# SISTEMAS DE CONTROL LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

## SU RESPUESTA EN EL TIEMPO

## MEDIANTE EL METODO CLASICO Y MODERNO

## CATEDRA DE SISTEMAS DE CONTROL I

**Ing. Bader Raúl HASSAN**

**AÑO 2003**

**EDITADO POR LA ASOCIACION COOPERADORA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGIA**

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGIA**

INDICE_

## RESPUESTA EN EL TIEMPO:

En esta parte nos abocamos al análisis de los sistemas de control. Ya vimos el modo de representar la planta y el sistema de lazo cerrado. Ahora nos interesa en cómo las variables de estado están asociadas con los sistemas de lazo cerrado, para una variedad de entradas y/o condiciones iniciales.

Sabemos que la función de transferencia de lazo cerrado es

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \qquad R(s) \longrightarrow \boxed{T(s)} \longrightarrow Y(s)$$

Conociendo la entrada en el tiempo, conocemos su transformada. Y conociendo la función de transferencia de lazo cerrado, podemos hallar la transformada de Laplace de la salida.

$$Y(s) = T(s)\,.\,R(s) \qquad \textbf{(1)}$$

Aquí nos queda encontrar y(t). Esto se obtiene hallando la transformada inversa de Laplace de **(1)**.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\,Y(s) = \mathcal{L}^{-1}\,T(s)\,.\,R(s) \qquad \textbf{(2)}$$

Trabajaremos con el método de fracciones parciales, para ello supondremos que la función de transferencia de lazo cerrado T(s), ya está en la forma factoreada. Para hallar los residuos, emplearemos el método gráfico. Los métodos gráficos son una herramienta poderosa en la ingeniería de control ya que la exactitud obtenida es por lo general compatible con las exactitudes con las que se describen las plantas que se desean estudiar.

## MÉTODO DE EXPANSIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Todo el desarrollo será para sistemas de control lineales e invariantes en el tiempo, donde el número de polos es mayor que el número de ceros, entonces

$p > z$ donde $p$ = número de polos de la planta.
$z$ = número de ceros de la planta.

Trabajar en el dominio de frecuencias complejas, representa dos pasos. En primer lugar pasar la ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo de orden **n** al plano **S**; donde se encuentra la transformada de Laplace de la salida. Como vivimos en el dominio temporal, es necesario poner la respuesta en el dominio del tiempo. Aquí vamos a resolver el problema de hallar la función temporal a partir de la representación en el plano complejo.

La suposición básica aquí, es que la función cuya transformada inversa de Laplace que se busca, está dada como una relación de polinomios en la variable compleja **S**, donde el denominador de esta función aparece en forma factoreada, sin polos múltiples.

A modo de discusión supongamos un caso particular.

$$Y(s) = \frac{2.5\,(S+2)}{S\,(S+5)\,(S+1)} \qquad \textbf{(3)}$$

En primer lugar expandimos la función (3), en fracciones parciales.

$$Y(s) = \frac{2.5\,(S+2)}{S\,(S+5)\,(S+1)} = \frac{R_1}{S} + \frac{R_2}{(S+5)} + \frac{R_3}{(S+1)} \qquad \textbf{(4)}$$

Para hallar el valor de los residuos, representamos la función (3) en el plano complejo. Fig.(1)

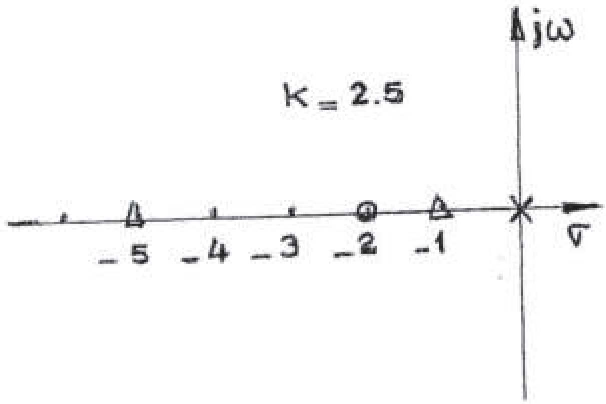



Fig.(1): Representación de la expresión (3).

El cálculo de los residuos, es algo que concierne a la posición de los distintos polos y ceros, con respecto al polo al cual se calcula dicho residuo. Es necesario observar que el polo en el origen es la entrada escalón unitario al sistema, ya que un sistema en lazo cerrado, no puede tener un polo en el origen, ya que sería inestable. Además, es necesario puntualizar que sólo los polos poseen residuos. Los polos y ceros hacen en conjunto al valor y al ángulo del residuo.

## CÁLCULO DEL RESIDUO RESPECTO AL POLO EN EL ORIGEN

En este caso el cálculo gráfico del residuo es como sigue.

$$R = \frac{K \cdot \prod_{i=1}^{Z} \text{distancia de los ceros al polo considerado.}}{\prod_{i=1}^{P} \text{distancia de los polos restantes al polo considerado.}} \qquad (5)$$

Siendo **K,** ganancia en el camino directo.

Entonces de lo expuesto, sale lo siguiente.

$$R_{\lrcorner\!\ulcorner} = \frac{2{,}5 \times (2)}{(1) \times (5)} = 1$$

**SIGNO DEL RESIDUO.** Para determinar el signo del residuo, imaginemos que estamos ubicados en el polo respecto al cual consideramos el residuo. Determinamos la siguiente regla: Si a la derecha hay un número par de polos y ceros, o no hay nada, entonces el residuo es positivo. Por el contrario, si hay un número impar entre ceros y polos entonces el residuo tendrá signo negativo.

**Cálculo del residuo para el polo S = -1**

$$R_{(-1)} = -\frac{2{,}5\ .\ (1)}{(1)\ .\ (4)} = -\frac{2{,}5}{4} = -\ 0{,}625$$

el signo será negativo, ya que a la derecha del polo considerado hay un solo polo (impar).

**Cálculo del residuo en el polo en S = -5**

El signo será negativo, ya que a la derecha del mismo, hay dos polos y un cero (impar)

$$R_{(-5)} = -\frac{2{,}5\ .\ (3)}{(5)\ .\ (4)} = -\frac{3}{8} = -\ 0{,}375$$

Ahora la ecuación (4), queda así

$$Y(s) = \frac{1}{S} - \frac{0{,}625}{S+1} - \frac{0{,}375}{S+5} \qquad \textbf{(5)}$$

Para hallar y(t), debemos hallar la antitransformada en (5), en ambos miembros.

Entonces finalmente tendremos lo siguiente.

$$y(t) = 1 - 0{,}625\ .\ e^{-t} - 0{,}375\ .\ e^{-5t} \qquad \textbf{(6)}$$

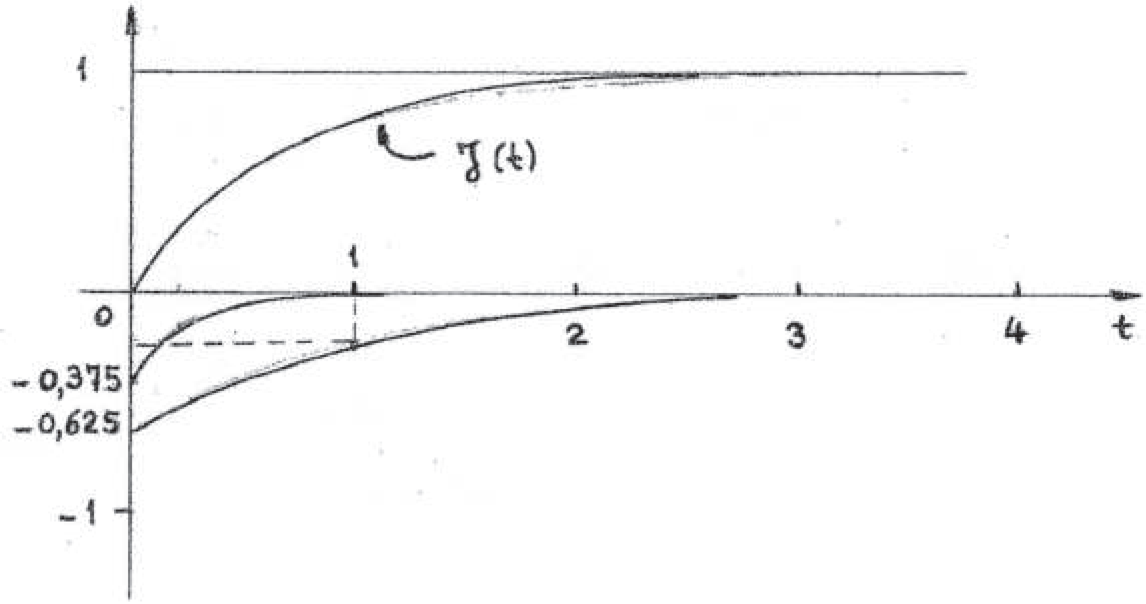



Fig.(2): Representación de y(t)

