El lugar de las raíces (LR)

"***El Lugar Geométrico de las Raíces***" es un método gráfico para estudiar las posiciones de las raíces de un polinomio cuando cambia algún parámetro del mismo.El LR tiene una aplicación directa en el estudio de los sistemas de control realimentados.

Para un planteo simplificado y sin pérdida de generalidad se considera el polinomio *P*(*s*) con coeficientes reales de segundo orden igualado a 0 que sigue:

$$P(s) = as^2 + bs + c = 0$$

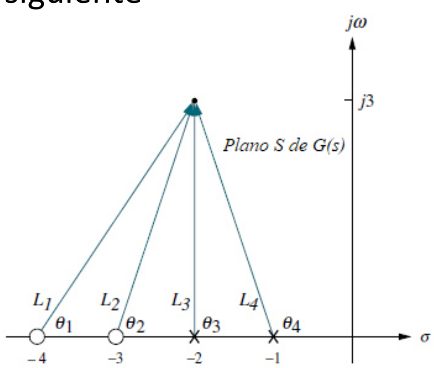
Se desea conocer la ubicación de las raíces cuando un parámetro, por ejemplo uno de los coeficientes, que se llamará ε, cambia en el intervalo $0 \leq \varepsilon \leq \infty$. El método consiste en acomodar algebraicamente la ecuación buscando la forma siguiente

$$-1 = \varepsilon \cdot G(s) = \varepsilon \cdot \frac{Num_G(s)}{Den_G(s)} = \frac{ceros\ de\ G(s)}{polos\ de\ G(s)}$$

Esto es, $|\varepsilon \cdot G(s)|$=1 y ángulo de $\varepsilon \cdot G(s) = \pm 180°$ con $\varepsilon \geq 0$ esta situación es la que recibe el nombre de "***lugar de las raíces***" a secas.

El caso $\varepsilon \leq 0$ recibe el nombre de "***lugar de las raíces complementario***"(en la práctica en este caso se considera la ecuación $1 = \varepsilon \cdot G(s)$ tomando nuevamente valores de $\varepsilon \geq 0$, la diferencia en el análisis se encuentra en que ahora el ángulo a cumplir por $\varepsilon \cdot G(s)$ es ±360°). El lugar de las raíces para $-\infty \leq \varepsilon \leq \infty$ recibe el nombre de "***lugar de las raíces completo***".

La forma de trabajar es colocar en un plano *s* las raíces de $Num_G(s) = 0$ es decir ceros y las raíces de $Den_G(s) = 0$ es decir polos. El lugar de las raíces queda constituido por todos los puntos p_i del plano s en los que se cumpla que la sumatoria de los ángulos subtendido desde los ceros y polos de *G*(*s*) hacia ese punto de ±180°(2*l*+1) con *l*=0,±1,±2,….. esto se representa en la figura siguiente



Si en el punto*p_i* se cumple que $\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = \pm 180°(2l + 1)$con *l*=0,±1,±2,….. entonces se dice que p_i pertenece al lugar de las raíces y por lo tanto para algún valor de ε, haciendo cumplir que $|\varepsilon \cdot G(s)|$=1, una raíz del polinomio se ubicará en p_i. El valor de ε en esa posición se lo encuentra haciendo cumplir según el grafico que

$$\varepsilon = \frac{1}{|H(s)|} = \frac{1}{\frac{\prod distancia\ desde\ ceros\ hacia\ p_i}{\prod distancia\ desde\ polos\ hacia\ p_i}} = \frac{1}{\frac{L_1 L_2}{L_3 L_4}} = \frac{L_3 L_4}{L_1 L_2}$$

