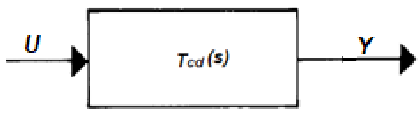
Efectos y Beneficios de una realimentación negativa

Efectos sobre la posición de polos y ceros

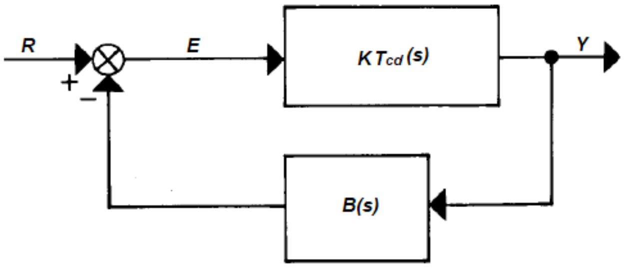
Antes de comenzar a tratar los importantes efectos que la realimentación introduce en el comportamiento de una planta, es interesante mostrar que pasa con los polos y ceros de un sistema cuando se le agrega una realimentación definiendo una nueva entrada al sistema. Dejar en claro esto servirá más adelante para simplificar algunas explicaciones.
Sea el sistema mostrado en la figura



La función de transferencia $T_{cd}(s)$ del sistema se puede escribir como el cociente de un polinomio numerador $Num_{Tcd}(s)$ y otro denominador $Den_{Tcd}(s)$

$$T_{cd}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Num_{Tcd}(s)}{Den_{Tcd}(s)}$$

Donde las raíces de $Num_{Tcd}(s)$ son los ceros y las raíces de $Den_{Tcd}(s)$ son los polos de T_{cd}(s).
Al configurar un lazo realimentado alrededor de $T_{cd}(s)$ con el agregado de una constante K que multiplica a $T_{cd}(s)$ y una red lineal dependiente de la frecuencia $B(s)$ en el camino de realimentación, la función de transferencia desde la nueva entrada R hasta la salida Y presenta polos cuya ubicación en el plano s dependen de la realimentación; esto se representa y analiza mediante la siguiente figura



Si se escriben a T_{cd} y B como cociente entre polinomio numerador y polinomio denominador: $T_{cd}(s) = \frac{Num_{Tcd}(s)}{Den_{Tcd}(s)}$ y $B(s) = \frac{Num_B(s)}{Den_B(s)}$ se tiene que la función de transferencia de lazo cerrado $M(s)=Y(s)/R(s)$ se escribe como

$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K\cdot T_{cd}(s)}{1+K\cdot T_{cd}(s)\cdot B(s)}=\frac{K\cdot\frac{Num_{Tcd}(s)}{Den_{Tcd}(s)}}{1+K\cdot\frac{Num_{Tcd}(s)}{Den_{Tcd}(s)}\cdot\frac{Num_B(s)}{den_B(s)}}$$

Que acomodando queda

$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K\cdot Num_{Tcd}(s)\cdot Den_B(s)}{Den_{Tcd}(s)\cdot Den_B(s)+K\cdot Num_{Tcd}(s)\cdot Num_B(s)}$$

Claramente:

- Realimentando y ajustando el valor de *K* se pueden ubicar los polos de lazo cerrado en el plano *S* y por lo tanto se pueden ajustar las características de comportamiento del sistema global.
- ***La realimentación no tiene influencia en la posición de los ceros*** y por lo tanto no modifica la ubicación de los ceros
- El sistema realimentado tendrá orden (máximo exponente de *s* en el polinomio denominador) dado por el producto de los órdenes de los polinomios denominador de $T_{cd}(s)$ y $B(s)$.
- Si $B(s)$=1, se ajusta la posición de los polos de lazo cerrado pero manteniendo el orden de $T_{cd}(s)$; los ceros de lazo cerrado serán solamente los de $T_{cd}(s)$.

El lugar de las raíces (LR)

"***El Lugar Geométrico de las Raíces***" es un método gráfico para estudiar las posiciones de las raíces de un polinomio cuando cambia algún parámetro del mismo. El LR tiene una aplicación directa en el estudio de los sistemas de control realimentados.

Para un planteo simplificado y sin pérdida de generalidad se considera el polinomio $P(s)$ con coeficientes reales de segundo orden igualado a 0 que sigue:

$$P(s)=as^2+bs+c=0$$

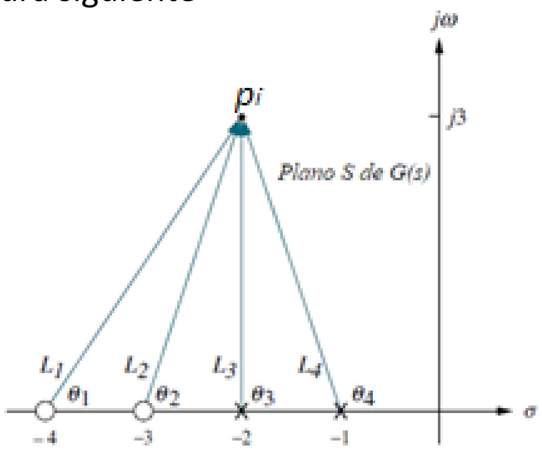
Se desea conocer la ubicación de las raíces cuando un parámetro, por ejemplo uno de los coeficientes, que se llamará ε, cambia en el intervalo $0\le\varepsilon<\infty$. El método consiste en acomodar algebraicamente la ecuación buscando la forma siguiente

$$-1=\varepsilon\cdot G(s)=\varepsilon\cdot\frac{Num_G(s)}{Den_G(s)}=\frac{ceros\ de\ G(s)}{polos\ de\ G(s)}$$