**Consideremos** un sistema con polos complejos conjugados, con un cero.

$$Y(s) = \frac{16 \,.\, (S + 5)}{(S + 10) \,.\, [(S + 2)^2 + 2^2] \,.\, S} \qquad \textbf{(7)}$$

Donde $R(s) = \frac{1}{S}$ ; transformada del escalón unitario.

Primer paso: Expandimos en fracciones parciales.

$$Y(s) = \frac{16 \,.\, (S + 5)}{(S + 10) \,.\, [(S + 2)^2 + 2^2]} = \frac{R_r}{S} + \frac{R(-10)}{(S + 10)} + \frac{R_{pc}}{(S + 2)^2 \;\; 2^2}$$

Segundo paso: Representamos la función Y(s), en el plano complejo.

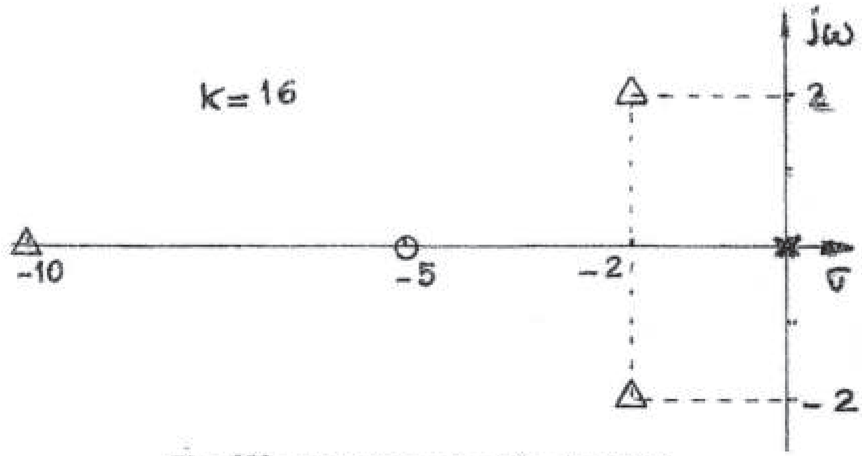



Fig.(3): Representación de Y(s).

Tercer paso: Resolución gráfica de los residuos.

Residuo con respecto al polo en el origen (entrada escalón)

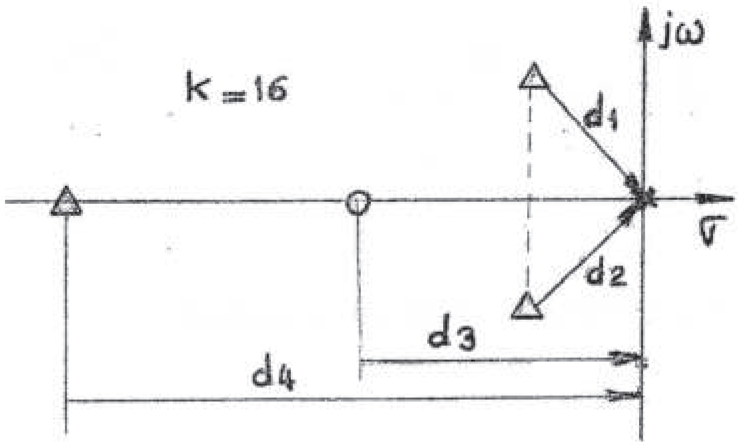



Fig.(4): Cálculo gráfico del residuo respecto al polo en el origen.

$d_1 = d_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2{,}83$

$d_3 = 5 \quad ; \quad d_4 = 10$

$$R_{\Gamma} = \frac{16\,.\,(5)}{(\sqrt{8}\,)^2\,.\,10} = \frac{16\,.\,5}{8\,.\,10} = 1$$

$\boxed{R_{\sqcap} = 1}$ su signo es positivo.

Residuo respecto al polo en S = -10.

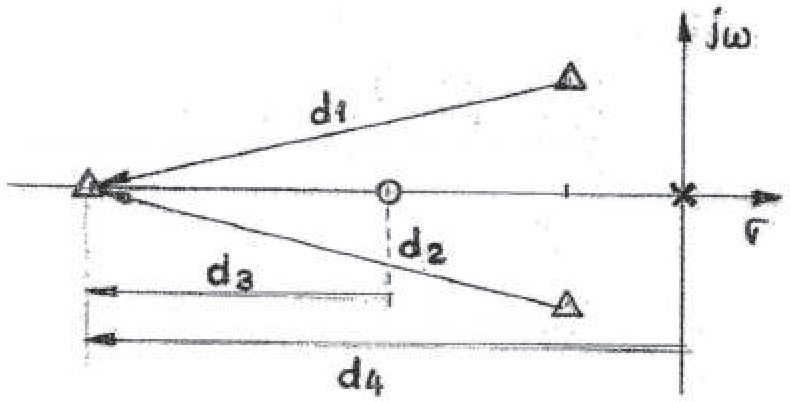



Fig.(5): Cálculo gráfico del residuo respecto al polo en S = -10.

$$R_{(-10)} = \frac{16 \,.\, d_3}{d_1 .\, d_2 .\, d_4} = \frac{16 \,.\, 5}{(\sqrt{70})^2 \,.\, 10} = 0{,}1143$$

$$d_1 = d_2 = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{70} = 8{,}37$$

$$\boxed{R_{-10} = 0{,}1143}$$

**Cálculo del residuo respecto a los polos complejos.** El módulo del residuo, se hace calculando el doble del residuo respecto a uno de los polos complejos, ya que los residuos son complejos conjugados.

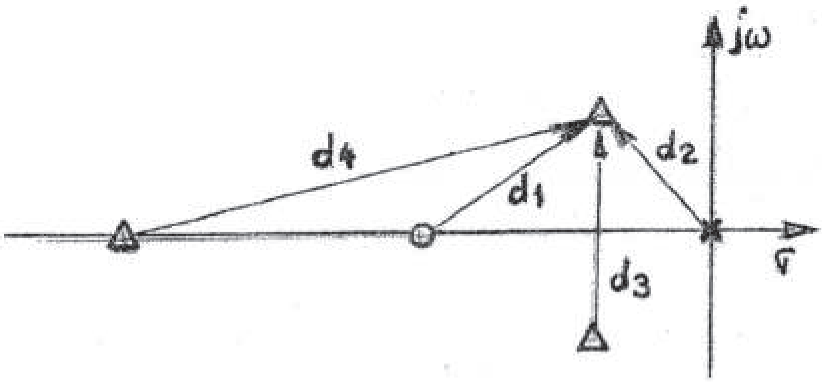
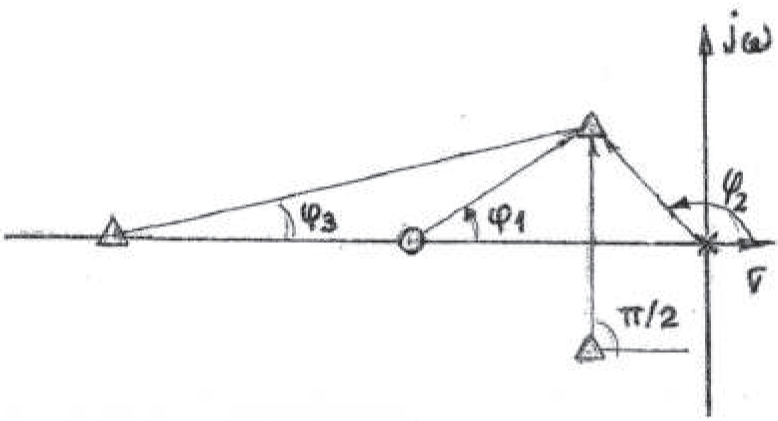