Para el polinomio *P*(s) citado, si se quiere estudiar las posibles raíces cuando cambia el parámetro *b* con *a*=*c*=1, al acomodar el polinomio según la forma $\varepsilon \cdot G(s) = -1$ (es decir $\varepsilon \equiv b$) resulta $G(s) = \frac{s}{s^2+1}$. En forma análoga se puede encontrar la *G*(*s*) para $\varepsilon \equiv c$ variable y *a*=*b*=1 resultando $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$. Para el caso a variable con *b*=*c*=1 resulta $G(s) = \frac{s^2}{s+1}$. En esta situación hay más ceros que polos y como se verá, esto complica la obtención del lugar. Para solucionarlo se define a $\varepsilon \equiv \frac{1}{a}$ con lo que resulta $G(s) = \frac{s+1}{s^2}$ y ya se puede continuar como antes con el trabajo.

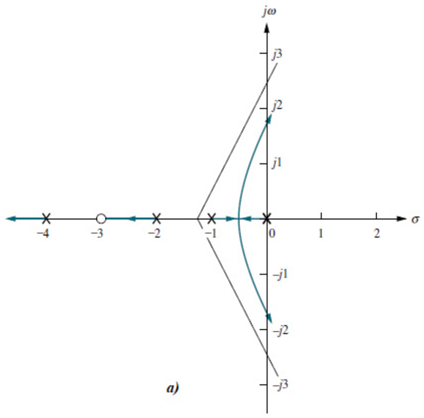
Notas:

- *G*(s) debe estar expresada como producto de factores y cada factor del numerador y denominador debe estar escrito en la forma polo-cero, caso contrario el valor que se obtiene para el parámetro variable no será el correcto.
- si se desea estudiar para variaciones de otro parámetro se debe operar algebraicamente con *G*(*s*) hasta acomodar la ecuación según a forma establecida buscando que ε sea igual al parámetro a estudiar.
- Se debe buscar una *G*(*s*) con mayor número de polos que ceros del modo que ya se explicó.

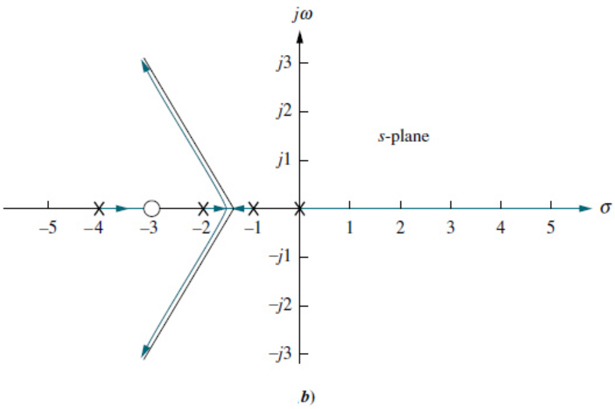
La siguiente expresión representa la ecuación acomodada para aplicar el lugar de las raíces proveniente de un polinomio *P*(*s*) cuando se quiere conocer la posible ubicación en el plano *s* de las raíces cuando el parámetro variable es ε :

$$\varepsilon \cdot \frac{(s+3)}{s \cdot (s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+4)} = -1$$

El LR con ε≥0 (*K*≥0) variable resulta lo que se muestra en la figura siguiente



Mientras que el lugar complementario $\varepsilon \leq 0$ ($K \leq 0$) resulta el de la figura siguiente



Existe un conjunto de reglas prácticas para la construcción del LR. A continuación se cita sin demostración las más importantes para el caso en que los puntos se ubican con un ángulo de $180°(2l+1)$con$l$=0,±1,±2,….. (la demostración de las mismas se las consigue en cualquier texto sobre sistemas de control):

Regla 1: el LR presenta tantas ramas como polos tiene $G(s)$ y cada rama comienza en los polos de $G(s)$ para $\varepsilon = 0$.