Esto es, $|\varepsilon \cdot G(s)|$=1 y ángulo de $\varepsilon \cdot G(s) = \pm 180°$ con $\varepsilon \geq 0$ esta situación es la que recibe el nombre de "***lugar de las raíces***" a secas.

El caso $-\infty < \varepsilon \leq 0$ recibe el nombre de "***lugar de las raíces complementario***" (en la práctica en este caso se considera la ecuación $1 = \varepsilon \cdot G(s)$ tomando nuevamente valores de $\varepsilon \geq 0$, la diferencia en el análisis se encuentra en que ahora el ángulo a cumplir por los polos y ceros de $\varepsilon \cdot G(s)$ es de ±360°. El lugar de las raíces para $-\infty < \varepsilon < \infty$ recibe el nombre de "***lugar de las raíces completo***".

La forma de trabajar es colocar en un plano *s* las raíces de $Num_G(s) = 0$ es decir ceros y las raíces de $Den_G(s) = 0$ es decir polos. El lugar de las raíces queda constituido por todos los puntos p_i del plano s en los que se cumpla que la sumatoria de los ángulos subtendido desde los ceros y polos de *G*(*s*) hacia ese punto de ±180°(2*l*+1) con *l*=0,±1,±2,….. esto se representa en la figura siguiente



Si en el punto p_i se cumple que $\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = \pm 180°(2l + 1)$ con *l*=0,±1,±2,….. entonces se dice que p_i pertenece al lugar de las raíces y por lo tanto para algún valor de ε, haciendo cumplir que $|\varepsilon \cdot G(s)|$=1, una raíz del polinomio se ubicará en p_i. El valor de ε en esa posición se lo encuentra haciendo cumplir según el grafico que

$$\varepsilon = \frac{1}{|G(s)|} = \frac{1}{\frac{\prod distancia\ desde\ ceros\ de\ G(s)\ hacia\ p_i}{\prod distancia\ desde\ polos\ G(s) hacia\ p_i}} = \frac{1}{\frac{L_1 L_2}{L_3 L_4}} = \frac{L_3 L_4}{L_1 L_2}$$

Para el polinomio *P*(s) citado, si se quiere estudiar las posibles raíces cuando cambia el parámetro *b* con *a*=*c*=1, al acomodar el polinomio según la forma $\varepsilon \cdot G(s) = -1$ (es decir $\varepsilon \equiv b$) resulta $G(s) = \frac{s}{s^2+1}$. En forma análoga se puede encontrar la *G*(*s*) para $\varepsilon \equiv c$ variable y *a*=*b*=1 resultando

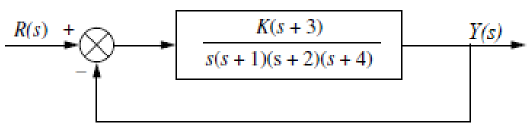
$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$. Para el caso a variable con *b*=*c*=1 resulta $G(s) = \frac{s^2}{s+1}$. En esta situación hay más ceros que polos y como se verá, esto complica la obtención del lugar. Para solucionarlo se define a $\varepsilon \equiv \frac{1}{a}$ con lo que resulta $G(s) = \frac{s+1}{s^2}$ y ya se puede continuar como antes con el trabajo.

Se dijo que este método tiene aplicación directa en los sistemas de control realimentados. Esto se puede visualizar en el esquema de realimentación típico ya que el polinomio denominador de la función de transferencia de lazo cerrado está dado por la diferencia de retorno *F*(*s*)= 1+*KG*(*s*) y para evaluar sus raíces se escribe 1+*KG*(*s*)=0. Se ve que cuando el parámetro variable es $K \equiv \varepsilon$ prácticamente está escrito lo que se necesita para graficar el LR. Resulta entonces la expresión $\varepsilon \cdot G(s) = -1$ con *K* como parámetro variable ε.

<u>Notas</u>:

- *G*(s) debe estar expresada como producto de factores y cada factor del numerador y denominador debe estar escrito en la forma polo-cero (el mayor exponente de *s* en cada factor debe ser igual a 1), caso contrario el valor que se obtiene para el parámetro variable no será el correcto.
- si se desea estudiar para variaciones de otro parámetro se debe operar algebraicamente con *G*(*s*) hasta acomodar la ecuación según a forma establecida buscando que ε sea igual al parámetro a estudiar.
- Se debe buscar una *G*(*s*) con mayor número de polos que ceros del modo que ya se explicó.