Fig.(6): Cálculo del residuo con respecto a los polos complejos conjugados.

$$R_{pc} = +2 \cdot \frac{16 \cdot \sqrt{3^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{8^2 + 2^2} \cdot (2+2)} = + \frac{8 \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{68}} = +1{,}24$$

$$\boxed{R_{pc} = +1{,}24}$$

Ahora calculemos el ángulo correspondiente a ese residuo.




$$\varphi_1 = tg^{-1}\, \frac{2}{3} = 33{,}7^{\circ}$$

$$\varphi_2 = 180^{\circ} - tg^{-1}\, \frac{2}{2} = 135^{\circ}$$

$$\varphi_3 = tg^{-1}\, \frac{2}{8} = 14^{\circ}$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 = 33{,}7^{\circ} - 135^{\circ} - 14^{\circ} =$$

(Aquí faltó restar el ángulo recto)

$$-101{,}3^{\circ} - 14^{\circ} = -101{,}3^{\circ} - 14^{\circ} = -\cancel{115{,}3^{\circ}}$$

$$\boxed{\varphi = -115{,}3^{\circ} = -2{,}71 \text{ rad.}}$$

phi= -205,3° = -3,58rad

Entonces la expansión en fracciones parciales será

-1,12.S -1,18

Este numerador, normalmente contiene un coeficiente de primer orden y uno de orden cero.

$$Y(s) = \frac{1}{S} + \frac{0{,}1143}{S+10} - \frac{\cancel{1{,}24}}{[(S+2)^2 + 2^2]}$$

La respuesta temporal será

-3,58rad

$$\boxed{y(t) = 1 + 0{,}1143 \cdot e^{-10 \cdot t} + 1{,}24 \cdot e^{-2\,t} \cdot \overset{\text{cos}}{\cancel{\text{sen}}}\,(2 \cdot t \cancel{- 2{,}71\ \text{rad}})} \qquad \textbf{(8)}$$

**EJERCICIOS**

**1)** Halle la respuesta en el tiempo para las siguientes funciones.

$$Y(s) = \frac{3 \cdot (S+4)}{(S+1) \cdot (S+2) \cdot (S+6)} \qquad \textbf{(a)}$$

$$Y(s) = \frac{12 \cdot (S+3)}{(S+2)^2 \cdot [(S+3)^2 + 3)^2]} \qquad \textbf{(b)}$$

Cuáles son las entradas en **a** y **b.**

**2)** Ahora resuelva los mismos ejercicios suponiendo que la entrada es el escalón unitario.

**RESPUESTA EN EL TIMPO PARA UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN A UNA ENTRADA ESCALÓN**

Como sabemos la respuesta transitoria de un sistema dinámico lineal, se mide en base a su respuesta a una entrada escalón unitario.

Consideremos en primer término el siguiente sistema de primer orden.

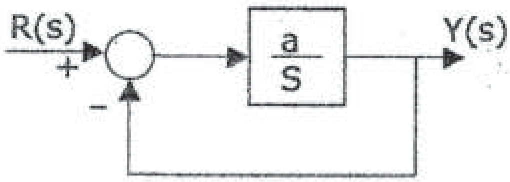


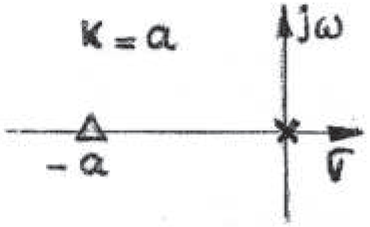

Fig.(6): Sistema de primer orden.

La función de transferencia de lazo cerrado será

$$T(s) = \frac{a}{S + a} \qquad \text{donde} \qquad a > 0$$

si la entrada es el escalón unitario, entonces

$$R(s) = \frac{1}{S}$$




como $T(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)}$

de ahí $\quad Y(s) = R(s) \,.\, T(s) = \dfrac{a}{S \,.\, (S + a)}$ **(9)**

La expansión en fracciones parciales será

$$Y(s) = \frac{1}{S} - \frac{1}{S + a}$$

La respuesta en el tiempo será

$y(t) = 1 - e^{-a.t}$ **(10)** para todo $t \geq 0$

Esta respuesta la representamos en la Fig.(7)

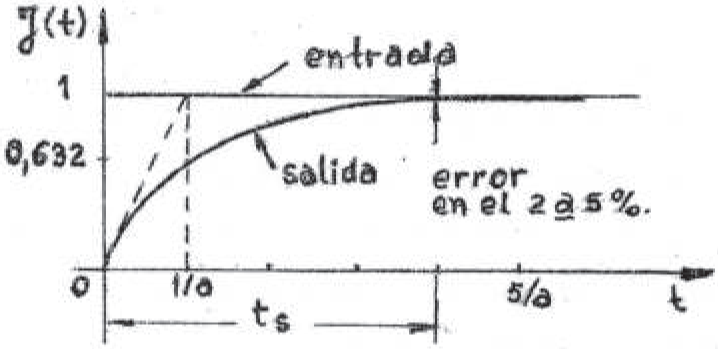



Fig.(7): Respuesta al escalón de un sistema de primer orden.

La pendiente en el origen es

y(0) = a

La salida es una exponencial que crece desde cero, que es su valor inicial, a su valor final **1**. Podemos observar que si la salida creciera siguiendo la pendiente en el origen, interceptaría o alcanzaría el valor final en un tiempo $t = 1/a$ Este valor 1/a es la constante de tiempo del sistema $\tau$.

Entonces

$$\tau = \frac{1}{a} \qquad \textbf{(11)}$$

Sin duda que la constante de tiempo, depende fundamentalmente de la posición del polo de lazo cerrado.

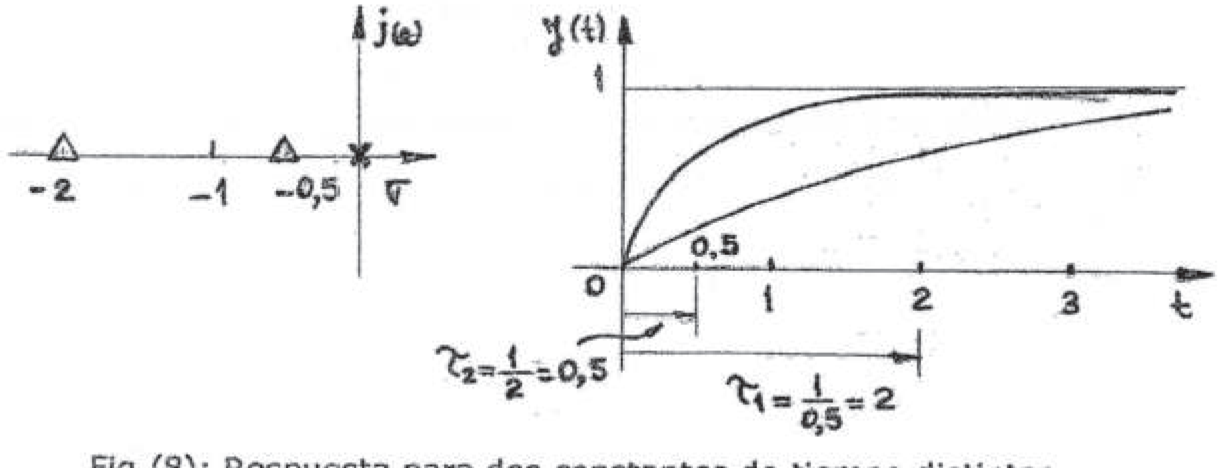



Fig.(8): Respuesta para dos constantes de tiempo distintas.