Regla 2: las ramas finalizan para $\varepsilon \rightarrow \infty$en los ceros de $G(s)$. Si el exceso polo-cero (p-z) es 0 finalizan en los ceros finitos. Si el exceso polo-cero es q habrá q ramas que se dirigen asintóticamente hacia un cero en infinito con un ángulo entre la asíntota y el eje real de dado por$\varphi_{asin} = \frac{180°+k360°}{p-z}$ con k=0,1,2,…..,p-z-1. El origen de las asíntotas está dado por el segmento OA desde el origen cuyo valor es $OA = \frac{\sum(ubicación\ de\ polos)-\sum(ubicación\ de\ ceros)}{p-z}$.

Regla 3: el LR es simétrico con respecto al eje real

Regla 4: el eje real pertenece al lugar si a la derecha del punto analizado existe una suma par de polos y ceros.

Regla 5: las ramas salen del eje real en un punto donde ε con respecto a *s* tiene un máximo relativo. Las ramas Ingresan al eje real en un punto donde ε tiene un mínimo relativo. El ángulo con el que salen del eje real depende del número de ramas que desde allí salen: salen del eje real con un ángulo de 180°/a con respecto al eje real (a es el número de ramas que emergen del eje real).

Regla 6: si las ramas del lugar cruzan el eje imaginario, lo hacen en puntos donde se cumple la condición de ángulo.

Regla 7: si el exceso polo-cero es ≥ 2, la suma de la posición de los polos de lazo cerrado para todo valor de ε es una constante igual a la suma de las posiciones de los polos de $G(s)$.

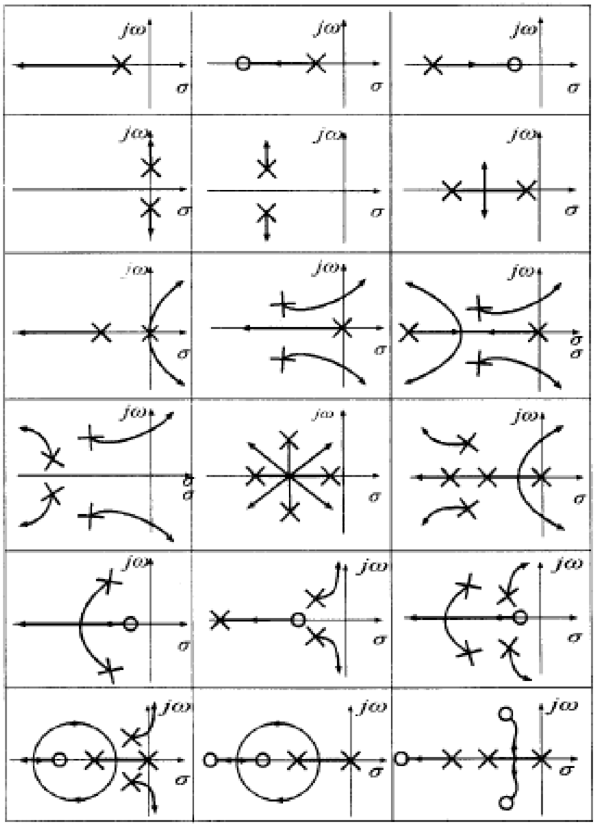
Regla 8: los ángulos de salida y llegada a pares complejos conjugados de polos y ceros respectivamente se los determina haciendo cumplir la condición de ángulo en un punto infinitamente próximo al polo o cero en cuestión.

Nota: para construir el LR complementario, es decir cuando $K \cdot G(s) = 1$, las reglas que se modifican, ajustándose a que la sumatoria de ángulos ya no debe ser "$180° + k.360°$", sino "$k.360°$".

Por ejemplo:
* Un punto sobre el eje real pertenece al LGR complementario si a su derecha existe una cantidad par de ceros + polos.

* La cantidad y punto de "origen" de las asíntotas no cambia, pero el ángulo de las mismas sí resulta modificado: $\varphi_{asin} = \frac{k360°}{p-z}$ con respecto al LGR directo.

En la figura siguiente se muestran típicos LR para$K \cdot G(s) = -1$, con$K$≥0



Mg. Ing. Rubén del V. Fadel.