del error por la tangente de la curva de error en un determinado instante. La grafica de error genérica siguiente ayudara a comprender lo expresado en el último párrafo.



Considerando una aproximación de Taylor para $e(t+T_d)$ se tiene:

$$e(t + T_d) \approx e(t) + T_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

Se puede concluir que, conocido el error $e(t)$ y su derivada en un dado instante t_o (medición) se puede conocer el error aproximado que se tendrá un tiempo T_d posterior a la medición ($t_o + T_d$). Entonces, y sin perder generalidad, se puede escribir utilizando la aproximación de Taylor la siguiente ecuación para la salida del controlador donde K_c es la constante de acción proporcional

$$K_c \cdot \left(e(t_o) + T_d \cdot \frac{de(t_o)}{dt} \right) = K_c \cdot e(t_o + T_d) = m(t_o)$$

Esta expresión dice que en el instante t_o , la salida del controlador $m(t_o)$ es aproximadamente igual a la que daría el controlador proporcional un tiempo T_d posterior.

La primera parte de la expresión es la aplicación de una acción proporcional K_c a la suma del error más la derivada del error y según la aproximación de Taylor, se puede escribir la igualdad presentada.

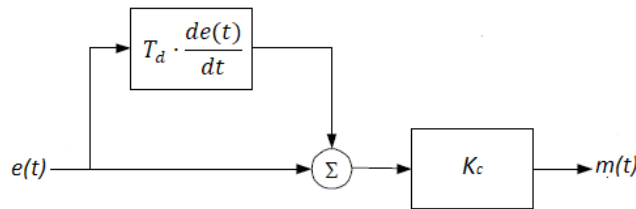
Ahora bien, el lado izquierdo de la última ecuación es la expresión matemática de la suma de acción proporcional más acción derivativa. Es decir, combinando acción proporcional y derivativa el controlador responderá en forma anticipada en el tiempo con un valor proporcional al error que se tendrá un tiempo T_d posterior. De este modo, la acción derivativa, combinada con la proporcional ayuda a que los efectos de los retardos del sistema sean menos perjudiciales, permitiendo mejoras en la respuesta dinámica del sistema. Esta acción es muy útil en aquellos procesos que presentan importantes retardos o tiempo muerto ya que permitirá entregar una señal correctora más eficaz a pesar de los retardos del proceso.

Se desprende entonces que **la acción derivativa resultará efectiva si se la aplica combinada con acción proporcional en lo que se llama control Proporcional-Derivativo o simplemente control PD** (la acción derivativa sola no aporta un efecto destacable y por lo tanto no se usa).

Podría pensarse que esta acción combinada *PD* no sirve para corregir errores en estado estacionario. Es cierto, no tiene efectos directos en el estado estacionario, pero al mejorar la estabilidad y velocidad en el transitorio permite aumentar la ganancia y con ello mejorar indirectamente el error.

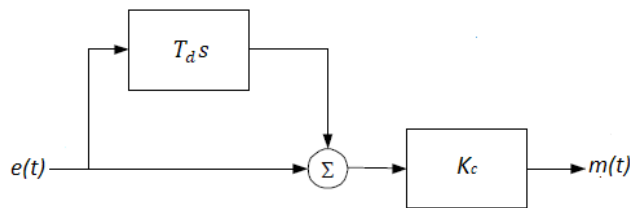
Por lo anterior, la expresión útil para el control por acción derivativa, finalmente queda:

$$m(t) = K_c \cdot \left(e(t) + T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \right) = K_c \cdot e(t) + K_c T_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$