Vemos en la Fig.(8), que si el sistema presenta un polo de lazo cerrado muy cercano al origen, su respuesta en el tiempo es lenta y se hace más rápida a medida que el polo se aleja del origen, en el eje real.

Otra forma de caracterizar al sistema de primer orden es en base al denominado tiempo de establecimiento $t_s$. El tiempo de establecimiento se define como el tiempo que tarda la respuesta del sistema en alcanzar por última vez el valor que está al 2 ó al 5% del valor final. Fig.(9)

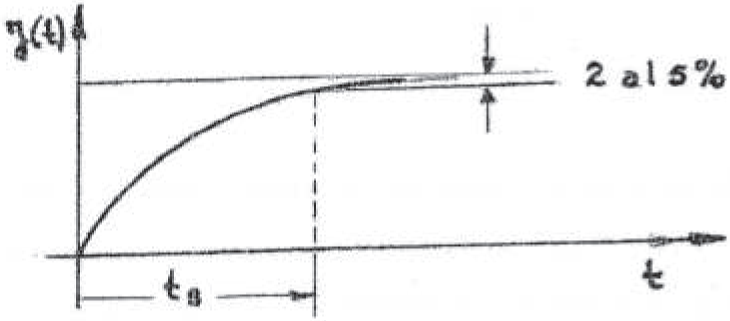



Fig.(9): Tiempo de establecimiento.

El valor del 2%, es alcanzado en un tiempo $t_s = 4\,\tau = 4/a$ De ahí que el tiempo de establecimiento, es una medida de la rapidez del sistema. Puede verse en la Fig.(8), que ha medida que el polo de lazo cerrado se aleja del origen, tanto menor es el tiempo de establecimiento.

Debe considerarse también la respuesta en estado estacionario de este tipo de sistema, es decir, la respuesta del sistema en estado estacionario, es decir cuando $t \rightarrow \infty$. Vemos en la Fig.(8), que a medida que $t \rightarrow \infty$, la salida y(t), tiende al valor de la entrada u(t). Es decir

$y(\infty) = r(\infty)$ ; siendo $r(t) = u(t)$

## VALORES QUE CARACTERIZAN A LA RESPUESTA TRANSITORIA
(De un sistema de Segundo Orden)

Si tenemos el siguiente sistema de segundo orden

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2} \qquad \textbf{(1)}$$

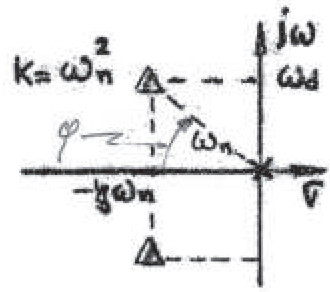



Fig.(1): Sistema de segundo orden subamortiguado con una entrada escalón.

Tomamos un sistema de segundo orden, aun cuando el tratamiento es para sistemas de orden general.

La respuesta al escalón del sistema (1), es como sigue.

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \text{sen}\,(\omega_d \cdot t + \varphi) \qquad \textbf{(2)}$$

La respuesta tiene dos componentes, el primero es un término constante, que es el valor hacia el cual tiende cuando $t \rightarrow \infty$, que es el valor **1**.

El término restante es un valor que tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \text{sen}\,(\omega_d \cdot t + \varphi) \;;$$

este término se denomina transitorio, y es propio de los sistemas físicos que tienen almacenadores de energía.

Así es que estos sistemas no responden de inmediato a una entrada determinada, sino crecen con una mayor o menor velocidad hasta llegar al valor definitivo (si el sistema es estable). Todo ese tiempo que tarda el sistema desde el arranque hasta que llega al valor final se denomina "estado o régimen transitorio".

El desempeño de un sistema de control se estudia en base a la respuesta transitoria a una entrada escalón unitario, ya que es fácil generarla y muy drástica. Es decir, si responde bien a una entrada escalón, responderá bien a cualquier entrada.

Sin duda que las condiciones iniciales del sistema condicionan la forma de la respuesta transitoria a una entrada escalón unitario. Para comparar las respuestas transitorias de diversos sistemas, se lo hace con la suposición que los mismos están normalmente con las condiciones iniciales nulas, y por lo tanto todas sus derivadas cero.

Ya dijimos que los sistemas que almacenan energía no pueden responder instantáneamente, de modo que al ser sometidos a entradas o perturbaciones presentan respuestas transitorias. Lo que se desea es que el estado transitorio presente oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estacionario. De hecho que al hablar de oscilaciones, suponemos $0 < \zeta < 1$ que es el caso subamortiguado.

Sin duda que el diseñador de un sistema de control debe tener muy en claro qué característica transitoria debe presentar el sistema a una entrada escalón unitario.

Los valores deseados son dados en el tiempo y determinan un conjunto de valores que hacen a la velocidad de respuesta y a la estabilidad del sistema.

Como ya dijimos se especificará las características de respuesta transitoria del sistema a una entrada escalón unitario, en condiciones de subamortiguamiento, $0 < \zeta < 1$.

Sea la siguiente curva de respuesta.

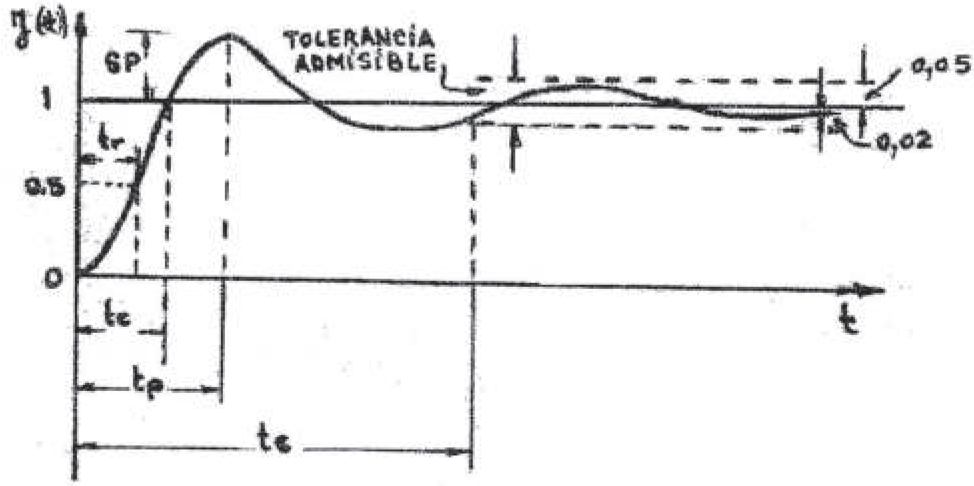



Fig.(2): Curva de respuesta al escalón unitario. Con las especificaciones de velocidad de respuesta y estabilidad.

## Especificaciones de respuesta transitoria.

### 1. Tiempo de retardo, $t_r$.

Es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar la mitad del valor final por primera vez.

### 2. Tiempo de crecimiento, $t_c$.

Es el tiempo requerido para que la respuesta vaya del 10% al 90%, del 5% al 95%, o del 0% al 100% de su valor final. Para sistemas de segundo orden subamortiguados se utiliza normalmente el tiempo de crecimiento de 0% al 100%. Para sistemas sobreamortiguados se usa generalmente el tiempo de crecimiento del 10% al 90%.

### 3. Tiempo de pico, $t_p$.

Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreimpulso.

**4. Sobrepico máximo, $S_p$.**

Es el valor de pico máximo de la curva de respuesta medido desde la unidad. Si el valor final estabilizado de la respuesta difiere de la unidad, se suele utilizar el sobreimpulso porcentual máximo. Que se define así

$$\text{Sobreimpulso porcentual máximo} = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% \qquad \mathbf{(3)}$$

Es necesario recordar que la magnitud del sobreimpulso (porcentual) máximo indica la estabilidad relativa del sistema.

