La respuesta en el tiempo

La forma en que un sistema dinámico responde a una señal excitadora o entrada, expresada como una función del tiempo, se llama “***la respuesta en el tiempo***”. El estudio de esta respuesta se dice que es un “***análisis en el dominio tiempo***”. Para el estudio de la respuesta en el tiempo de un sistema se necesita lo siguiente:

- Un modelo matemático del sistema a estudiar
- Conocer la naturaleza de la entrada expresada como función del tiempo y las posibles condiciones iniciales.

Para describir en el tiempo la relación entre la entrada y la salida de un sistema se debe obtener relaciones entre entradas y salidas utilizando expresiones que sean funciones del tiempo. Para ello se recurre a ecuaciones que expresen como varían con el tiempo las salidas del sistema cuando se modifican las entradas en el tiempo. El tipo de ecuación que cumple con esta función es ***una ecuación diferencial***. En el caso de un sistema SISO (una entrada, una salida) una ecuación diferencial típica se escribe como la siguiente

$$a_n \frac{d^n[y(t)]}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}[y(t)]}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d[y(t)]}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \qquad (1)$$

Esta ecuación se suele escribir en forma compacta como se muestra a continuación

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots a_1 y^{(1)} + a_0 y = u(t) \qquad (1')$$

- n es el orden del sistema el cual está relacionado con la cantidad de elementos almacenadores de energía linealmente independientes que tiene el sistema y viene dado por la máxima derivada que presenta la salida.
- $u(t)$ es la entrada o función forzante.
- $y(t)$ es la salida.
- a_i son coeficientes constantes (sistema invariante en el tiempo).

Si en la ecuación general (1) $u(t)=0$, se dice que la ecuación es ***homogénea***; esta puede resolverse si se conoce el estado energético del sistema justo antes de aplicar $u(t)$, es decir, condiciones iniciales en $t=0^-$ (es típico considerar que las condiciones iniciales en $t=0^+$ serán iguales que

en t=0$^-$; se considera por lo tanto simplemente condiciones iniciales en t=0). Esta solución recibe el nombre de ***respuesta libre, natural*** o ***no forzada.***
Si $u(t)$ no es nula, se dice que la ecuación es ***no homogénea*** y la solución se obtiene conociendo además de las condiciones iniciales, la expresión matemática de $u(t)$. Esta solución recibe el nombre de "***total o completa***".

La respuesta libre o natural [solo a condiciones iniciales, $u(t)$=0]

Como se puntualizó, la respuesta libre o natural depende exclusivamente del sistema es decir es ***la solución respecto a las condiciones iniciales de la ecuación diferencial del sistema llamada homogénea sin señal forzante aplicada***. Esto significa que la ecuación diferencial del sistema se encuentra igualada a 0.
Una ***ecuación diferencial homogénea*** genérica de un sistema de orden n es entonces (se denota con $y^{(n)}$ la derivada enésima de $y(t)$):

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \qquad (2)$$

Asumiendo una solución de la forma $y(t) = Ce^{pt}$ con C y p constantes. Derivando la solución propuesta y reemplazando los resultados en la ecuación original se obtiene

$$(a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \cdots a_1 p + a_0) \cdot Ce^{pt} = 0 \quad (3)$$

Para que la solución propuesta (Ce^{pt}) sea distinta de cero, debe ser el otro factor igual a cero, es decir

$$a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \cdots a_1 p + a_0 = 0 \quad (4)$$

Esta ecuación recibe el nombre de "***ecuación característica del sistema dinámico***" y el polinomio, que se escribe como $H(p)$, el nombre de ***polinomio característico***; $H(p)$ tendrá n raíces p_i ya que es de orden n. Estas raíces reciben el nombre de "***raíces características del sistema***" o "***valores propios del sistema***". Los valores propios pueden ser reales o pueden presentarse de a pares complejos conjugados ya que los coeficientes del polinomio son todos reales; además pueden ser raíces simples o múltiples.
Cada raíz del polinomio característico da lugar a una solución de la ecuación (3) de la forma $y(t) = C_i e^{p_i t}$. Puesto que la ecuación diferencial

de partida es lineal, la suma de las soluciones parciales es también una solución es decir

$$y(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \cdots + C_{n-1} e^{p_{n-1} t} + C_n e^{p_n t} \qquad (5)$$

y se lo puede verificar mediante una sustitución directa. Además cada solución de (2) se puede expresar por esta última solución eligiendo apropiadamente los valores de los coeficientes C_i.

Si 2 de los valores propios forman un par complejo conjugado, los correspondientes coeficientes C_i también constituirán un par complejo conjugado ya que $y(t)$ se presenta con valores reales. Finalmente, si alguno de los valores propios p se presenta repetido, los correspondientes coeficientes C_i serán funciones explicitas del tiempo; específicamente, si existen raíces de multiplicidad m, los m coeficientes C_i asociados a esas raíces tendrán la forma

$$\begin{gathered} C_1 = \alpha_1 \\ C_2 = \alpha_2 \cdot t \\ C_3 = \alpha_3 \cdot t^2 \\ \vdots \\ C_m = \alpha_m \cdot t^{m-1} \end{gathered}$$

Para obtener la respuesta libre, los coeficientes C_i se determinan haciendo cumplir que la solución (5) satisfaga no solo la ecuación (2) sino también las condiciones iniciales del sistema dinámico

$$y(0) = y_0;\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0; \cdots; y^{(n)}(0) = y_0^{(n)}$$

Ejemplo 1: hallar la respuesta libre para la ecuación $\dot{x}(t) - 2x(t) = 0$ sabiendo que $x(0)=4$.

Solución: asumimos que la solución es de la forma $x(t) = C \cdot e^{2t}$.

Haciendo cumplir la condición inicial: $x(0) = 4 = Ce^0 = C = 4$. Por lo tanto la solución libre es:

$$x(t) = 4 \cdot e^{2t}$$

Ejemplo 2: hallar la respuesta libre para $\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 4x(t) = 0$ con las condiciones iniciales $x(0) = 2$ y $\dot{x}(0) = -1$.

Solución: la ecuación característica es $H(p)=p^2+5p+4 = (p+4)(p+1) = 0$

Las raíces de la ecuación característica son p_1=-1 y p_2=-4. Por lo tanto la solución propuesta es

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$$

Si se considera la condición inicial $x(0)=2$ se obtiene la ecuación

$$x(0) = 2 = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2$$

Considerando la condición inicial $\dot{x}(0) = -1$, y usando la derivada de $x(t)$ cuyo valor es

$$\dot{x}(t) = -C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{-4t}$$

se obtiene la otra ecuación

$$\dot{x}(0) = -1 = -C_1 - 4C_2$$

resolviendo las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2 \\ -1 &= -C_1 - 4C_2 \end{aligned}$$

Se obtiene $C_1 = \frac{7}{3}$ y $C_2 = -\frac{1}{3}$. De este modo la solución libre finalmente es

$$x(t) = \frac{7}{3} \cdot e^{-t} - \frac{1}{3} \cdot e^{-4t}$$

Si las raíces no son repetidas los coeficientes C_i se pueden determinar mediante la ecuación de Van Der Monde:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ p_1 & \cdots & p_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^{(n-1)} & \cdots & p_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

Como ejemplo, el caso de 1er orden es trivial ya que directamente queda $y_0=C_1$. Es más ilustrativo considerar como ejemplo el planteo para un sistema de 2do orden:

Ejemplo 3: hallar la solución para la ecuación $a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$ con las c.i. $y(0) = y_0$ e $\dot{y}_0(0) = \dot{y}_0$.

Solución:

El orden es n=2. La ecuación característica es

$$a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$p_1, p_2 = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{4a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$$

Considerando que las raíces p_1 y p_2 son distintas, se tiene la siguiente ecuación de Van Der Monde

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$y_0 = C_1 + C_2$$
$$\dot{y}_0 = p_1C_1 + p_2C_2$$

De donde se obtiene algebraicamente los siguientes valores para C_1 y C_2

$$C_1 = \frac{p_2 \cdot y_0 - \dot{y}_0}{p_2 - p_1} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{\dot{y}_0 - p_1 \cdot y_0}{p_2 - p_1}$$

De modo que la solución para un sistema de orden 2 con valores propios distintos p_1 y p_2 es

$$y(t) = C_1 \cdot e^{p_1t} + C_2 \cdot e^{p_2t} = \left(\frac{p_2 \cdot y_0 - \dot{y}_0}{p_2 - p_1}\right) \cdot e^{p_1t} + \left(\frac{\dot{y}_0 - p_1 \cdot y_0}{p_2 - p_1}\right) \cdot e^{p_2t}$$

Debido a que los sistemas de 1^{er} y 2^{do} orden resultan de fundamental importancia, más adelante en este trabajo se analizaran a ambos. Las raíces para los sistemas de 1^{er} orden son reales. La respuesta de los sistemas de 2^{do} orden pueden diferir bastante por la variedad de posibilidades de valores propios que pueda presentar (reales o complejos conjugados). El conocimiento de la respuesta libre de estos 2 sistemas es importante debido a que todo sistema de orden superior será una combinación de ambas respuestas.

Nota: para ampliar sobre el tema: modos repetidos y complejos conjugados, ver "Network Analysis and Synthesis", Franklin F. Kuo 2^{da} edición, pág. 76 y siguientes.

La respuesta total

Una forma de expresar la solución de la ecuación no homogénea o solución total consiste considerar en ella 2 partes, que se pueden escribir como

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \qquad (6)$$

Donde

- $y_h(t)$ representa la llamada "***solución característica***" o "***solución homogénea***" o "***solución complementaria***" del sistema. Esta solución se obtiene resolviendo la ecuación homogénea.
- $y_p(t)$ representa la llamada "***solución particular***" o "***solución forzada***" del sistema que se identifica con la forma que tendrá la solución para $t \to \infty$, es decir en estado de régimen.

Como se puntualizó, la ecuación que permite obtener la respuesta del modelo del sistema cuando la señal forzante $u(t)$=0, recibe el nombre de "***ecuación característica***" o "***ecuación homogénea***" y su solución la denotaremos como $y_h(t)$. Para remarcar esto último, la escribiremos como sigue

$$a_n {y_h}^{(n)} + a_{n-1} {y_h}^{(n-1)} + \cdots a_1 {y_h}^{(1)} + a_0 y_h = 0 \qquad (7)$$

En forma análoga, representaremos la solución particular como $y_p(t)$. De este modo se escribe la siguiente expresión que debe satisfacer la ecuación completa

$$a_n {y_p}^{(n)} + a_{n-1} {y_p}^{(n-1)} + \cdots a_1 {y_p}^{(1)} + a_0 y_p = u(t) \qquad (8)$$

Como se trata de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, entonces la solución total, $y(t)$, es la suma de las dos es decir (1) se puede escribir como

$$a_n \frac{d^n[y_h+y_p]}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}[y_h+y_p]}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d[y_h+y_p]}{dt} + a_0(y_h + y_p) = u(t) \qquad (9)$$

de modo que para obtener la solución total $y(t)$, ***los coeficientes de la solución deben ser encontradas en forma conjunta.*** Recordar que, si solamente se quiere conocer la respuesta a las condiciones iniciales, los coeficientes de la solución se obtienen con la ecuación homogénea y las condiciones iniciales. Es decir, cuando se busca la solución total, es incorrecto determinar los coeficientes C_1, C_2,....C_n de la parte homogénea sustituyendo las condiciones iniciales en y_h solamente y luego, para obtener la respuesta total, agregar y_p a la y_h resultante. Por lo tanto, cuando está presente una entrada forzante, la solución homogénea puede no ser idéntica a la solución libre puesto que $u(t)$ puede influir el valor de los coeficientes. Previo a dar un ejemplo sobre la obtención de la respuesta total, es conveniente tratar métodos para evaluar la solución particular

La solución particular

La respuesta natural del sistema no depende de la función forzante. El efecto de la entrada se agrega en la denominada ***solución particular***, la cual se define como una solución posible que satisface la ecuación (1). Generalizar la obtención de la solución particular es más difícil que la solución homogénea, porque depende de la función forzante; un poco es adivinar una estructura en función de la forma de la entrada, sus derivadas o ambas. Por ejemplo, si $u(t)=\alpha \text{sen} wt$, luego $x_p(t)$ toma la forma $X_p(t)=A\text{sen}wt+B\cos wt$; lo único a determinar son los coeficientes A y B.

El ***método de los coeficientes indeterminados*** provee un abordaje sistemático para obtener la solución particular. Varias funciones de entrada importantes y las correspondientes formas de y_p que satisfacen la ecuación (1) se dan en la tabla siguiente:

Entrada $u(t)$	*Solución Particular* y_p
c	A
$ct+d$	$At+B$
$\sin ct$	$A_1 \sin ct + A_2 \cos ct$
$\cos ct$	$B_1 \sin ct + B_2 \cos ct$
e^{ct}	De^{ct}

Los parámetros A, B, A_1, A_2, B_1, B_2 y D de la tabla se determinan por sustitución de y_p y $u(t)$ en la ecuación 1 y luego igualando términos.