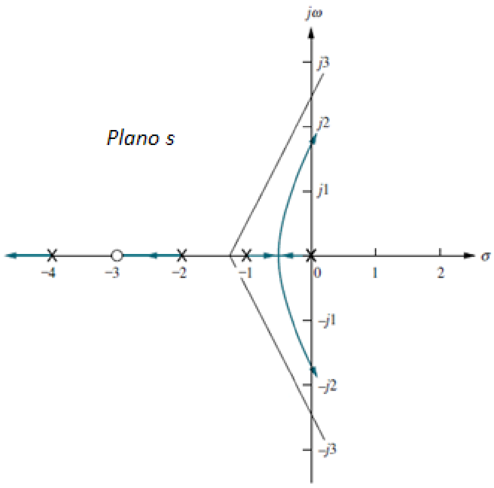
Ejemplo: sea el sistema de control dado por la figura siguiente



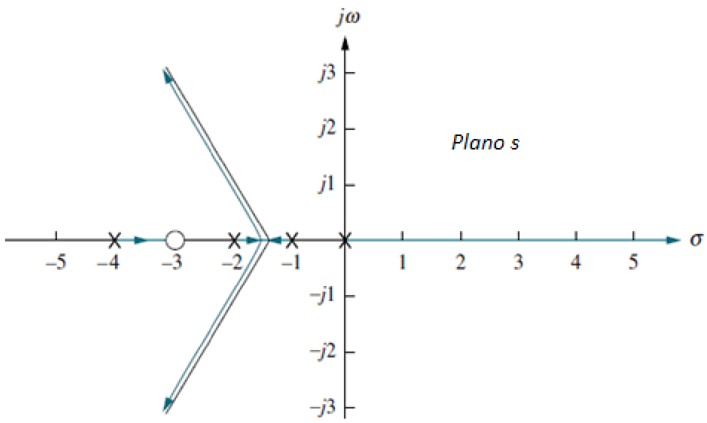
Resulta la siguiente expresión para construir el LR

$$\varepsilon \cdot \frac{(s+3)}{s \cdot (s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+4)} = -1$$

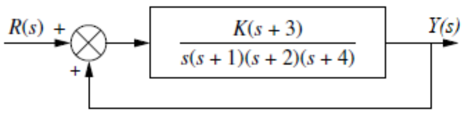
El LR con $\varepsilon \geq 0$ ($K \geq 0$) variable resulta lo que se muestra en la figura siguiente



Mientras que el lugar complementario $\varepsilon \leq 0$ ($K \leq 0$) resulta el de la figura siguiente



Nota: es destacable que de haber usado comparador con signo positivo para la señal realimentada como en la siguiente figura



el LR para $K \geq 0$ será igual al caso de comparador con resta para la señal realimentada pero analizado para $K \leq 0$.

Claramente, *mientras a lazo abierto los polos se ubican (y están fijos) en la posición que tienen en G(s), al realimentar se movilizan ocupando diferentes lugares del plano s según se ajusten los distintos parámetros que pertenecen al lazo de control del sistema.*

Existe un conjunto de reglas prácticas para la construcción del LR. A continuación se cita sin demostración las más importantes para el caso en que los puntos se ubican con un ángulo de $180°(2l+1)$ con l=0,±1,±2,.....

(la demostración de las mismas se las consigue en cualquier texto sobre sistemas de control):

Regla 1: el LR presenta tantas ramas como polos tiene $G(s)$ y cada rama comienza en los polos de $G(s)$ para $\varepsilon = 0$.

Regla 2: las ramas finalizan para $\varepsilon \rightarrow \infty$ en los ceros de $G(s)$. Si el exceso polo-cero (p-z) es 0 finalizan en los ceros finitos. Si el exceso polo-cero es q habrá q ramas que se dirigen asintóticamente hacia un cero en infinito con un ángulo entre la asíntota y el eje real de dado por $\varphi_{asin} = \frac{180° + k360°}{p-z}$ con k=0,1,2,.....,p-z-1 con (p>z). El origen de las asíntotas está dado por el segmento OA desde el origen con valor $OA = \frac{\sum(ubicación\ de\ polos) - \sum(ubicación\ de\ ceros)}{p-z}$.

Regla 3: el LR es simétrico con respecto al eje real

Regla 4: el eje real pertenece al lugar si a la derecha del punto analizado la suma de polos y ceros de $G(s)$ es impar.

Regla 5: las ramas salen del eje real en un punto donde ε con respecto a s tiene un máximo relativo. Las ramas Ingresan al eje real en un punto donde ε tiene un mínimo relativo. El ángulo con el que salen del eje real depende del número de ramas que desde allí salen: salen del eje real con un ángulo de 180°/a con respecto al eje real (a es el número de ramas que emergen del eje real).

Regla 6: si las ramas del lugar cruzan el eje imaginario, lo hacen en puntos donde se cumple la condición de ángulo.

Regla 7: si el exceso polo-cero es ≥ 2, la suma de la posición de los polos de lazo cerrado para todo valor de ε es una constante igual a la suma de las posiciones de los polos de $G(s)$.

Regla 8: los ángulos de salida y llegada a pares complejos conjugados de polos y ceros respectivamente se los determina haciendo cumplir la condición de ángulo: ±180°(2l+1) con l=0,±1,±2,..... en un punto infinitamente próximo al polo o cero en cuestión.

