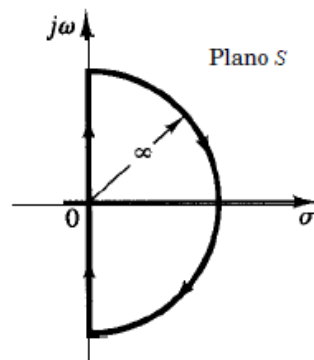


El Criterio de Nyquist

Nyquist en el año 1932 aplicó el concepto del teorema de Cauchy's al estudio de los sistemas realimentados. A tal fin, consideró lo siguiente:

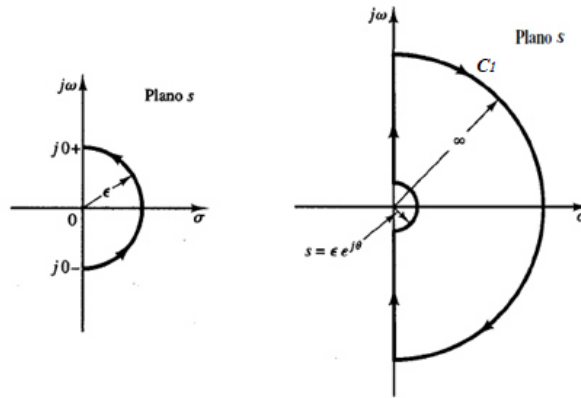
Mapear la función diferencia de retorno $F(s)$ para la cual, como se vio al comienzo, los ceros de $F(s)$ son los polos de la función de transferencia de lazo cerrado y los polos de $F(s)$ son los n polos de la función de transferencia de lazo abierto.

Como lo que interesa para estudiar la estabilidad es conocer si algún polo de la función de transferencia de lazo cerrado (cero de $F(s)$) se encuentra en el spd consideró como camino cerrado C_1 al delimitado por el eje $j\omega$ desde $w=-\infty$ hasta $w=+\infty$; para encerrar totalmente el spd, los extremos $w=+j\infty$ y $w=-j\infty$ se unen con un semicírculo de radio infinito. De esta manera, tal como se muestra en la figura siguiente, todo el semiplano derecho del plano s queda encerrado por el camino C_1 que se recorre en sentido horario.



Como el radio de cierre del camino C_1 en el plano s es infinito y la función $F(s)$ es propia, los valores de $F(+j\infty)$ y $F(-j\infty)$ serán iguales entre sí. Por lo tanto en el plano $F(s)$, $F(+j\infty)$ y $F(-j\infty)$ constituyen un punto.

Como el camino cerrado C_1 no debe pasar por ningún polo o cero cuando se lo recorre (se produce una indeterminación), si se encuentra algún polo o cero cuando se recorre el eje imaginario **desde $w=-j\infty$ hacia $w=+j\infty$** , se debe hacer un rodeo antihorario con radio $\varepsilon \rightarrow 0$ del punto singular, de modo que el cero o polo quede en el spi. Esto se muestra en la siguiente figura para un polo en el origen



en el semicírculo de rodeo, $s = \varepsilon e^{j\theta}$; analizando lo que ocurre con el mapeo como consecuencia de este desvío, por ejemplo para un polo en el origen, se tiene que yendo desde $w = -j\infty$ hacia $w = +j\infty$, al llegar al origen ($w = 0^-$) y cuando se recorre el semicírculo de radio ε , la fase de s se modifica en el rango $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$ con $\theta = -90^\circ$ en $w = j0^-$ y $\theta = +90^\circ$ en $w = j0^+$. De modo que reemplazando este resultado en la función $F(s)$, se tiene lo siguiente

$$F(s) = \frac{k}{s} \dots = \frac{k}{\varepsilon e^{j\theta}} \dots = \frac{k}{\varepsilon} e^{-j\theta} \dots = \frac{k}{\varepsilon} e^{j\psi} \dots$$

Como $\varepsilon \rightarrow 0$, desde $w = j0^-$ hasta $w = j0^+$, el módulo de $F(s)$ tiende a ∞ mientras que la fase ψ de $F(s)$ va desde $\psi = +90^\circ$ en $w = j0^-$ hasta $\psi = -90^\circ$ en $w = j0^+$. Se genera así en C_2 un semicírculo (movimiento de 180°) de radio infinito y de sentido opuesto al de C_1 (se trata de un polo).