Para ilustrar el método, supongamos que $u(t) = \alpha e^{\beta t}$ con α y β constantes arbitrarias. Según la tabla, se toma como $x_p(t)$ con una forma similar, es decir

$$x_p(t) = Ae^{\beta t}$$

Donde el coeficiente A es desconocido. Se sustituye $u(t)$ y $x_p(t)$ en la ecuación 1' resultando

$$Ae^{\beta t}(a_n\beta^{(n)} + a_{n-1}\beta^{(n-1)} + \cdots a_1\beta + a_0) = \alpha e^{\beta t}$$

El polinomio entre paréntesis es la ecuación característica $H(p)$ con $p = \beta$. De este modo, suponiendo que $H(\beta) \neq 0$ se tiene que

$$A = \frac{\alpha}{H(\beta)} \qquad (10)$$

Unos ejemplos clarificaran el método.

Ejemplo 4: determinar la solución particular para la ecuación diferencial

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4e^t$$

Solución: La ecuación característica es

$$H(p) = p^2 + 3p + 2 = (p + 2)(p + 1)$$

Para la función forzante $u(t) = 4e^t$, $\alpha = 4$ y $\beta = 1$ de modo que

$$A = \frac{4}{H(1)} = \frac{2}{3}$$

Con este resultado, la solución particular es $x_p(t) = \frac{2}{3}e^t$

Ejemplo 5: para la ecuación diferencial del ejercicio 1, calcular la solución particular si $u(t) = \alpha$ (un escalón de amplitud α)

Solución: Se puede llevar la excitación a una forma exponencial al escribir $u(t) = 4 = 4e^{0t}$ de modo que $\beta = 0$ y $\alpha = 4$ y $x_p(t)=A$ resultando

$$A = \frac{4}{H(0)} = 2$$

De modo que la solución particular es $x_p(t) = 2$

Cuando $u(t)$ es una función seno o coseno, se puede seguir considerando que la función forzante tiene forma exponencial, aplicando el método de los coeficientes indeterminados y la ecuación (10). Supongamos tener

$$u(t) = \alpha \cdot e^{j\omega t} = \alpha \cdot (cos\omega t + jsen\omega t)$$

Luego la solución particular $x_{p1}(t)$ puede escribirse como

$$x_{p1}(t) = Re[x_{p1}(t)] + jIm[x_{p1}(t)]$$

Mediante el principio de superposición se puede demostrar que

Si $u(t) = \alpha \cdot cos\omega t$ entonces $x_p(t) = Re[x_{p1}(t)]$

Si $u(t) = \alpha \cdot sen\omega t$ entonces $x_p(t) = Im[x_{p1}(t)]$

Consecuentemente, si la excitación es una función seno o coseno, se puede utilizar un excitación $u(t) = \alpha e^{j\omega t}$; luego se toma la parte real o la imaginaria del resultado.

Ejemplo 6: determinar la solución particular para la ecuación diferencial

$$\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 4x(t) = 2 \cdot sen3t$$

Solución: como primer paso se debe considerar que $u_1(t) = 2e^{j3t}$. De este modo la solución particular toma la forma siguiente

$$x_{p1}(t) = Ae^{j3t}$$

Utilizando la ecuación característica $H(p)=p^2+5p+4$ se determina el coeficiente A

$$A = \frac{2}{H(j3)} = \frac{2}{-5 + j15} = \frac{2}{5\sqrt{10}} e^{j[tg^{-1}(3) - \pi]}$$

Luego $x_{p1}(t)$ es

$$x_{p1}(t) = \frac{2}{5\sqrt{10}} e^{j[tg^{-1}(3) - \pi + 3t]}$$

Por lo tanto la solución particular $x_p(t)$ para la excitación original $u(t) = 2 \cdot sen3t$ es:

$$x_p(t) = Im\left[x_{p1}(t)\right] = \frac{2}{5\sqrt{10}} \cdot sen[3t + tg^{-1}(3) - \pi]$$

Ahora que se sabe cómo obtener la respuesta particular, es interesante desarrollar un ejemplo de cálculo para la respuesta total según lo visto hasta aquí.

Ejemplo 7: Sea el sistema del ejemplo 4 cuya ecuación diferencial se reescribe aquí

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4e^t$$

suponiendo ahora las condiciones iniciales siguientes: $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = -1$. Se pide hallar la respuesta total.

Solución:
Se debe calcular la expresión de la parte de la respuesta con la ecuación homogénea; pero recién, cuando se conozca la respuesta particular, con la expresión total (y_h+y_p) se calculan los coeficientes de la parte homogénea.
La ecuación característica es

$$H(p)=p^2+3p+2=(p+2)(p+1)$$

La expresión de la solución homogénea es

$$x_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

Ahora se debe calcular la solución particular. Esto se hizo en el ejercicio 4 resultando que la solución particular es

$$x_p(t) = \frac{2}{3} e^t$$

De este modo, la expresión para la solución total es

$$x(t) = x_h(t) + x_p = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{2}{3} e^t$$

Ahora, se reemplazan los valores de las condiciones iniciales (t=0) y se evalúan los coeficientes C_1 y C_2:

$$x(0) = 0 = C_1 + C_2 + \frac{2}{3}$$
$$\dot{x}(0) = -1 = -C_1 - 2C_2 + \frac{2}{3}$$

Se encuentra que C_1=-9/3 y C_2=7/3. Consecuentemente, la solución total es

$$x(t) = -\frac{9}{3}e^{-t} + \frac{7}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{t}$$

Nota: prestar atención que en el cálculo de la respuesta total, los coeficientes de la parte homogénea, C_1 y C_2, se calculan en conjunto con la expresión de la respuesta particular [esto es porque las condiciones iniciales no se dan para $x_h(t)$ o $x_p(t)$, sino para la solución total $x(t)$= $x_h(t)$+$x_p(t)$]. Si se hubiese tratado de un sistema sin excitación y se desea evaluar la respuesta libre, también se evalúa con la ecuación homogénea, pero, por supuesto, no se tendrá la solución particular.

Otra forma de evaluar la respuesta total

La respuesta total también se puede escribir como la suma de otras 2 componentes; concretamente la suma de

- la respuesta del sistema a las condiciones iniciales con la señal forzante $u(t)$=0 que llamaremos $y_{ci}(t)$.
- la respuesta del sistema a la señal forzante con las condiciones iniciales nulas que llamaremos $y_u(t)$.

Para la solución de $y_{ci}(t)$ se busca la solución de la ecuación igualada a 0, es decir la ecuación homogénea:

$$a_n {y_{ci}}^{(n)} + a_{n-1} {y_{ci}}^{(n-1)} + \cdots a_1 {y_{ci}}^{(1)} + a_0 y_{ci} = 0 \quad (11)$$

Mientras que para la solución de $y_u(t)$ se trabaja con la ecuación completa pero con las condiciones iniciales son nulas:

$$a_n {y_u}^{(n)} + a_{n-1} {y_u}^{(n-1)} + \cdots a_1 {y_u}^{(1)} + a_0 y_u = u(t) \quad (12)$$

La solución total se escribe como sigue

$$y(t) = y_{ci}(t) + y_u(t) \quad (13)$$

Nota: es importante destacar que a pesar de operar con las mismas ecuaciones homogeneas, en general $y_h(t) \neq y_{ci}(t)$ y también $y_p(t) \neq y_u(t)$ ya que y_p es el valor que toma la respuesta para $t \rightarrow \infty$. Esto es consecuencia de que los coeficientes de la solución $y(t)$ según $y_h(t)\ e\ y_p(t)$ se deben calcular en forma simultánea según indica (9) mientras que las partes $y_{ci}(t)\ e\ y_u(t)$ se pueden calcular por separado y luego sumarlas.

Un sencillo ejemplo, resuelto aplicando Laplace, justificará lo afirmado en la nota anterior.

Ejemplo 8: Sea el sistema de 1er orden dado por la ecuación diferencial $\tau\dot{y} + y = u(t)$, con la condición inicial $y(0) = y_0$ y $u(t)$ un escalón de valor *A*, hallar la respuesta total

Solución: Aplicando Laplace con condiciones iniciales a la ecuación anterior, se obtiene

$$\tau[sY(s) - y_0] + Y(s) = \frac{A}{s}$$

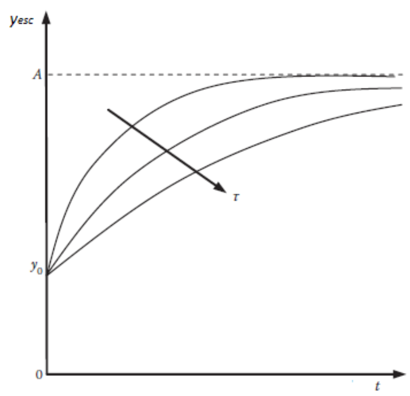
Acomodando algebraicamente la expresión se obtiene

$$Y(s) = \frac{\tau y_0}{(\tau s + 1)} + \frac{A}{s(\tau s + 1)} = \frac{\tau y_0}{(\tau s + 1)} + \frac{A}{s} - \frac{A\tau}{(\tau s + 1)} = \frac{\tau y_0}{(\tau s + 1)} + A\left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{(\tau s + 1)}\right)$$

Antitransformando se llega a la respuesta al escalón siguiente

$$y_{esc} = y_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

La figura siguiente muestra la respuesta al escalón del sistema



El primer sumando del segundo miembro es la respuesta del sistema a las condiciones iniciales [($y_{ci}(t)$] con $u(t)$=0. El segundo sumando es la respuesta propiamente al escalón [$y_u(t)$] con las condiciones iniciales nulas ($y_0 = 0$).

En resumen:

$$y_{ci} = y_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$y_u = A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

- $y_{ci}(t)$ además de llamarse "***respuesta a condiciones iniciales***" también se la suele llamar "***respuesta natural***" o "**respuesta libre**".
- $y_u(t)$ es la típica respuesta en el tiempo que se evalúa considerando condiciones iniciales nulas, es decir a partir de una función de transferencia; también se la conoce como "***respuesta forzada***

A la respuesta natural o libre es muy importante conocerla porque, como lo dice su nombre, habla de la esencia del sistema en estudio, es la que define la estabilidad del mismo y en general las características de comportamiento que presentara al aplicar alguna señal forzante $u(t)$.

Nota: Prestar atención que la respuesta natural depende exclusivamente del sistema ya que reacciona por las condiciones iniciales únicamente. La respuesta forzada sin embargo depende tanto del sistema como de la señal forzante.

Ahora bien reacomodando la respuesta al escalón, también se la puede escribir como

$$y_{esc} = (y_0 - A) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + A$$

En este caso el primer sumando corresponde a lo que se llamó respuesta homogénea del sistema $y_h(t)$ mientras que el segundo sumando es la solución particular del sistema $y_p(t)$ que es precisamente el valor que alcanzará la respuesta para $t \to \infty$.

En resumen:

$$y_h = (y_0 - A) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$y_p = A$$

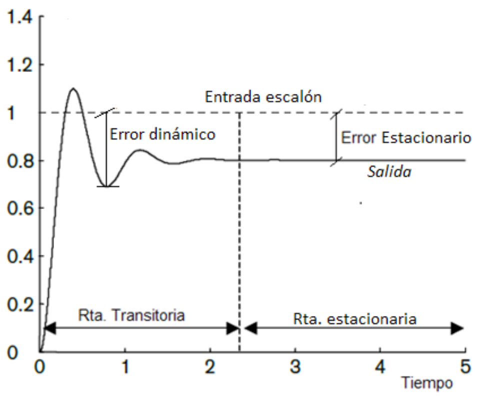
Claramente, escrita de este modo, las componentes de $y_{esc}(t)$ muestran las 2 partes comúnmente definidas en una respuesta en el tiempo:

- la "***componente transitoria***" representada por $y_h(t)$: es la que se anula para $t \to \infty$, generalmente en forma exponencial.

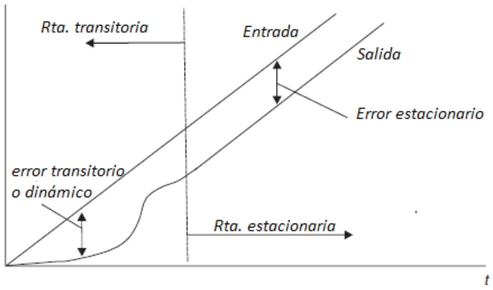
- la "***componente permanente***" o "***componente estacionaria***" representada por $y_p(t)$: es la que queda pasado el transitorio o sea en $t \to \infty$ y depende fundamentalmente de las características de la entrada.

"La respuesta total en el tiempo es la suma de la componente transitoria y la componente estacionaria".

Las figuras siguientes muestran respuestas típicas para una entrada escalón (*a*) y rampa (*b*) donde se aprecian las 2 partes de la respuesta en el tiempo y como depende la misma del sistema (transitorio) y de la entrada aplicada (permanente). También se destacan los errores entre la entrada y salida a medida que evoluciona la respuesta en el tiempo.



(*a*)



(*b*)

Analizaremos primero como se evalúa la respuesta natural $y_{ci}(t)$ (con condiciones iniciales ***no nulas*** y con ***u*(*t*)=0**) porque permitirá interpretar el significado de los parámetros típicamente estudiados que se definen en un sistema de 1^{er} y 2^{do} orden. Posteriormente se analizará las características que presenta la respuesta forzada $y_u(t)$ en especial con respecto a una señal tipo escalón.