Nota: para construir el LR complementario, es decir cuando $K \cdot G(s) = 1$, tal como se puntualizó al comienzo, lo primero que se debe tener en cuenta es que los puntos que pertenecerán al lugar son aquellos puntos p_i del plano s en los que se cumpla que la sumatoria de los ángulos subtendido desde los ceros y polos de $G(s)$ hacia ese punto ahora es de 180°(2l) con l=0,±1,±2,….. además, por este cambio se ven modificadas las siguientes reglas:

Regla 2': las ramas finalizan para $\varepsilon \to \infty$ en los ceros de $G(s)$. Si el exceso polo-cero (p-z) es 0 finalizan en los ceros finitos. Si el exceso polo-cero es q habrá q ramas que se dirigen asintóticamente hacia un cero en infinito con un ángulo entre la asíntota y el eje real de dado por $\varphi_{asin} = \frac{k360°}{p-z}$ con k=0,1,2,…..,p-z-1 con (p>z). El origen de las asíntotas está dado por el segmento OA desde el origen con valor $OA = \frac{\sum(ubicación\ de\ polos) - \sum(ubicación\ de\ ceros)}{p-z}$.

Regla 4': el eje real pertenece al lugar si a la derecha del punto analizado la suma de polos y ceros reales de $G(s)$ es un numero par.

Regla 8': los ángulos de salida y llegada a pares complejos conjugados de polos y ceros respectivamente se los determina haciendo cumplir la condición de ángulo: 180°(2l) con l=0,±1,±2,….. en un punto infinitamente próximo al polo o cero en cuestión.

Algunas consideraciones cuando se reduce a un modelo Heq(s)

Se pueden citar las siguientes consideraciones muy útiles a la hora de construir el lugar de las raíces y obtener los polos y ceros de lazo cerrado cuando se efectuó al diagrama en bloques del sistema una reducción *Heq*(s).

- Los polos de *Heq*(s) son los ceros de la planta o camino directo que se ubiquen a la derecha del último bloque reducido.

- Los ceros de la función de transferencia de lazo cerrado son los ceros del camino directo. Tendrá tantos polos como sea el orden de la función de transferencia del camino directo.

- La función de transferencia del lazo tendrá como polos los de la función de transferencia del camino directo y como ceros los ceros de *Heq*(*s*).

Conclusiones:

- Cuando se construye la función de transferencia del lazo *T*(*s*), **los polos de la función de transferencia del camino directo NUNCA se deben cancelar con los ceros de *Heq*(*s*).**

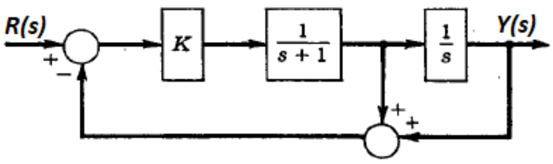
- Cuando se construye la función de transferencia del lazo *T*(*s*), todo cero del camino directo que se ubique a la derecha del último bloque que se reduce para obtener *Heq*(*s*) generará un polo de *Heq*(s) idéntico al cero del camino directo y por lo tanto **SI SE CANCELAN** entre sí.

El plano de lazo cerrado

"El plano de lazo cerrado es el plano s sobre el que se vuelca la información de polos y ceros de lazo cerrado para un determinado valor de ganancia".
Como se puntualizó, mediante el lugar de las raíces se puede determinar la posición que tendrán los polos de lazo cerrado cuando en el sistema realimentado cambia algún parámetro. Por otro lado se conoce que si la función de transferencia del camino directo se encuentra factorizada, los ceros de lazo cerrado son perfectamente conocidos ya que son los mismos que los del camino directo. Entonces, conocida la posición de los polos de lazo cerrado para una determinada ganancia a partir de un LR, para completar el conocimiento de la función de transferencia de lazo cerrado es necesario completarla agregando los ceros que "***correspondan***".
Se escribió entre comillas correspondan ya que como se puntualizó en el apartado anterior, cuando para construir el LR se recurrió a una reducción *Heq*(s) se debe prestar atención a algunas consideraciones ya que algunos ceros si se agregan al plano de lazo cerrado y otros no.

A continuación unos ejemplos servirán para dejar aclarado lo explicado. En los mismos se muestran el LR y el correspondiente plano de lazo cerrado

Ejemplo 1: Para el sistema de la figura

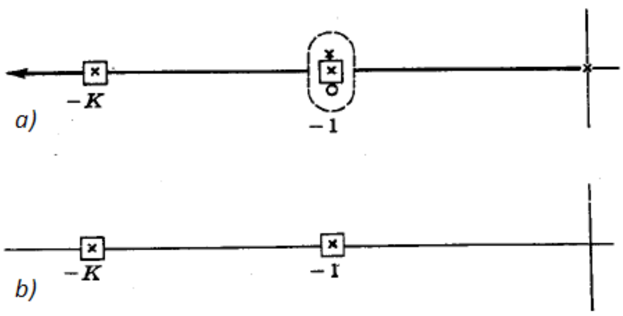


La transmitancia del camino directo T_{cd}(s) es: $T_{cd}(s) = K \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$

