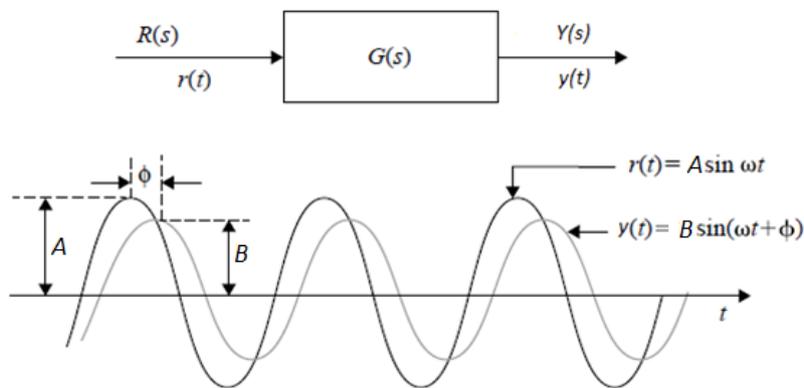


Respuesta en frecuencia

El estudio de la llamada respuesta en frecuencia de un sistema dinámico lineal e invariante en el tiempo es una herramienta muy útil en el estudio y diseño de los sistemas de control realimentado. Es por lo tanto importante tener un concepto claro sobre el tema. Se comienza justificando lo que se llama respuesta en frecuencia, posteriormente se analiza la respuesta en frecuencia de los sistemas básicos y finalmente se analizan y explican la representación de la respuesta en frecuencia mediante el diagrama asintótico de Bode y los diagramas polares.

Sea el sistema representado por el bloque, señal de entrada y salida siguiente



La función de transferencia $G(s)$ es:

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

y la señal de entrada senoidal es:

$$r(t) = A \cdot \text{sen } \omega t \quad \rightarrow \quad R(s) = \frac{A \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A \cdot \omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$

La salida $Y(s)$ se puede escribir como:

$$Y(s) = G(s) \cdot R(s) = G(s) \cdot \frac{A \cdot \omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} = \frac{R_1}{(s + j\omega)} + \frac{R_2}{(s - j\omega)} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(s + p_i)}$$

La salida en el tiempo $y(t)$ resultará:

$$y(t) = R_1 \cdot e^{-j\omega t} + R_2 \cdot e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n k_i \cdot e^{-p_i t}$$

Si se considera que el sistema es estable, entonces para $t \rightarrow \infty$ como la sumatoria se desvanece, la salida en el tiempo queda:

$$y(t) = R_1 \cdot e^{-j\omega t} + R_2 \cdot e^{j\omega t}$$

los residuos R_1 y R_2 tienen los siguientes valores

$$R_1 = (s + j\omega) \cdot \frac{A \cdot \omega}{(s + j\omega) \cdot (s - j\omega)} \cdot G(s)|_{s=-j\omega} = \frac{A \cdot \omega \cdot G(-j\omega)}{-2j\omega} = \frac{A \cdot G(-j\omega)}{-2j} = \frac{A \cdot |G(j\omega)| \cdot e^{-j\theta}}{-2j}$$

$$R_2 = (s - j\omega) \cdot \frac{A \cdot \omega}{(s + j\omega) \cdot (s - j\omega)} \cdot G(s)|_{s=j\omega} = \frac{A \cdot \omega \cdot G(j\omega)}{2j\omega} = \frac{A \cdot G(j\omega)}{2j} = \frac{A \cdot |G(j\omega)| \cdot e^{j\theta}}{2j}$$

La función $G(j\omega)$ se puede expresar como

$$G(j\omega) = X(\omega) + jZ(\omega)$$

donde $X(\omega)$ y $Z(\omega)$ son funciones reales de la frecuencia correspondientes respectivamente a la parte real e imaginaria de $G(j\omega)$.

$G(j\omega)$ también puede ser expresada en la forma de Euler como modulo y ángulo de $G(j\omega)$ cuyos valores son:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\theta} : \begin{cases} |G(j\omega)| = M(\omega) = \sqrt{[X(\omega)]^2 + [Z(\omega)]^2} \\ \sphericalangle G(j\omega) = \theta(\omega) = \text{tg}^{-1} \left[\frac{Z(\omega)}{X(\omega)} \right] \end{cases}$$

y por supuesto $G(-j\omega) = X(\omega) - jZ(\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{-j\theta}$

Con esto los residuos pueden ser escritos como

$$R_1 = \frac{A \cdot G(-j\omega)}{-2j} = \frac{A \cdot |G(j\omega)| \cdot e^{-j\theta}}{-2j} \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{A \cdot G(j\omega)}{2j} = \frac{A \cdot |G(j\omega)| \cdot e^{j\theta}}{2j}$$

reemplazando los residuos en $y(t)$ se obtiene

$$y(t) = \frac{A \cdot |G(j\omega)| \cdot e^{j\theta}}{2j} \cdot e^{j\omega t} + \frac{A \cdot |G(j\omega)| \cdot e^{-j\theta}}{-2j} \cdot e^{-j\omega t} = A \cdot |G(j\omega)| \cdot \left[\frac{e^{j(\theta+\omega t)} - e^{-j(\theta+\omega t)}}{2j} \right]$$

$$y(t) = A \cdot |G(j\omega)| \cdot \text{sen}[\omega t + \sphericalangle G(j\omega)] = A \cdot M(\omega) \cdot \text{sen}(\omega t + \theta(\omega))$$

$$y(t) = B(\omega) \cdot \text{sen}(\omega t + \theta(\omega))$$

Por lo tanto, si la entrada $r(t)$ de un sistema lineal $G(s)$ de orden n es una función seno, entonces la salida $y(t)$ también es, en estado estacionario, una función seno de la misma frecuencia pero con una amplitud y una fase que son, en general, diferentes a la amplitud y a la fase de la entrada. La relación entre la amplitud de la entrada y la amplitud de la salida a una determinada frecuencia se puede calcular como:

$$|G(j\omega)| = \frac{B(\omega)}{A}$$

lo que se conoce como “**magnitud o módulo**” de la función respuesta en frecuencia mientras que la diferencia de fase entre la entrada y la salida está dada por $\angle G(j\omega) = 0 - \theta(\omega)$ y se conoce como “**fase**” de la función respuesta en frecuencia.

Se debe entender entonces por respuesta en frecuencia a la descripción de:

- cómo varía el cociente entre la amplitud de la señal de salida y la amplitud de la señal de entrada cuando cambia la frecuencia de la señal de entrada.
- Cómo varía el desfase entre la señal de entrada y la señal de salida cuando cambia la frecuencia de la señal de entrada.

Estas dos características son muy importantes, pues permiten determinar indirectamente la forma en que responde un sistema de control en el tiempo. Además, también permite establecer métodos para determinar la estabilidad de un sistema en lazo cerrado.

Conclusión:

- El cociente entre la amplitud de la senoidal de salida y la amplitud de la senoidal de entrada es precisamente $|G(j\omega)| = M(\omega)$.
- Como se consideró a la fase de la señal de entrada nula la diferencia de fase entre la señal de entrada y la de salida es $0 - \theta(\omega) = -\theta(\omega)$

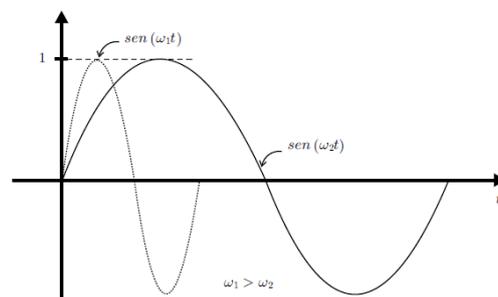
La función $G(j\omega)$ recibe el nombre de “**Función Respuesta en Frecuencia**”

Resumiendo, se tiene:

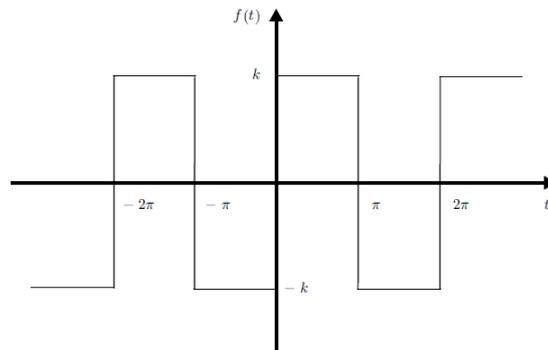
- La función respuesta en frecuencia es la función de transferencia $G(s)$ particularizada en $j\omega$ es decir $G(j\omega)$.

- La amplitud de la señal de salida $y(t)$ con respecto a la amplitud de entrada se ve modificada por $|G(j\omega)| = M(\omega)$.
- La fase de la señal de salida con respecto a la señal de entrada se ve modificada por $\angle G(j\omega) = \theta(\omega)$
- $G(s)$ es la transformada de Laplace de $g(t)$ donde $g(t)$ es la respuesta al impulso del sistema; por lo tanto se puede afirmar que:
 - a) Conocida la respuesta en el tiempo se puede conocer la respuesta en frecuencia.
 - b) Conocida la respuesta en frecuencia se puede conocer la respuesta en el tiempo.
- En el plano s la respuesta en frecuencia se la obtiene recorriendo el eje $j\omega$ y trazando vectores desde los polos y ceros hasta la frecuencia de interés.
- Según lo planteado, $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ se tiene entonces que $G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)}$; es decir el cociente de amplitudes de los fasores de salida dividido en el de entrada es el modulo $|G(j\omega)|$ y la diferencia de fases entre la salida y la entrada es el desfase $\theta(j\omega)$.
- La respuesta en frecuencia es una función en variable compleja y por lo tanto se la puede representar por módulo y ángulo con la frecuencia como parámetro variable.

En la figura siguiente se muestran dos señales con forma de onda seno de diferente frecuencia.



Nótese que una señal de frecuencia mayor muestra variaciones más rápidas en el tiempo. Esto significa que si una función $u(t)$ que excita un sistema presenta variaciones rápidas, entonces contiene componentes de frecuencia mayores. Por ejemplo, sea la función $f(t)$ presentada en la figura siguiente



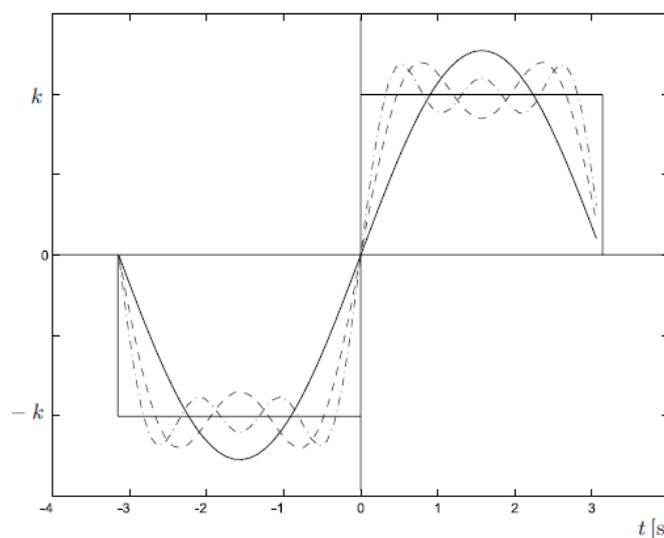
Su expansión en series de Fourier está dada como:

$$f(t) = \frac{4k}{\pi} \left(\text{sen } t + \frac{1}{3} \text{sen } 3t + \frac{1}{5} \text{sen } 5t + \dots \right)$$

De acuerdo a las Series de Fourier, cualquier señal periódica puede ser representada como la suma de muchas señales seno y coseno de frecuencias diferentes.

El “**espectro de frecuencias**” $F(w)$ de $f(t)$ es una función de la frecuencia que indica las frecuencias contenidas en la función $f(t)$ y cuál es la contribución de cada una de esas frecuencias a la señal total $f(t)$. A las frecuencias que contribuyen al espectro $F(w)$ se les conoce como “**componentes de frecuencia**”.

La figura siguiente representa la misma onda cuadrada de la figura anterior, pero además están agregadas la fundamental, la fundamental más 1^{era} armónica y fundamental más 1^{era} y 2^{da} armónica.

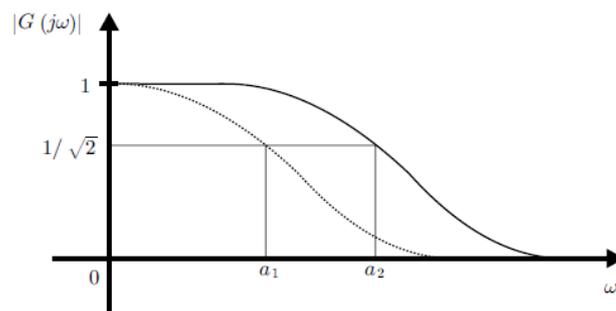


Nótese que mientras exista mayor contenido de frecuencias grandes la función obtenida tiene variaciones más rápidas en el tiempo y se

aproxima, poco a poco, a las discontinuidades abruptas que la función $f(t)$ tiene en puntos específicos.

Conclusión: *dado un sistema al que se aplica una señal de entrada, en la medida que permita pasar más componentes de altas frecuencia más veloz será su respuesta.*

La figura siguiente muestra la banda pasante de 2 sistemas



Es de esperar que el sistema con línea llena responda en el tiempo con mayor velocidad que el de líneas de trazo ya que permite el paso de componentes de mayor frecuencia. Dicho de otro modo, ***“un sistema es capaz de replicar discontinuidades en la medida que mayor sea el número de componentes de alta frecuencia que deje pasar”***.

Nota: Es importante subrayar que por conseguir mayor velocidad se busca incrementar la contribución de frecuencias altas pero no hasta aquellas en las cuales acentuarían el efecto del ruido.

Otra cosa importante a analizar es el otro extremo de frecuencias, es decir ω tendiendo a 0. La señal continua, por ejemplo un escalón, para poder ser reproducida al aplicarse a un sistema, le exige al mismo que la ganancia a frecuencia 0 sea diferente de 0. Esto se puede justificar mediante el teorema del valor final

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = G(0)$$

Es decir, para que la salida $y(t)$ en estado estacionario pueda seguir al escalón (una continua) de entrada, $G(0)$ debe ser distinta de 0. Esto implica que la función respuesta en frecuencia del sistema debe tener modulo distinto de cero en $\omega=0$, más aún debe valer 1 si se desea que siga a la entrada sin error.

Especificaciones en el dominio frecuencia

El método de la respuesta en frecuencia es muy empleado en el diseño de sistemas de control realimentado lineales. Es por lo tanto necesario definir especificaciones para poder ajustar el diseño. El plano s es nexo que permite relacionar los desempeños en el dominio tiempo y frecuencia. por otra parte, según se grafique la respuesta en frecuencia de la función de lazo abierto o lazo cerrado, las especificaciones a tener en cuenta son diferentes. A continuación se tratan las especificaciones en el dominio frecuencia que se emplean a menudo en la práctica del control realimentado.