Respuesta libre de un Sistemas de 1^{er} orden

Lo estudiado para el caso de un sistema de 1° orden es lo siguiente

$$a_1 \frac{d[y(t)]}{dt} + a_0 y(t) = 0 \qquad \text{con } y(0) = y_0 = \text{condición inicial}$$

Que se puede escribir como

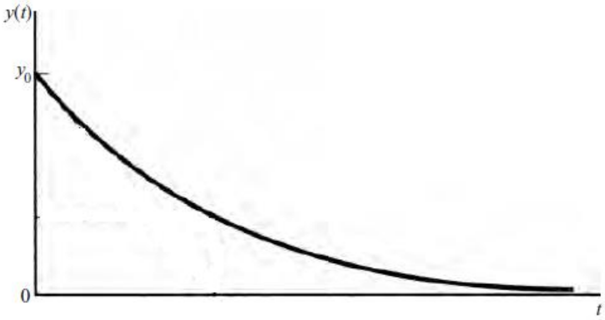
$$\frac{d[y(t)]}{dt} + p \cdot y(t) = 0 \qquad \text{con} \quad p = a_0/a_1$$

La solución de esta ecuación diferencial es de la forma exponencial obteniéndose:

$$y(t) = y_0 e^{-pt}$$

La solución es una exponencial decreciente desde el valor de la condición inicial hasta 0 ya que se consideró un sistema estable. Esta es la respuesta intrínseca del sistema, su "***adn***"; e^{-pt} recibe el nombre particular de "***modo propio del sistema***". Por supuesto que si el sistema es de orden *n* (la máxima derivada de la ecuación diferencial es *n*) tendrá *n* modos propios que definen perfectamente al sistema.

El modo propio indica la forma natural que tiene el sistema de responder ante un cambio en su situación de operación. La ecuación indica que partiendo desde el valor energético inicial y_0 (el sistema estaba energizado), en forma exponencial la energía almacenada decae a cero que es su "***estado de equilibrio***" con una velocidad dada por *p* (sistema asintóticamente estable). La figura siguiente muestra lo descripto



Ahora bien, si se aplica Laplace a la ecuación original con condiciones iniciales nulas se obtiene:

$$a_1 sY(s) + a_0 Y(s) = 0 \qquad \text{o bien} \qquad sY(s) + p \cdot Y(s) = 0$$

Que finalmente queda

$$s + p = 0$$

Esta ecuación es la ***"Ecuación Característica del sistema dinámico de 1^er^ orden"***.

Las raíces de la ecuación característica, en este caso solo una, es el "***valor propio del sistema***", que en este caso vale ***s=-p***. Como se dijo, en un sistema de 1^{er} orden estable, $|p|$ indica la velocidad con la que el sistema retorna al equilibrio

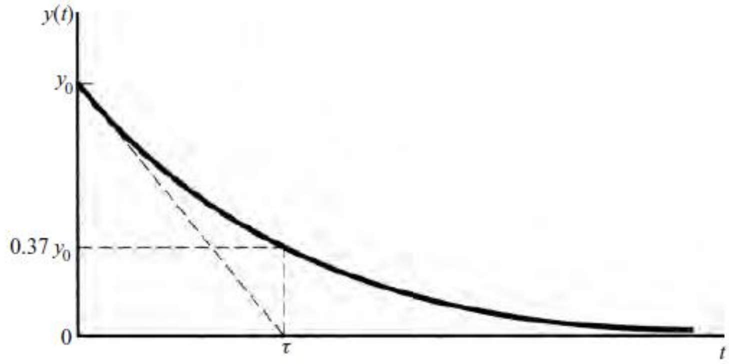
Ahora bien, si en la ecuación original $a_0 \neq 0$ y se lo hubiera sacado factor común se tiene

$$\tau \frac{d[y(t)]}{dt} + y(t) = 0 \quad \text{con} \quad \tau = \frac{a_1}{a_0}$$

$\boldsymbol{\tau}$ tiene dimensión de tiempo y recibe el nombre de "***tiempo de retorno***" o como se lo conoce comúnmente "***constante de tiempo del sistema***"; es el inverso del módulo del valor propio y por lo tanto da una medida en tiempo de la rapidez con la que un sistema asintóticamente estable retorna a su equilibrio. Se puede por lo tanto escribir la solución de la ecuación diferencial como

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Por lo tanto **$\boldsymbol{\tau}$ es el tiempo en el que la solución disminuye un 63% del valor de la condición inicial** ya que el valor de $y(\tau)$=0.37 y_0. La figura siguiente muestra la evolución de *y*(t) en el tiempo



Observar que la máxima velocidad de cambio se produce en t=0 ya que en ese momento la derivada es máxima con valor:

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{y_0}{\tau}$$

Demás está decir que si p=0 la solución es una constante y si p>0 el sistema lejos de retornar a un equilibrio estable se aleja constituyendo lo que se conoce como un sistema inestable.

Resumiendo: ***el comportamiento de un sistema de 1^er^ orden (un elemento almacenador de energía) queda totalmente caracterizado ya sea por su valor propio p o por su inverso τ o constante de tiempo.***

Sistema de 2^do^ orden

En este caso la ecuación diferencial que la representa es

$$a_2\frac{d^2[y(t)]}{dt^2} + a_1\frac{d[y(t)]}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad \text{con} \begin{cases} y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \end{cases} \quad \text{c. i.}$$

La ecuación característica es: $a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$ cuyas raíces son:

$$p_1, p_2 = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{4a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$$

De acuerdo a la ubicación de las raíces se presentan 3 situaciones asintóticamente estables de comportamiento:

a) Raíces reales y distintas

Este es el caso del ejemplo del apartado anterior donde se vio que la solución tiene la forma siguiente:

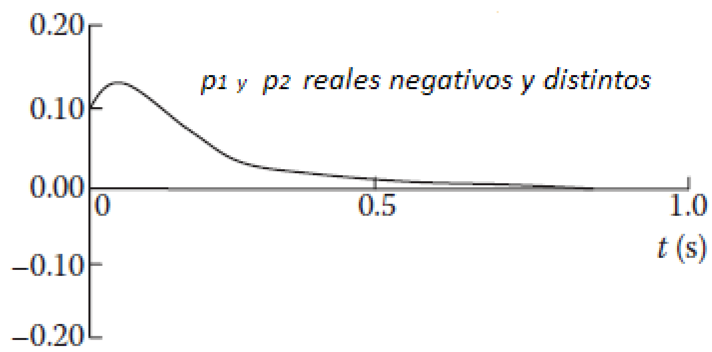
$$y(t) = C_1 \cdot e^{p_1 t} + C_2 \cdot e^{p_2 t} = \left(\frac{p_2 \cdot y_0 - \dot{y}_0}{p_2 - p_1}\right) \cdot e^{p_1 t} + \left(\frac{\dot{y}_0 - p_1 \cdot y_0}{p_2 - p_1}\right) \cdot e^{p_2 t}$$

Esto es, la solución es la suma 2 componentes de 1er orden ya estudiadas. Puesto que la solución es la suma, el sistema será asintóticamente estable si y solo si $p_1<0$ y $p_2<0$. En esta situación de estabilidad se suele definir un tiempo de retorno $\boldsymbol{\tau}$ como

$$\tau = \frac{1}{\min |p_1, p_2|}$$

Definición bastante acertada cuanto más separado sean p_1 y p_2

La figura siguiente muestra una típica respuesta a las condiciones iniciales de un sistema con 2polos reales y distintos en el spi.



b) Valores propios iguales ($p_1=p_2=p$)

En este caso la solución es de la forma

$$y(t) = C_1 \cdot e^{pt} + C_2 \cdot t \cdot e^{pt}$$

Que en función de las condiciones iniciales queda

$$y(t) = y_0 \cdot e^{pt} + [\dot{y}_0 - p y_0] \cdot t \cdot e^{pt}$$

Como antes, para que el comportamiento sea asintóticamente estable $p_1=p_2=p$ debe ser menor que 0.

La forma de la respuesta es similar a la que se presentó para valores propios reales y distintos pero con una respuesta más rápida.

c) Valores propios complejos conjugados

En este caso se tiene que

$$p_1 = \alpha + j\beta \qquad \text{y} \qquad p_2 = \alpha - j\beta$$

La solución se escribe en este caso como

$$y(t) = C_1 \cdot e^{(\alpha+j\beta)\cdot t} + C_2 \cdot e^{(\alpha-j\beta)\cdot t}$$

Que se puede escribir como

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\alpha t}(cos\beta t + jsen\beta t) + C_2 \cdot e^{\alpha\cdot t}(cos\beta t - jsen\beta t)$$

Acomodando se tiene

$$y(t) = e^{\alpha t} \cdot (C_3 \cdot cos\beta t + C_4 sen\beta t) \quad \text{con} \quad \begin{cases} C_3 = (C_1 + C_2) \\ C_4 = j(C_1 - C_2) \end{cases}$$

Nota: si p_1 y p_2 son complejos conjugados, C_1 y C_2 también serán complejos conjugados pero C_3 y C_4 serán constantes reales.

La solución de la ecuación diferencial en este caso en función de las condiciones iniciales queda

$$y(t) = e^{\alpha t} \cdot \left\{ y_0 \cdot cos\beta t + \left[\frac{\dot{y}_0 - (y_0 \cdot \alpha)}{\beta}\right] \cdot sen\beta t \right\}$$

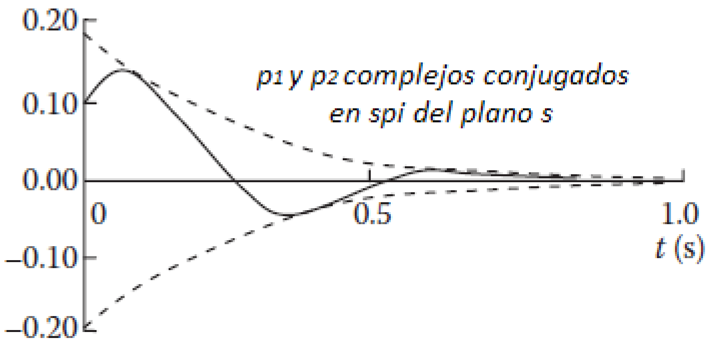
Que también se puede expresar como

$$y(t) = C_5 \cdot e^{\alpha t} \cdot sen(\beta t + \varphi) \quad \text{con} \quad \begin{cases} C_5 = \sqrt{C_3^2 + C_4^2} \\ \varphi = tg^{-1}\left(\frac{C_3}{C_4}\right) \end{cases}$$

El sistema presentará estabilidad asintótica siempre que $\alpha < 0$ y en ese caso también se suele definir un tiempo de retorno o "***atenuación del sistema***" $\boldsymbol{\tau}$ como

$$\tau = \frac{1}{|\alpha|}$$

La respuesta típica de este caso para un par complejo conjugado con $\alpha < 0$ en el plano *s* es oscilatoria amortiguada tal como se muestra en la figura siguiente



Por supuesto, si $\alpha = 0$ no habrá amortiguamiento y la oscilación será sostenida con amplitud constante mientras que si $\alpha > 0$ la oscilación tendrá amplitud creciente.