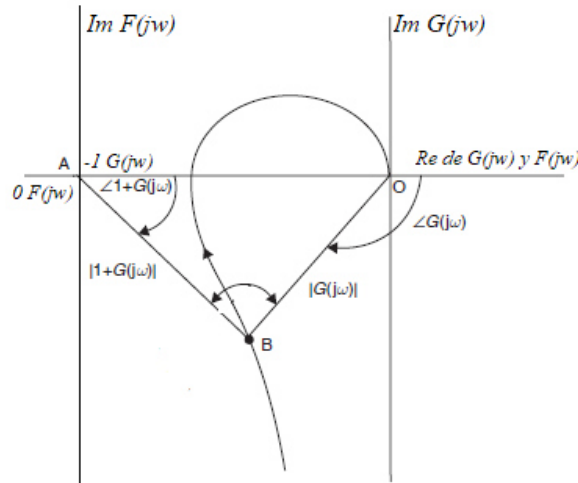
Nota: si en el origen hubiera p polos el movimiento en C_2 será de $p \cdot 180^\circ$ siempre en sentido opuesto al movimiento en C_1 .

Como los polos de la función de transferencia de lazo cerrado están dados por los ceros de $F(s)$ la condición para que el sistema a lazo cerrado sea estable es que $Z = N + P = 0$. Este razonamiento da lugar a 2 casos posibles:

- la función de transferencia de lazo abierto no tiene polos en sp es decir $P = 0$: el sistema será estable si el camino C_2 no encierra el origen del plano $F(s)$, es decir $N = 0$.
- la función de transferencia de lazo abierto tiene polos en el sp , es decir $P \neq 0$: el sistema será estable si $N = -P$ esto es, el camino C_2 encierra el origen del plano $F(s)$ en sentido antihorario P veces.

Análisis en el plano de la función de transferencia de lazo abierto $G(s)$ en vez del plano $F(s)$.

Como se sabe cuándo se grafica el diagrama polar de la respuesta en frecuencia de la función de lazo abierto $G(j\omega)$, es posible obtener inmediatamente la gráfica de la respuesta en frecuencia de la diferencia de retorno $F(j\omega)$. La figura siguiente pretende aclarar lo afirmado



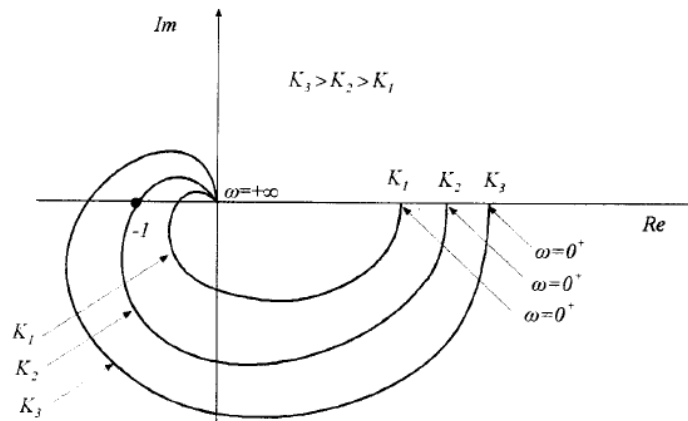
En el gráfico, el vector OB representa la respuesta en frecuencia de lazo abierto $G(j\omega)$ mientras que el vector AB representa la respuesta en frecuencia de la diferencia de retorno $F(j\omega)$. De este modo graficando la respuesta en frecuencia de lazo abierto $G(j\omega)$, con solo correr el eje imaginario tal que pase por A, la misma curva representa ahora a $F(j\omega)$ y el plano complejo es el plano $F(j\omega)$. Es decir todo lo que se debe estudiar en origen del plano $F(j\omega)$ es lo mismo que estudiarlo en el punto $-1+j0$ del plano $G(j\omega)$.