Función respuesta en frecuencia de lazo cerrado

En la respuesta en frecuencia de lazo cerrado de los sistemas de control, es típico encontrar picos en la curva de modulo, no así en la respuesta en frecuencia de la ganancia de lazo o lazo abierto. Se definen entonces los siguientes parámetros de una respuesta en frecuencia de lazo cerrado que sirven para especificar en el dominio frecuencia un sistema.

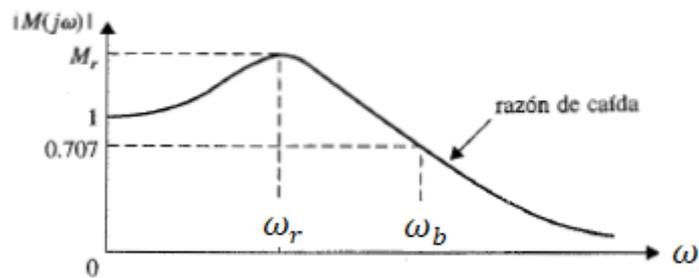
La frecuencia de resonancia ω_r es la frecuencia en la cual el modulo alcanza el máximo valor o pico de resonancia. Esta frecuencia es típicamente medida en la respuesta en frecuencia a lazo cerrado

El pico de resonancia M_r es el valor máximo del módulo de la respuesta en frecuencia que se obtiene en ω_r ($|G(j\omega_r)|$). Esta especificación (típica a lazo cerrado) es útil para estudiar la estabilidad relativa de un sistema realimentado.

“Ancho de Banda”: es la frecuencia ω_b en la cual el módulo de la función respuesta en frecuencia decae a 0.707 del valor de baja frecuencia. Este parámetro también es estudiado en la respuesta en frecuencia de lazo cerrado de un sistema ya que en este caso la ganancia en baja frecuencia es típicamente una constante. Este parámetro es útil para estudiar la velocidad de respuesta del sistema tratado.

Algunas veces el ancho de banda no es suficiente para indicar la capacidad de un sistema para manejar los ruidos. En ese caso ayuda observar la velocidad de atenuación de la curva de modulo en alta frecuencia. Esta especificación que recibe el nombre de **“Razón de Caída”**.

Estas especificaciones citadas se representan en ejes cartesianos lineales en la figura siguiente



Función respuesta en frecuencia a lazo abierto

Cuando se trata de la respuesta en frecuencia de una típica función de lazo abierto, el módulo tiende a infinito para $\omega \rightarrow 0$ ya que se busca tener un buen desempeño en lo referente a la exactitud. En este caso se define la llamada:

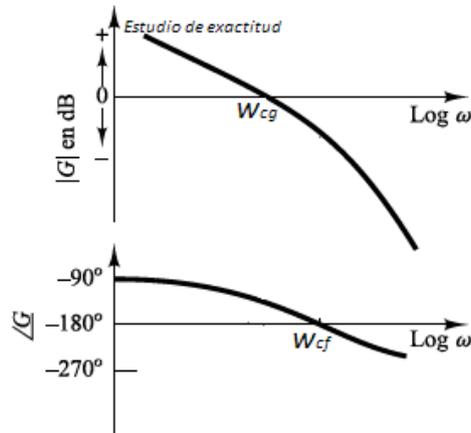
“Frecuencia de Corte de Modulo, ω_{cg} ”: esta frecuencia es aquella en la que el módulo de la ganancia de lazo vale 1 (0 dB). Esta especificación es ampliamente utilizada para estudiar la velocidad de respuesta de un sistema ya que comúnmente es muy próxima al ancho de banda ω_b .

Otro parámetro muy utilizado para especificar mediante la respuesta en frecuencia de la función de lazo abierto es la llamada

“Frecuencia de Corte de fase, ω_{cf} ”: esta frecuencia es aquella en la que la fase de la ganancia de lazo vale -180° . Esta especificación junto con ω_{cg} son ampliamente utilizadas para el estudio de la estabilidad de los sistemas realimentados.

En cuanto a la exactitud, la respuesta en frecuencia de lazo abierto permite obtener información mediante los diagramas asintóticos de Bode que se presentaran más adelante, donde se verá que dicha información está contenida en la asíntota de baja frecuencia y el K_B (constante de Bode) que se define en los diagramas asintóticos de Bode.

La figura siguiente presenta lo citado en un diagrama típico de lazo abierto en escalas logarítmicas



A continuación se tratará la utilización del plano s para evaluar la respuesta en frecuencia de un sistema.

Calculo de la respuesta en frecuencia mediante el plano s

Como se citó en el apartado anterior, se puede construir la respuesta en frecuencia total mediante el uso del plano s , recorriendo el eje $j\omega$ y evaluando modulo y ángulo para cada frecuencia de interés ω_o sabiendo que

$$|G(j\omega_o)| = K \cdot \frac{\text{producto de distancias desde todos los ceros hacia } \omega_o}{\text{producto de distancias desde todos los polos hacia } \omega_o}$$

$$\sphericalangle G(j\omega_o) = \sum \text{ángulos desde ceros} - \sum \text{ángulos desde los polos}$$

K es la ganancia de la función de transferencia expresada en la forma polo-cero.

Ejemplo: para la siguiente función de transferencia, calcular la respuesta en frecuencia para $w=5$

$$G(s) = \frac{5 \cdot (s + 2)}{(s + 1) \cdot (s + 4)}$$

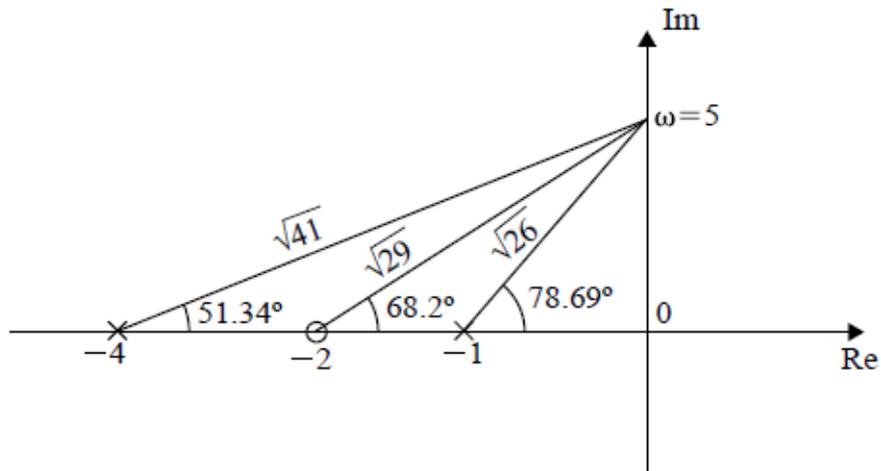
La expresión de la respuesta en frecuencia es

$$G(j\omega) = \frac{5 \cdot (j\omega + 2)}{(j\omega + 1) \cdot (j\omega + 4)}$$

Donde

$$|G(j\omega)| = \frac{5\sqrt{\omega^2+4}}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+16}} \quad \text{y} \quad \sphericalangle G(j\omega) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right) - \text{tg}^{-1}\omega - \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

Mediante el plano s se tiene el siguiente gráfico para $\omega = 5$



Resultando lo siguiente:

$$G(j5) = 5 \cdot \frac{\sqrt{29} \angle 68.2^\circ}{\sqrt{26} \angle 78.69^\circ \cdot \sqrt{41} \angle 51.34^\circ}$$

$$|G(j5)| = 5 \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{41}} = 0.8247 \quad \text{y} \quad \angle G(j5) = 68.2^\circ - 78.69^\circ - 51.34^\circ = -61.83^\circ$$

$$G(j5) = 0.8247 \angle -61.83^\circ$$

Para construir toda la respuesta en frecuencia total se debe repetir el proceso para toda ω .

Es importante analizar fundamentalmente las expresiones de las funciones respuesta en frecuencia de sistemas con un polo y con un par complejo conjugado de polos ya que una combinación de estas son las que se pueden encontrar. En este apartado para ambas se presenta una representación grafica en forma cartesiana lineal para modulo y angulo. En apartados siguientes se analizará en detalle la representación cartesiana logaritmica aproximada o diagramas de Bode y la representación polar de la respuesta en frecuencia ya que estas son las que tienen aplicación definitiva en el analisis y diseño de los sistemas de control.

Representación de la respuesta en frecuencia en ejes cartesianos con escala lineal para un polo simple y un par complejo conjugado de polos.

Un polo simple: $G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$

En este caso se tiene:

$$G(j\omega) = \frac{K(1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)}$$

$$= \frac{K(1 - j\omega T)}{1 + \omega^2 T^2}$$

De modo que

$$\text{Parte real } a = \frac{K}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\text{Parte Imaginaria } b = \frac{-K\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

El modulo es

$$|G(j\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{K}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \left(\frac{-K\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

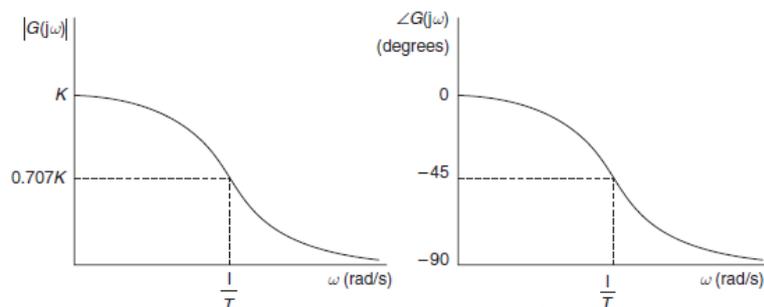
La fase es

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{\frac{-K\omega T}{1 + \omega^2 T^2}}{\frac{K}{1 + \omega^2 T^2}}\right\}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(-\omega T)$$

La representación cartesiana de modulo y fase en escala lineal para este caso es la que se muestra a continuación



Función de transferencia con un par complejo conjugado de polos:

$$G(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{con } \xi > 0$$

La función respuesta en frecuencia es

$$G(j\omega) = \frac{\omega^2}{-\omega^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + 2\xi\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}$$

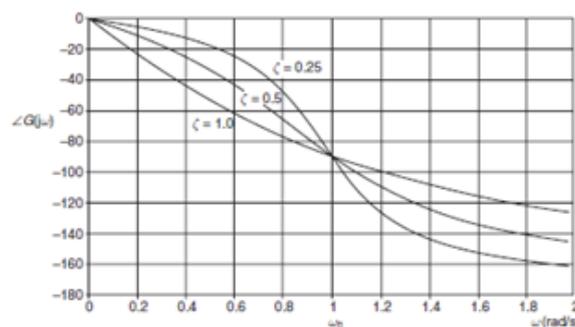
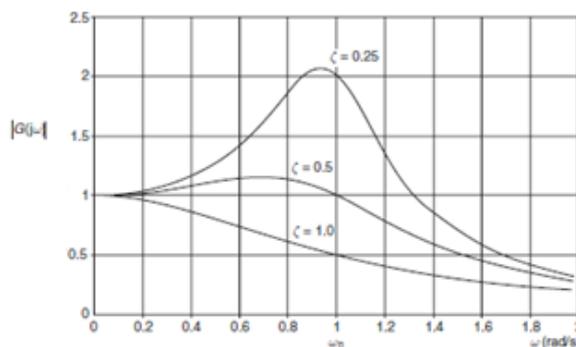
La respuesta en frecuencia expresada como parte real e imaginaria queda

$$G(j\omega) = \frac{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right] - j\left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} = \frac{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} - j\frac{\left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

O bien como modulo y ángulo

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad \text{y} \quad \angle G(j\omega) = -\text{tg}^{-1}\left[\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\right]$$

La figura siguiente permite apreciar en ejes cartesianos lineales cómo se modifica la curva de modulo y fase de un sistema de 2^{do} orden según cambia el factor de amortiguamiento relativo ξ .



Aproximaciones prácticas de modulo y fase

Para el ingeniero de control siempre es de utilidad disponer de métodos de aproximación en los cálculos como punto de partida en el diseño para posteriormente ajustando valores obtener el mejor resultado. El método de la respuesta en frecuencia es muy utilizado en muchos diseños y por lo tanto es interesante presentar algún método de aproximar tanto modulo como ángulo de la función respuesta en frecuencia de un sistema.

Aproximación de modulo

Para el desarrollo de esta aproximación se considera la función respuesta en frecuencia con un polo simple tal como la siguiente

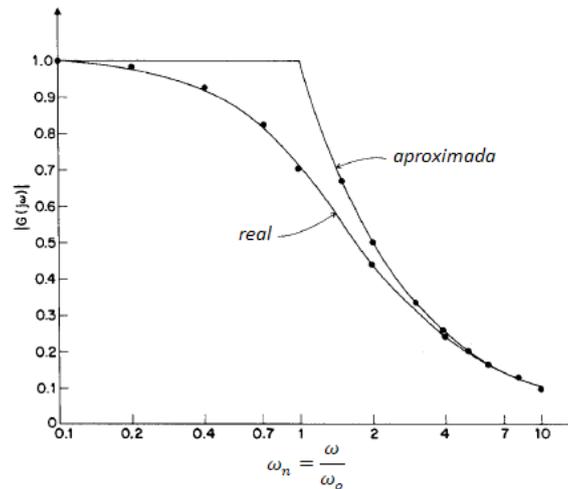
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_o}}$$

El modulo, tal como se vio es $|G(j\omega)| = \frac{|1|}{|1 + j \frac{\omega}{\omega_o}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_o})^2}}$

Como se evalúa el módulo de un número complejo (una suma vectorial en ángulos rectos), se puede efectuar la siguiente aproximación en 2 situaciones: $\omega \ll \omega_o$ y $\omega \gg \omega_o$. Resulta de las mismas lo siguiente:

$$|G(j\omega)| \cong \begin{cases} 1 & \text{para } \omega \ll \omega_o \\ \omega_n = \frac{\omega}{\omega_o} & \text{para } \omega \gg \omega_o \end{cases}$$

Según esta aproximación, solo cuando w es del mismo orden de magnitud que w_o se comete un error apreciable al aplicar cualquiera de las 2 aproximaciones. En $w=w_o$ el modulo vale 0.707 y con cualquiera de las 2 aproximaciones el error que se comete es de aproximadamente el 43% del valor real dando lugar al máximo error. Sin embargo cuando la frecuencia de interés se aleja de w_o (posición del polo) el error disminuye rápidamente; por ejemplo cuando $w \geq 5w_o$ o cuando $w \leq w_o/5$ la aproximación solo produce un error aproximado del 2% del valor real. La figura siguiente muestra las 2 curvas (real y aproximada) donde se puede apreciar lo afirmado.