Estudio mediante la expresión clásica de un sistema de 2do orden

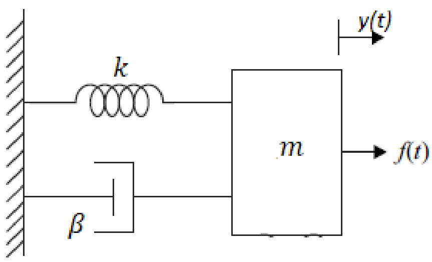
La forma típica de representar a los sistemas de 2do orden es mediante la ecuación siguiente:

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n \cdot \dot{y}(t) + \omega_n^2 \cdot y(t) = f(t)$$

Que para el caso del análisis de la ecuación homogénea resulta

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n \cdot \dot{y}(t) + \omega_n^2 \cdot y(t) = 0$$

La primera pregunta que aparece es ¿qué representan ξ y ω_n? Para responder a esta pregunta se analiza el siguiente sistema mecánico sobre el que actúa una fuerza *f*(*t*) y se produce un desplazamiento *y*(*t*)



La ecuación diferencial del mismo es la siguiente

$$m \cdot \ddot{y}(t) + \beta \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = f(t)$$

La ecuación homogénea por lo tanto es

$$m \cdot \ddot{y}(t) + \beta \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = 0$$

Significado de $\boldsymbol{\omega_n}$

Con este fin se considera al sistema mecánico en cuestión libre y sin el elemento amortiguador cuyo valor es β; la ecuación queda

$m \cdot \ddot{y}(t) + k \cdot y(t) = 0$ o bien acomodándola $\ddot{y}(t) + \frac{k}{m} \cdot y(t) = 0$ (*)

Se puede comprobar que una simple solución que la verifica es

$$y(t) = A \cdot sen\omega t$$

Para esta solución se tiene que

$$\dot{y}(t) = \omega \cdot A \cdot cos\omega_n t \qquad \text{y} \qquad \ddot{y}(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot sen\omega_n t$$

Reemplazando en (*) se obtiene

$$-\omega^2 \cdot A \cdot sen\omega t + \frac{k}{m} \cdot A \cdot sen\omega t = 0$$

De modo que $\frac{k}{m} = \omega^2$ o bien $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Resulta entonces que la salida del sistema en respuesta a una posible energía almacenada en el sistema o condición inicial es una oscilación senoidal de frecuencia ω. Comparando la ecuación (*) con la genérica para una situación similar: $\ddot{y}(t) + \omega_n^2 \cdot y(t) = 0$

Resulta que $\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \omega^2$. Es decir $\boldsymbol{\omega_n}$ **es *la frecuencia a la que oscilaría el sistema sin ningún amortiguamiento***. De allí entonces el nombre que recibe ω_n:

$\boldsymbol{\omega_n}$: Frecuencia natural no amortiguada del sistema

Ahora bien, si se considera que existe amortiguamiento, es decir $\beta \neq 0$ y por lo tanto la ecuación diferencial homogénea está completa:

$$m \cdot \ddot{y}(t) + \beta \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = 0$$

La solución ahora es del tipo $y(t) = Ae^{st}$. Igual que antes calculando las derivadas y reemplazando se tiene:

$$m \cdot A \cdot s^2 \cdot e^{st} + \beta \cdot A \cdot s \cdot e^{st} + k \cdot A \cdot e^{st} = 0$$

Lo que da como resultado la siguiente ecuación auxiliar

$$m \cdot s^2 + \beta \cdot s + k = 0$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$s_1, s_2 = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{\beta^2}{4mk}\right) - \frac{k}{m}}$$

Como se vio, $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$, porlo tanto reemplazando este valor se obtiene

$$s_1, s_2 = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\omega_n^2 \cdot \left(\frac{\beta^2}{4mk}\right) - \omega_n^2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \omega_n \cdot \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{4mk}\right) - 1}$$

Llamando a $\frac{\beta^2}{4mk} = \xi^2$ resulta que $\xi = \frac{\beta}{2\sqrt{m \cdot k}}$

Definiendo como valor crítico del amortiguamiento β a aquel que provoca la anulación de la raíz cuadrada (s_1 y s_2 raíces reales iguales) se tiene que este valor es precisamente $2\sqrt{m \cdot k} = \beta_c$. De este modo entonces $\xi = \frac{\beta_{real}}{\beta_c}$ y de esta forma se define a ξ como:

ξ: ***Factor de amortiguamiento relativo del sistema***

Reemplazando el valor de ξ y el de $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ en la expresión de las raíces se obtiene:

$$s_1, s_2 = -\xi \cdot \omega_n \pm \omega_n \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Que precisamente son las raíces de la ecuación genérica original.

En esta expresión, si:

- $\xi^2 = 1$ las 2 raíces serán reales e iguales y se dice que ***el sistema presenta amortiguamiento crítico*** (el amortiguamiento β del sistema tiene el valor critico).
- $\xi^2 > 1$ las 2 raíces serán reales y distintas y se dice que ***el sistema es sobreamortiguado*** (β del sistema $> \beta_c$)
- $\xi^2 < 1$ las raíces serán complejas conjugadas y se dice que ***el sistema es sub-amortiguado*** (β del sistema $< \beta_c$)

En el caso sub-amortiguado se suele escribir a las raíces como

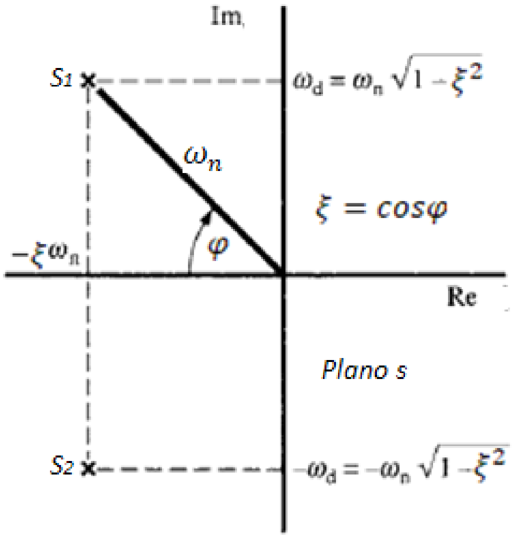
$$s_1, s_2 = -\sigma \pm j\omega_d$$

donde

σ: es la atenuación del sistema = $\xi \cdot \omega_n$

ω_d: es la Frecuencia natural amortiguada del sistema = $\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$

En la siguiente figura se muestra un plano *s* con un par complejo conjugado de polos y se destacan los valores definidos



Como ejemplo de cálculo, se evalúa la respuesta a las condiciones iniciales según la ecuación genérica de un sistema de 2do orden subamortiguado.

La ecuación de partida es:

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n \cdot \dot{y}(t) + \omega_n^2 \cdot y(t) = 0$$

Aplicando Laplace con condiciones iniciales se tiene

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 2\xi\omega_n[sY(s) - y(0)] + \omega_n^2 Y(s) = 0$$

Acomodando la ecuación resulta

$$Y_{ci}(s) = \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + 2\xi\omega_n y(0)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

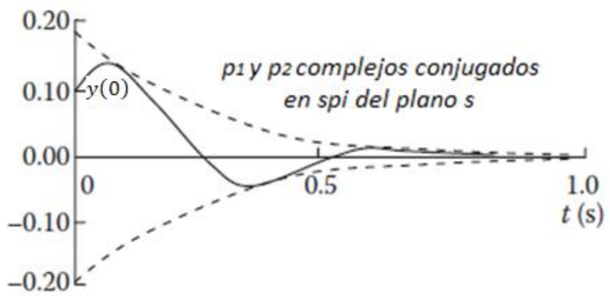
Previo a antitransformar se puede acomodar la expresión como sigue

$$Y_{ci}(s) = \frac{(s + \xi\omega_n)y(0)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\dot{y}(0) + \xi\omega_n y(0)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Antitransformando se obtiene la respuesta en el tiempo para las condiciones iniciales, resultando

$$y_{ci}(s) = y(0) \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cdot cos\omega_d t + \left[\frac{\dot{y}(0) + \xi\omega_n y(0)}{\omega_d}\right] \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cdot sen\omega_d t \quad \text{para } 0 \le \xi \le 1$$

Se repite a continuación la figura presentada con anterioridad como una típica gráfica de dicha respuesta

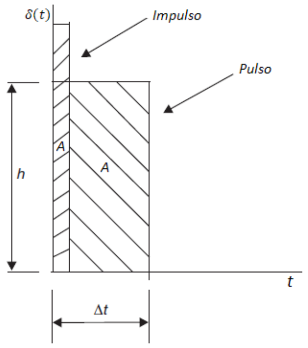


Se puede ver que en *t*=0 la respuesta comienza en $y(0)$ = 0.1 y la pendiente en t=0 estará dada por $\dot{y}(0)$.

La respuesta forzada (sin condiciones iniciales)

Señales forzantes típicas

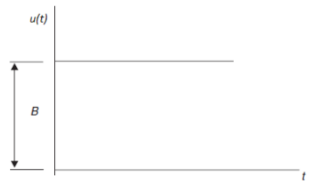
Las señales típicamente utilizadas para la evaluación del desempeño de un sistema de control son de la forma $r(t) = k\frac{t^p}{p!}$ con *p*=0,1,2,….consideradas para *t*≥0. La correspondiente transformada de Laplace es $R(s) = k\frac{1}{s^{p+1}}$.
Además también se considera una señal muy específica cuyo ensayo permite conocer al sistema mismo, es la llamada "***función Impulso***". Un impulso es un pulso con un ancho $\Delta t \to 0$ tal como se muestra en la figura siguiente. La amplitud de un impulso es el área A donde $A = h \times \Delta t$



La transformada de Laplace de una función impulso es igual al área *A* de la función. El impulso cuya área es unitaria recibe el nombre de "***Impulso unitario,*** $\boldsymbol{\delta(t)}$". Cuando se excita con $\boldsymbol{\delta(t)}$, la respuesta del sistema es la expresión del sistema mismo, es decir sus modos propios. Un simple ejemplo corroborará lo afirmado
Sea la función de transferencia de 1er orden $\frac{y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s\tau+1}$, si $r(t) = \delta(t)$
$y(s) = \frac{1}{s\tau+1} \times 1$ y su antitransformada es $y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$ que precisamente es el modo propio del sistema excitado.

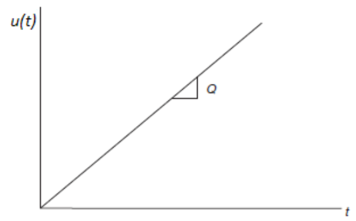
La función escalón

Según la expresión genérica planteada al comienzo, corresponde a *p*=0, por lo tanto esta función se describe como de valor *k* para *t*≥0. Su transformada de Laplace es *k/s*. Típicamente se utiliza como escalón unitario (*k*=1) y a veces se lo llama "***entrada de posición***". La figura siguiente muestra una señal escalón de amplitud *B.*



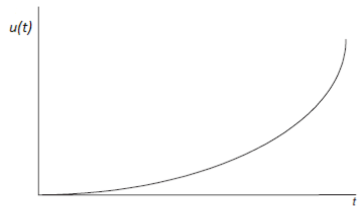
La función rampa

Según la expresión genérica planteada al comienzo, corresponde a p=1, por lo tanto esta función se describe como aquella cuya pendiente tiene valor k para $t \geq 0$. Su transformada de Laplace es k/s^2. Típicamente se utiliza como rampa unitaria (k=1) y a veces se la llama "***entrada de velocidad***". La figura siguiente muestra una señal rampa de pendiente Q.



La función parábola

Según la expresión genérica planteada al comienzo, corresponde a p=2, por lo tanto esta función se describe como aquella que presenta un comportamiento parabólico para $t \geq 0$. Su transformada de Laplace es k/s^3. Típicamente se utiliza como parábola unitaria (k=1) y a veces se la llama "***entrada de aceleración***". La figura siguiente muestra una señal rampa.



Sistema de 1er orden

La ecuación de 1er orden completa es

$$a_1 \frac{d[y(t)]}{dt} + a_0 y(t) = br(t)$$

Sacando factor común a_0 se puede acomodar como

$$\frac{a_1}{a_0}\frac{d[y(t)]}{dt} + y(t) = \frac{b}{a_0}r(t)$$

Llamando a

- $\frac{a_1}{a_0} = \tau$ *"constante de tiempo del sistema"*
- $\frac{b}{a_0} = k$ *"ganancia en estado estacionario del sistema"*

La ecuación se puede escribir como

$$\tau \cdot \frac{d[y(t)]}{dt} + y(t) = k \cdot r(t)$$

Considerando condiciones iniciales nulas y aplicando Laplace se obtiene acomodando la función de transferencia siguiente

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s\tau+1}$$

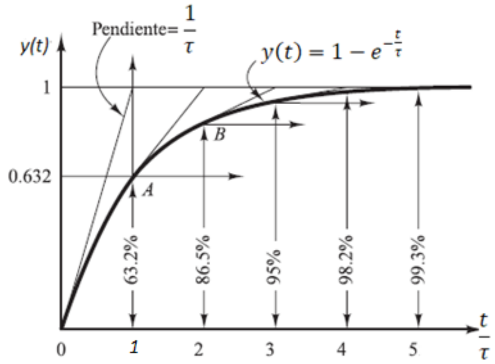
Sin pérdida de generalidad se suele definir una función de transferencia que se la llama **normalizada** (término independiente del polinomio numerador igual al término independiente del polinomio denominador) porque el error al escalón es nulo:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s\tau + 1}$$

***Respuesta al escalón*:**
La respuesta normalizada es

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{para } t \geq 0.$$

En este caso el error para $t \to \infty$ es nulo: $e_{esc}(\infty) = r(\infty) - y(\infty) = 0$.
La figura siguiente es la de una típica respuesta al escalón normalizada



Notar que si el escalón hubiese tenido amplitud *A*, la respuesta se escribe

$$\frac{y(t)}{A} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = y(t) = A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

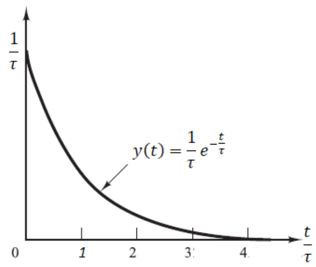
De allí lo de respuesta normalizada ya que cualquiera sea el valor del escalón lo único que se debe hacer es multiplicar la solución normalizada por el valor del escalón.

Nota: una propiedad de la función exponencial es que entre cada constante de tiempo se modifica su valor un 63% del valor final, es decir desde *t*=0 hasta *t*=τ (desde 0 hasta A en la gráfica anterior) la señal alcanzó el 63% del final; desde t = τ hasta t = 2τ (desde A hasta B) la señal subió un 63% *de lo que falta para llegar a 1*, y así sucesivamente.