**5. Tiempo de establecimiento, $t_s$.**

Es el que la curva de respuesta requiere para alcanzar y mantenerse en un rango alrededor del valor final con una magnitud especificada por el porcentaje absoluto del valor final (se toma el 2% al 5%). El tiempo de establecimiento está relacionado con la constante de tiempo mayor del sistema de control. El criterio para fijar el porcentaje de error a utilizar depende de los objetivos de diseño del sistema en cuestión.

Estas especificaciones así dadas, válidas en el dominio del tiempo, son muy importantes, pues la mayoría de los sistemas de control son sistemas en el dominio del tiempo, y deben presentar respuestas temporales aceptables. Esto significa que de ser necesario, un sistema de control debe ser modificado hasta que su respuesta transitoria sea satisfactoria. En realidad cuando se especifican todos los parámetros ya definidos en el tiempo, queda determinada la forma de la curva de respuesta al escalón unitario, como se ve en la Fig.(3)

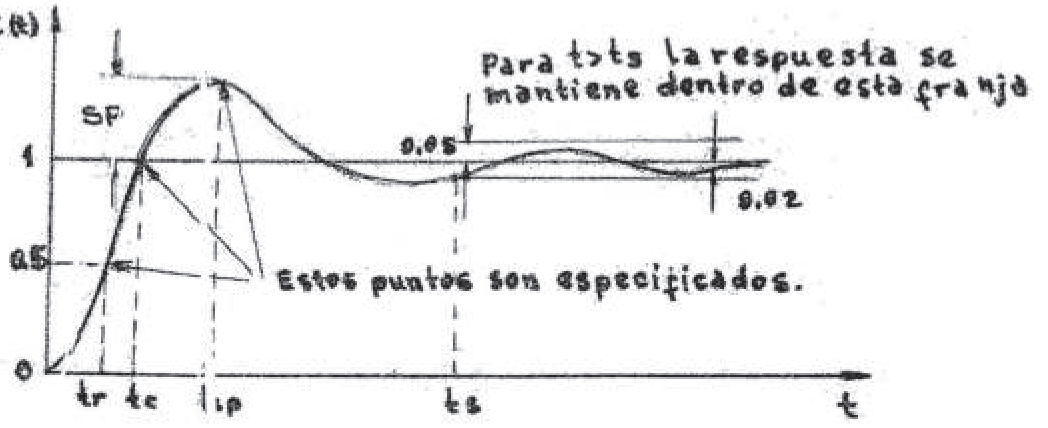
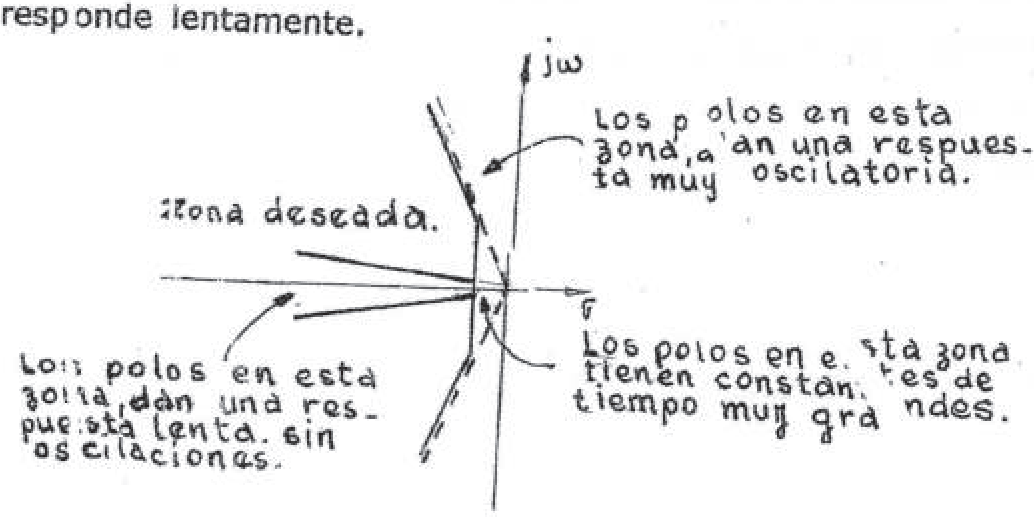



Fig.(3): Parámetros de respuesta transitoria.

Puede verse que no todas las especificaciones han de corresponder a un caso determinado. Por ejemplo, para un sistema sobreamortiguado no se aplican los términos tiempo de pico y sobreimpulso máximo.

**PARÁMETROS DE RESPUESTA TRANSITORIA.** Un sistema de control debe tener como requisito fundamental su rapidez de respuesta y un adecuado amortiguamiento (incluso en algunas aplicaciones no se tolera ninguna oscilación) Generalmente un sistema con una deseable respuesta transitoria es aquel que tiene polos complejos conjugados, con una relación de amortiguamiento entre 0,4 y 0,8. Ya que valores pequeños de $\zeta$ ($\zeta$ < 0,4) producen un excesivo sobreimpulso en la respuesta transitoria. Mientras que un sistema con un valor grande de $\zeta$ ($\zeta$ > 0,8) responde lentamente.



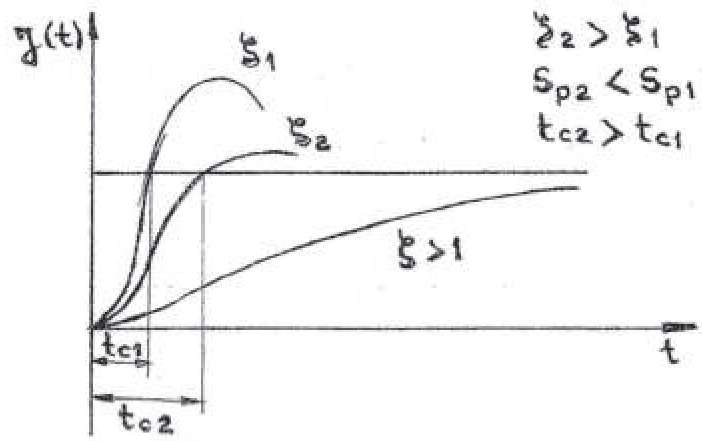



Fig.(4): Aquí se observa que a menor sobrepico hay mayor tiempo de crecimiento. Y a menor $t_c$ el sobrepico es indeseable.

En la Fig.(4) se observa que la magnitud del sobreimpulso máximo y el tiempo de crecimiento están en conflicto ente sí. En otras palabras, no se puede lograr un sobreimpulso máximo y un tiempo de crecimiento pequeños al mismo tiempo. Si uno de ellos se hace pequeño, el otro se hará grande necesariamente.

**ESPECIFICACIONES DE RESPUESTA TRANSITORIA PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN.** En lo que sigue determinaremos los valores de los parámetros que hacen a la respuesta transitoria y de la estabilidad. Dichos valores se expresarán en términos de $\zeta$ y $\omega_n$. Y suponiendo que el sistema es subamortiguado.

**Tiempo de crecimiento $t_c$:** Ya que el sistema es subamortiguado, tomaremos $t_c$; como el tiempo en el que la salida alcanza por primera vez el valor de la unidad.