Notar que en la gráfica se utilizó escala logarítmica para las frecuencias, no así para el modulo.

Ejemplo de aplicación: sea la función de transferencia siguiente

$$G(s) = \frac{100}{s(1 + s/10)(1 + s/100)}$$

Se desea evaluar el módulo de $G(j\omega)$ en $\omega=50$ rad/seg.

Usando la aproximación se tiene que:

- ✓ El polo en el origen no se aproxima por lo tanto su contribución es 50
- ✓ El polo en -10 se aproxima como $50/10$ ya que $\omega > 10$; por lo tanto contribuye con $50/10$
- ✓ El polo en $s=-100$ se aproxima con 1 ya que $\omega < 100$

Por lo tanto se puede escribir $|G(j50)| \cong \frac{100}{50 \cdot \frac{50}{10} \cdot 1} = 0.4$

Si se evalúa el modulo real se tiene

$$|G(j50)| = \frac{100}{\omega \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{100}\right)^2}} = \frac{100}{50 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{50}{10}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{50}{100}\right)^2}} = \frac{100}{50 \cdot 5.1 \cdot 1.1} = 0.35$$

El error cometido en la aproximación es de aproximadamente el 14%

Aproximación de fase

Para conseguir una aproximación de la fase se utiliza la aproximación arco tangente. Esta aproximación permite conseguir un valor muy aproximado de la fase en una determinada frecuencia ω_o resultando como antes una evaluación más exacta cuanto más alejada sea la frecuencia de interés de la ubicación de ceros y polos (ω_s). La aproximación arco tangente puede ser expresada en series como sigue:

$$tg^{-1}\left(\frac{\omega_o}{\omega_s}\right) = \frac{\omega_o}{\omega_s} - \frac{1}{3}\left(\frac{\omega_o}{\omega_s}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\omega_o}{\omega_s}\right)^5 - \dots \quad \text{para } \frac{\omega_o}{\omega_s} < 1$$

$$tg^{-1}\left(\frac{\omega_o}{\omega_s}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_s}{\omega_o} + \frac{1}{3}\left(\frac{\omega_s}{\omega_o}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{\omega_s}{\omega_o}\right)^5 + \dots \quad \text{para } \frac{\omega_o}{\omega_s} > 1$$

Las dos aproximaciones convergen en ω_s y si se aproxima tomando solo los términos de 1^{er} orden, es decir:

$$tg^{-1}\left(\frac{\omega_o}{\omega_s}\right) \cong \frac{\omega_o}{\omega_s} \quad \text{si } \omega_o < \omega_s$$

$$tg^{-1}\left(\frac{\omega_o}{\omega_s}\right) \cong \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_s}{\omega_o} \quad \text{si } \omega_o > \omega_s$$

El máximo error que se comete en el cálculo de la fase ocurre en ω_s y es de 12° mientras que a una octava por abajo o arriba de una singularidad ($\frac{\omega_o}{\omega_s} \geq 2$ ó $\frac{\omega_o}{\omega_s} \leq 0.5$) el error que se comete es menor o igual a 2.5°.

Nota importante: los valores obtenidos para la fase con la aproximación deben ser considerados en radianes y luego convertirlos a grados.

Ejemplo:

Sea la función de transferencia $G(s) = \frac{K(1+s/10)}{s(1+s)(1+s/100)}$, calcular la fase en $\omega_o = 30 \text{ rad/seg}$

Las singularidades ocurren en $w=1$, $w=10$ y $w=100$

La fase exacta es $\theta(\omega) = -90^\circ + tg^{-1}\left(\frac{30}{10}\right) - tg^{-1}\left(\frac{30}{1}\right) - tg^{-1}\left(\frac{30}{100}\right) = -123.4^\circ$

Mediante la aproximación resulta:

$$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{10}{30}\right)\right] - \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{30}\right)\right] - \left(\frac{30}{100}\right) = -\frac{\pi}{2} - 0.6 = -2.17 \text{ rad} = -124^\circ$$

Se ve que ambos resultados son bastante aproximados. Cuando se trate los diagramas de Bode, la aplicación combinada con la aproximación de fase propuesta por Bode se le encontrará una mayor utilidad a la aproximación arco tangente.

Especificaciones de un sistema de 2do orden

Tal como se dijo al comienzo, el nexo que permite relacionar los desempeños en el dominio tiempo y frecuencia es el plano s , de modo que las especificaciones en frecuencia para el caso de un sistema de 2^{do} orden es útil expresarlas en función de ξ y ω_n ya que las especificaciones en el tiempo también están dadas en función de ellos. Las especificaciones ya citadas en el dominio frecuencia en el caso de un sistema de 2do orden son las siguientes:

“Frecuencia de Resonancia” y “Pico de Resonancia”

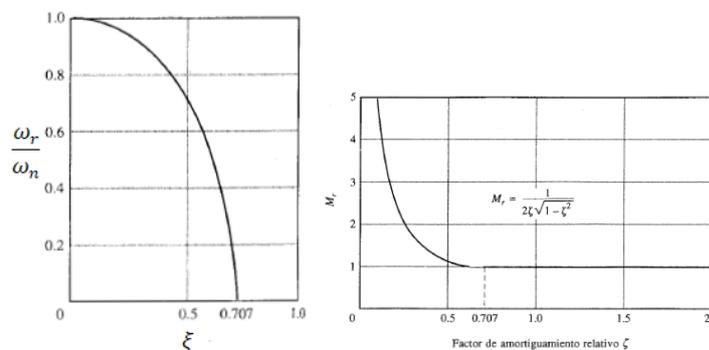
Como se aprecia en las curvas anteriores dependiendo de ξ aparecen picos en la curva de modulo.

Es sencillo demostrar que existirá una frecuencia de resonancia siempre que $\xi < 0.707$. Para hacerlo se debe hacer 0 la derivada del módulo con respecto a la frecuencia. Cuando esto se hace se encuentra que:

“Frecuencia de resonancia”: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ y existirá si $\xi < 0.707$

“Pico de Resonancia”: $|G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = M_r$ si $\xi < 0.707$

Las figuras siguientes muestran la variación de ω_r y M_r cuando cambia ξ



Si la curva de 2^{do} orden corresponde a la respuesta en frecuencia de un sistema a lazo cerrado, el pico de resonancia es un indicador de la estabilidad relativa.

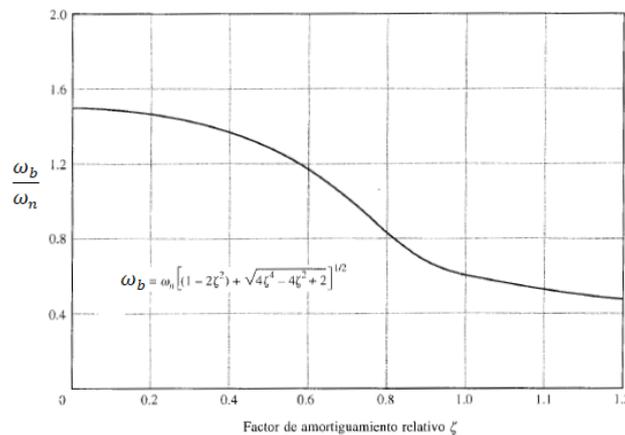
También se puede demostrar que el “**Módulo en ω_n** ” vale: $|G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\xi}$

“Ancho de Banda”

De acuerdo a la definición de ancho de banda, se llega a que para un sistema con un par de polos, el ancho de banda (frecuencia donde el modulo vale 0.707 del valor de baja frecuencia) es:

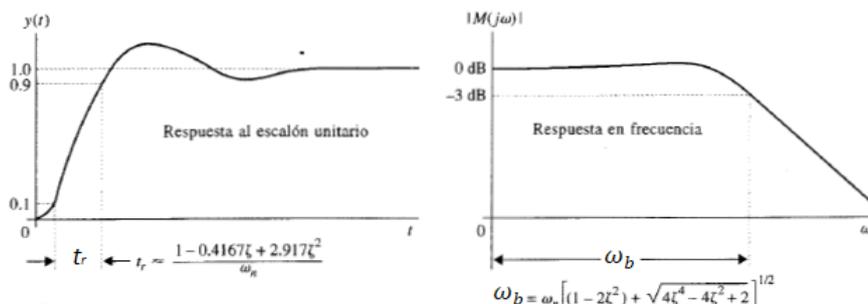
$$\text{“Ancho de Banda”} = \omega_b = \omega_n \cdot \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

En la gráfica siguiente se puede apreciar cómo se modifica el ancho de banda a medida que cambia el factor de amortiguamiento relativo ξ .



Se ve que el ancho de banda disminuye monotónicamente al disminuir ξ y que ω_b es directamente proporcional a ω_n .

El ancho de banda es inversamente proporcional a todos los tiempos definidos en la respuesta en el tiempo al escalón, en particular con el tiempo de subida t_r , relación que se aprecia en la grafica siguiente



Por lo tanto el sistema será más rápido cuanto más grande sea el ancho de banda.

Diagramas de la respuesta en frecuencia en ejes cartesianos logarítmicos para módulo y ángulo

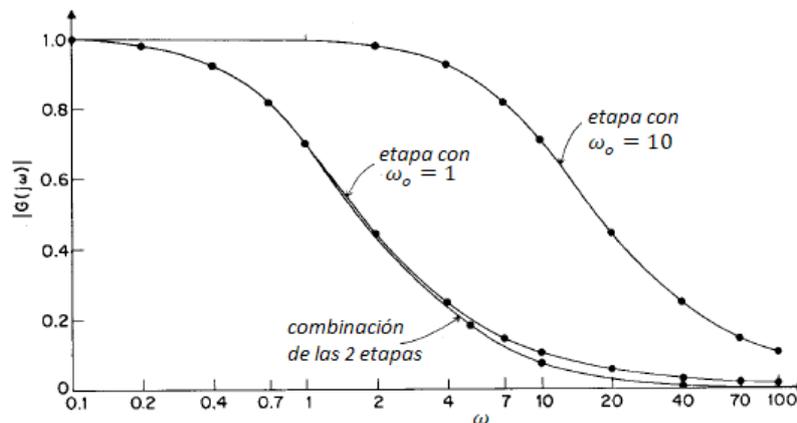
Antes de comenzar con el tratamiento de los diagramas de Bode, se justificará su aplicación. Para ello se considera la siguiente función respuesta en frecuencia

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \times G_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{1}\right)} \times \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{10}\right)}$$

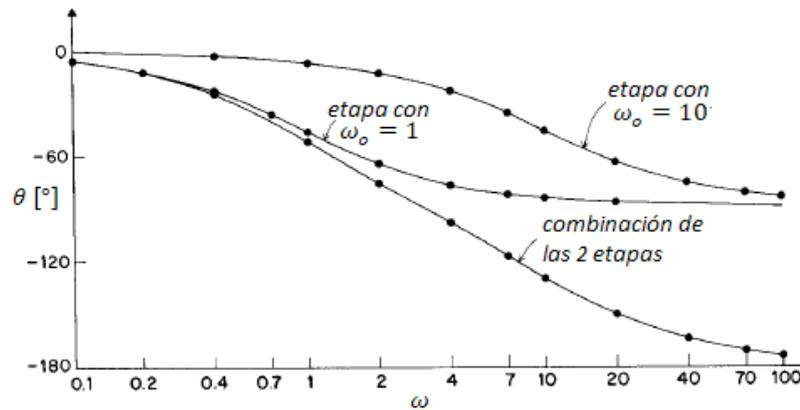
El módulo de $G(j\omega)$ es el producto de los módulos de $G_1(j\omega)$ y $G_2(j\omega)$, es decir

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \times |G_2(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{1}\right)} \right| \times \left| \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{10}\right)} \right|$$

Dibujar ambos módulos y luego efectuar el producto de ambas gráficas resulta complicado. La figura siguiente muestra el resultado gráfico y la obtención del módulo de $G(j\omega)$:



Claramente si el sistema presenta un orden elevado (típico en control), hacer el producto gráfico de este modo es prácticamente imposible. Por otro lado, construir la curva de fase si bien es algo complicada, no lo es tanto como construir la curva de módulo ya que se trata de una suma gráfica en vez de producto. La figura siguiente muestra la construcción de la correspondiente gráfica de fase



Como efectuar la suma grafica de funciones resulta relativamente sencillo (comparado con efectuar el producto) es que surge la propuesta de transformar el producto de módulos en suma de módulos y la operación matemática para conseguirlo es aplicar logaritmo al módulo, ya que el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de cada factor, es decir se escribe lo siguiente

$$\log|G(j\omega)| = \log|G_1(j\omega)| + \log|G_2(j\omega)|$$

Por otra parte, como los elementos de un lazo de control típicamente involucran una diversidad de características en frecuencia (algunos de amplio rango de frecuencias de operación y otros no tanto), el rango de operación total de un lazo de control cambia generalmente en un factor de 1.000 o más. De este modo otro aporte importante de las gráficas logarítmicas es la expansión del rango de amplitudes y frecuencias en el estudio.

De este modo se pueden destacar las 2 grandes ventajas de los gráficos logarítmicos:

- ✓ Transformar productos en sumas gráficas.
- ✓ Ampliar el rango de graficación tanto para módulo como frecuencias.

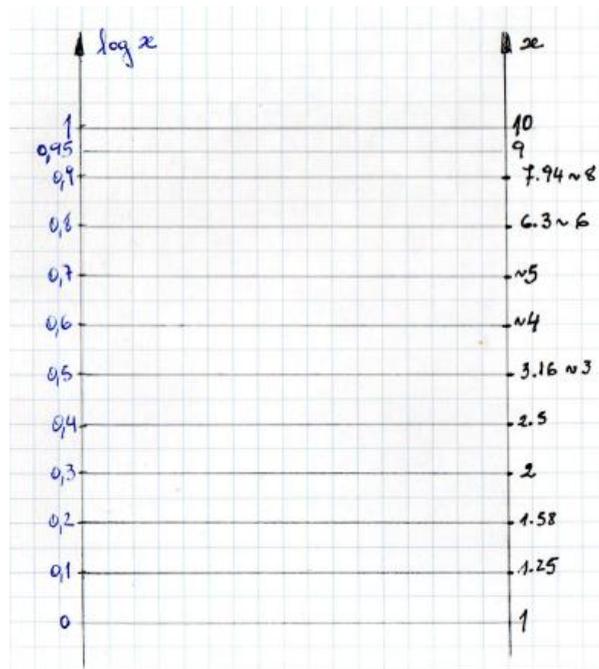
Aplicando esto W. Bode propuso la construcción de las famosas “**graficas de Bode**” que consiste en graficar logarítmicamente la curva de módulo aplicando al aproximación de modulo antes citada. El resultado es una gráfica que se llama “**asintótica o aproximada de Bode**” ya que resultan líneas hacia las cuales el modulo tiende asintóticamente tanto para $\omega \rightarrow 0$ como para $\omega \rightarrow \infty$.