Respuesta al impulso

La respuesta normalizada es

$$y(t) = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{para } t \geq 0$$

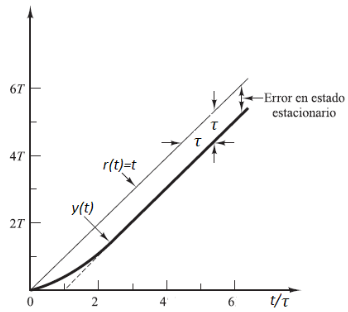


Igual que antes, si el escalón tiene valor *A,* en *t*=0 tendrá el valor $\frac{A}{\tau}$

Respuesta a la rampa

La respuesta normalizada es

$$y(t) = t - \tau + \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{para } t \geq 0$$



En este caso el error a la rampa en $t \to \infty$ es finito con valor τ:

$$e_{rampa}(\infty) = r(t) - y(t) = \left[t - \left(t - \tau + \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] \Big|_{t \to \infty} = \tau$$

Por lo tanto un sistema de primer orden tendrá más precisión cuanto más pequeña sea su constante de tiempo.

Igual que antes si el escalón es de valor A, $y(t) = A\left(t - \tau + \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

Propiedad de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Si se presta atención a las respuestas en el tiempo del sistema de 1er orden obtenidas para distintas señales de entrada,

- la derivada de la respuesta a la rampa es la respuesta para una entrada escalón
- la derivada de la respuesta al escalón es la respuesta para una entrada impulso.

Ahora bien analizando las entradas:

- la señal escalón es la derivada de la señal rampa
- la derivada de la señal escalón es la señal impulso.

Resulta así una propiedad muy importante de los sistemas LTI:

*"**Dada una señal de entrada r(t) y su respuesta y(t), si el sistema es LTI, la respuesta a la derivada de r(t) se la obtiene derivando y(t)**"*

Características de la respuesta al escalón de un sistema de 1er orden

Entre las características a analizar tenemos

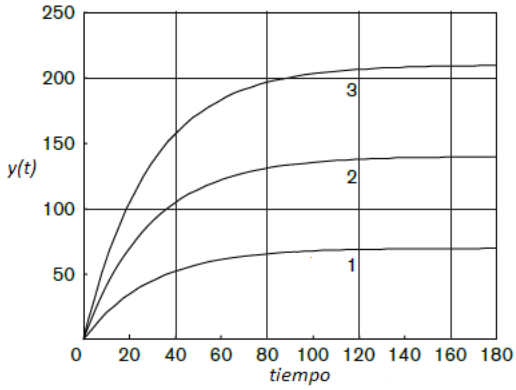
La pendiente de salida de la curva normalizada en el origen es finita y viene dada por la derivada de *y*(t) en *t*=0:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\tau}$$

Si el escalón presenta una amplitud *A*, la pendiente será $\frac{A}{\tau}$, esto se muestra en la siguiente figura con un ejemplo de un sistema que tiene una función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{140}{29s + 1}$$

Se aplican escalones de 3 amplitudes *A* distintas: (1)=.5, (2)=1 y (3)=1.5



(1) alcanzará el valor final de 70, (2) alcanzará 140 y (3) 210. Sin embargo los tres tienen la misma constante de tiempo $\tau = 29$ y por lo tanto en 29 seg. cada uno alcanzará el 63% de su respectivo valor final y para ello las correspondientes pendientes en el origen deben ser diferentes: (1) es 70/29=2.4, en (2) es 140/29=4.8 y en (3) es 210/29=7.24. Prestar atención que en este caso la amplitud del escalón por la ganancia del sistema representa el valor final que alcanzará la salida

2 conclusiones se pueden rescatar hasta aquí:

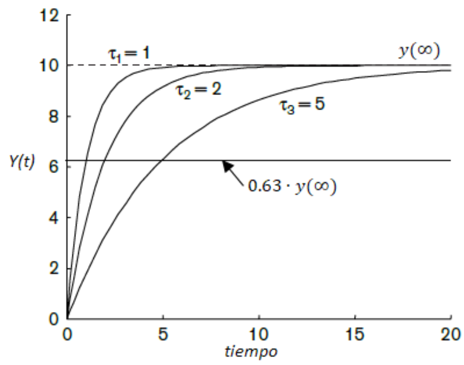
- ***"La ganancia del sistema es un índice de su capacidad "***
- ***"la pendiente en el origen no es índice la velocidad del sistema"***

Se vio que la ganancia del sistema tiene efecto sobre el valor en estado estacionario del sistema pero no tiene efecto sobre la velocidad de respuesta. Se puede escribir una tercera conclusión:

- “***solo la constante de tiempo tiene influencia en la velocidad de respuesta: cuanto más chica, más veloz***”.

Para demostrar lo afirmado, la siguiente figura corresponde a la respuesta a un escalón unitario de 3 sistemas con distintas constantes de tiempo pero igual ganancia:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s+1} \qquad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{2s+1} \qquad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{5s+1}$$



Claramente cuanto mayor es la constante de tiempo, más lento es el sistema.

Sistemas integradores o no autoregulados

En la expresión general $a_1 \frac{d[y(t)]}{dt} + a_0 y(t) = br(t)$ puede ocurrir que la constante a_0 sea nula. En ese caso la expresión queda

$$a_1 \frac{d[y(t)]}{dt} = br(t)$$

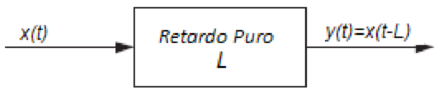
Este tipo de procesos se conocen como “**procesos integradores**”. Ocurre que la salida es la integral en el tiempo de la entrada. También se les suele llamar “**procesos no auto-regulados**” para diferenciarlos de los que sí tienen completa la ecuación diferencial que, tal como se estudió, al excitarlo con un escalón alcanza un nuevo estado estacionario; en estos procesos no ocurre lo mismo y por lo tanto la variable crece mientras dure la excitación.
Para justificar el nombre de integradores basta con aplicar Laplace con condiciones iniciales nulas obteniendo

$a_1 sY(s) = bR(s)$ de donde se tiene que $Y(s) = \frac{1}{s}\frac{b}{a_1}R(s)$

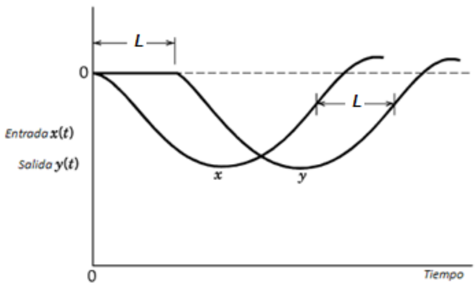
El típico ejemplo de un proceso autoregulado es un tanque al que ingresa líquido y del cual sale liquido libremente por un orificio. Cuando el caudal de líquido que sale debido al nivel de líquido en el tanque sea igual al caudal que ingresa, se consigue un nuevo equilibrio o nivel de líquido en el tanque.
Por el contrario, si en la salida del tanque se coloca una bomba que obliga a salir una cantidad de líquido constante, si el caudal de entrada es mayor que el que elimina la bomba, el sistema rebalsará y si es menor llegara a agotarse el líquido en el tanque.
Estos procesos pueden llegar a ser difíciles de controlar debido a que no presentan autoregulación

Retardo de transporte o tiempo muerto

El "***retardo de transporte***" ocurre cuando al aplicar una señal a la entrada de un sistema esta aparece a la salida idéntica a la entrada pero corrida un valor *L*. esto se representa en el esquema de la figura siguiente



Para una señal de entrada $x(t)$, a la salida se obtiene una señal $y(t)$ idéntica pero retrasada en el tiempo en un valor *L* tal como se muestra en la figura siguiente



Entonces, si la señal de entrada es $x(t)$, la salida $y(\mathrm{t})=x(t\text{-}L)$

En cuanto al retardo de transporte, la ecuación en el tiempo que lo representa es la siguiente:

$$y(t) = u(t - L)$$

En este caso se visualiza que el retardo de transporte ***L*** es lo que se conoce también como ***"Tiempo Muerto"*** ya que es el lapso de tiempo que transcurre desde que se aplica la información hasta que aparece idénticamente a la salida.

La transformada de Laplace en este caso es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-Ls} = e^{-jwL} = e^{-j\theta}$$

Como la expresión para el retardo de transporte es de dimensión infinita, es común aproximar el término exponencial correspondiente al tiempo muerto e^{-Ls} mediante las llamadas "***aproximaciones de Padè***" de primer y segundo orden de la siguiente manera:

Aproximación de primer orden: $e^{-Ls} \cong \frac{1-\frac{L}{2}s}{1+\frac{L}{2}s}$

Aproximación de segundo orden: $e^{-Ls} \cong \frac{1-\frac{L}{2}s+\frac{L^2s^2}{12}}{1+\frac{L}{2}s+\frac{L^2s^2}{12}}$

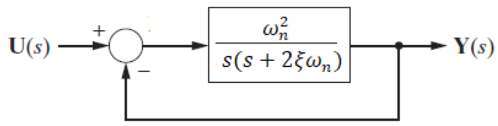
Con esta aproximación se consigue reemplazar el retardo de transporte por polinomios con los cuales es más sencillo operar. Notar que la aproximación introduce ceros en el semiplano derecho del plano s con las consecuencias negativas que esto introduce y que justifica de alguna manera lo complicado que será operar con tiempos muertos.

Analizando intuitivamente lo que ocurre, durante el tiempo muerto del sistema, el controlador no tiene información de la salida y por lo tanto es como si el sistema operara virtualmente a lazo abierto. Es comprensible así que los tiempos muertos generan problemas serios a la hora de diseñar el control del lazo.
Ante lo aquí presentado, como en el diseño de los sistemas de control, además de los retardos propios de los elementos de medición y actuación aparecen otros retardos relacionados con la ubicación física de los mismos, es necesario extrema atención al decidir no solo el tipo sino la ubicación física de los elementos del lazo de control.

Conclusión: "***Cuanto mayor sean los retardos de un sistema realimentado, más difícil será alcanzar un comportamiento satisfactorio"***.

Características de la respuesta al escalón de sistemas de 2^do^ orden

Como es sabido, la respuesta en el tiempo está ligada fundamentalmente con la posición en el plano *s* de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado. Sea el sistema dado por el esquema de la siguiente figura



La función de transferencia de lazo cerrado normalizada que representa a este sistema de 2do orden tiene la forma mostrada a continuación

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Recordemos, se definió:

$\boldsymbol{\omega_n}$: *Frecuencia natural no amortiguada*

$\boldsymbol{\xi}$: *Factor de amortiguamiento relativo*

Las raíces del polinomio denominador resultan

$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{y} \quad s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Claramente la ubicación de los polos del sistema está íntimamente relacionada con el valor del factor de amortiguamiento relativo, ocurriendo que:

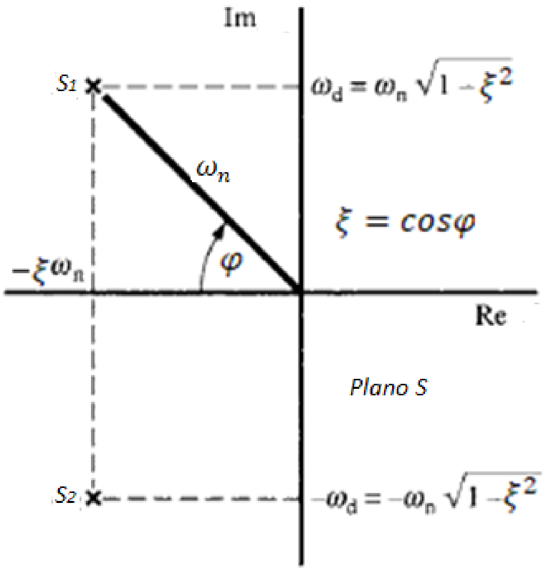
- $\xi = 0$ ($s_{1,2} = \pm j\omega_n$): un par imaginario puro de polos (sistema sin amortiguamiento)

- $0 \le \xi \le 1$ ($s_{1,2} = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$): par complejo conjugado de polos (sistema sub-amortiguado)

- $\xi = 1$ ($s_{1,2} = -\xi\omega_n$): 2 polos reales e iguales (sistema con amortiguamiento crítico).

- $\xi > 1$ ($s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$): 2 polos reales y distintos (sistema sobre amortiguado)

De las 4 situaciones la más interesante de estudiar en detalle es el caso sub-amortiguado. En la figura siguiente se representa la ubicación de los polos en el plano *s* y los parámetros que se definen en la ecuación para una par complejo de polos de un sistema sub-amortiguado



En este caso se definen además de los parámetros $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\omega_n}$ ya citados a

ω_d: Frecuencia natural amortiguada o de oscilación

$\xi\omega_n$: Atenuación del sistema

Respuestas a las entradas típicas

La forma en que responde un sistema cuando es excitado con distintos tipos de señales proporciona una idea de cómo se comportará cuando el sistema sea diseñado para efectuar el seguimiento de la entrada. Las señales citadas del tipo $r(t) = t^n$ son las adecuadas para este análisis. A continuación se presentan las expresiones matemáticas de las respuestas al escalón, rampa e impulso acompañadas de graficas típicas de esas respuestas.