Para $\quad t = t_c$

$$Y(t_r) = 1 = 1 - \frac{e^{-\zeta\, \omega_n\, t_c}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega_d \,.\, t_c + \varphi) \qquad \textbf{(4)}$$

Como $e^{-\zeta\, \omega_n\, t_c} \neq 0$, de la ecuación (4) se obtiene la siguiente expresión

$\text{sen}\,(\omega_d \,.\, t_c + \varphi) = 0$

esto es así si se cumple que

$\omega_d \,.\, t_c + \varphi = \Pi$

de donde

$$t_c = \frac{\Pi - \varphi}{\omega_d} \qquad \textbf{(5)}$$

donde $\varphi$ se define en la Fig.(4)

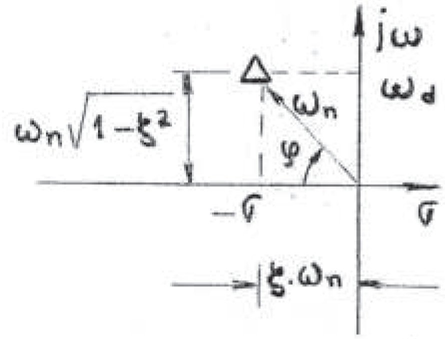
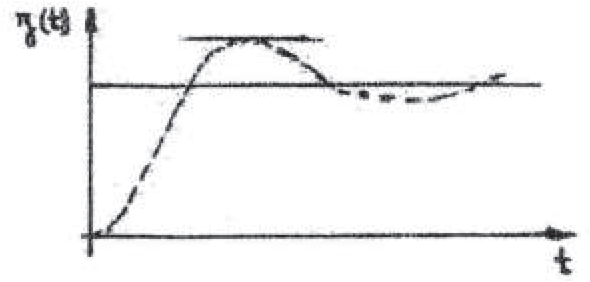



Fig.(4): Definición del ángulo $\varphi$.

**Cálculo del tiempo de pico $t_p$:** en relación a la ecuación.

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \,.\, \text{sen}\,(\omega_d \,.\, t + \varphi)$$

Como el tiempo de pico es el tiempo donde se produce el primer máximo de la función.




En este punto el valor de la derivada es cero.

Por ello la derivada de la salida y(t), puede calcularse de la siguiente forma.

Como el sistema es lineal, al aplicar en la entrada la derivada del escalón, la salida será la derivada de y(t)

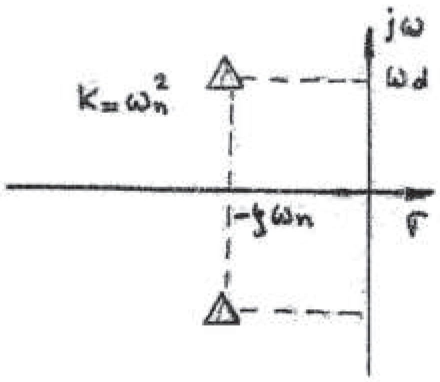
La derivada del escalón es el impulso.

$$\frac{d\ 1(t)}{d\ t} = \text{impulso unitario} = \delta(t) = 1$$

La transformada de Laplace del impulso unitario es

$$\mathcal{L}\ \delta(t) = 1$$

Siendo la transformada del impulso **1**. En el cálculo gráfico de la respuesta




La forma de la respuesta en el tiempo, tiene la forma siguiente.

$$y(t) = 2 \cdot R_{pc} \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \text{sen}\ \omega_d \cdot t \qquad \textbf{(6)}$$

Siendo $R_{pc}$, el residuo correspondiente al polo complejo. Como la entrada tiene una transformada de Laplace igual a **1**, no hay polos en el origen, de modo que sólo hay un residuo que es el doble del residuo respecto a uno de los polos complejos, ya que los residuos son complejos conjugados.

El valor del residuo será como sigue.

$$R_{pc} = \frac{K}{2\,\omega_d} \quad ; \quad \text{entonces}$$

$$\frac{d(y_r(t))}{dt} = \cancel{2} \cdot \frac{\omega_n^2}{\cancel{2}\,\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\,\omega_n\,t} \cdot \operatorname{sen}\omega_d \cdot t = y_1(t)$$

Para $t = t_p$, esta función, que es la derivada de la respuesta al escalón, debe ser cero.

$$y_1(t_p) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\,\omega_n\,t_p} \cdot \operatorname{sen}\omega_d \cdot t_p = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

sólo puede ser cero el último factor, entonces

$\operatorname{sen}\omega_d \cdot t_p = 0$, para eso debe ser

$$\omega_d \cdot t_p = \Pi \;\therefore\; t_p = \frac{\Pi}{\omega_d} \qquad \textbf{(8)}$$

Llevando **(8)** a la expresión (4), se tiene el valor máximo.

$$y_m = y(t_p) = 1 - \frac{e^{-\zeta\,\omega_n\,t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \operatorname{sen}(\omega_d \cdot t + \varphi)\,, \qquad \textbf{(9)}$$

Podemos calcular entonces el sobreimpulso máximo.

**Sobreimpulso máximo, $M_p$:** el sobreimpulso máximo se produce en el tiempo de pico, o sea, cuando

$$t = t_p = \frac{\Pi}{\omega_d}$$

Así, de la ecuación (9), se tiene

$$S_p = y(t_p) - 1 = 1 - \frac{e^{-\zeta\, \omega_n\, t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \,.\, \text{sen}\,(\omega_d \,.\, t_p + \varphi) - 1$$

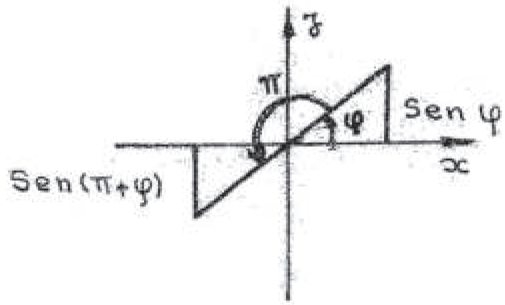
lo que

$$S_p = -\frac{e^{-\zeta \,.\omega_n \,.\, \Pi/\omega_d}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \,.\, \text{sen}\,(\omega_d \,.\, \frac{\Pi}{\omega_d} + \varphi)$$

$$= -\frac{e^{-\zeta \,.\, \omega_n \,.\, \Pi/\omega_n .\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \,.\, \text{sen}\,(\Pi + \varphi)$$

$$= -\frac{e^{-\zeta\, \Pi/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \,.\, \text{sen}\,(\Pi + \varphi)$$

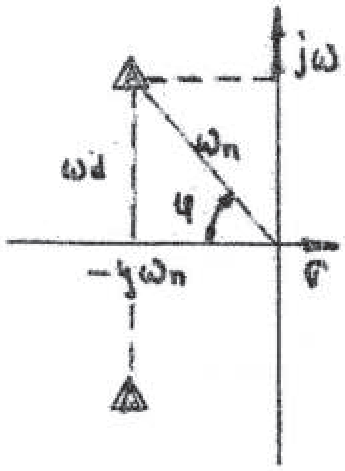
siendo $\quad \text{sen}\,(\Pi + \varphi) = -\text{sen}\,\varphi$




Por eso

$$S_p = -\frac{e^{-\zeta\, \Pi/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \,(-\,\text{sen}\,\varphi)$$

$$= \frac{e^{-\zeta\, \Pi/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \,.\, \text{sen}\,\varphi \quad ; \quad \text{veamos que es sen}\,\varphi$$




$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_n} = \sqrt{1-\zeta^2}$$

entonces

$$S_P = \frac{e^{-\zeta \Pi / \sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$$

$S_P = e^{-\zeta \Pi / \sqrt{1-\zeta^2}}$ el valor porcentual es $S_P\% = e^{-\zeta \Pi / \sqrt{1-\zeta^2}}$ 100%

**(10)**

$$S_P\% = \exp\left(-\frac{\sigma \pi}{\omega_d}\right)$$

**Tiempo de establecimiento $t_s$:** si consideramos un sistema subamortiguado de segundo orden, su respuesta es como sabemos

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \operatorname{sen}(\omega_d \cdot t + \varphi) \qquad (t \geq 0)$$

siendo $\varphi = tg^{-1} \dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

Las curvas $1 \pm e^{-\zeta \omega_n t} / \sqrt{1-\zeta^2}$ son las curvas envolventes de la respuesta transitoria. Esto es así ya que la envolvente a la función respuesta al escalón es una exponencial decreciente que toca los máximos de dicha respuesta. Y esos son los puntos donde $\operatorname{sen}(\omega_d \cdot t + \varphi) = 1$. La curva de respuesta y(t) siempre se mantiene dentro del par de curvas envolventes, como se ve en la Fig.(5) La constante de tiempo de estas curvas envolventes es $\dfrac{1}{\zeta \omega_n}$