Mientras que *Heq*(*s*) resulta: $H_{eq}(s) = s + 1$

La función de transferencia del lazo *T*(s) resulta: $T(s) = K \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \cdot (s + 1\,)$

Según lo establecido, el polo en s=-1 de la T_{cd}(s) **no se debe cancelar** con el cero en s=-1 de *Heq*(*s*). Es decir, el polo en s=-1 queda fijado por el cero tal como se muestra en el LR de la parte *a*) de figura siguiente

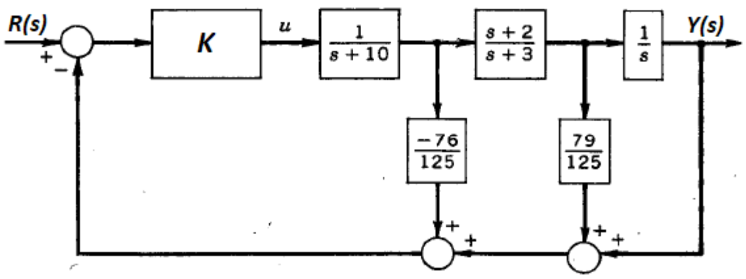


La función de transferencia de lazo cerrado y el plano de lazo cerrado tendrá para toda ganancia un polo en s=-1 y el otro polo se ubicará en algún punto sobre el eje real negativo según el valor que adopte la ganancia *K*. Esto se muestra en la parte *b*) de la figura que representa el "*plano de lazo cerrado del sistema*". La expresión de de la función de transferencia de lazo cerrado queda entonces:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + s(K+1) + K} = \frac{K}{(s+1)(s+K)}$$

Nota: Prestar atención que el cero en *s*=-1, a pesar de estar en el trazado del LR, luego no aparece en la función de lazo cerrado ya que no es un cero de la transmitancia del camino directo T_{cd}(s).

Ejemplo 2: sea el esquema en bloques de la siguiente figura



Para el mismo, mediante una reducción Heq(s) resultan las siguientes funciones:

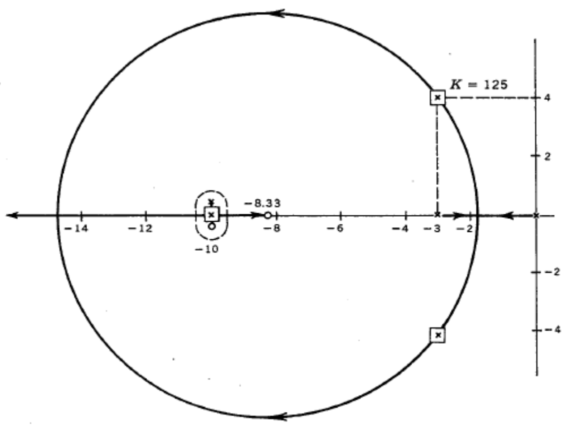
$$T_{cd}(s) = \frac{K \cdot (s+2)}{s \cdot (s+3) \cdot (s+10)}$$

$$H_{eq}(s) = \frac{3}{125} \cdot \frac{s^2 + 18.3s + 83.3}{s+2} = \frac{3}{125} \cdot \frac{(s+10)(s+8.33)}{s+2}$$

$$T(s) = K \cdot \frac{3}{125} \cdot \frac{(s+8.33)(s+10)}{s\,(s+3)(s+10)} = K' \cdot \frac{(s+8.33)(s+10)}{s\,(s+3)(s+10)}$$

Notar que en la expresión de la función de transferencia del lazo $T(s)$ directamente se canceló el cero de $T_{cd}(s)$ en s=-2 con el polo de $H_{eq}(s)$ en s=-2, mientras que el polo la $T_{cd}(s)$ en s=-10 no se canceló con el cero de $H_{eq}(s)$ en s=-10 tal como fue establecido para ambas situaciones.

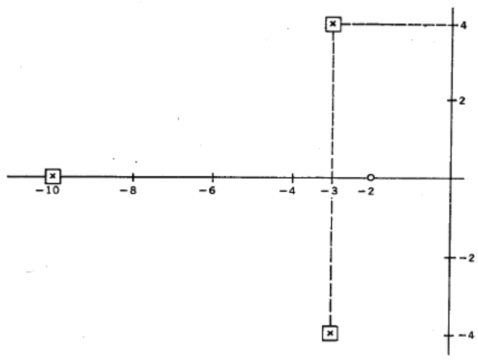
Esta última expresión esta lista para construir el LR considerando como parámetro variable a $K' = K \cdot \frac{3}{125}$. En la figura siguiente se muestra el LR resultante



Se destaca en el mismo lo siguiente:

- El polo en s=-10 queda fijado para toda ganancia y para la construcción del lugar es como si en s=-1 no existiera nada.
- Para K'= 3 correspondiente a K=125, los 2 polos restantes se ubican en $s_{1,2}$=-3±j4.