Respuestas al escalón

$\boldsymbol{\xi = 0 \;\; \therefore \omega_d = \omega_n \;,\;\; para\; t \geq 0}$:

$$y(t) = 1 - cos[\omega_n \cdot t]$$

$\boldsymbol{0 \leq \xi \leq 1,\;\; para\; t \geq 0}$:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot sen\left[\omega_d \cdot t + tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right]$$

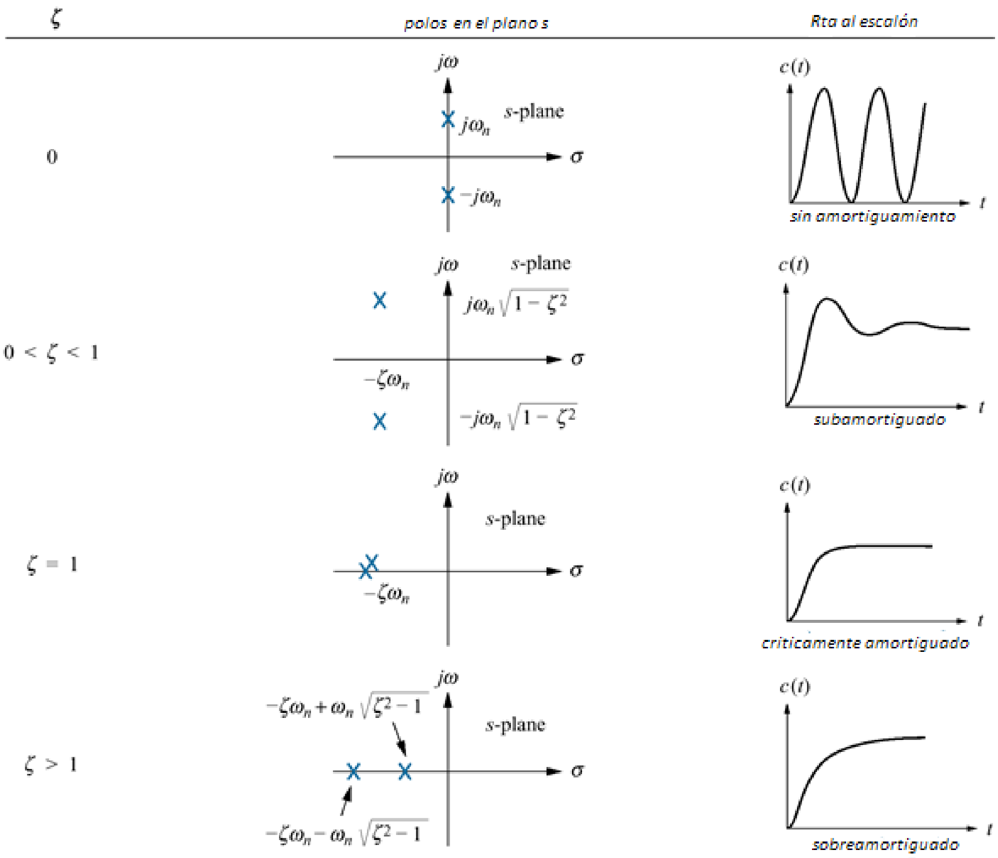
$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot sen[\omega_d \cdot t + \varphi]$$

$\boldsymbol{\xi = 1 \;\;,\;\; para\; t \geq 0}$:

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \cdot (1 + \omega_n \cdot t)$$

$\boldsymbol{\xi > 1 \;\; \therefore \;\; s_1 = \omega_n \cdot \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \;\; y \;\; s_2 = \omega_n \cdot \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \;\; para\; t \geq 0}$:

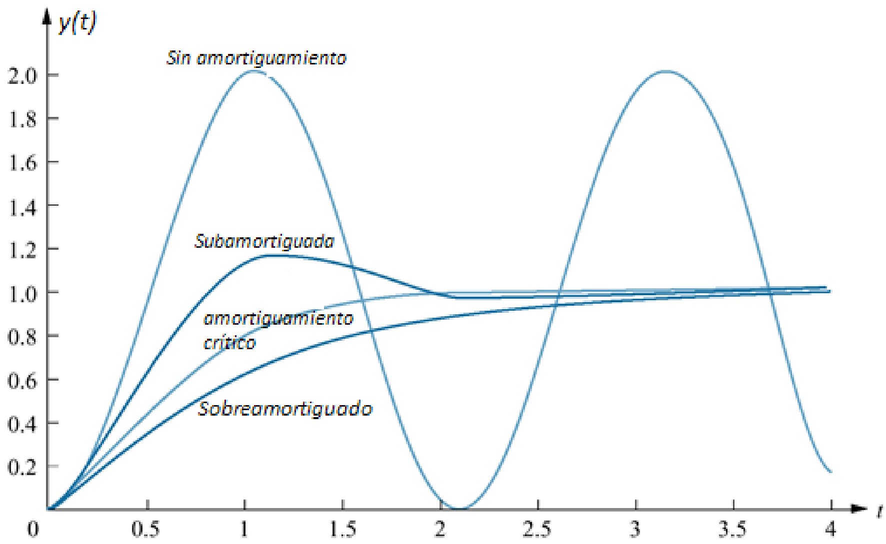
$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right)$$



Observar que cuando $\xi \gg 1$ $s_1 \approx 2\xi\omega_n$ y $s_2 \approx 0$ por lo tanto se puede despreciar el sumando que decae más rápido (s_1). Esto es permitido ya que el efecto en la respuesta de s_2 es mucho más pequeño que el de s_1 al desaparecer rápidamente. Cuando esto ocurre se puede escribir la siguiente respuesta al escalón:

$$y(t) \cong 1 - e^{-\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t} \quad \text{para } t \geq 0$$

La figura siguiente presenta simultáneamente las respuestas para cada caso para poder comparar sus respuestas



Nota: prestar atención que:

- Como se utilizó una función de transferencia normalizada, el error al escalón es siempre 0
- La pendiente con la que comienzan las curvas en *t*=0 es 0

Respuestas al impulso

$\mathbf{0 \leq \xi \leq 1}$, $\boldsymbol{para\, t \geq 0}$

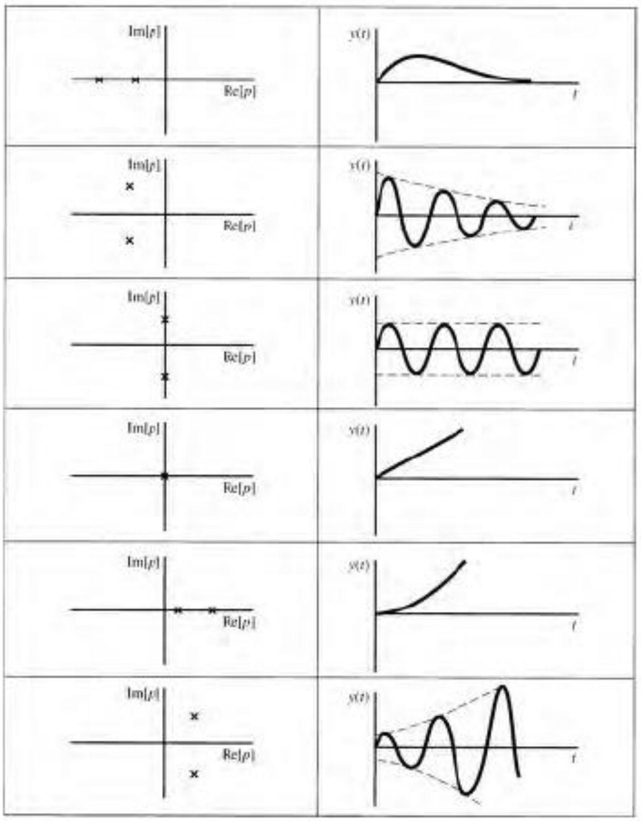
$$y(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cdot sen\omega_d \cdot t$$

$\boldsymbol{\xi = 1, para\; t \geq 0}$

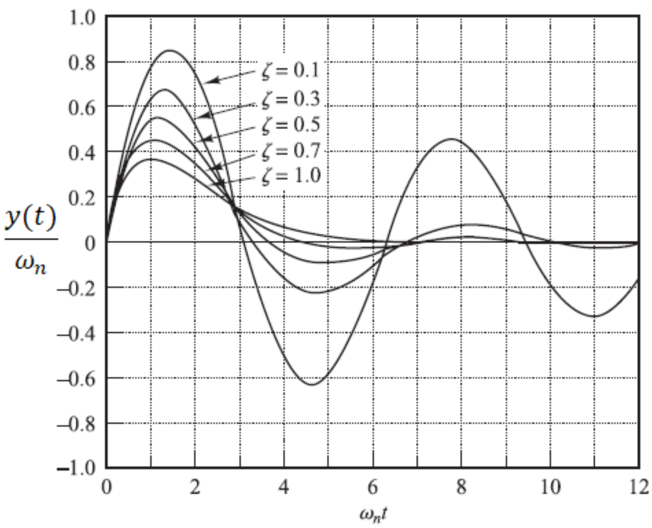
$$y(t) = \omega_n^2 \cdot t \cdot e^{-\xi\omega_n t}$$

$\boldsymbol{\xi > 1}, \quad \boldsymbol{para\, t \geq 0:}$

$$y(t) = \frac{\omega_n}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{-\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \cdot \omega_n t} - \frac{\omega_n}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot e^{-\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \cdot \omega_n t}$$



La figura siguiente presenta simultáneamente las respuestas para cada caso para poder comparar sus respuestas



Nota: Prestar atención que

- En la respuesta al impulso la pendiente de las curvas en *t*=0 es finita.
- Si la respuesta al impulso no cambia de signo el sistema es críticamente amortiguado o sobre amortiguado.
- El sobrepico máximo para el caso sub-amortiguado ocurre en

$$t_{pimp} = \frac{\varphi}{\omega_d}$$

- el sobrepico máximo vale $y_{pico} = \omega_n \cdot exp\left[-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \varphi\right] = \omega_n \cdot exp\left[-\frac{\sigma}{\omega_d} \cdot \varphi\right]$

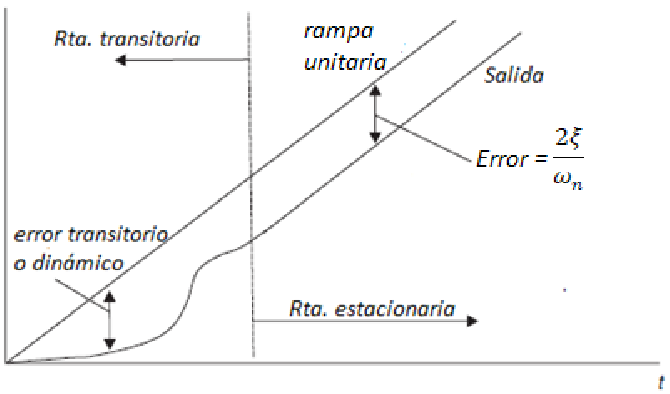
Respuesta a la Rampa

Se presenta solamente la respuesta para el caso mas interesante es decir el sub-amortiguado

$\mathbf{0 \leq \xi \leq 1 \; para \;\; t > 0}$

$$y(t) = \left[t - \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_d} \cdot sen(\omega_d t + \theta)\right] \qquad \text{con } \theta = cos^{-1}(2\xi^2 - 1)$$

Una típica forma de respuesta a la rampa es la que se muestra a continuación

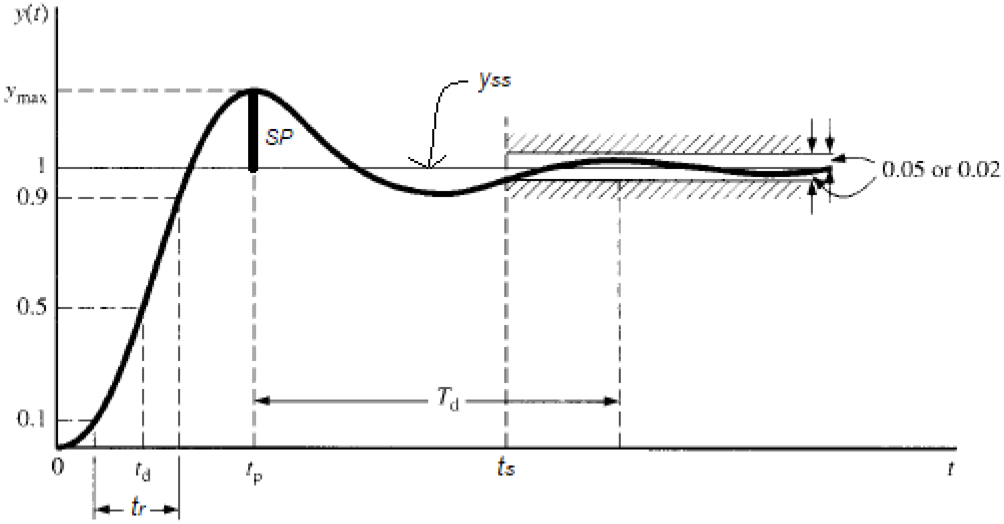


Nota: prestar atención que el error en este caso es finito y vale $\frac{2\xi}{\omega_n}$

A continuación se citaran y se presentaran las expresiones matemáticas (sin calcularlas) de las características de desempeño más destacadas de la respuesta al escalón para un sistema sub- amortiguado

Características de la respuesta en el tiempo al escalón para un sistema sub-amortiguado de 2^{do} orden