De acuerdo a lo tratado hasta aquí, se puede aplicar el criterio de Nyquist con simpleza según lo que sigue:

- Se grafica el diagrama polar de $G(j\omega)$ desde $\omega=0+$ hasta $\omega=+\infty$
- Se agrega la imagen especular con respecto al eje real para completar desde $\omega=0-$ hasta $\omega=-\infty$
- Si hay polos o ceros sobre el eje imaginario del plano s (por ejemplo en $\pm jx$) se agregan los rodeos correspondientes de modo que se unan las curvas antes y después del rodeo correspondiente.
- Se analiza todo lo visto pero con respecto al punto $-1+j0$.

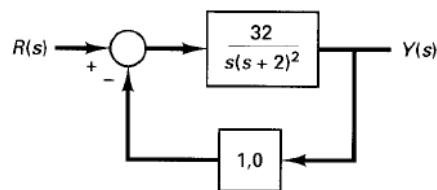
La figura siguiente presenta un Nyquist genérico en el rango positivo de frecuencias para la función de transferencia de lazo siguiente

$$KG(s) = \frac{K}{(sT_1 + 1)(sT_2 + 1)(sT_3 + 1)}$$



Si se consideran las imágenes especulares para frecuencias negativas se destacan las 3 situaciones posibles: estable $K=K_1$ (no encierra al punto crítico), críticamente estable $K=K_2$ (pasa por el punto crítico) e inestable $K=K_3$ (encierra al punto crítico), donde $K_1 < K_2 < K_3$

A continuación se desarrolla un ejemplo detallado de la construcción del diagrama para el estudio de la estabilidad mediante Nyquist. Sea el sistema de la figura siguiente



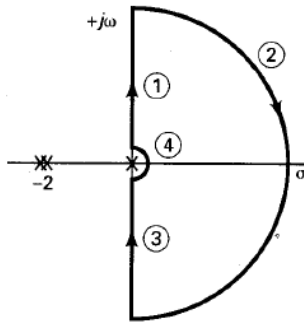
La función de transferencia del lazo resulta:

$$KG(s) = \frac{32}{s \cdot (s + 2)^2}$$

y la función respuesta en frecuencia correspondiente es

$$KG(j\omega) = \frac{8}{j\omega \cdot \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)^2}$$

Un gráfico detallado del camino cerrado C_1 en el plano s se presenta en la figura siguiente



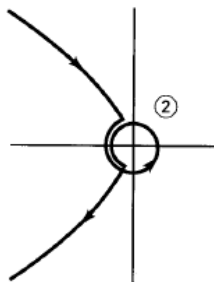
A continuación se desarrolla un análisis por tramos:

Tramo 1: es la típica grafica polar de $KG(j\omega)$ en el tramo $0^+ \leq \omega < +\infty$

Tramo 2: se hace un rodeo del spd con un semicírculo de radio $R \rightarrow \infty$. Para ello se reemplaza en la función respuesta en frecuencia s por $Re^{j\theta}$ con θ avanzando desde $+90^\circ$ hacia -90° en dirección horaria. Al hacer esto resulta la expresión

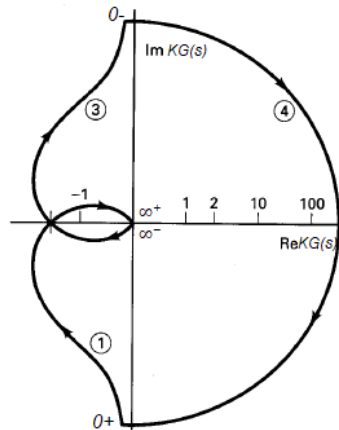
$$KG(j\omega) = \frac{8}{Re^{j\theta} \cdot \left(\frac{Re^{j\theta}}{2} + 1\right)^2} \approx \frac{32}{R^3} e^{-j3\theta}$$

Si se analiza esta expresión se obtiene un camino que es una rotación de una vuelta y media alrededor del origen del plano $KG(j\omega)$ en dirección antihoraria pero como R tiende a infinito, el radio de este giro tiende a cero, es decir es el mismo origen del plano $KG(j\omega)$. El desarrollo de este tramo se muestra en la figura siguiente



Nota: en la práctica este tramo no se dibuja y se considera directamente el origen tal como se puntualizó al tratar el método.