Graficas logarítmicas-logarítmicas y semi-logarítmicas

Antes de abordar la construcción de graficas logarítmicas es interesante ilustrar la equivalencia que existe cuando se vuelcan datos en un papel graduado en escala lineal y otro en escala logarítmica

La figura siguiente muestra simultáneamente 2 ejes graduados según lo siguiente:

- ✓ el eje de la derecha es una variable x que se ubica en escala logarítmica.
- ✓ El eje de la izquierda es el resultado de calcular el logaritmo correspondiente al valor x



Se puede apreciar que mientras el eje de la izquierda esta graduado en escala lineal, el eje de la derecha se mantiene graduado en escala logarítmica. Dicho de otro modo, dado un valor $x = A$ y se lo desea ubicar en los 2 tipos de papel: uno graduado en escala lineal y otro graduado en escala logarítmica.

Si se desea que el punto correspondiente al valor A quede ubicado en ambos casos en la misma posición, en el papel con escala logarítmica se coloca el valor A mientras que en el papel con escala lineal previo a ubicar el punto se debe calcular $\log A$

Resumiendo, para igual gráfica:

- ✓ Si se utiliza en papel graduado lineal, se debe calcular previamente el $\log A$ y recién ubicarlo en el papel.

- ✓ Si se utiliza papel graduado logarítmicamente, directamente se ubica el punto correspondiente al valor A en el papel.

En ambos casos el punto correspondiente al $\log A$ estará ubicado en lugares similares de cada eje.

Lo que ocurrió es que el valor de $\log A$ en el caso de papel con escala lineal se calculó manualmente previo a aplicarlo al papel, mientras que en el caso del papel con escala logarítmica se efectuó el “cálculo gráficamente” con la graduación del papel.

En resumen graficar en papel con los dos tipos de escala proporciona el mismo resultado posicional sobre la respectiva escala, la diferencia está en el nombre que tendrá el eje:

- ✓ Eje con escala lineal: $\log x$
- ✓ Eje con escala logarítmica: x

Nota importante: una diferencia muy importante al operar gráficamente con ambas escalas es que, dado el $\log (A \cdot B)$ por ejemplo $\log(2 \cdot 4)$:

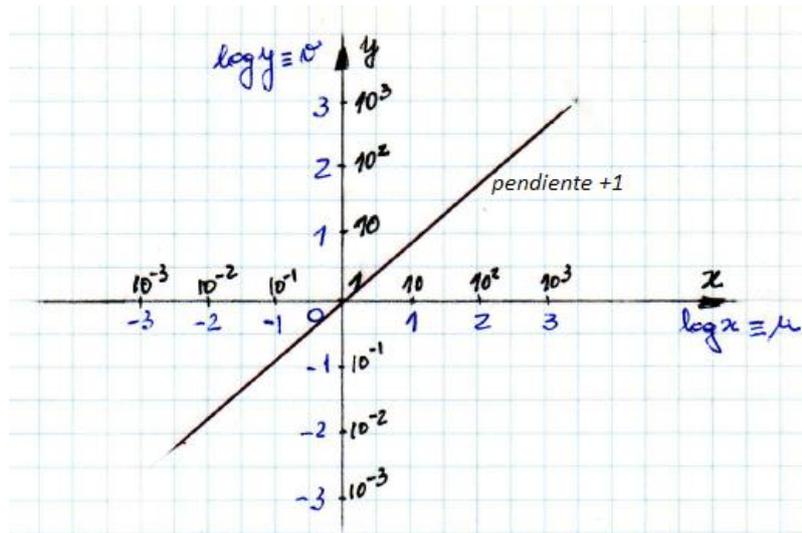
- ✓ si se grafica en escala lineal **se debe efectuar la suma** $\log 2 = 0.3$ más $\log 4 = 0.6$ es decir, el resultado es 0.9, valor que se aplica en el gráfico.
- ✓ si se grafica en escala logarítmica **se debe efectuar el producto** $2 \cdot 4 = 8$ y este valor se aplica directamente al gráfico ($\log 8 = 0.9$).

En ambos casos, el resultado ocupa la misma posición en su respectiva escala.

Ejemplo 1: Dada la función $\log y = \log(A \cdot x)$, se pide graficar la función en papel (log-log), papel (lin-lin) y papel (lin-log) para $A=1$ y $A=10$.

Caso 1: $A=1$

Se tiene que $\log y = \log x$. Llamando $u = \log x$ y $v = \log y$ resulta la ecuación de una recta $v = u$ (pendiente = 1) tal como se muestra en la figura siguiente



En la gráfica se presenta simultáneamente $(\log y)$ vs $(\log x)$ e y vs x ; los ejes y - x están en escala logarítmica mientras que los ejes $\log y$ - $\log x$ están en escala lineal. Se puede apreciar que la gráfica es la misma a pesar del cambio de escala.

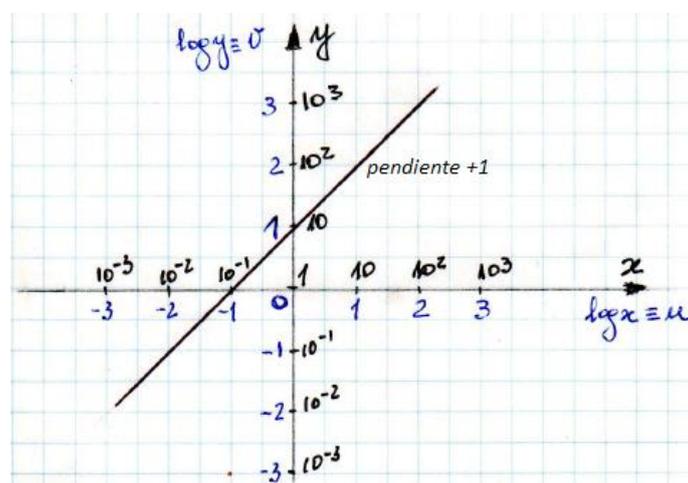
En los estudios de la respuesta en frecuencia se suele combinar las escalas llamándole “**escala semi-logarítmica**” tomando la escala lineal para la ordenada $(\log x)$ y escala logarítmica (x) para la abscisa

Nota importante: se destaca que el origen de coordenadas es

- ✓ en escala log-log el punto $(1,1)$
- ✓ en escala lineal-lineal el punto $(0,0)$
- ✓ en escala semilogarítmica el punto $(0,1)$

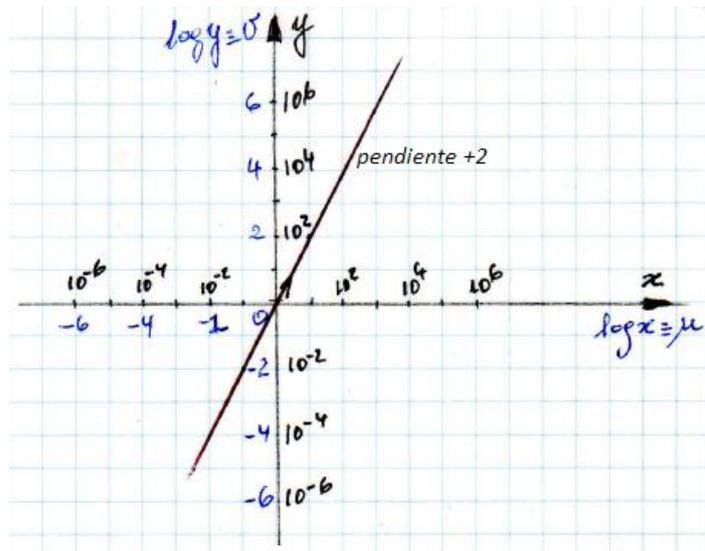
Caso2: $A=10$

Se tiene que $\log y = \log x + \log 10$, es decir $u = v + \log 10$. Se tiene también una recta con pendiente 1 y ordenada al origen de valor $\log 10$. Esto se muestra en la figura siguiente



Ejemplo 2: Dada la función $\log y = \log(x^2)$, se pide graficar la función en papel (log-log), papel (lin-lin) y papel (lin-log).

En este caso $\log y = 2 \log x$. Igual que antes se escribe $u = 2v$ es decir es una recta que pasa por el origen con pendiente +2 según se puede ver en la gráfica siguiente



El planteo de Bode para las gráficas asintóticas

Como se dijo, Bode hizo uso de la aplicación del logaritmo y de la aproximación presentada del módulo. Para mostrar el análisis propuesto sea la siguiente función respuesta en frecuencia $G(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_1}$ con ω y ω_1 positivos. El módulo es $|G(j\omega)| = \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right|$.

El primer paso es tomar logaritmo del módulo es decir se tiene

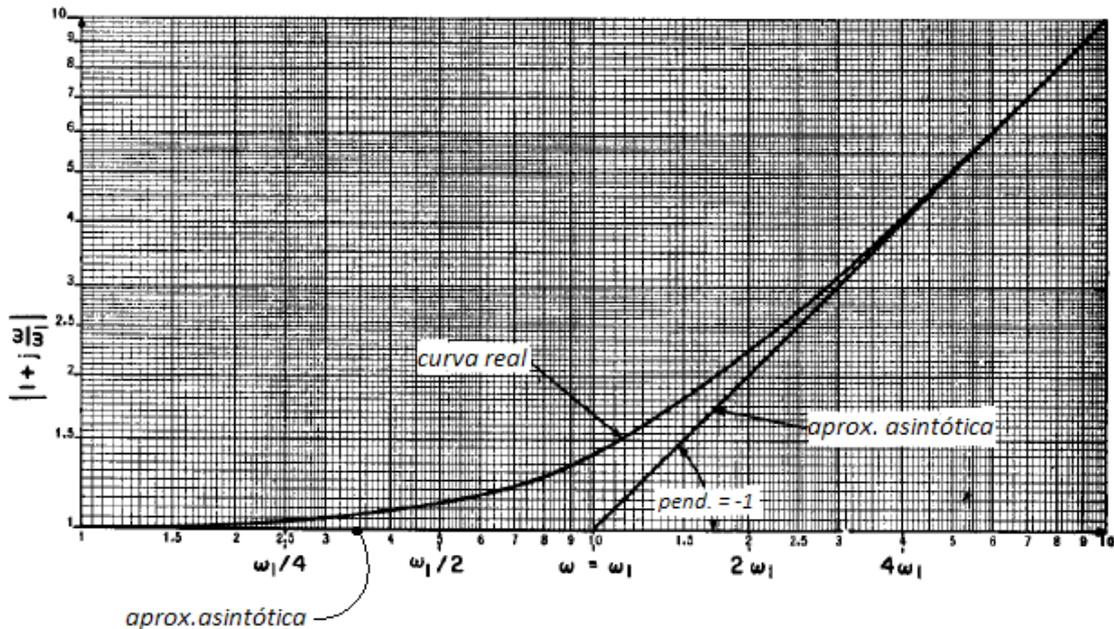
$$\log |G(j\omega)| = \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right|$$

El paso siguiente es aplicar la aproximación. Para ello se escribe

$$\log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right| \cong \log 1 = 0 \quad \text{si } \omega \ll \omega_1$$

$$\log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right| \cong \log \left| \frac{\omega}{\omega_1} \right| = \log \omega - \log \omega_1 \quad \text{si } \omega \gg \omega_1$$

Considerando $\log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right|$ como ordenadas y $\log \omega$ o bien ω como abscisas se tienen 2 rectas que se intersectan en $\omega = \omega_1$. Ahora bien, según la aproximación planteada, se supone que la recta $\log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right| = 0$ vale hasta $\omega = \omega_1$, mientras que la recta $\log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right| = \log \omega - \log \omega_1$ vale a partir de $\omega = \omega_1$. Esto es lo que se llama **“la aproximación asintótica”** ya que las rectas obtenidas constituyen asíntotas hacia las cuales tiende la curva real tal cual se muestra en la figura siguiente.



Se puede ver que el máximo error entre la aproximación y la curva real ocurre en $\omega = \omega_1$, punto que recibe el nombre de **“quiebre”** de las asíntotas. En este caso en $\omega = \omega_1$ el modulo vale 1.414 mientras que el valor asintótico es 1 de modo que el máximo error en este caso de 1^{er} orden es de aproximadamente el 30%.

Se debe resaltar que en el caso de un polo, la asíntota de alta frecuencia tendrá pendiente negativa y el valor real será de 0.707.

En forma similar a lo aquí planteado se puede construir la traza aproximada para cualquier combinación de polos y ceros.

Nota importante: es conveniente, previo a comenzar el trazado de la respuesta en frecuencia mediante las aproximaciones de Bode, acomodar la función de transferencia en la llamada **“forma constante de tiempo”** o **“forma de Bode”**. La constante que resulta de este acomodamiento recibe también el nombre de **“constante de Bode”**. Es decir dada la función de transferencia en la forma **“polo-cero”**:

$$G(s) = \frac{k \cdot (s + \omega_1)}{(s + \omega_2) \cdot (s + \omega_3)}$$

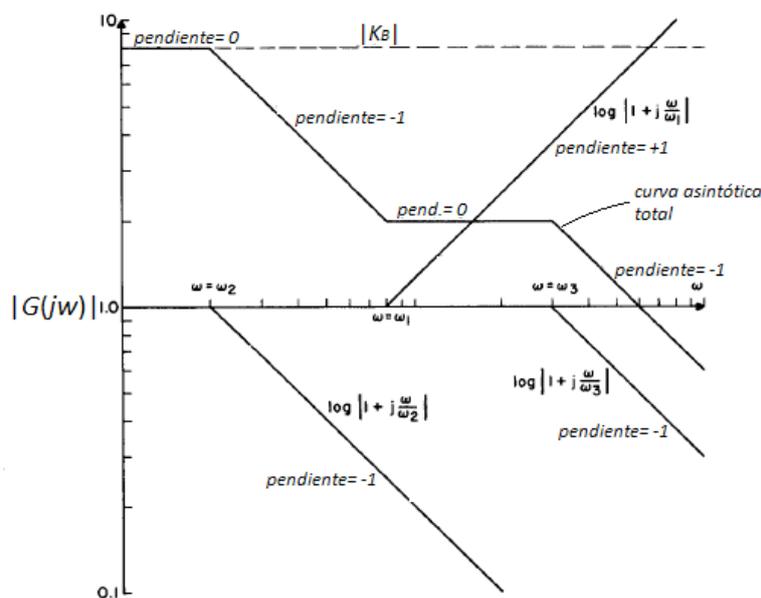
Se la debe acomodar como

$$G(s) = \frac{k \cdot \omega_1}{\omega_2 \cdot \omega_3} \cdot \frac{k \cdot (1 + s/\omega_1)}{(1 + s/\omega_2) \cdot (1 + s/\omega_3)} = K_B \cdot \frac{k \cdot (1 + s/\omega_1)}{(1 + s/\omega_2) \cdot (1 + s/\omega_3)}$$

Donde la constante de Bode vale $K_B = \frac{k \cdot \omega_1}{\omega_2 \cdot \omega_3}$

Hecho este acomodamiento todas las asíntotas de baja frecuencia se ubican en 1 (0 en escala lineal) de modo que se facilita la suma; lo que sigue es ir sumando las pendientes correspondientes a cada factor, según sean positivas (correspondiente a ceros) o negativas (correspondiente a polos) siempre con valor entero). De este modo la representación asintótica en general consiste de una serie de segmentos de líneas rectas con pendiente entera $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

La figura siguiente es un diagrama asintótico para la expresión genérica presentada anteriormente.