La mostrada a continuación es una respuesta típica de un sistema con un par complejo conjugado ante un escalón unitario



Para un par complejo conjugado de polos existen relaciones muy precisas en función de los valores en el plano *s* para todos los parámetros definidos en la figura:

- **Tiempo de sobrepico t_p**: tiempo que transcurre desde que se aplica el escalón hasta que ocurre el primer pico de la respuesta

$$\boldsymbol{t_p} = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{parte\ real\ del\ par\ complejo}$$

- **Sobrepico, *SP***: es el valor en que la respuesta del sistema supera al valor para $t \to \infty$. El sobrepico en general se expresa como un porcentaje del valor de estado estable ($t \to \infty$) y ocurre en el tiempo t_p.

$$\boldsymbol{SP} = y_{max} - y_{ss} = y_{ss} \cdot exp\left(-\frac{\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{SP}\% = \frac{y_{max}-y_{ss}}{y_{ss}} \cdot 100 = exp\left(-\frac{\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \cdot 100$$

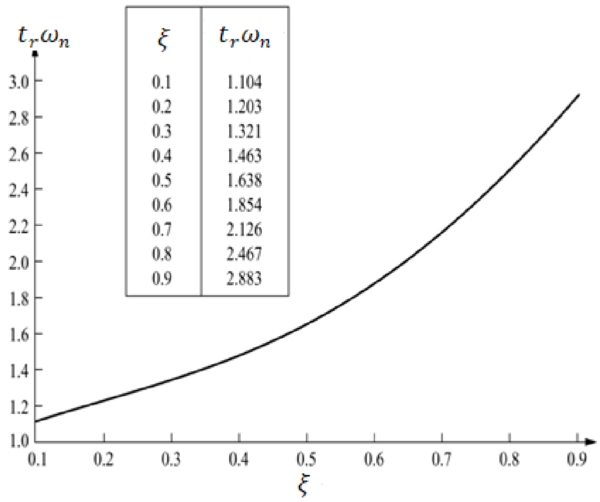
- **Tiempo de establecimiento, t_s** : es el tiempo desde que se aplica el escalón hasta que la salida no se aparta más de un 5% o 2% del valor estacionario final y_{ss}

$$t_s \cong \left.\frac{3}{\xi\cdot\omega_n}\right|_{5\%} \text{ ó } t_s \cong \left.\frac{4}{\xi\cdot\omega_n}\right|_{2\%};\ t_s \cong \frac{3 \text{ ó } 4}{parte\ real\ del\ par\ complejo}$$

- **Tiempo de subida, t_r:** es el tiempo que transcurre desde que la salida alcanza el 10% del valor y_{ss} hasta que alcanza el 90% de y_{ss}. Para $0 \leq \xi \leq 1$ se pueden escribir las dos expresiones aproximadas siguientes, siendo más precisa la de 2do orden:

$$t_r \cong \frac{0.8+2.5\xi}{\omega_n} \qquad \text{y} \qquad t_r \cong \frac{1-0.4167\xi+2.917\xi^2}{\omega_n}$$

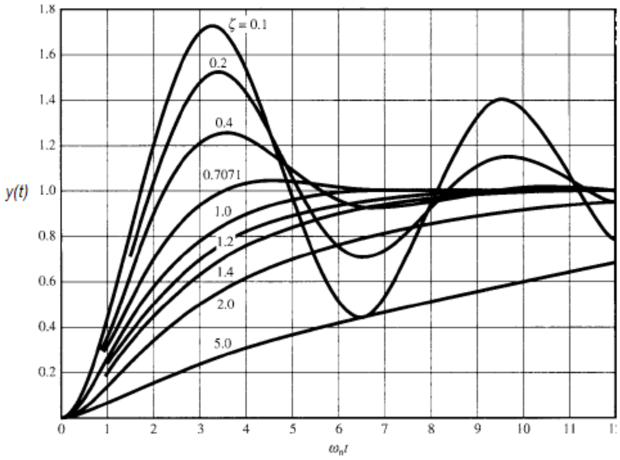
La figura siguiente también permite evaluar gráficamente t_r

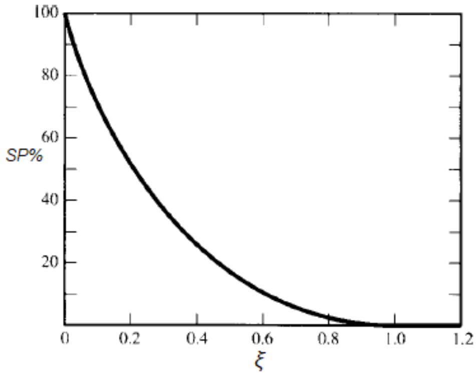


- **Tiempo de retardo, t_d:** es el tiempo que transcurre desde que se aplica el escalón hasta que la salida alcanza el 50% de y_{ss}. Se proporcionan también 2 ecuaciones para $0 \leq \xi \leq 1$

$$t_d \cong \frac{1+0.7\xi}{\omega_n} \qquad \text{y} \qquad t_d \cong \frac{1.1+0.125\xi+0.469\xi^2}{\omega_n}$$

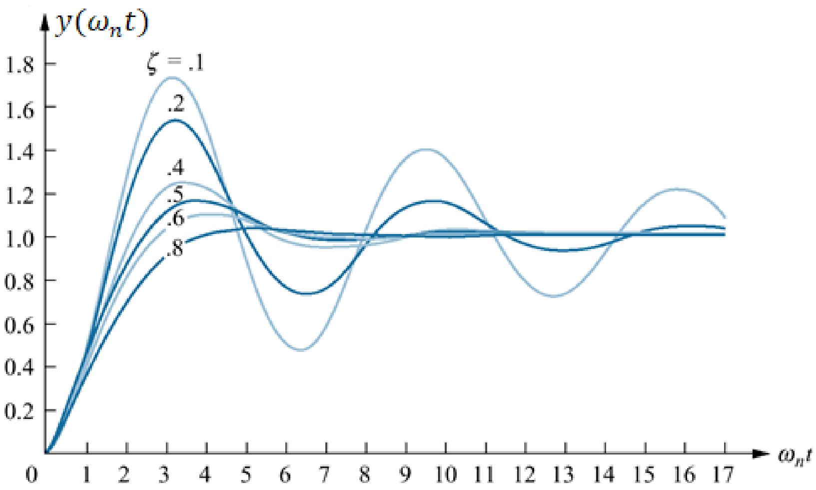
De todos estos parámetros, el mejor índice de la "***cantidad***" de estabilidad del sistema es el sobrepico *SP*: cuanto mayor es, menor es la estabilidad. Como se aprecia el *SP* depende exclusivamente del factor de amortiguamiento relativo ξ. La figura siguiente muestra cómo cambia la respuesta al escalón unitario para distintos valores de ξ y cómo cambia el *SP*% con ξ :





También suele tomarse al Tiempo de establecimiento t_s como parámetro para evaluar la estabilidad ya que determina el tiempo que dura la oscilación de la respuesta. Este tiempo se los suele considerar hasta que alcanza el 5% o para más precisión el 2% del valor final.

En general la respuesta buscada en el diseño de un sistema realimentado de control es la que corresponde a un para complejo conjugado de polos dominantes con un factor de amortiguamiento relativo tal que se cumple que $0.4 \leq \xi \leq 0.7$ $(46° \leq \varphi \leq 66°\ en\ el\ plano\ s)$; esto proporciona una estabilidad relativa aceptable. La figura siguiente muestra curvas normalizadas de la respuesta al escalón para distintos valores de ξ.

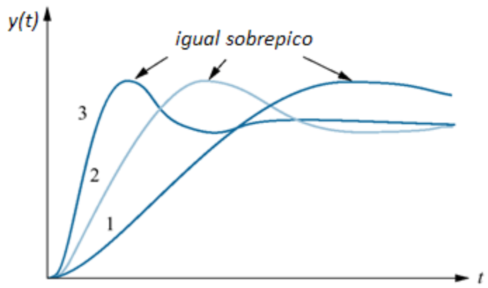


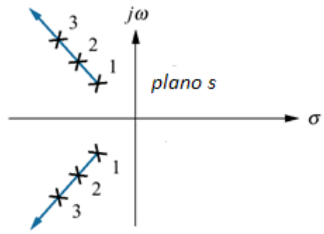
Notar que todos los tiempos definidos son inversamente proporcional a ω_n. En otras palabras las cantidades $\omega_n t_d$, $\omega_n t_r$, $\omega_n t_s$ y $\omega_n t_p$ son independientes de ω_n. Si la respuesta en el tiempo se grafica con respecto a la variable adimensional $\omega_n t$ las soluciones son solo función de ξ. Con esto se puede afirmar que

- La naturaleza de la respuesta depende exclusivamente de ξ
- ω_n simplemente es una escala de tiempo

Para ilustrar los efectos de modificar estos parámetros en la respuesta en el tiempo a una señal escalón se presentan a continuación casos de variación de ellos.

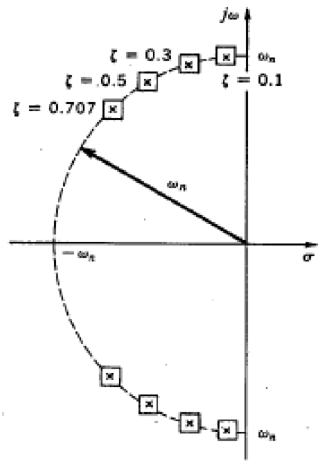
a) Cambio en ω_n manteniendo ξ constante

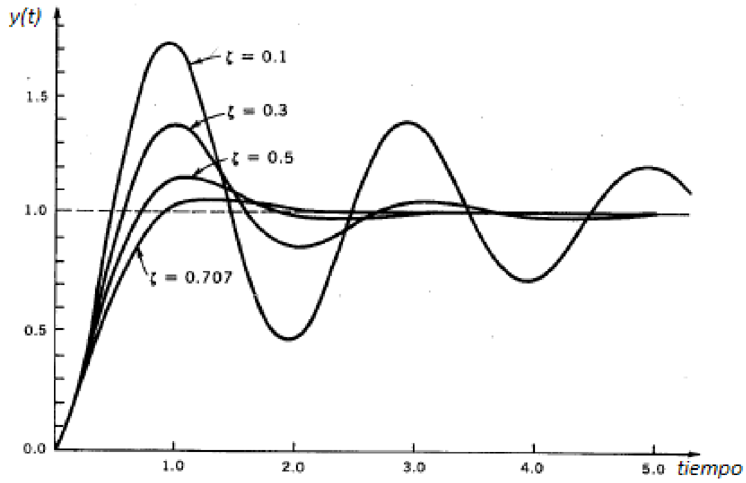




Este ajuste permite corregir la velocidad manteniendo el sobrepico (estabilidad) constante.

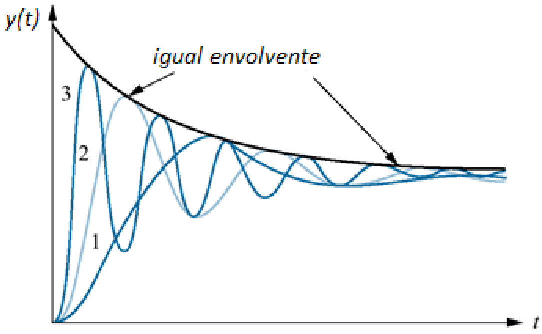
b) Cambio en ξ manteniendo ω_n constante

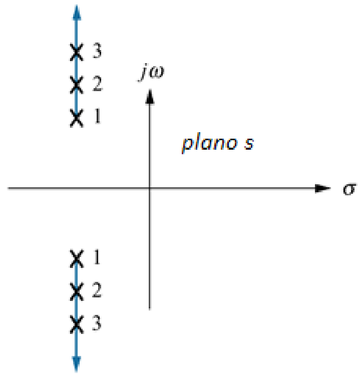




Este ajuste modifica todas las velocidades como consecuencia del cambio de ξ y a pesar de mantener el factor de escala ω_n constante. Por supuesto modifica el sobrepico.