Tramo 3: es el tramo de frecuencias negativas. Esta parte es la imagen especular con respecto al eje real del tramo 1. Esto se muestra en la siguiente figura



Para completar el diagrama mostrado en la figura anterior, resta solamente el tramo 4 alrededor del polo en el origen del plano s .

Tramo 4: se rodea el polo en el eje $j\omega$ en sentido antihorario dejándolo a la izquierda del rodeo. Nuevamente, para un estudio analítico, se reemplaza en la función respuesta en frecuencia del lazo s por $re^{j\alpha}$ donde r tiende a 0 y el ángulo α evoluciona en el plano s en sentido antihorario desde -90° hacia $+90^\circ$. Resulta lo siguiente

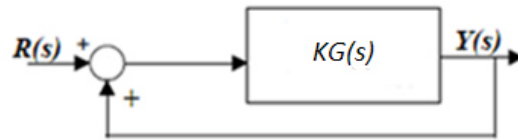
$$KG(j\omega) = \frac{8}{Re^{j\alpha} \cdot \left(\frac{Re^{j\alpha}}{2} + 1\right)^2} \approx \frac{8}{r} e^{-j\alpha}$$

Dado que r tiende a 0, el tramo 4 resultante en el plano $KG(j\omega)$ es de amplitud infinita y el ángulo cambia desde $+90^\circ$ hacia -90° en sentido opuesto al rodeo del polo en el origen es decir este es horario. Esto completa el camino cerrado C_2 en el plano $KG(j\omega)$ y está listo para ser analizado en lo referente a la estabilidad según el criterio de Nyquist.

Como se puede ver, para los valores analizados, al recorrer el camino C_2 desde $\omega: \infty^-$ hasta $\omega: \infty^+$ se producen 2 encierros horarios del punto crítico -1 , es decir $N=2$; como $KG(s)$ no tenía polos en el semiplano derecho del plano s , $P=0$; al ser $Z=N+P=2+0=2$, el sistema a lazo cerrado tendrá 2 polos en el semiplano derecho del plano s . Esto significa que la ecuación característica de lazo cerrado tendrá 2 raíces en el semiplano derecho del plano s y por lo tanto el sistema a lazo cerrado tendrá un comportamiento inestable.

Nota: Antes de terminar con el estudio de la estabilidad mediante los diagramas de Nyquist es interesante comentar que si se desea estudiar la estabilidad para $K < 0$, lo que se hace es agregar un signo $-$ a la función de

transferencia del lazo original. Hacer esto significa pasar a estudiar para $K > 0$ pero con el esquema realimentado siguiente