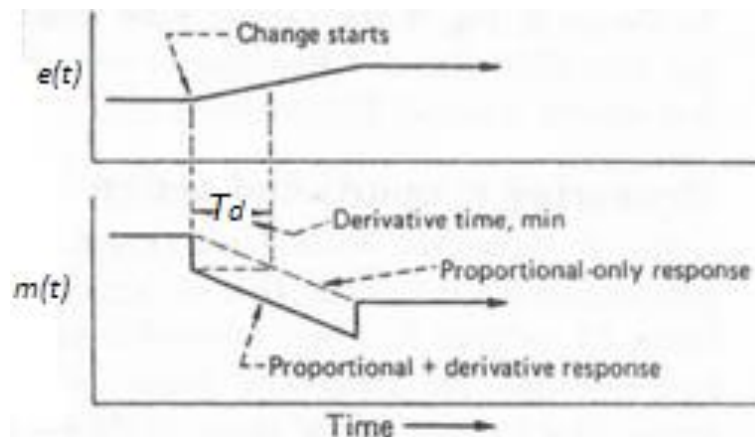
La función de transferencia del controlador resultante es:

$$G_{pd}(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c \cdot (1 + T_d s)$$

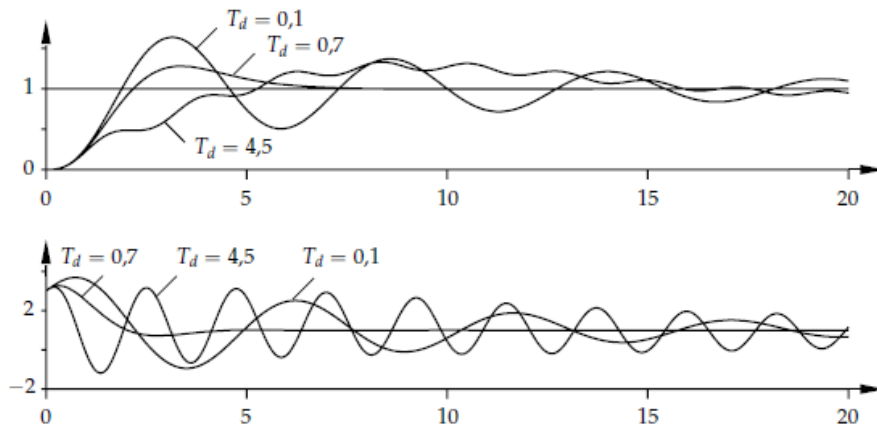


En este caso, el controlador *PD* consiste en agregar un cero ubicado en $s = -\frac{1}{T_d}$.

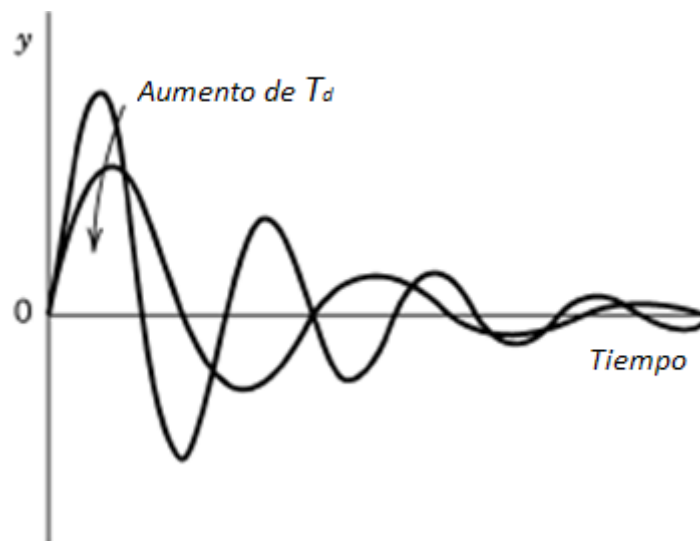
T_d , llamado “**tiempo derivativo**”, se define como el tiempo que transcurre desde que se aplica al controlador un error tipo rampa y en la salida, la señal entregada por la acción proporcional iguala a la entregada instantáneamente por acción derivativa. La gráfica siguiente representa lo dicho.



La figura que sigue presenta la variable de salida $y(t)$ (gráfica superior) y la variable manipulada $m(t)$ (gráfica inferior) a medida que se modifica el valor de T_d para un cambio escalón en la referencia.