Para finalizar antes de presentar los diagramas prototipos de Bode es importante remarcar lo siguiente:

- ✓ El máximo error con respecto a la curva real se comete en los quiebres.
- ✓ Como se verá, en el caso de un par complejo conjugado de polos o ceros, el error entre la curva real y la asintótica puede ser muy grande.

- ✓ Si se trabaja con escala log-log se debe usar el producto para calcular la relación entre 2 puntos de la gráfica.
- ✓ Si se trabaja con escala lineal-log, la relación entre 2 puntos de la gráfica se encuentra mediante suma algebraica
- ✓ Es común en la literatura sobre el tema graficar en decibels en la escala lineal ($20 \log[\text{modulo}]$) en vez de $\log[\text{modulo}]$. Lo único que esto cambia es que la pendiente ahora es $20m$ [dB/década] con $m=\pm 1, \pm 2, \dots$

Aproximación de fase propuesta por Bode

Si el sistema es de fase mínima y $G(0) > 0$ el ángulo de $G(j\omega)$ en una frecuencia ω_0 está muy relacionada con la curva de modulo. Se puede escribir

$$\angle G(j\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d(\ln|G(u)|)}{du} \right] \cdot \left[\ln \left(\cotgh \frac{|u|}{2} \right) \right] \cdot du \quad \text{con} \quad u = \ln \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

El primer corchete adentro de la integral es la pendiente de la derivada del módulo y en un tramo de pendiente constante puede salir afuera de la integral por ejemplo como $m =$ pendiente. Se tiene entonces

$$\angle G(j\omega_0) = \frac{m}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\ln \left(\cotgh \frac{|u|}{2} \right) \right] \cdot du$$

Lo que queda adentro de la integral se puede escribir como

$$\ln \left(\cotgh \frac{|u|}{2} \right) = \ln \left| \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} \right| \quad \text{resultando que} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\ln \left(\cotgh \frac{|u|}{2} \right) \right] \cdot du = \frac{\pi^2}{2}$$

Finalmente el ángulo de $G(j\omega_0)$ queda

$$\angle G(j\omega_0) = \frac{m}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = m \cdot \frac{\pi}{2}$$

Nota: en la formula anterior, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. Si se trabaja en dB la fórmula queda:

$$\angle G(j\omega_0) = \frac{\text{pendiente en [dB/década]}}{20} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Nota: en los puntos de cambio de fase (donde cambia la pendiente) se suele tomar como fase aproximada al promedio de las pendientes. Así si la pendiente cambia de 0 a -1 la fase aproximada en el quiebre es de

aproximadamente 45°; esta aproximación es más exacta cuanto más alejados se encuentren los polos y ceros restantes, es decir cuando ambas pendientes tengan una duración extendida en frecuencia.

Un ajuste más fino de la fase se obtiene mediante la aproximación arco tangente tratado con anterioridad. Esta aproximación permite conseguir un valor muy aproximado de la fase en una determinada frecuencia ω_o resultando un cálculo más exacto cuanto más alejada sea la frecuencia de interés de un quiebre del diagrama asintótico de Bode ($\omega_{quiebre}$). La aproximación arco tangente puede ser expresada en series como sigue:

$$tg^{-1}\left(\frac{\omega_o}{\omega_{quiebre}}\right) = \frac{\omega_o}{\omega_{quiebre}} - \frac{1}{3}\left(\frac{\omega_o}{\omega_{quiebre}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\omega_o}{\omega_{quiebre}}\right)^5 - \dots \quad \text{para } \frac{\omega_o}{\omega_{quiebre}} < 1$$

$$tg^{-1}\left(\frac{\omega_o}{\omega_{quiebre}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_{quiebre}}{\omega_o} + \frac{1}{3}\left(\frac{\omega_{quiebre}}{\omega_o}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{\omega_{quiebre}}{\omega_o}\right)^5 + \dots \quad \text{para } \frac{\omega_o}{\omega_{quiebre}} > 1$$

Las dos funciones convergen en $\omega_{quiebre}$ y si se aproxima tomando solo los términos de 1^{er} orden, es decir:

$$tg^{-1}\left(\frac{\omega_o}{\omega_{quiebre}}\right) \cong \frac{\omega_o}{\omega_{quiebre}} \quad \text{si } \omega_o < \omega_{quiebre}$$

$$tg^{-1}\left(\frac{\omega_o}{\omega_{quiebre}}\right) \cong \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_{quiebre}}{\omega_o} \quad \text{si } \omega_o > \omega_{quiebre}$$

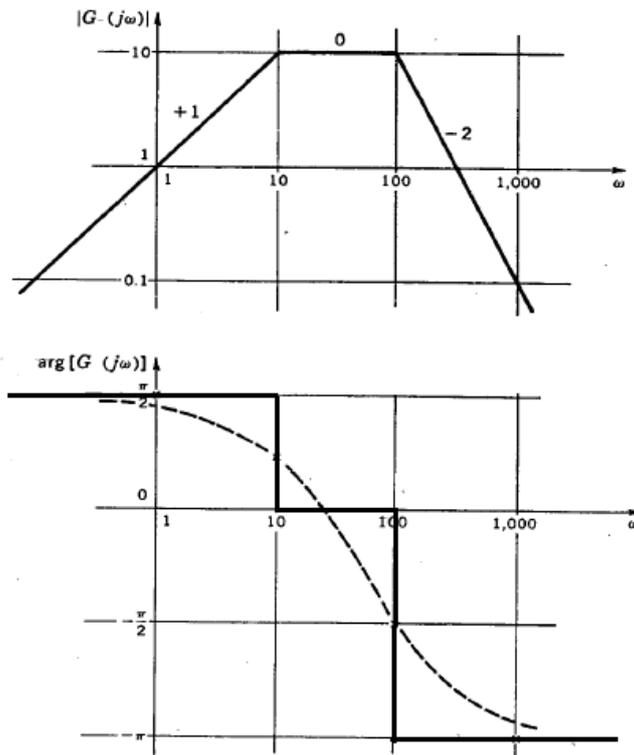
Se recuerda, el máximo error que se comete es cuando se calcula la fase en $\omega_{quiebre}$ y es de 12° mientras que a una octava por abajo o arriba de un quiebre ($\frac{\omega_o}{\omega_{quiebre}} \geq 2$ ó $\frac{\omega_o}{\omega_{quiebre}} \leq 0.5$) el error que se comete es menor o igual a 2.5°.

Ejemplo: Se tiene la función de transferencia $G(s) = \frac{s}{(1+s/10)(1+s/100)^2}$ y se desea conocer a que frecuencia el desfase es 0°.

El desfase total del sistema es $\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - tg^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right) - 2 \cdot tg^{-1}\left(\frac{\omega}{100}\right)$.

Par encontrar la frecuencia donde el desfase es 0 se debe resolver la ecuación trascendental anterior que de por si es complicado.

Para resolverlo mediante la aproximación se grafican los diagramas de Bode tal como se puede ver en la figura siguiente donde se utilizó la aproximación de Bode para la fase



Se puede ver que la frecuencia de fase 0 estará ubicada entre $\omega=10$ y $\omega=100$. De este modo se puede escribir la aproximación del siguiente modo:

$$\theta(\omega) \cong \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{10}{\omega} \right) \right] - 2 \cdot \left(\frac{\omega}{100} \right) = \frac{500 - \omega^2}{50 \cdot \omega}$$

Como se desea conocer donde $\theta(\omega) = 0$ resulta $\frac{500 - \omega^2}{50 \cdot \omega} = 0$ ó bien $\omega_o = \pm\sqrt{500}$
 De donde $\omega_o = \pm 22.4 \text{ rad}$. De las 2 soluciones posibles se toma $\omega_o = 22.4 \text{ rad}$ porque el valor es positivo y está dentro del rango asumido.

Diagramas asintóticos de Bode de los factores básicos

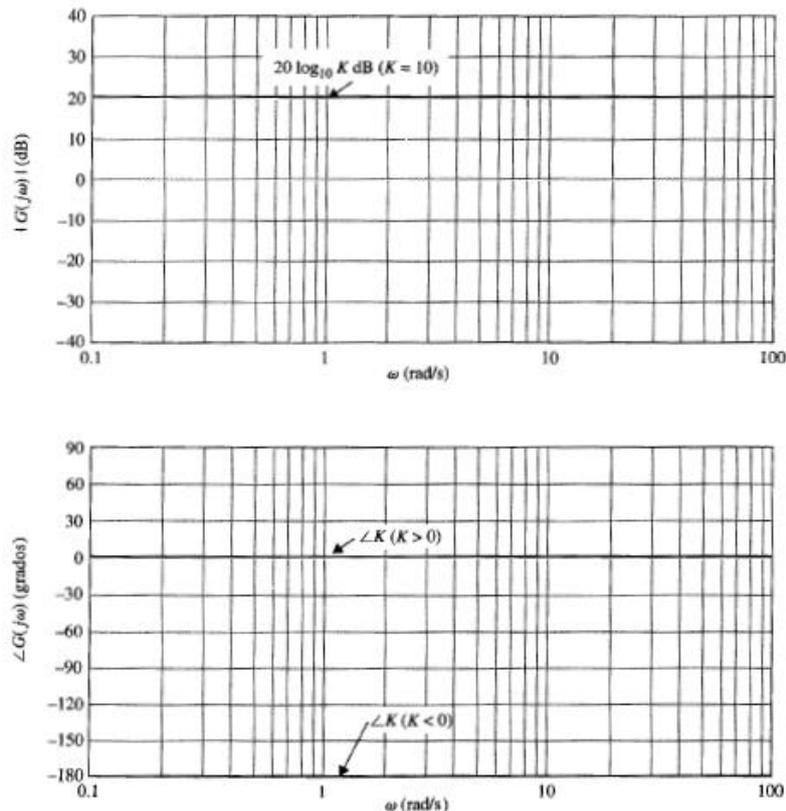
A continuación se presentan los diagramas asintóticos y exactos para los factores prototipos. Se utiliza para la gráfica del módulo el dB ya que es la ampliamente utilizada en la literatura

Factor ganancia K_B

En cuanto al módulo, la aproximación asintótica de este factor es simplemente una recta de pendiente 0 con ordenada $20 \log K_B$ a lo largo de todas las frecuencias (coincidente con la curva real). La curva de fase es

también una recta en 0° para $K_B > 0$ y -180° para $K_B < 0$ para todas las frecuencias.

En la figura siguiente se puede apreciar el diagrama asintótico de bode para una $|K_B|=10$. En la respectiva curva de fase se puede ver la fase en los 2 casos $K_B=10$ y $K_B=-10$.



Factor Integrador y derivador $(j\omega)^{\mp 1}$

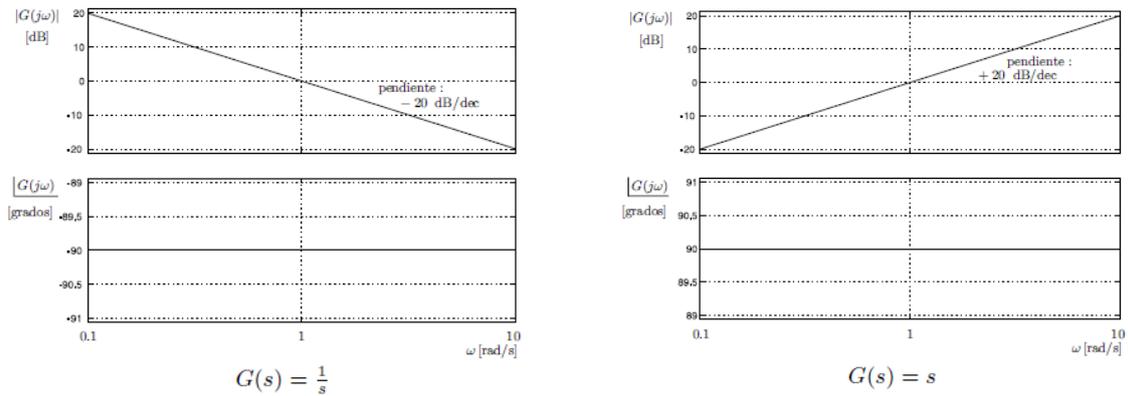
En el caso de un polo en el origen (integrador), dado que $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ se tiene que $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$ y $\angle G(j\omega) = -90^\circ$

$$|G(j\omega)| = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\omega}\right) = -20 \cdot \log\omega [dB] \quad \text{y} \quad \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

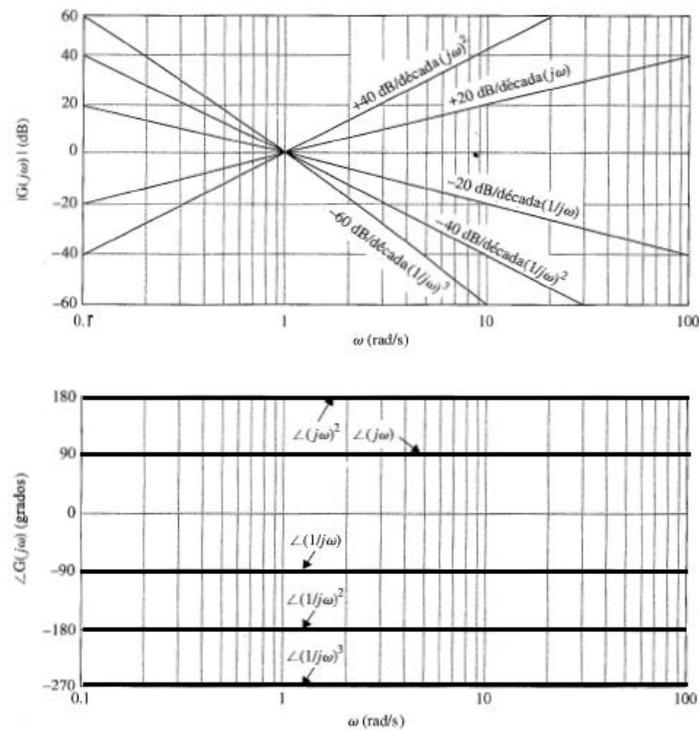
por lo tanto el diagrama asintótico, que coincide con la curva real, es una recta de pendiente $-20(\text{dB}/\text{dec})$ que pasa por el punto $(1,0)$ de los ejes coordenados.