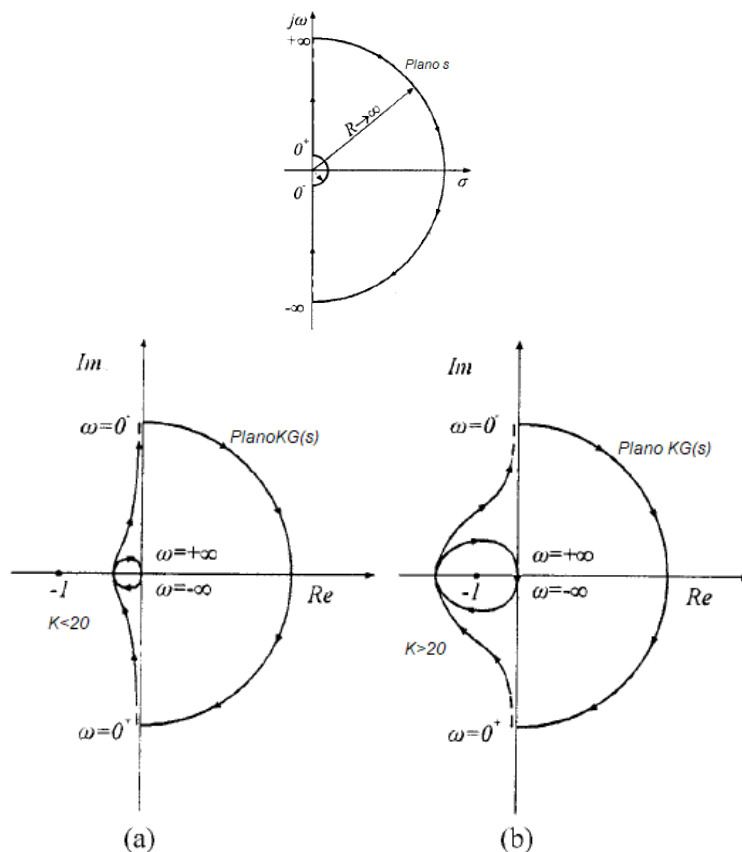


Lo explicado es lógico ya que el signo menos agregado cambia el signo (-) del sumador por el signo (+). Ahora la diferencia de retorno pasa a ser $F(s) = 1 - KG(s)$ entonces el punto crítico de estudio dejará de ser $s = -1 + j0$ para pasar a ser el punto $s = 1 + j0$ (tener presente que en este caso, los valores positivos obtenidos para K deben ser tomados como negativos).

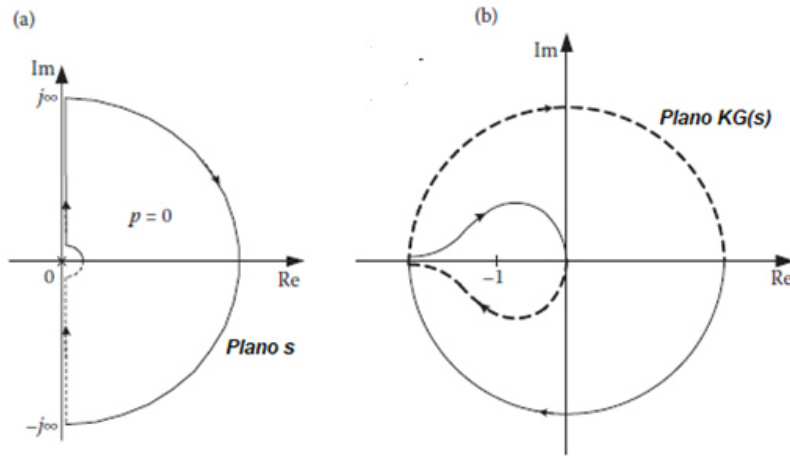
A continuación se presentan ejemplos con los bosquejos de las respectivas gráficas de Nyquist para el análisis de la estabilidad

Nota: en las gráficas de Nyquist genéricas, para interpretar la estabilidad, cuanto mayor es la ganancia K de la función de transferencia del lazo se debe considerar que el punto -1 se encuentra más próximo al origen.