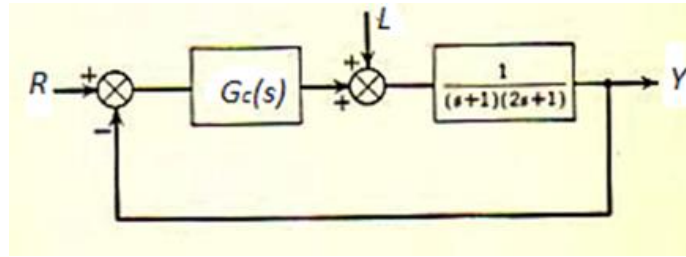
La grafica siguiente muestra cómo se modifica la salida del proceso ante una perturbación escalón a medida que se modifica T_d .



Nota: como en las gráficas anteriores el error es nulo, es decir se considera que el sistema es tipo 1 (tiene un integrador).

La acción derivativa no tiene capacidad por si misma de anular el error pero al mejorar el comportamiento dinámico permite diseñar una ganancia proporcional K_c más grande y por lo tanto disminuir el error estacionario.

Una vez más para el mismo sistema utilizado con anterioridad se analiza mediante el lugar de las raíces el efecto de este controlador:

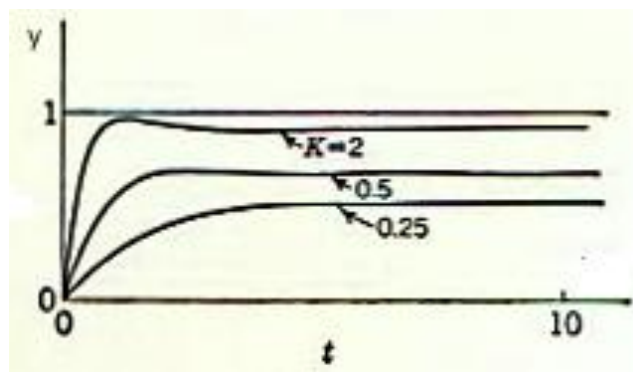
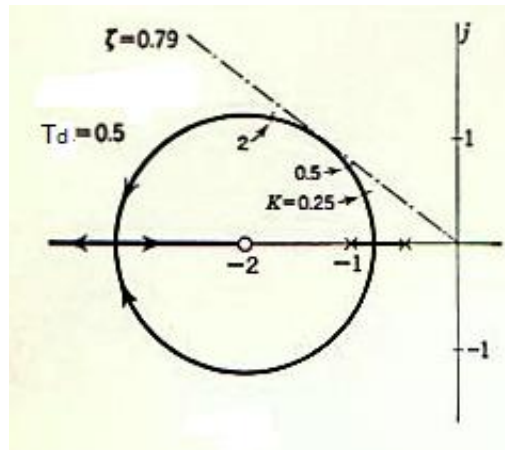


La planta acomodada en la forma polo cero es $G(s) = \frac{0.5}{(s+1)(s+0.5)}$ y en este caso la función de transferencia del controlador acomodada para el lugar de las raíces resulta:

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c \cdot (1 + T_d s) = K_c T_d \cdot \left(s + \frac{1}{T_d}\right) = K'_c \cdot \left(s + \frac{1}{T_d}\right) \quad \text{con } K'_c = K_c \cdot T_d$$

el lugar se construye para $T_d = 0.5$ con la siguiente función con K variable

$$G_c(s)G(s) = K'_c \cdot \left(s + \frac{1}{T_d}\right) \cdot \frac{0.5}{(s+1)(s+0.5)} = K \cdot \frac{(s+0.5)}{(s+1)(s+0.5)} \quad \text{con } K = K'_c \cdot 0.5 = 0.25 \cdot K_c$$



Se ve claramente las mejoras en la calidad de la respuesta en el rango $0.25 \leq K \leq 2$, es decir $1 \leq K_c \leq 8$