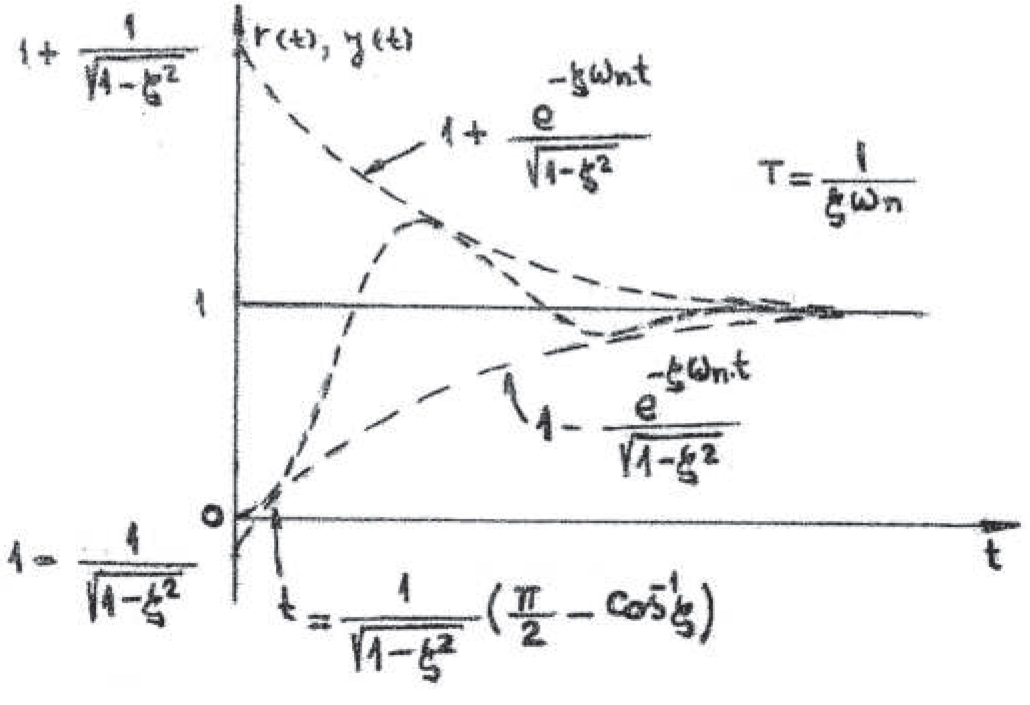



Fig.(5): Par de curvas envolventes de la curva de respuesta al escalón unitario, de un sistema de segundo orden, con polos complejos conjugados.

La velocidad de disminución de la respuesta transitoria depende del valor que toma la constante de tiempo $1/\zeta\omega_n$ Para un valor de $\omega_n$ dado, el tiempo de establecimiento $t_s$ es una función de la relación de amortiguamiento $\zeta$. De la Fig.(6), se ve que para el mismo $\omega_n$ y para un rango de $\zeta$ comprendido entre **0** y **1**, el tiempo de establecimiento $t_s$ para un sistema ligeramente, es mayor que para un sistema amortiguado adecuadamente. Para un sistema sobreamortiguado, el tiempo de establecimiento $t_s$ se hace grande, debido a la iniciación tardía de la respuesta.

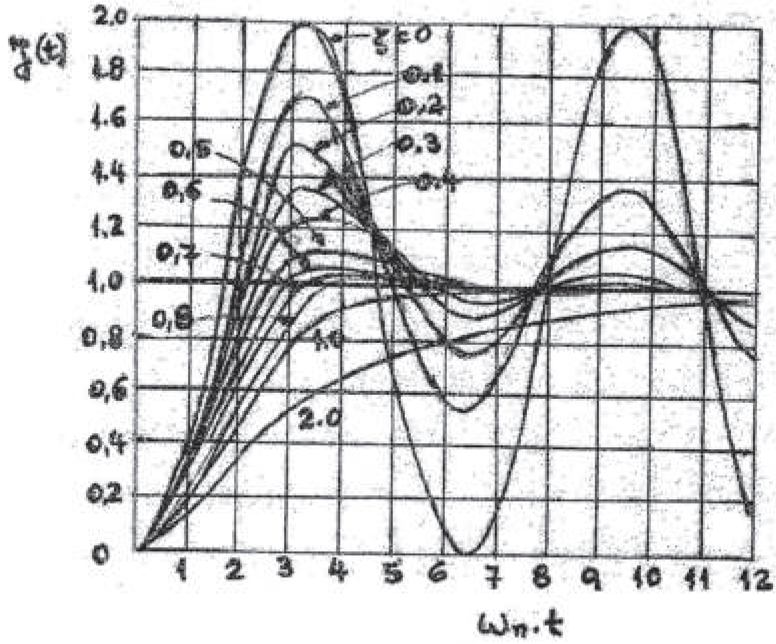



Fig.(6): Curvas de respuesta al escalón unitario, del sistema en estudio.

El tiempo de establecimiento correspondiente a una banda de tolerancia de ± 2% ó ± 5% se puede medir en términos de la constante de tiempo $T = 1/\zeta\omega_n$ de la Fig.(6) para distintos valores de $\zeta$, para $0 < \zeta < 0,9$. Si se utiliza el criterio de 2%, $t_s$ es aproximadamente cuatro veces la constante de tiempo del sistema.

Criterio del 2% ; $t_s = 4\,T = \dfrac{4}{\sigma} = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$ **(11)**

Si se utiliza el criterio de 5%, entonces $t_s$ es casi tres veces la constante de tiempo.

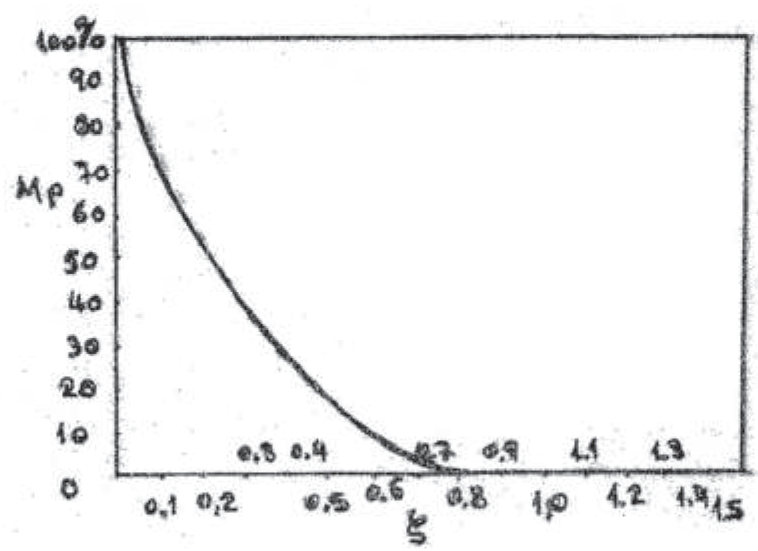
Criterio del 5% ; $t_s = 3\,T = \dfrac{3}{\sigma} = \dfrac{3}{\zeta\omega_n}$ **(12)**

Puede observarse que el tiempo de establecimiento alcanza un valor mínimo alrededor de $\zeta = 0,76$ (para el criterio de 2%) ó $\zeta = 0,68$ (para el criterio de 5%)

Está claro que el tiempo de establecimiento es inversamente proporcional al producto de la relación de amortiguamiento y la frecuencia natural no amortiguada. Dado que el valor de $\zeta$ está determinado generalmente por el requerimiento del sobreimpulso máximo permisible, el tiempo de establecimiento está determinado por la frecuencia natural $\omega_n$ no amortiguada. Esto significa que la duración del período transitorio puede variarse, sin cambiar el sobreimpulso máximo, ajustando la frecuencia natural no amortiguada $\omega_n$.