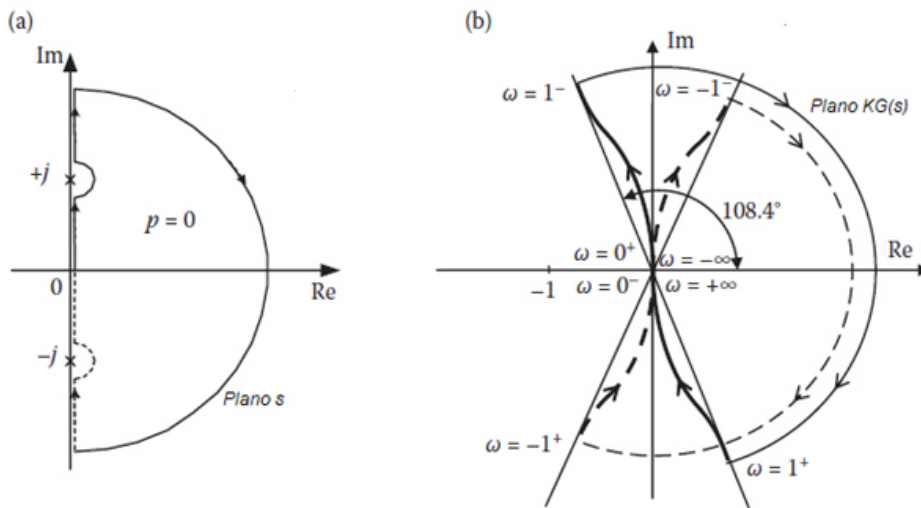
Ejemplo 1: $KG(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$ para $K > 0$ y con K crítico 20



Ejemplo 2: $KG(s) = \frac{K}{s^2 \cdot (\tau s + 1)}$ para $K > 0$ con $\tau > 0$

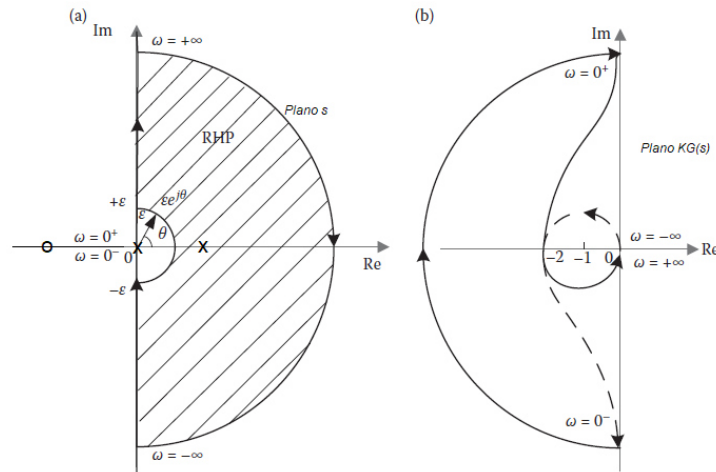


Ejemplo 3: $KG(s) = \frac{Ks(s+1)}{(s^2+1) \cdot (s+2)}$ para $K > 0$

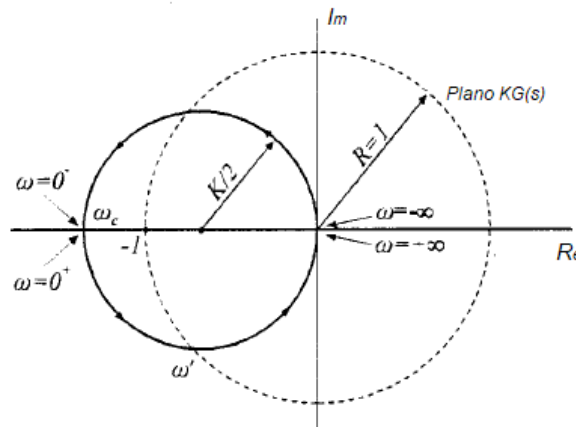


Ejemplo 4: función de transferencia de lazo con un polo en el origen y otro en el spd del plano s

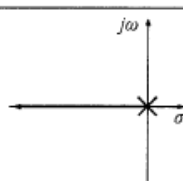
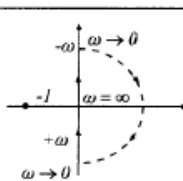
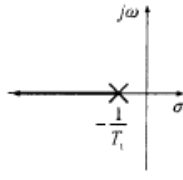
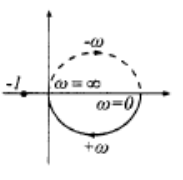
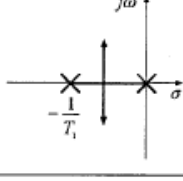
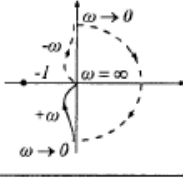
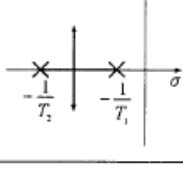
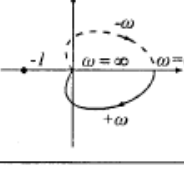
$$KG(s) = \frac{2(s+1)}{s(s-1)} \quad \text{Nyquist para } K=2$$