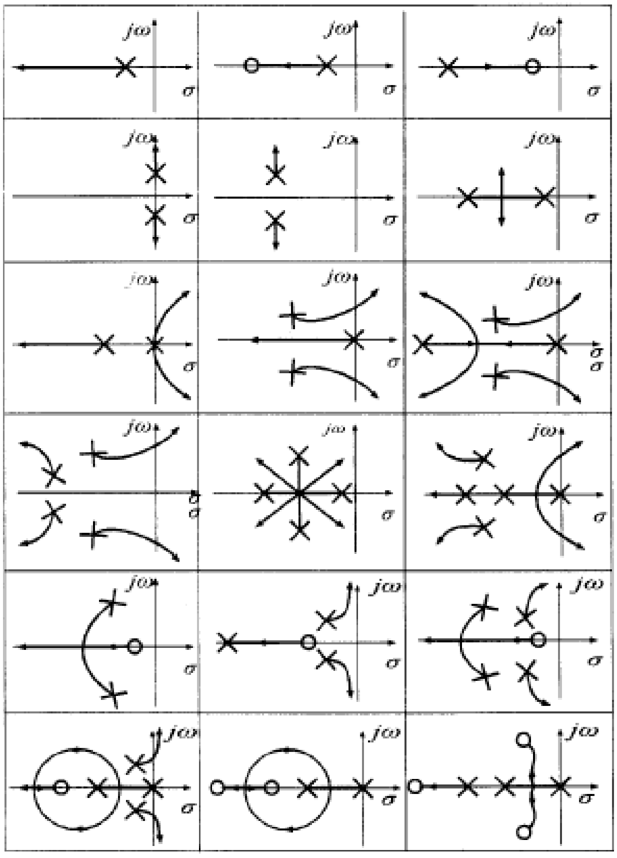
El plano de lazo cerrado correspondiente al ejercicio con *K*=125 es el mostrado en la figura siguiente



Función de transferencia de lazo cerrado para *K*=125 resulta:

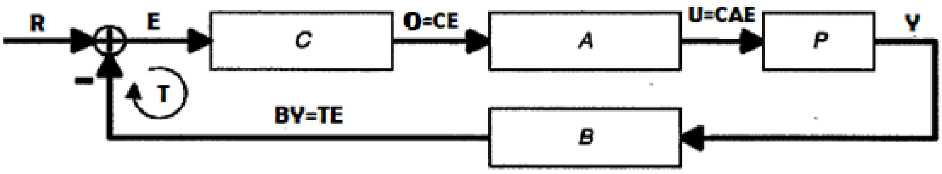
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{125 \cdot (s+2)}{(s+10) \cdot (s+3+j4) \cdot (s+3-j4)}$$

En la figura siguiente se muestran típicos LR que ocurren en los sistemas de control donde $K \cdot G(s) = -1$, para *K*≥0



Efecto sobre la función de transferencia de lazo cerrado

A partir de aquí, a excepción de situaciones específicas, se hará uso del diagrama general de realimentación presentado al comienzo y que por facilidad se reproduce a continuación



por simplicidad se escribe *A*, *B*, *C* y *P* pero se considerará siempre que todas son funciones de la frecuencia es decir *A*(*s*), *B*(*s*), *C*(*s*) y *P*(*s*).
La función de transferencia de lazo cerrado para el esquema mostrado en la figura es

$$M = \frac{Y}{R} = \frac{CAP}{1 + CAPB} = \frac{T_{CD}}{1 + T} = \frac{T_{CD}}{F}$$

Cuando la realimentación es fuerte ($|F| \gg 1$), como F=1+T, equivale a decir que T=$CAPB$ $\gg$1. Resulta de este modo que $M = \frac{Y}{R} = \frac{T_{CD}}{1+T} \approx \frac{CAP}{CAPB} = \frac{1}{B}$; claramente la función de transferencia de lazo cerrado se independiza del camino directo dependiendo exclusivamente de la red *B* (la función de transferencia del sistema de medición más lo que se tenga en el camino de realimentación). La conclusión es que si la realimentación es fuerte:

$$M = \frac{Y}{R} = \frac{T_{CD}}{F} \approx \frac{1}{B}$$

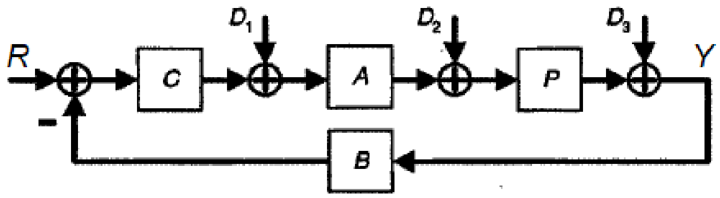
"Cuando la realimentación negativa es fuerte, la función de transferencia de lazo cerrado depende exclusivamente del camino de realimentación B el cual generalmente se puede construir con componentes precisos".

También se puede decir que "***una fuerte realimentación negativa tiene un efecto invariabilizante de la función de transferencia de lazo cerrado"*** ya que esta solo depende de los elementos externos agregados para construir el sistema realimentado. Esta afirmación se corroborará más adelante cuando se trate el tema sensibilidad.

Si en el sistema realimentado el comportamiento deseado es del tipo llamado “servo” o de “seguimiento” (la salida copia el valor que se le indica en la referencia *R*), haciendo *B*=1 y aplicando una fuerte realimentación negativa se consigue el efecto deseado.