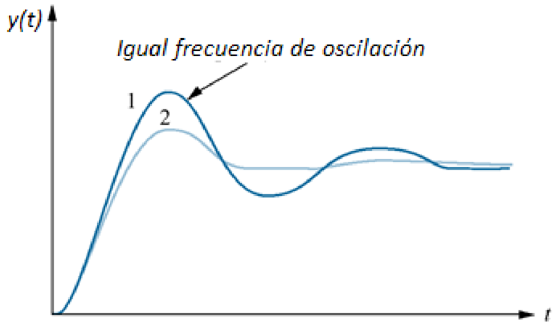
c) Cambio en ξ y ω_n pero manteniendo constante el producto $\xi\omega_n$ (parte real)

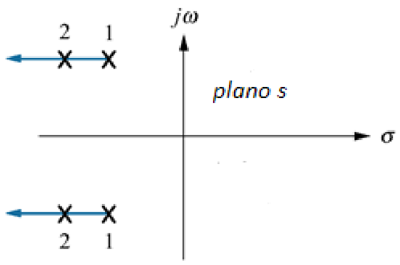




Este ajuste permite conservar el tiempo de establecimiento, pero se modifican todos los parámetros restantes

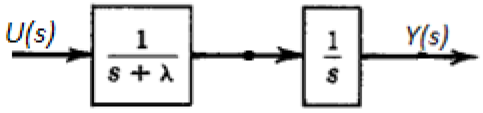
d) Cambio en ξ y ω_n pero manteniendo constante $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ (parte imaginaria)



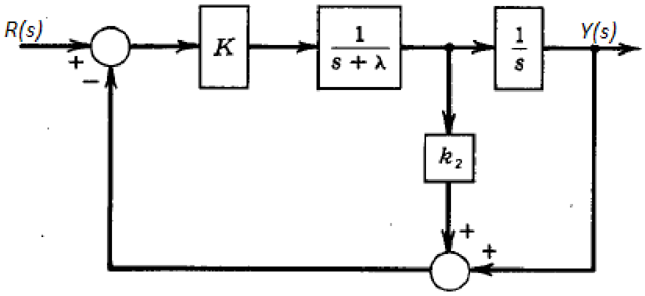


Este ajuste permite conservar el tiempo de pico, pero se modifican todos los parámetros restantes

Conseguir estos ajustes en principio no es complicado; con el siguiente ejemplo se ve una forma de conseguirlo; sea la planta mostrada a continuación



Si se le efectúa una realimentación como la mostrada a continuación será posible concretar algunos de los ajustes presentados



La función de transferencia del sistema es la siguiente

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + (\lambda + Kk_2)s + K}$$

Comparándola con la genérica de segundo orden

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Se puede obtener lo siguiente

$$K = \omega_n^2 \qquad \text{y} \qquad \lambda + Kk_2 = 2\xi\omega_n$$

Por lo tanto con una selección apropiada de K y k_2 es posible conseguir los valores deseados para ξ y ω_n con lo cual se podrá alcanzar el comportamiento deseado del sistema realimentado. Por ejemplo:

- variar ξ manteniendo ω_n constante: se debe modificar k_2 con K constante.
- Variar ω_n manteniendo ξ constante: para variar ω_n se debe modificar K y para mantener ξ constante se debe modificar k_2.
- Para mantener $\xi\omega_n$ constante se deben modificar simultáneamente K y k_2 manteniendo el producto Kk_2 constante.

Nota sobre los sistemas de 1^er^ orden: alguno de los tiempos definidos para un sistema de 2^do^ orden, se definen de manera similar para uno de primer orden. A continuación se dan los valores para cada uno de ellos que están dados en función de la constante de tiempo τ

$$\boldsymbol{t_s}: \boldsymbol{tiempo\ de\ establecimiento\ al}\ 5\% = \mathbf{3}\ \boldsymbol{\tau};\ \ \boldsymbol{al}\ 2\%\ \boldsymbol{t_s} = \mathbf{3.91}\ \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{t_r}: \boldsymbol{tiempo\ de\ subida} = \mathbf{2.2}\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{t_d}: \boldsymbol{tiempo\ de\ retardo} = \mathbf{0.693}\ \boldsymbol{\tau}$$

Efecto de agregar un cero o un polo a un par complejo conjugado de polos

Agregado de un cero

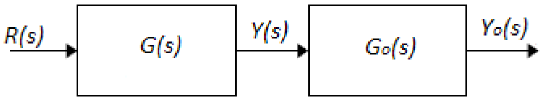
Dado un par complejo conjugado de polos presentado en forma genérica como

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Si se agrega en cascada un cero representado por

$$G_o(s) = \frac{s}{a} + 1$$

Se tiene el esquema en bloques siguiente



La función de transferencia total es

$$G(s) \cdot G_o(s) = \frac{\omega_n^2 \cdot \left(\frac{s}{a} + 1\right)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{Y_o(s)}{R(s)}$$

Que se puede escribir como

$$\frac{Y_o(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{s}{a} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Ahora bien si *R*(s) es un escalón unitario, la salida $Y_o(s)$ se puede escribir como

$$Y_{oesc}(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{s}{a} \cdot \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$Y_{oesc}(s) = Y_{esc}(s) + \frac{s}{a} \cdot Y_{esc}(s)$$

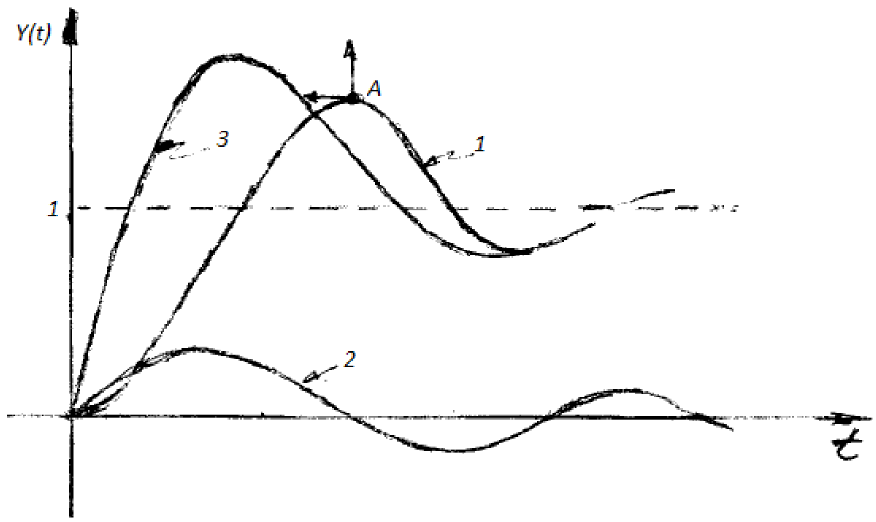
Que anti-transformando se puede escribir como

$$y_{oesc}(t) = y_{esc}(t) + \frac{1}{a} \cdot \frac{d[y_{esc}(t)]}{dt}$$

Es decir la respuesta en el tiempo para una entrada escalón con el agregado del cero es la suma de la respuesta del sistema sin el cero más la derivada de la respuesta sin el cero dividida por la posición del cero.

Cuando esta suma se gráfica, se puede ver que el efecto de agregar un cero al sistema original es:

- Desplazar el pico de la respuesta original hacia la izquierda.
- Aumentar el sobrepico que tenía originalmente.
- Corregir la pendiente de la respuesta en t=0 que pasa a ser finita.

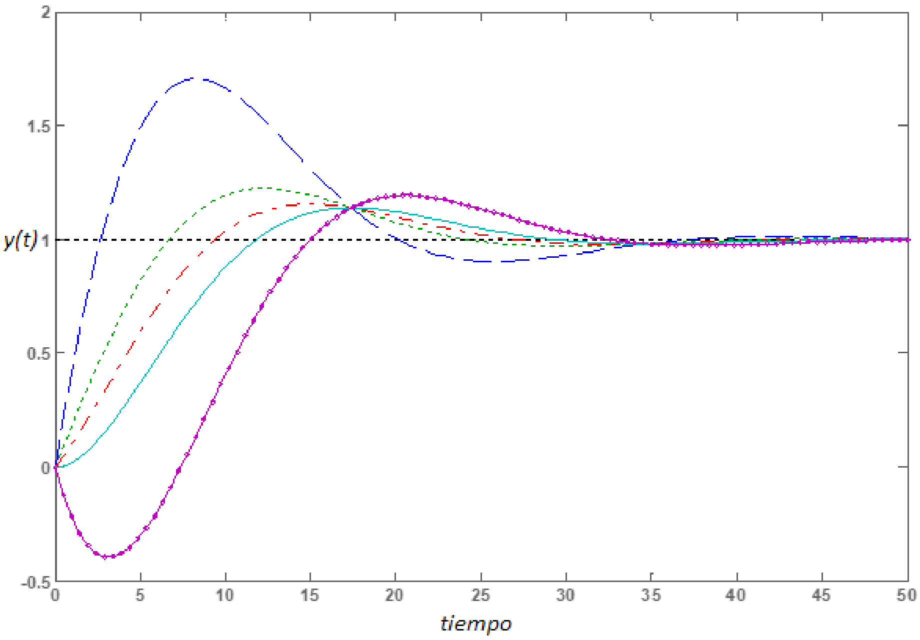


La figura anterior muestra las distintas componentes de la respuesta:

(1) Es la respuesta al escalón del sistema original, (2) es la derivada de la señal original dividida en *a* y (3) es la suma de (1) y (2) o sea la respuesta al escalón con el agregado del cero. Como se dijo el punto A se desplaza hacia arriba y hacia la izquierda.

En conclusión el sistema se hace menos amortiguado y más rápido, pero se debe tener presente que si *a* es muy chica (próxima al origen) la corrección será muy grande y por lo tanto el sobrepico será muy elevado.

La figura siguiente muestra respuestas al escalón para varias posiciones del cero



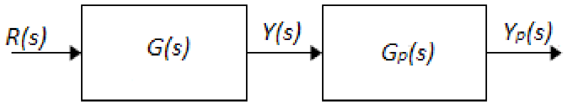
La curva turquesa es la del sistema original mientras que la de trazos azules es la que representa la respuesta con el agregado del cero más próximo al origen en el spi. En color lila se muestra también la respuesta al escalón cuando el cero se ubica en el spd donde, como es de esperar ya que cambia el signo de *a*, cambia el signo de la derivada en el origen y por lo tanto la curva comienza descendiendo para luego comenzar a subir.

<u>Agregado de un polo</u>

En este caso lo que se agrega al par complejo conjugado original es

$$G_p(s) = \frac{p}{s+p}$$

Se tiene el esquema en bloques siguiente



La función de transferencia total es

$$G(s) \cdot G_p(s) = \frac{\omega_n^2 \cdot p}{(s+p)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{Y_p(s)}{R(s)}$$

La expresión de la respuesta en el tiempo al escalón $y_{pesc}(t)$ es

$$y_{pesc}(t) = \left[1 + R_p e^{-pt} + 2 \cdot |R_{pc}| e^{-\xi\omega_n t} \cdot cos\left(\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}\right) + \theta_{pc}\right]$$

Donde

$$R_p = -\frac{\omega_n^2}{p^2 - 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

$$\left|R_{pc}\right| = \frac{p}{2 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot \sqrt{p^2 - 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}}$$

Lo interesante es evaluar los residuos cuando $p \to 0$ y cuando $p \to \infty$ para así conocer el comportamiento en el tiempo

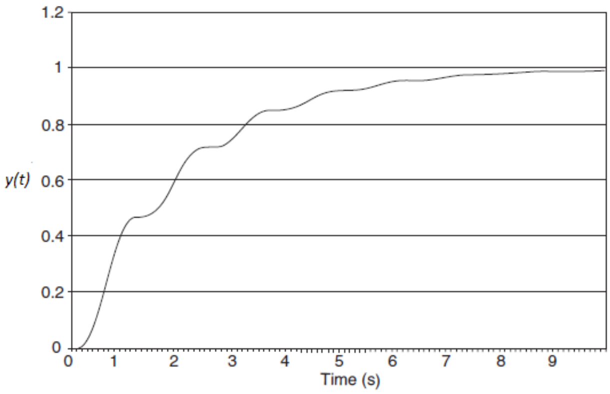
Si $p \to 0$ entonces $|R_p| \to 1$ y $\left|R_{pc}\right| \to 0$

Si $p \to \infty$ entonces $|R_p| \to 0$ y $\left|R_{pc}\right| \to \frac{1/2}{\sqrt{1-\xi^2}}$

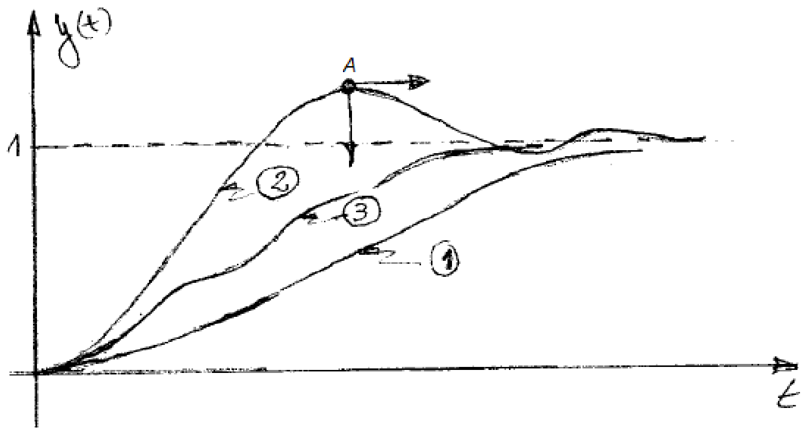
Concretamente

- Si $p \to 0$ el sistema está gobernado por el polo en p
- Si $p \to \infty$ el sistema es gobernado por el par complejo

Por lo tanto cuanto más próximo al origen este el polo agregado el sistema original exhibirá menos sobrepico y será más lento en su respuesta. La figura siguiente muestra una respuesta donde $p \approx \xi\omega_n$



En general la respuesta original presentará un pico *A* que se desplaza hacia la derecha y hacia abajo a medida que el polo *p* se acerca al origen tal como se ve en la figura siguiente



En (2) la respuesta es la original, en (1) la mas próxima al origen. (3) es una posición intermedia del polo.