Como contrapartida, el diagrama polar de un cero en el origen (derivador) $G(j\omega) = j\omega$, ya que $|G(j\omega)| = \omega$ y $\angle G(j\omega) = 90^\circ$, el diagrama asintótico (coincide con la curva real) es una recta de pendiente $+20(\text{dB}/\text{dec})$ que pasa por el punto $(1,0)$ de los ejes coordenados.

En la siguiente figura se muestra las curvas de modulo y angulo para estos 2 factores



Nota: Si la cantidad de polos o ceros en el origen es n , la aproximación sigue siendo una recta que pasa por el punto $(1,0)$ pero con una pendiente $\pm n20$ (db/dec), mientras que la fase sera $\pm n90^\circ$ Esto se muestra en la figura siguiente



Un cero simple: $G(j\omega) = 1 + j\left(\frac{\omega}{a}\right)$ con $a > 0$

El módulo de $G(j\omega)$ en dB es:

$$|G(j\omega)|_{db} = 20 \cdot \log|G(j\omega)| = 20 \cdot \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$$

De modo que para frecuencias bajas ($\omega \ll a$) el modulo es

$$|G(j\omega)|_{\omega \ll a} = 20 \cdot \log 1 = 0$$

Es decir, una recta con pendiente 0 con ordenada igual 0 dB, que se toma como válida para $\omega \leq a$.

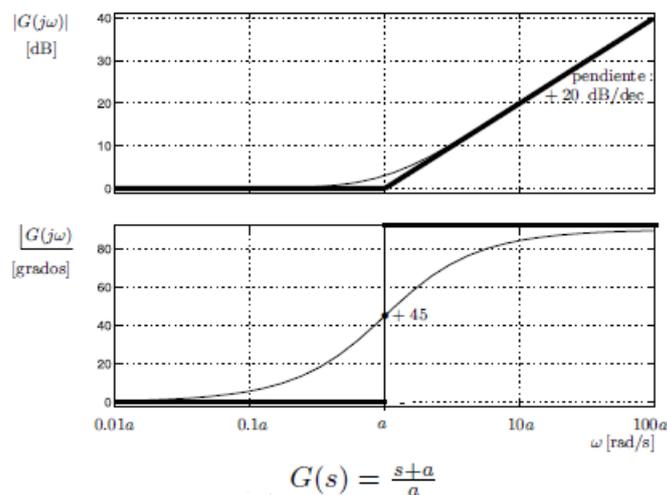
Para frecuencias altas ($\omega \gg a$), el modulo es

$$|G(j\omega)|_{\omega \gg a} = 20 \cdot \log \left(\frac{\omega}{a} \right) = 20 \cdot \log \omega - 20 \cdot \log a$$

Es decir, una recta con pendiente 20 dB/dec. con ordenada al origen de valor $-20 \cdot \log a$. Recta que se toma como válida a partir de $\omega = a$.

En cuanto a la fase, de acuerdo a la aproximación propuesta por Bode, como la pendiente de la curva de modulo cambia desde 0 a +20 dB/dec., la fase cambiará desde 0° en $\omega \rightarrow 0$ hasta $+90^\circ$ para $\omega \rightarrow \infty$, pasando por $+45^\circ$ en $\omega = a$

La combinación de ambas aproximaciones junto con la curva real se muestra en la figura siguiente



Como se aprecia en la gráfica, el máximo error entre la curva real y la aproximada existe en $\omega = a$.

Un polo simple: $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{a}\right)}$ con $a > 0$

El módulo de $G(j\omega)$ en dB es:

$$|G(j\omega)|_{db} = 20 \cdot \log|G(j\omega)| = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}}\right) = -20 \cdot \log\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$$

De modo que nuevamente para frecuencias bajas ($\omega \ll a$) el modulo es

$$|G(j\omega)|_{\omega \ll a} = -20 \cdot \log 1 = 0$$

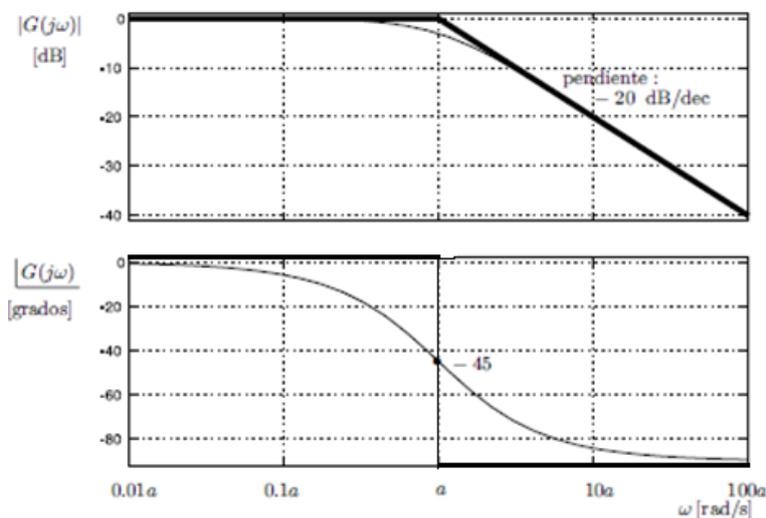
Es decir, una recta con pendiente 0 con ordenada igual 0 dB, que se toma como válida para $\omega \leq a$.

Para frecuencias altas ($\omega \gg a$), el modulo es

$$|G(j\omega)|_{\omega \gg a} = -20 \cdot \log\left(\frac{\omega}{a}\right) = -20 \cdot \log \omega + 20 \cdot \log a$$

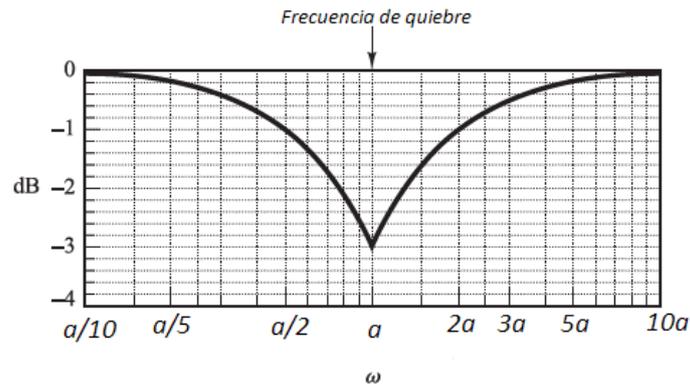
Es decir, una recta con pendiente -20 dB/dec. con ordenada al origen de valor $+20 \cdot \log a$. Recta que se toma como válida a partir de $\omega = a$.

En cuanto a la fase, de acuerdo a la aproximación propuesta por Bode, como la pendiente de la curva de modulo cambia desde 0 a -20 dB/dec., la fase cambiará desde 0° en $\omega \rightarrow 0$ hasta -90° para $\omega \rightarrow \infty$, pasando por -45° en $\omega = a$. La combinación de ambas aproximaciones junto con la curva real se muestra en la figura siguiente



$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

Nota: Como se puntualizó, el máximo error entre la aproximación y la curva real se produce en $w=a$. La figura siguiente representa el error en dB como función de la frecuencia para un polo real ubicado en $s = -a$.



Por supuesto, para un cero real ubicado en $s = -a$ el error tendrá igual amplitud pero signo positivo.

Par complejo conjugado de ceros: $G(j\omega) = 1 + 2\xi \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$ con $\xi > 0$

El módulo de $G(j\omega)$ en dB es:

$$|G(j\omega)|_{db} = 20 \cdot \log|G(j\omega)| = 20 \cdot \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

De modo que para frecuencias bajas ($\omega \ll \omega_n$) el modulo es

$$|G(j\omega)|_{\omega \ll \omega_n} = 20 \cdot \log 1 = 0$$

Es decir, una recta con pendiente 0 con ordenada igual 0 dB, que se toma como válida para $\omega \leq \omega_n$.

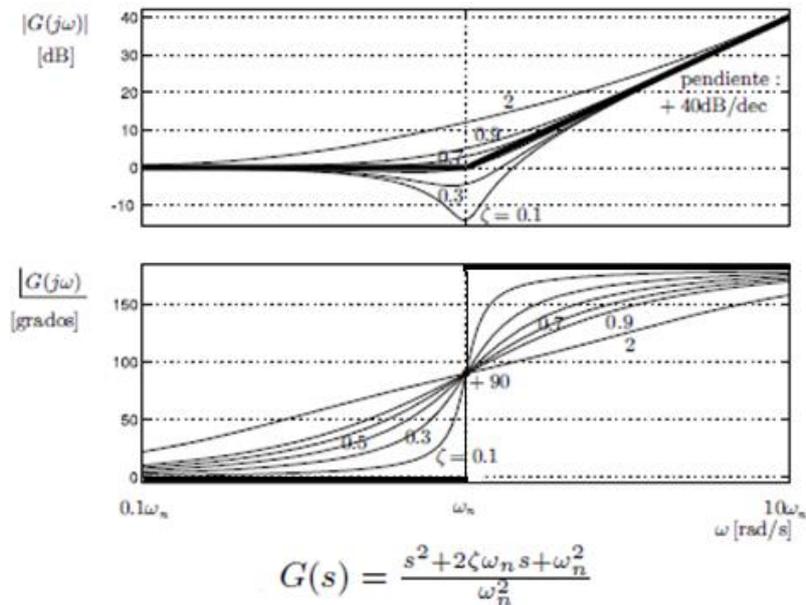
Para frecuencias altas ($\omega \gg \omega_n$), el modulo aproximado es

$$|G(j\omega)|_{\omega \gg \omega_n} = 20 \cdot \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4} = 20 \cdot \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = 40 \cdot \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = 40 \cdot \log \omega - 40 \cdot \log \omega_n$$

Es decir, una recta con pendiente 40 dB/dec. con ordenada al origen de valor $-40 \cdot \log a$. Recta que se toma como válida a partir de $\omega = \omega_n$.

En cuanto a la fase, de acuerdo a la aproximación propuesta por Bode, como la pendiente de la curva de modulo cambia desde 0 a +40 dB/dec., la fase cambiará desde 0° en $\omega \rightarrow 0$ hasta 180° para $\omega \rightarrow \infty$, pasando por 90° en $\omega = \omega_n$.

La combinación de ambas aproximaciones junto con la curva real se muestra en la figura siguiente



Como se aprecia en este caso el error entre la aproximación asintótica y la curva real puede llegar a ser muy grande dependiendo del valor que tome el factor de amortiguamiento relativo ξ .

Par complejo conjugado de polos: $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi(j\frac{\omega}{\omega_n}) + (j\frac{\omega}{\omega_n})^2}$ con $\xi > 0$

El módulo de $G(j\omega)$ en dB es:

$$|G(j\omega)|_{db} = 20 \cdot \log|G(j\omega)| = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \right) = -20 \cdot \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

De modo que para frecuencias bajas ($\omega \ll \omega_n$) el modulo es

$$|G(j\omega)|_{\omega \ll \omega_n} = 20 \cdot \log 1 = 0$$

Es decir, una recta con pendiente 0 con ordenada igual 0 dB, que se toma como válida para $\omega \leq \omega_n$.

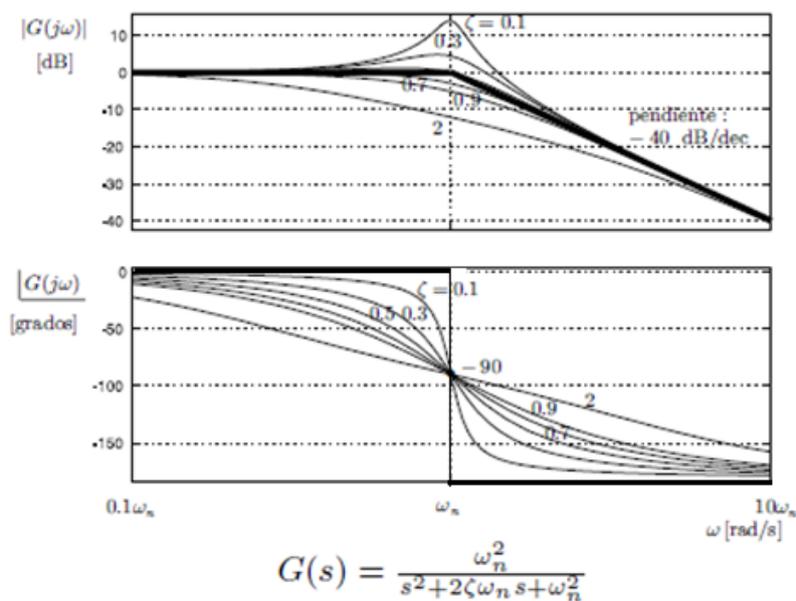
Para frecuencias altas ($\omega \gg \omega_n$), el modulo aproximado es

$$|G(j\omega)|_{\omega \gg \omega_n} = -20 \cdot \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4} = -20 \cdot \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = -40 \cdot \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = -40 \cdot \log \omega + 40 \cdot \log \omega_n$$

Es decir, una recta con pendiente - 40 dB/dec. con ordenada al origen de valor $+40 \cdot \log a$. Recta que se toma como válida a partir de $\omega = \omega_n$.