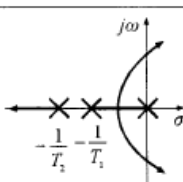
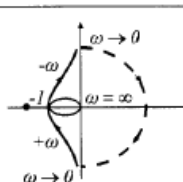
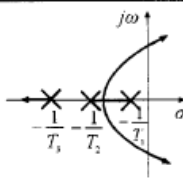
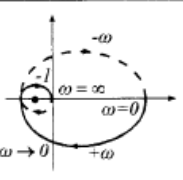
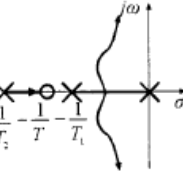
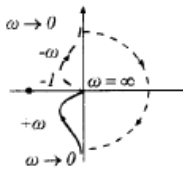
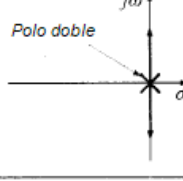
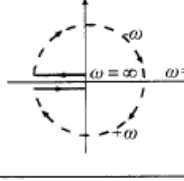


Ejemplo 5: función de transferencia de lazo inestable $KG(s) = \frac{K}{s-1}$, para $K > 0$ con K crítico 1



A continuación se presentan unas tablas con las funciones de transferencia de lazo típicas, los bosquejos de sus respectivos lugares de las raíces y los diagramas de Nyquist correspondientes. Queda para el lector practicar el análisis de la estabilidad correlacionando ambos métodos teniendo presente en los diagramas de Nyquist que cuanto mayor es la ganancia K debe considerar que el punto -1 se encuentra más próximo al origen.

$G(s)$	Lugar de las Raíces	Diagrama de Nyquist
$\frac{K}{s}$		
$\frac{K}{sT_1 + 1}$		
$\frac{K}{s(sT_1 + 1)}$		
$\frac{K}{(sT_1 + 1)(sT_2 + 1)}$		

$G(s)$	Lugar de las Raíces	Diagrama de Nyquist
$\frac{K}{s(sT_1 + 1)(sT_2 + 1)}$		
$\frac{K}{(sT_1 + 1)(sT_2 + 1)(sT_3 + 1)}$		
$\frac{K(sT + 1)}{s(sT_1 + 1)(sT_2 + 1)}$		
$\frac{K}{s^2}$		

$G(s)$	Lugar de las Raíces	Diagrama de Nyquist
$\frac{K}{s^2(sT_1+1)}$	<p>polo doble</p> <p>$-\frac{1}{T_1}$</p>	<p>$+1$</p> <p>-1</p> <p>$\omega = \infty$</p> <p>$+j\omega$</p> <p>$-j\omega$</p>
$\frac{K(sT+1)}{s^2(sT_1+1)}$ $T > T_1$	<p>polo doble</p> <p>$-\frac{1}{T_1}$</p> <p>$-\frac{1}{T}$</p>	<p>$+1$</p> <p>-1</p> <p>$\omega = \infty$</p> <p>$+j\omega$</p> <p>$-j\omega$</p>
$\frac{K}{s^3}$	<p>polo triple</p>	<p>$+1$</p> <p>-1</p> <p>$\omega = \infty$</p> <p>$+j\omega$</p> <p>$-j\omega$</p>
$\frac{K(sT+1)}{s^3}$	<p>polo triple</p> <p>$-\frac{1}{T}$</p>	<p>$+1$</p> <p>-1</p> <p>$\omega = \infty$</p> <p>$+j\omega$</p> <p>$-j\omega$</p>