Nota: lo tratado es un controlador *PD* ideal ya que su función de transferencia no es sintetizable al ser no causal. Para poder sintetizar un controlador *PD* real es necesario que su función de transferencia tenga además un polo, es decir por ejemplo implementar lo siguiente

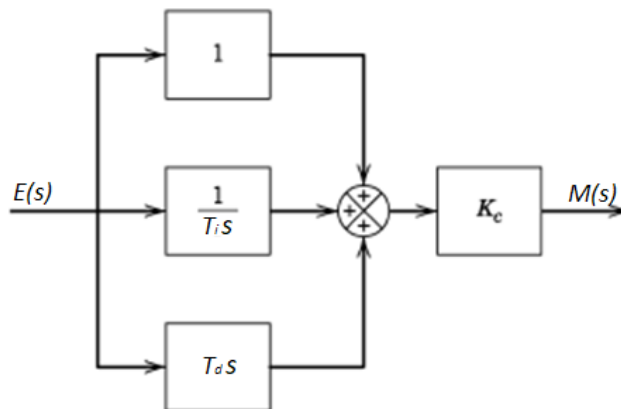
$$G_{pd}(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c \cdot \left[1 + \frac{T_d \cdot s}{\beta + 1} \right] = K_c \cdot \frac{(s + \alpha)}{\left(\frac{s}{\beta} + 1\right)} \quad \text{con } \alpha = \frac{\beta}{1 + \beta \cdot T_d}$$

El controlador ahora es causal tiene un polo en $s = -\beta$ y un cero de acción derivativa en $s = -\alpha$. Para todo T_d siempre el polo está más alejado del origen que el cero. Notar que si $\beta \rightarrow \infty$ el controlador se comporta como el ideal; sin embargo en los diseños prácticos el polo se ubica de 5 a 10 veces el valor del cero consiguiéndose comportamientos satisfactorios (el polo finito pone una restricción en el comportamiento transitorio aportado por el controlador de modo que se debe buscar una ubicación adecuada para el sistema en cuestión).

Combinación de las 3 acciones básicas de control

$$m(t) = K_c \cdot \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(t) \cdot dt + T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \right] + \bar{m}$$

Un esquema en bloques que representa al controlador PID es el mostrado a continuación y se la conoce comúnmente como "**forma Industrial**".



La función de transferencia para esta definición del controlador es la mostrada a continuación

$$G_{pid}(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c \left[1 + \frac{1}{sT_i} + T_d s \right] = K_c \left[\frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{s T_i} \right]$$

Nota: en rigor se sabe que este controlador PID no es causal (tiene 2 ceros y un polo) y por lo tanto no se puede implementar físicamente; el motivo es que la derivada es en sí misma una operación no causal. De modo que no se puede hacer una implementación exacta del controlador pero si una aproximada, lo suficiente valida como para que funcione correctamente. Esto se verá más adelante, por ahora ignoremos esto y continuemos con el análisis.

A la hora del diseño, por ejemplo mediante el lugar de las raíces, es muy útil escribir esa función de transferencia del controlador de una manera general como se muestra a continuación

$$G_{pid}(s) = K \cdot \frac{(s + z_d)(s + z_i)}{s}$$

Los parámetros del controlador *PID* industrial (K_c , T_i y T_d) se pueden obtener fácilmente a partir de los parámetros del formato general de diseño (K , z_d y z_i) y viceversa, aplicando las siguientes ecuaciones:

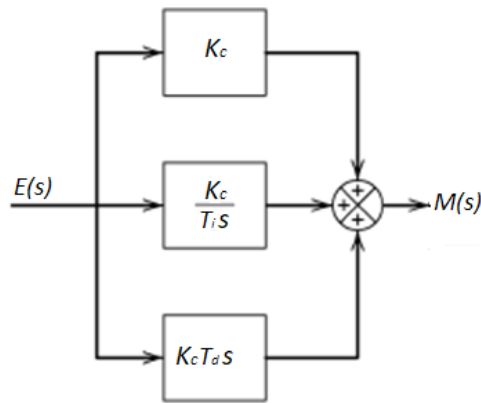
$$K_c = K(z_d + z_i) \quad T_i = \frac{(z_d + z_i)}{(z_d \cdot z_i)} \quad T_d = \frac{1}{(z_d + z_i)}$$

Esto es muy empleado en los diseños de controladores mediante el uso del lugar de las raíces ya que si se dispone de la ganancia K y de la ubicación de los ceros en el plano s (K , z_d y z_i) para una solución satisfactoria, se pueden encontrar los ajustes de los parámetros del controlador (K_c , T_i y T_d).

Es posible acomodar la ecuación del controlador del siguiente modo

$$m(t) = K_c \cdot e(t) + \frac{K_c}{T_i} \cdot \int_0^t e(t) \cdot dt + T_d K_c \cdot \frac{de(t)}{dt} + \bar{m}$$

Cuya representación mediante un diagrama de bloques es la siguiente



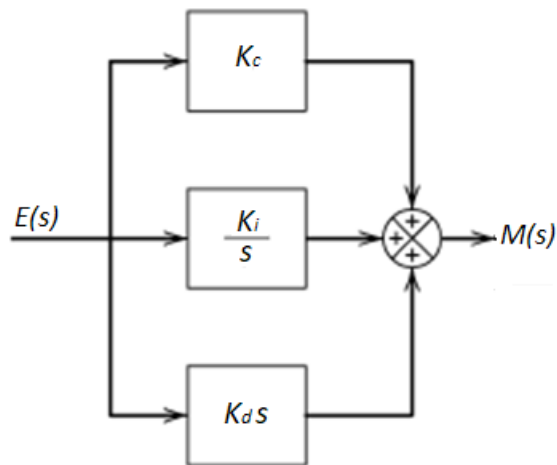
A esta forma se la suele escribir definiendo además una constante de integración y otra de derivación según la siguiente ecuación

$$m(t) = K_c \cdot e(t) + K_i \cdot \int_0^t e(t) \cdot dt + K_d \cdot \frac{de(t)}{dt} + \bar{m}$$

donde:

- K_c Constante de acción proporcional
- $\frac{K_c}{T_i} = K_i$ Constante de acción integral
- $T_d K_c = K_d$ constante de acción derivativa

De modo que el esquema en bloques que representa al controlador queda



Esta última forma de representar al controlador recibe el nombre de "**forma paralelo**" y es muy utilizada en la enseñanza del controlador PID.

Según esta última forma, la función de transferencia del controlador PID tiene una presentación más sencilla resultando

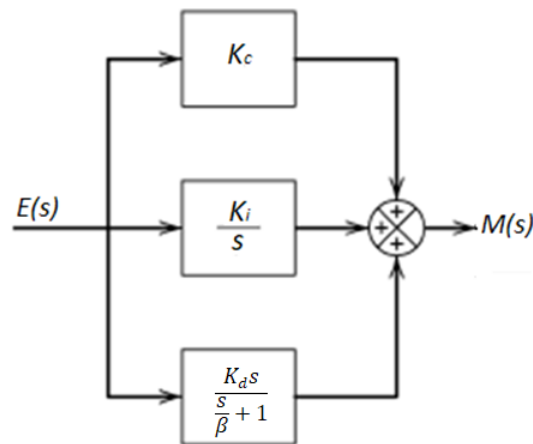
$$G_{pid}(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_c s + K_i}{s}$$

Como $\frac{K_c}{T_i} = K_i$ y $T_d K_c = K_d$ se pueden acomodar las ecuaciones de diseño antes obtenidas, quedando las mismas como

$$K_c = K(z_d + z_i), \quad K_i = K \cdot (z_d \cdot z_i) \quad \text{y} \quad K_d = K$$