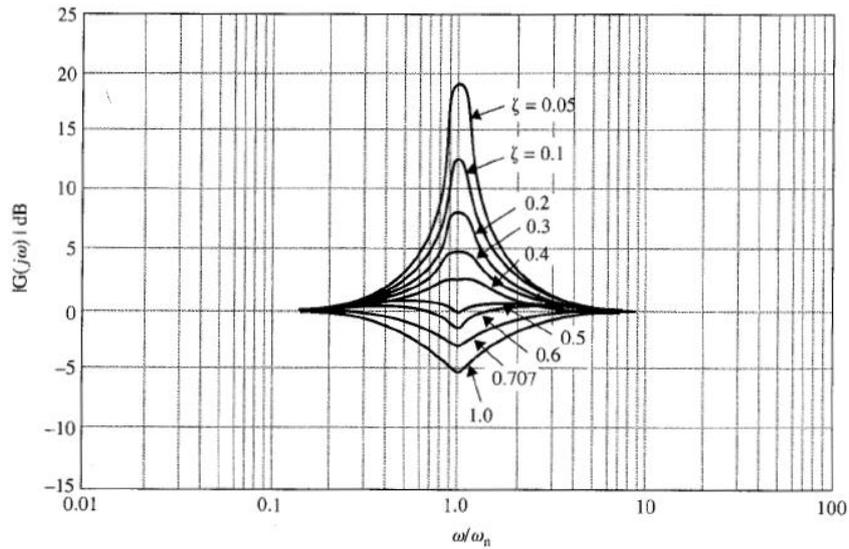
En cuanto a la fase, de acuerdo a la aproximación propuesta por Bode, como la pendiente de la curva de modulo cambia desde 0 a -40 dB/dec., la fase cambiará desde 0° en $\omega \rightarrow 0$ hasta -180° para $\omega \rightarrow \infty$, pasando por -90° en $\omega = \omega_n$.

La combinación de ambas aproximaciones junto con la curva real se muestra en la figura siguiente



Como se puntualizó para un par complejo conjugado de ceros, en este caso también el error entre la curva real y la aproximada puede llegar a ser muy grande dependiendo del factor de amortiguamiento relativo ξ (infinito para $\xi = 0$).

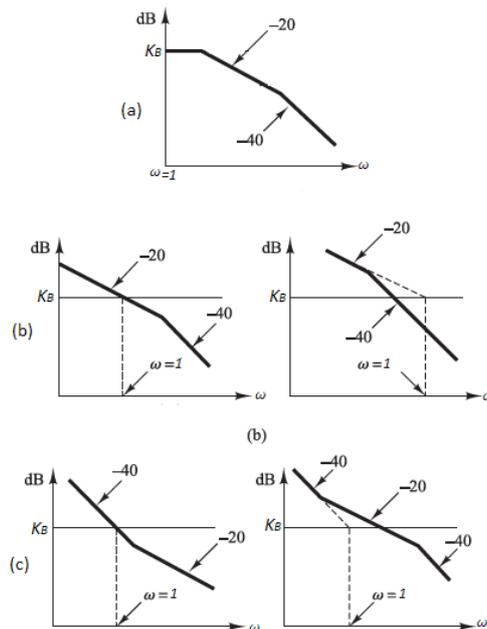
La figura siguiente representa los errores entre la aproximación y la curva real para un par de polos. Por supuesto que invirtiendo el signo de las ordenadas la misma grafica representa el error para un par de ceros.



Nota final sobre los diagramas asintóticos de Bode

Es interesante remarcar que una forma de corroborar que el diagrama asintótico de bode de modulo este bien ubicado en cuanto a la escala vertical (modulo) es que la asíntota de baja frecuencia o su prolongación si existe un cero o polo antes que $w=1$ debe pasar cuando $w=1$ por el valor $20\log K_B$ (K_B si se grafica en escala log-log).

Lo figura siguiente muestra lo explicado: en la parte (a) de la figura para un sistema tipo 0 en (b) para uno tipo 1 (un integrador) y en (c) para uno tipo 2 (2 integradores).



Una aplicación de lo explicado en el párrafo anterior es la siguiente:

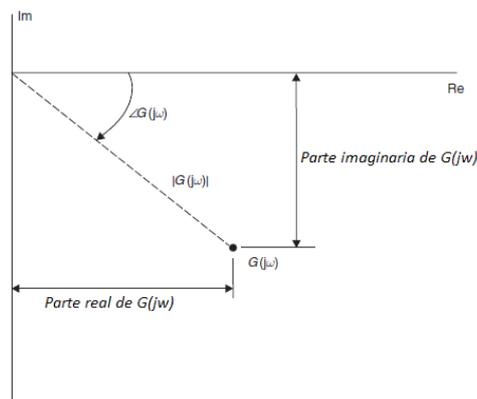
Las constantes de error tienen que ver con el tipo de sistema:

- ✓ Tipo 0 error finito al escalón y constante de error de posición $K_p=K_B$
- ✓ Tipo 1 error finito a la rampa y constante de error de velocidad $K_v=K_B$
- ✓ Tipo 2 error finito a la parábola y constante de error de aceleración $K_a=K_B$

Por lo tanto si la gráfica asintótica de Bode de modulo corresponde a $G_{eq}(s)$ de un sistema realimentado estable, el valor de la constante de Bode leído en $\omega=1$ es el valor de la constante de erro correspondiente al tipo de sistema estudiado.

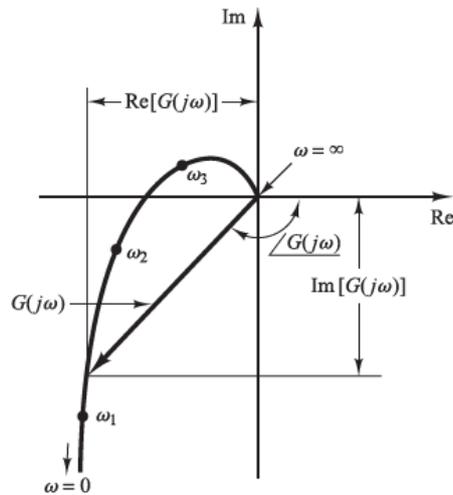
Diagramas Polares

El diagrama polar de una función de transferencia sinusoidal $G(j\omega)$ es un diagrama del módulo de $G(j\omega)$ y de la fase de $G(j\omega)$ en coordenadas polares (un plano imaginario-real) con la frecuencia ω como parámetro. Por lo tanto el diagrama polar es un lugar geométrico de los vectores de $G(j\omega)$ desde $\omega=0$ hasta ω infinito. Esto es lo que se muestra en la figura siguiente para una frecuencia genérica



Las proyecciones del punto evaluado sobre los ejes real e imaginario constituyen las componentes real e imaginaria de $G(j\omega)$.

La figura siguiente constituye la típica representación de un diagrama polar



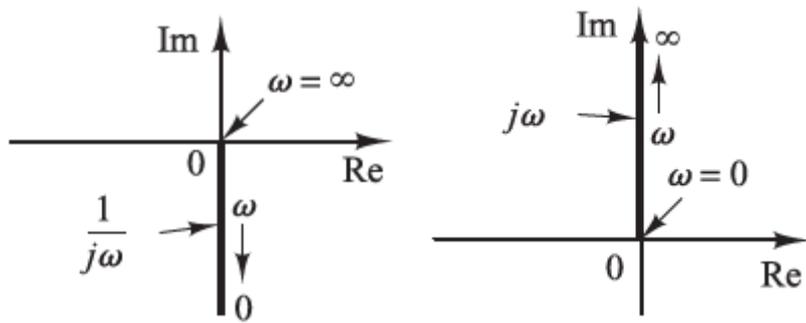
En general la información para la construcción del diagrama polar se los puede obtener de los diagramas logarítmicos, es decir **no se debe ver a ambas formas de representar la respuesta en frecuencia como competitivas sino más bien como complementarias**. En efecto, entre otras varias características, mientras que en un diagrama logarítmico es sencillo realizar el producto de 2 funciones respuestas en frecuencia (en un diagrama polar esto es complicado de efectuar ya que involucra el producto de 2 vectores), en un diagrama polar es muy sencillo y seguro estudiar la estabilidad de todo tipo de sistemas (fase mínima y no-mínima) a lazo cerrado si se dispone del diagrama polar de la función de transferencia del lazo o ganancia de lazo que recibe el nombre particular de **“diagrama de Nyquist”**; además en un diagrama polar se puede ver la respuesta en frecuencia para todo el rango de frecuencias cosa impráctica en los diagramas logarítmicos. Una desventaja del diagrama polar respecto al diagrama logarítmico no se puede descifrar la contribución de cada elemento de $G(j\omega)$ a la gráfica total.

Diagramas polares de las funciones típicas

Factor Integrador y derivador $(j\omega)^{\mp 1}$

En el caso de un integrador, dado que $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ se tiene que $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$ y $\angle G(j\omega) = -90^\circ$, por lo tanto el diagrama polar lo constituye el eje imaginario negativo del plano complejo $G(j\omega)$.

Como contrapartida, el diagrama polar de un derivador $G(j\omega) = j\omega$ lo constituye el eje imaginario positivo del plano complejo $G(j\omega)$, ya que $|G(j\omega)| = \omega$ y $\angle G(j\omega) = 90^\circ$. Esto se muestra en la siguiente figura



Un polo simple: $G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$

En este caso se tiene:

$$G(j\omega) = \frac{K(1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)}$$

$$= \frac{K(1 - j\omega T)}{1 + \omega^2 T^2}$$

De modo que

$$\text{Parte real } a = \frac{K}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\text{Parte Imaginaria } b = \frac{-K\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

O sea que el modulo es

$$|G(j\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{K}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \left(\frac{-K\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

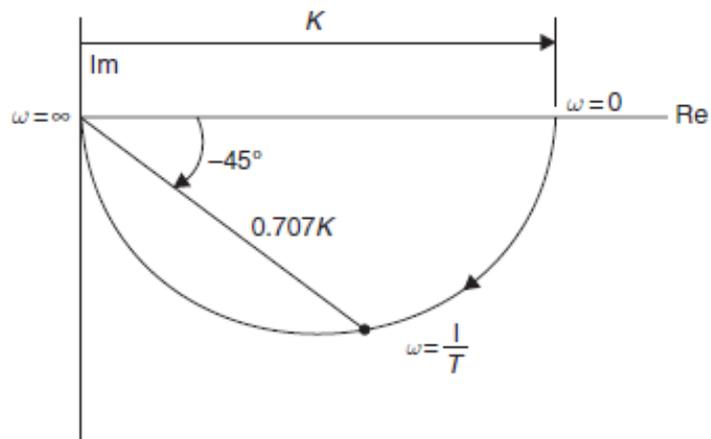
y la fase es

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

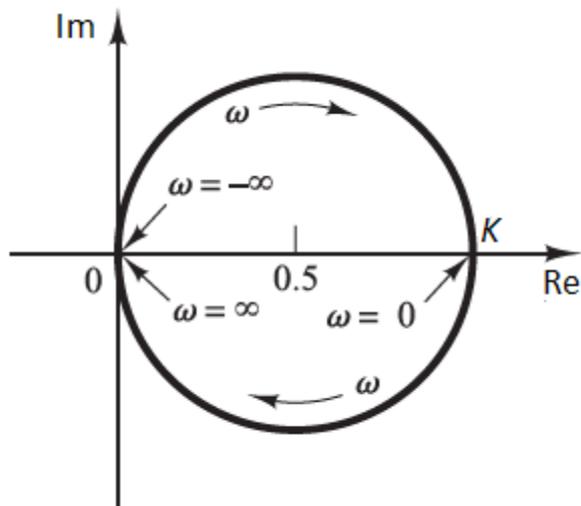
$$= \tan^{-1}\left\{\frac{\frac{-K\omega T}{1 + \omega^2 T^2}}{\frac{K}{1 + \omega^2 T^2}}\right\}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(-\omega T)$$

Resultando el siguiente diagrama polar



En el caso de querer la gráfica polar desde $\omega = -\infty$ hasta $\omega = +\infty$ el resultado es el siguiente gráfico

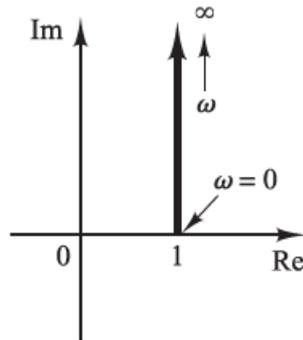


Un cero simple: $G(j\omega) = 1 + j\omega T$

En este caso ya está perfectamente separada la parte real de la imaginaria:

parte real: 1
parte imaginaria: ωT

De modo que el diagrama polar resultante es

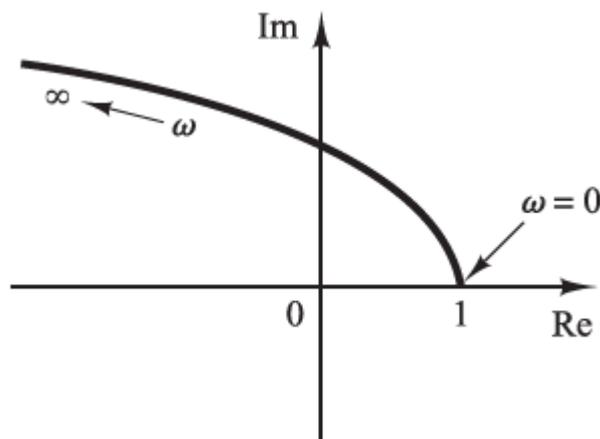


Par complejo conjugado de ceros: $G(j\omega) = 1 + 2\xi \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$ con $\xi > 0$

Para este caso resultan las siguientes partes real e imaginaria:

$$G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)$$

De modo que para $w=0$, el modulo es 1 y el ángulo 0° , mientras que para frecuencias elevadas el modulo tiende a infinito con un ángulo de $+180^\circ$. La parte imaginaria de $G(jw)$ es positiva para $w>0$ y es monótonicamente creciente, mientras que la parte real es monótonicamente decreciente desde 1 en $w=0$. La figura siguiente muestra el resultado



Par complejo conjugado de polos: $G(j\omega) = \frac{1}{1+2\xi\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$ con $\xi > 0$

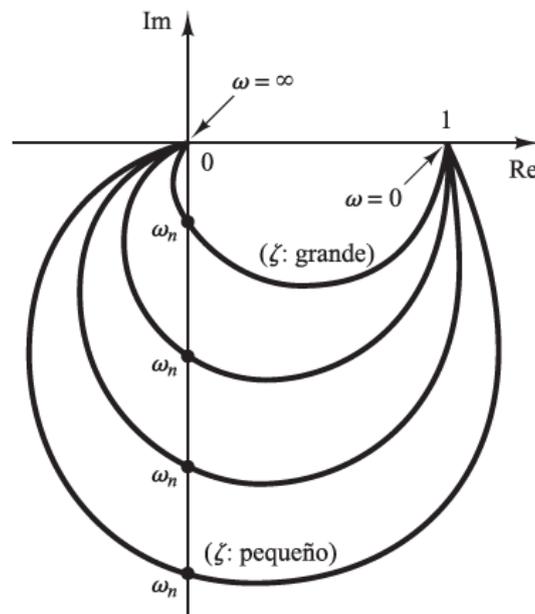
Tal como se expresó anteriormente, la respuesta en frecuencia expresada como parte real e imaginaria queda

$$G(j\omega) = \frac{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right] - j\left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} = \frac{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} - j \frac{\left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

Y expresada como modulo y ángulo

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad \text{y} \quad \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \left[\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \right]$$

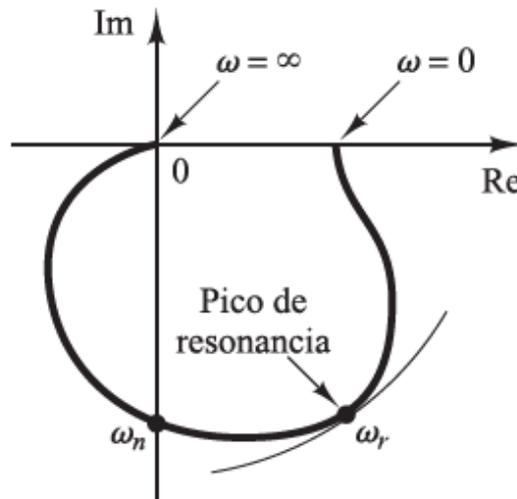
De modo que para $\omega=0$, el modulo es 1 y el ángulo 0° , mientras que para frecuencias elevadas el modulo tiende a 0 con un ángulo de -180° . En $\omega=0$ la curva es perpendicular al eje real mientras que para ω tendiendo a infinito es tangente al eje real negativo. La forma depende del factor de amortiguamiento relativo ξ pero la forma general es similar para todos los casos. La figura siguiente muestra lo citado



Siempre el ángulo de fase en ω_n es -90° y el modulo vale $\frac{1}{2\xi}$ por lo tanto la curva intersecta al eje $j\omega$ con una frecuencia ω_n .