<u>Efecto sobre las perturbaciones</u>

Las perturbaciones son señales que ingresan al sistema en la planta y/o actuador y causan que a la salida aparezcan señales no deseadas. Estas señales generalmente son caracterizadas por su densidad espectral (componentes de Fourier que las componen) y la influencia de las mismas puede por lo tanto ser estudiadas mediante una respuesta en frecuencia de la transferencia desde la perturbación hasta la salida.
La figura siguiente representa 3 posibles perturbaciones D_1, D_2 y D_3 que ingresan al lazo realimentado en distintos puntos



Como se considera un sistema lineal, a la salida se tendrá la suma de las contribuciones de cada una de las señales que ingresan al sistema. Resulta la siguiente expresión

$$Y = \frac{D_1 \cdot AP + D_2 \cdot P + D_3}{F} + R \cdot \frac{CAP}{F}$$

Al agregar la realimentación, en la medida que $|F| \gg 1$ todas las perturbaciones se verán disminuidas a la salida en el valor $|F|$ con respecto al valor que tendrían sin realimentar $(D_1 \cdot AP + D_2 \cdot P + D_3)$. El segundo sumando corresponde a la señal a seguir *R* que, como se vio en el apartado anterior si $|F| \gg 1$, la salida vale aproximadamente $R \cdot \frac{1}{B}$. Por supuesto, si la realimentación es positiva $|F|<1$ el efecto es opuesto: genera a la salida una amplificación de las perturbaciones.

Si en el sistema realimentado el comportamiento deseado es del tipo llamado “regulador” (mantener la salida en el valor de referencia *R* a pesar de las perturbaciones), una fuerte realimentación proporciona el efecto deseado.

Efecto sobre la sensibilidad a variaciones en el camino directo

Estudio de la sensibilidad generalmente es usado para cuantificar el efecto indeseable de las desviaciones de algunos parámetros de su valor nominal en una función de transferencia. ***La sensibilidad no es una función de transferencia*** aunque tiene un aspecto similar ya que puede depender de la variable *s* de Laplace. En el control es de particular interés estudiar la sensibilidad de la función de lazo cerrado *M=Y(s)/R(s)* con respecto a variaciones de los parámetros de la planta o más aún como se verá, de los elementos que constituyen el camino directo del sistema realimentado.

Definición: ***Sensibilidad se refiere a la variación porcentual de alguna cantidad o función específica Z del sistema con respecto a la variación porcentual de un parámetro α.***

Matemáticamente se escribe:

$$S_{\alpha}^{Z} = \frac{\%cambio\ en\ Z}{\%cambio\ en\ \alpha} = \frac{\frac{\Delta Z}{Z}\cdot 100}{\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\cdot 100}$$

De este modo, una sensibilidad pequeña de la función *Z* con respecto a α, significa que las variaciones de α tendrán poca influencia en *Z*.

Si las variaciones son ***pequeñas*** se puede escribir

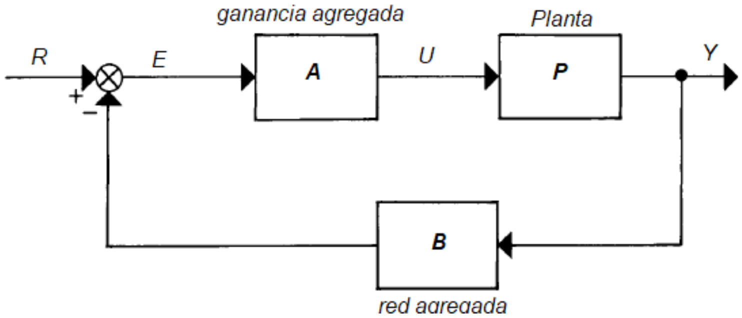
$$S_{\alpha}^{Z} = \frac{\%cambio\ en\ Z}{\%cambio\ en\ \alpha} = \frac{\frac{\Delta Z}{Z}}{\frac{\Delta\alpha}{\alpha}} = \frac{\frac{dZ}{Z}}{\frac{d\alpha}{\alpha}} = \frac{\alpha}{Z}\cdot\frac{dZ}{d\alpha}$$

Cuando la función *Z* es la función de transferencia de lazo cerrado *M* y α es la planta *P* se puede demostrar que la S_P^M es la siguiente

$$S_P^M = \frac{\%cambio\ en\ M}{\%cambio\ en\ P} = \frac{P}{M}\cdot\frac{dM}{dP} = \frac{1}{1+CAPB} = \frac{1}{1+T} = \frac{1}{F} \qquad \text{con} \qquad M = \frac{CAP}{1+CAPB}$$

Es interesante destacar y se puede demostrar que si se desea evaluar la sensibilidad de la función de lazo cerrado ante cambios en otro elemento del camino directo, el resultado es el mismo, es decir $S_C^M = S_A^M = \frac{1}{F}$.