Controlador PID real

Tal como se hizo al tratar acción derivativa, como aquí también se agrega acción derivativa la función de transferencia del controlador *PID* ideal no es causal. Se debe proceder igual que antes para resolver el problema. De este modo se tiene el siguiente esquema en bloques del controlador *PID* real



La correspondiente expresión para la función de transferencia del controlador es

$$G_{pid}(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{\frac{s}{\beta} + 1} = K \cdot \frac{(s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2)}{s \left(\frac{s}{\beta} + 1 \right)}$$

$$K = K_d + \frac{K_c}{\beta}$$

dónde:
$$\alpha_1 = \frac{\left(K_c + \frac{K_i}{\beta} \right)}{\left(K_d + \frac{K_c}{\beta} \right)}$$

$$\alpha_2 = \frac{K_i}{\left(K_d + \frac{K_c}{\beta} \right)}$$

Se procede como en el control PD: conocido los valores del controlador que proporcionan un comportamiento satisfactorio, mediante las relaciones anteriores se obtiene la ubicación en el plano *s* para los ceros

que junto al polo en el origen y el polo en $s = -\beta$ permiten sintetizar el controlador.

Si por el contrario se trabajó en el plano s para obtener la ganancia K y las posiciones de ceros y polos que proporcionan un comportamiento satisfactorio, también es factible obtener los ajustes de los parámetros del controlador (K_c, T_i y T_d) operando en forma ordenada mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}K_i &= K \cdot \alpha_2 \\K_c &= K \cdot \alpha_1 - \frac{K_i}{\beta} \\K_d &= K - \frac{K_c}{\beta}\end{aligned}$$

como $\frac{K_c}{T_i} = K_i$ y $T_d K_c = K_d$, mediante estas relaciones se pueden encontrar los parámetros definitivos.

Resumiendo: En el control *PID*, la presencia de la acción integral aumenta el tipo del sistema con la consecuente mejora estacionaria del error; por otro lado la presencia de la acción derivativa permite mejoras en otros aspectos del comportamiento como la estabilidad y la velocidad. Aunque existe un conflicto entre las 2 características, la combinación de las acciones integral, derivativa y proporcional operando conjuntas permiten obtener casi siempre el comportamiento deseado del sistema. No obstante siempre se debe buscar el diseño más simple comenzando por la acción proporcional *P*; si no es suficiente y se necesita mejorar la exactitud se debe pasar al controlador *PI*, mientras que si se necesita mejoras dinámicas se debe recurrir a un controlador *PD* (es de destacar que casi siempre cuando se necesita mejoras dinámicas directamente se pasa a un controlador *PID* muy pocas veces a un *PD*).

En el diseño de un controlador *PID* generalmente se considera al polo en el origen y uno de los ceros (el más cercano al origen para contrarrestar el efecto desestabilizante del polo en el origen) como parte de un controlador *PI*.

El otro par cero-polo del controlador se considera que es una acción *PD*. En este caso el cero y el polo restante deben guardar una relación posicional entre 5 y 10 veces con el polo a la izquierda del cero en el plano s . Este par polo-cero debe ubicarse de modo tal que el dipolo se pueda desplazar libremente por el eje real manteniendo la separación adoptada para ellos. Visto en el dominio frecuencia, este dipolo se suele ubicar en la

zona de la frecuencia de cruce de módulo de la ganancia de lazo de modo que mejore el margen de fase (haga más positiva la fase) y con ello la estabilidad; por otro lado, ubicado el dipolo en esta zona aumenta el ancho de banda del sistema a lazo cerrado (la frecuencia de corte de módulo de la ganancia de lazo es aproximadamente igual al ancho de banda de lazo cerrado) de modo que se mejora la velocidad de respuesta. El polo de este dipolo tiene la limitación que no puede alejarse demasiado del cero porque al agregar ganancia empeora el comportamiento del sistema con respecto al ruido.