El punto sobre la curva cuya distancia desde el origen es máximo corresponde a la llamada frecuencia de resonancia o del máximo $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ ($\xi < 0.707$) y ocurre en un valor menor que ω_n ; a esta frecuencia el modulo es $|G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$ ($\xi < 0.707$) y gráficamente se lo

obtiene como el cociente entre el modulo del vector en ω_r dividido en el vector en $\omega = 0$. Esto se muestra en la siguiente figura



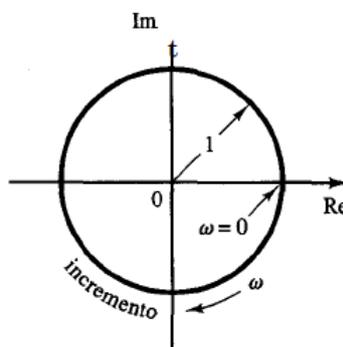
En el caso de $\xi \gg 1$, el lugar se aproxima a un semicírculo ya que tendrá uno de los polos reales dominante pero se diferencia de diagrama para un polo simple en que el de segundo orden siempre llega al origen tangente al eje real negativo para frecuencia infinita.

Retardo de transporte: $G(j\omega) = e^{-j\omega L}$

A la función de transferencia del retardo puro se la puede expresar como

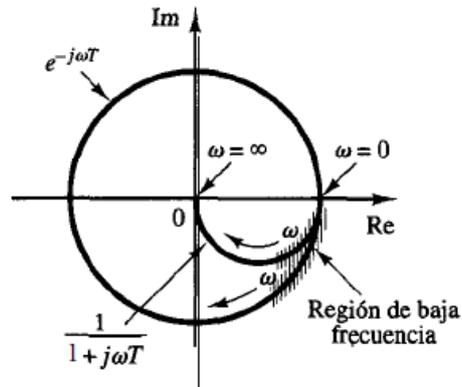
$$G(j\omega) = \begin{cases} |G(j\omega)| = 1 \\ \angle G(j\omega) = \cos\omega L - j\sin\omega L \end{cases}$$

Dado que el módulo de $G(j\omega)$ es siempre unitaria y el ángulo de desfase en forma lineal con ω , el diagrama polar del retardo de transporte es un círculo de radio unitario tal como se muestra en la siguiente figura



En baja frecuencia el retardo de transporte y el atraso de 1er orden tienen un comportamiento similar, sin embargo para frecuencias elevadas existe

una marcada diferencia entre ambos sistemas. Esto puede apreciarse en la siguiente figura



Es interesante visualizar el resultado de la combinación de ambos. Para ello se plantea el ejemplo siguiente:

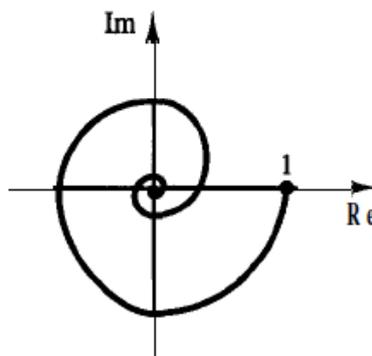
$$\text{Sea } G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1+j\omega T}$$

Para esta función el módulo y ángulo son

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega L}| \cdot \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega L} + \angle \frac{1}{1+j\omega T} = -\omega L - \text{tg}^{-1}\omega T$$

Dado que el módulo disminuye monótonicamente a partir de 1 y el ángulo disminuye en forma monótonica e indefinida, el diagrama polar resulta una espiral que para $\omega = 0$ comienza sobre el eje real (en este caso en 1) y converge al origen para $\omega \rightarrow \infty$. Esto se puede apreciar en la siguiente figura



Consideraciones generales para el trazado de las gráficas polares

El bosquejo de los diagramas polares presentan comportamientos muy definidos tanto para cuando la frecuencia tiende a 0 como cuando tiende a infinito; es por ello útil analizar este comportamiento para facilitar el

trazado de los diagramas. En las frecuencias intermedias la forma que adquirirán los graficas dependerá fundamentalmente de los ceros, es decir, de lo que se conoce como “**dinámica del numerador**”.

Para el análisis se considera la función respuesta en frecuencia de la forma siguiente

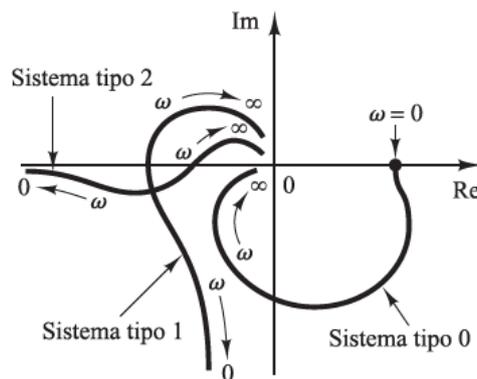
$$G(j\omega) = \frac{K(1+j\omega\tau_a)(1+j\omega\tau_b)\dots}{(j\omega)^\gamma(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)\dots} = \frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+\dots}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\dots} \quad \text{con } n>m$$

a) Comportamiento en $\omega \rightarrow 0$

Si aparecen varios polos en el origen ($\gamma = 1, 2, 3$ etc), para $\omega \rightarrow 0$ se desprecia el resto de $G(j\omega)$, es decir se considera para el análisis $G(j\omega) \cong \frac{K}{(j\omega)^\gamma}$. En este caso el modulo tiende a infinito y la fase $\angle G(\omega \rightarrow 0) = \gamma \cdot 90^\circ$. Por lo tanto las gráficas para frecuencia tendiendo a 0 dependerán del tipo de sistema y serán asintóticas a los ejes imaginario y real viniendo desde infinito.

Si $\gamma = 0$ las gráficas para $w=0$ comienzan en un valor finito sobre el eje real (semieje positivo si $K>0$ y negativo si $K<0$); el comienzo ($w=0$) en este caso es siempre perpendicular al correspondiente eje real, es decir la tangente del diagrama polar en $w=0$ es perpendicular al eje real.

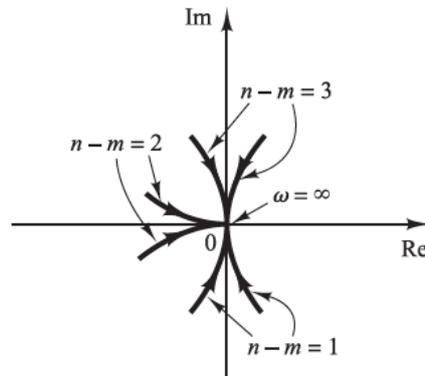
En la gráfica siguiente se puede ver el comportamiento para $\omega \rightarrow 0$, en los casos $\gamma = 0$ (tipo 0), $\gamma = 1$ (tipo1) y $\gamma = 2$ (tipo 2).



b) Comportamiento para $\omega \rightarrow \infty$

En este caso como se considera $n>m$, para altas frecuencias el modulo siempre tiende a 0, esto es, el diagrama polar converge al origen en sentido horario. El ángulo correspondiente con el que se aproxima al

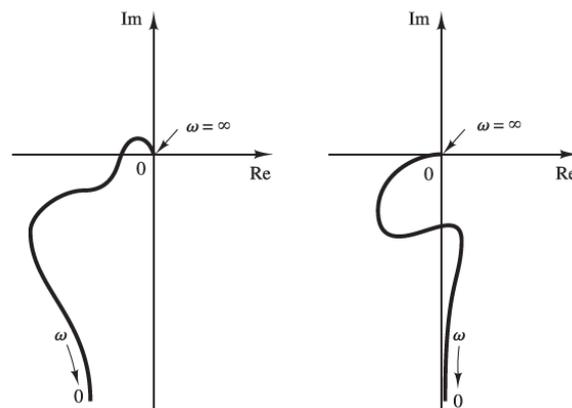
origen depende de la cantidad de polos más que ceros o el llamado “exceso polo-cero”. Es decir, $\angle G(\omega \rightarrow \infty) = -(n - m) \cdot 90^\circ$ y el aproximamiento es asintótico al eje correspondiente. Esto se muestra en detalle en la figura siguiente



Nota: si $n=m$ el diagrama polar comienza y finaliza a una distancia finita sobre el eje real en forma perpendicular.

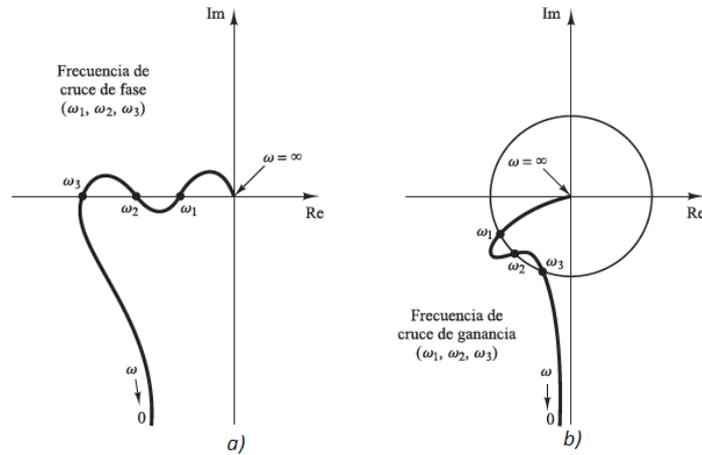
c) Comportamiento con dinámica de numerador (ceros)

Cuando la función respuesta en frecuencia no tiene ceros la fase es monótonicamente decreciente moviéndose siempre en sentido horario. Sin embargo la aparición de ceros produce que el diagrama polar presente movimientos a veces complicados como consecuencia que la fase aumenta y disminuye según progresa la frecuencia. La figura siguiente presenta 2 casos en los que la presencia de ceros modifica la forma del diagrama polar.



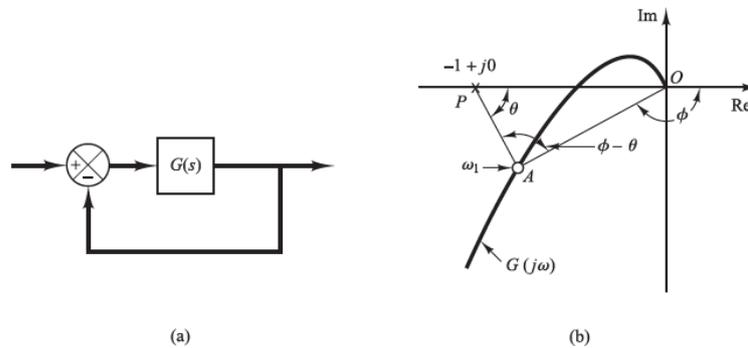
Esta dinámica del numerador es la que da origen a los sistemas llamados condicionalmente estables (sistemas en los que si cambia la ganancia puede volverse inestable). En la figura siguiente se puede ver cómo debido

a la dinámica del numerador, en la parte a) existen 3 frecuencias de cruce de fase ω_{cf} mientras que en la parte b) se producen 3 frecuencias de cruce de ganancia ω_{cg}



Aplicación del diagrama polar de la ganancia de lazo o diagrama de Nyquist a los sistemas realimentados.

Sea el sistema de la parte a) de la figura siguiente



La función de transferencia de lazo cerrado es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

y la correspondiente función respuesta en frecuencia

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = G(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

La parte b) de la figura representa un diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$. En el mismo el vector OA representa a $G(j\omega)$ en una frecuencia de prueba ω_1 en el punto A del diagrama.

Por otro lado el vector PA que va desde el punto $-1+j0$ hasta el punto A representa a $1+G(j\omega)$ también en ω_1 .

Como a $G(j\omega)$ y $1+G(j\omega)$ se los puede escribir como modulo y ángulo, gráficamente resulta

$$G(j\omega_1) = \begin{cases} |G(j\omega_1)| = \overline{OA} \\ \angle G(\omega_1) = \phi \end{cases} \quad \text{y} \quad 1 + G(j\omega_1) = \begin{cases} |1 + G(j\omega_1)| = \overline{PA} \\ \angle [1 + G(\omega_1)] = \theta \end{cases}$$

se tiene lo siguiente para la función respuesta en frecuencia de lazo cerrado en ω_1 :

$$\frac{Y(j\omega_1)}{R(j\omega_1)} = \frac{\overline{OA}}{\overline{PA}} = \frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} = \frac{|G(j\omega_1)| \angle G(\omega_1)}{|1 + G(j\omega_1)| \angle [1 + G(\omega_1)]} = \frac{\overline{OA}}{\overline{PA}} \angle \phi - \theta$$

Es decir, según la gráfica del diagrama de Nyquist, el módulo de la función respuesta en frecuencia de lazo cerrado viene dado por el cociente de los vectores OA y PA mientras que la fase de la función respuesta en frecuencia de lazo cerrado es la diferencia de los ángulos $\phi - \theta$ para cada frecuencia de prueba. Por lo tanto midiendo los módulos y ángulos de los vectores OA y PA se puede conocer la respuesta en frecuencia de lazo cerrado:

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = M(\omega) \cdot e^{j\alpha(\omega)}$$

$$M(\omega) = \frac{\overline{OA}}{\overline{PA}}(\omega) \quad \text{y} \quad \alpha(\omega) = \phi(\omega) - \theta(\omega)$$

La tabla siguiente muestra los diagramas polares para varias funciones de transferencias.