Ejemplo: para el sistema de la figura



Se tiene que $\frac{\Delta P}{P}$ =1% y las siguientes situaciones:

a) Planta P sin realimentar
b) Realimentando agregando *A* y *B* con *APB*=9
c) Realimentando agregando *A* y *B* con *APB*=99

a) Sin realimentar: la ganancia es *P* y la sensibilidad $S_P^{Y/U} = \frac{P}{P} \cdot 1 = 1$. Por lo tanto, como la planta *P* cambia un 1%, el cambio en la función de transferencia *M* también es del 1%
b) Realimentando: $M = \frac{AP}{1+APB}$ y con *APB*=9 la variación porcentual de la función de lazo cerrado $\frac{\Delta M}{M} = 1\% \cdot \frac{1}{1+9} = 0.1\%$
c) Realimentando: $M = \frac{AP}{1+APB}$ y con *APB*=99, $\frac{\Delta M}{M} = 1\% \cdot \frac{1}{1+99} = 0.01\%$

Se comprueba que la realimentación accionó reduciendo la sensibilidad en la función de lazo cerrado ante cambios en la planta; además, en la medida que más grande es $|F|$, más insensible a cambios en la planta será la función de transferencia de lazo cerrado.
Pero conseguir la insensibilidad respecto a cambios en *P* tiene un costo:

a) El primero es que al realimentar también se modificó la ganancia entrada-salida en la misma cantidad: $M = \frac{AP}{1+CAPB}$. Esto no es problema porque si se necesita mantener la ganancia que tenía la planta, simplemente se debe multiplicar por afuera del lazo con una ganancia de valor $\frac{1+APB}{A} = \frac{1}{A} + PB$ para restaurar el valor original. Además si la ganancia A agregada dentro del lazo cumple que A≫1 la ganancia será aproximadamente *PB.*

b) El segundo es que reducir la sensibilidad ante cambios en el camino directo trae como consecuencia un incremento de la sensibilidad ante variaciones en el camino de retorno *B*. Se puede demostrar que si se evalúa la sensibilidad de la función de lazo cerrado ante cambios en *B* resulta la siguiente ecuación

$$S_B^M = -\frac{T}{F} = -\frac{T}{1+T}$$

Por lo tanto para que la función de lazo cerrado sea insensible a cambios en el camino directo se necesita T≫1 y esta situación hace que $S_B^M \approx -1$.

Se puede decir entonces que
"***la realimentación transfirió la sensibilidad del camino directo al camino de realimentación"*** y como la red del camino de realimentación forma parte del diseño desarrollado, se desprende que el ingeniero debe prestar la debida atención a la calidad de estos componentes.

Conclusiones hasta aquí:

- La realimentación no tiene influencia en la sensibilidad de elementos que no están incluidos en el lazo.
- Si la realimentación negativa es grande, la sensibilidad de *M*(*s*) ante ***pequeños*** cambios en el camino directo es chica.
- La sensibilidad ante ***pequeños*** cambios en cualquier parámetro del camino directo tiene el mismo valor: $S_P^M = S_C^M = S_A^M = \frac{1}{F}$.
- La realimentación negativa sirve para reducir la sensibilidad de la función de transferencia de lazo cerrado ante ***pequeños*** cambios en los elementos del camino directo transfiriendo la sensibilidad al camino de retorno (*B*).

Cuando la planta o algún elemento del camino directo (*C*, *A* o *P*) sufre pequeñas variaciones en algún parámetro *q* (por temperatura, presión, tensiones, etc.), esta dependencia se puede valorar evaluando la sensibilidad del elemento al parámetro en cuestión. Por ejemplo si cambia un parámetro *q* de la planta *P* se busca la expresión que relaciona *P* con *q* y se evalúa S_q^P. Si además se desea evaluar el efecto del cambio del parámetro de la planta en cuestión (*q*) en la función de transferencia de lazo cerrado *M*, simplemente se evalúan por separado S_P^M y S_q^P . La sensibilidad total se calcula como $S_q^M = S_P^M \cdot S_q^P$.

Otra forma de calcular la sensibilidad se tiene cuando la expresión, por ejemplo de la función de transferencia de lazo cerrado *M,* se expresa como el cociente entre un polinomio numerador *N*(*s*,*q*) y un polinomio denominador *D*(*s*,*q*) en donde un parámetro *q* varía; es decir se tiene $M(s,q) = \frac{N(s,q)}{D(s,q)}$; la sensitividad de *M* con respecto a *q* resulta $S_q^M = S_q^N - S_q^D$.

<u>Nota:</u> todas las sensibilidades que se calculen son funciones de la frecuencia y como tal son pasibles de graficarlas, por ejemplo mediante diagramas de Bode. En particular es de suma importancia en el estudio de los sistemas realimentados la sensibilidad estudiada de la función de lazo cerrado con respecto a variaciones del camino directo. Es por este motivo que recibe el nombre particular de "FUNCIÓN SENSIBILIDAD" y se la denota simplemente como $S(s) = \frac{1}{1+T(s)}$. Prestar atención que la función sensibilidad es el inverso de la diferencia de retorno, es decir cuando la diferencia de retorno es grande (realimentación fuerte) la sensibilidad a variaciones en el camino directo es pequeña.

La siguiente figura presenta una típica función sensibilidad graficada como una respuesta en frecuencia mediante Bode.