Del análisis precedente, es evidente que para tener una respuesta rápida, $\omega_n$ debe ser grande. Para limitar el sobreimpulso máximo $M_p$ y hacer pequeño el tiempo de establecimiento, la relación de amortiguamiento $\zeta$ no debe ser muy pequeña. En la Fig.(7) aparece la relación de amortiguamiento $\zeta$.

Nótese que si la relación de amortiguamiento está entre 0,4 y 0,8, el porcentaje de sobreimpulso máximo para la respuesta escalón está entre 25% y 2,5%.




## RESPUESTA TOTAL EN EL TIEMPO

Hasta ahora hemos visto como se encuentra la respuesta en el tiempo para sistemas de primer y segundo orden, de simple entrada, simple salida con las condiciones iniciales iguales a cero, a una entrada escalón. En el desarrollo que vamos a estudiar, podrá usarse cualquier entrada con las condiciones iniciales distintas de cero, además, podrá estudiarse el comportamiento de las distintas variables de estado como funciones en el tiempo. Es decir, usaremos la representación vectorial matricial de los distintos sistemas de control.

Comencemos suponiendo que la planta que se va a estudiar está representada en variables de estado, descripta por la forma de Ec. (A b)

$$x = A x + b u \qquad \textbf{(A b)}$$

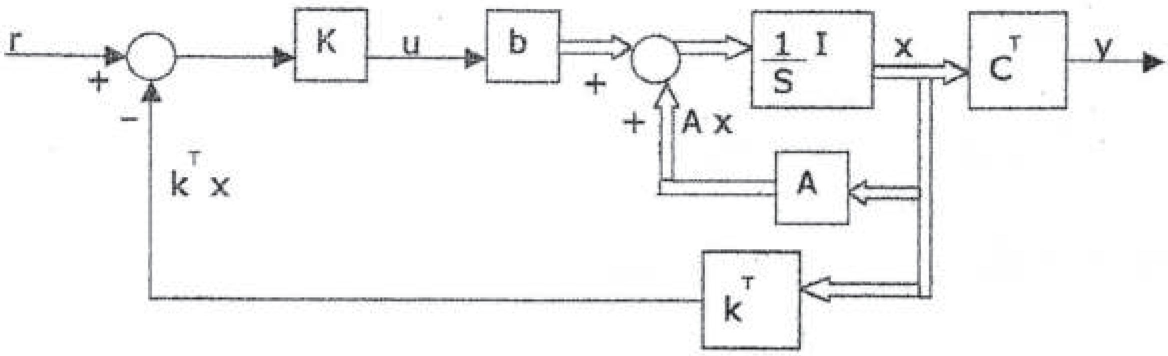



Fig.(1): Representación del sistema completo en variables de estado.

Viendo la Fig.(1), podemos ver que

$$u = K\,(r - k^T\,x)$$

Con esta ecuación y la anterior (A b), podemos hallar la expresión equivalente al lazo cerrado.

Entonces para el sistema en lazo cerrado, tenemos

$$\dot{x} = (A - K\,b\,k^T)\,x + K\,b\,r = A_k\,x + K\,b\,r \qquad \textbf{(}\mathbf{A_k}\ \textbf{b)}$$

Aquí vemos que $\mathbf{A_k}$ es la matriz del sistema de lazo cerrado, que se define como sigue

$$A_k = A - K\,b\,k^T$$

La salida **y** está dada por

$$y = C^T\,x \qquad \textbf{(c)}$$

Entonces ahora en lazo cerrado tenemos la representación en la forma

**($A_k$ b)** y **(c)**

Las mismas deben resolverse para hallar tanto la salida **y(t)**, como las variables de estado **x(t)**

El procedimiento que usaremos se basa en el método de la transformada de Laplace.

La transformada de Laplace en ambos miembros de las ecuaciones ($A_k$ b) y (c), permitiendo condiciones iniciales.

Para la Ec. ($A_k$ b) es

$$\mathcal{L}\ [\dot{x}(t)] = S\ X(s) - X(0)$$

mientras que en el segundo miembro será

$$\mathcal{L}\ [A_k.\ X + K.b.r] = A_k.\ X(s) + K.\ b.\ r(s)$$

Así es que igualando los segundos miembros de las dos últimas ecuaciones, tenemos

$$S\ X(s) - X(0) = A_k.X(s) + K.b.r(s)$$

Arreglando esto, tenemos

$$S\ .\ X(s) - A_k.\ X(s) = X(0) + K.\ b.\ r(s)$$

$$[S\ I - A_k]\ X(s) = X(0) + K.\ b.\ r(s)$$

$$X(s) = [S\ .\ I - A_k]^{-1}\ .\ X(0) + K\ [S\ .\ I - A_k]^{-1}\ .\ b\ .\ r(s) \qquad \textbf{(1)}$$

donde definimos

$$\Phi_k(s) = [S\,I - A_k]^{-1}$$

entonces

$$X(s) = \Phi_k(s)\,.\,X(0) + K\;\Phi_k(s)\;b\;r(s) \qquad \textbf{(2)}$$

entonces la respuesta total en el tiempo, será

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\,[\Phi_k(s)]\,.\,X(0) + K\;\mathcal{L}^{-1}\,[\Phi_k(s)\,.\,b\,.\,r(s)] \qquad \textbf{(3)}$$

Podemos observar que la solución para x(t) se compone de dos partes: una asociada con las condiciones iniciales y la segunda con la parte forzada, es decir, aquella que se relaciona con la entrada o excitación.

Observamos que para resolver la Ec. (3), es necesario hallar la matriz resolvente del sistema en lazo cerrado, luego deben realizarse los productos indicados. A posteriori se hallan las variables de estado mediante la transformada inversa de Laplace.

**EJEMPLO:**

Consideremos un sistema de posición con un motor de continua. Tiene, además, una realimentación tacométrica que brinda una tensión proporcional a la derivada de la salida.

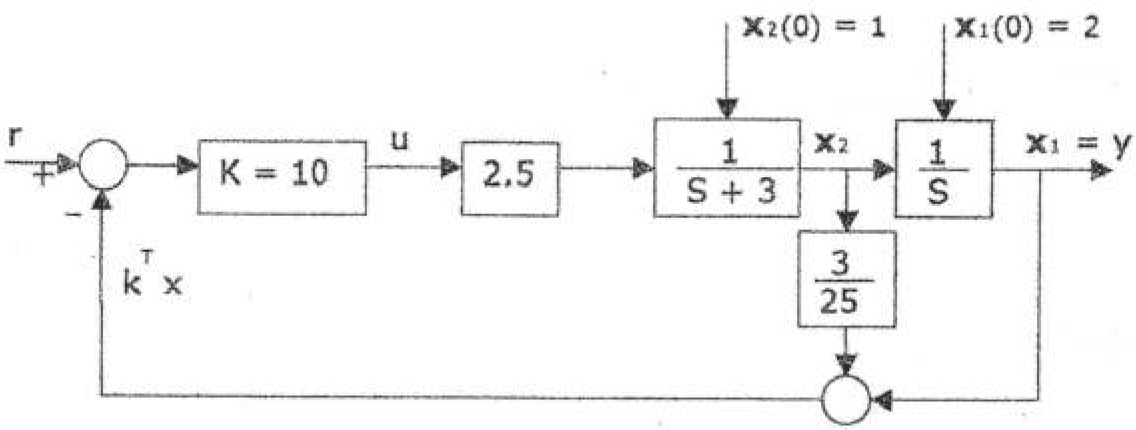
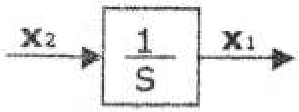
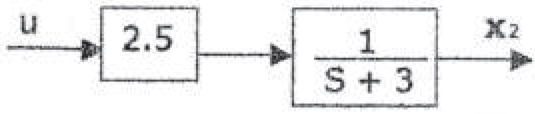



Fig.(2): Sistema de 2º orden.

De la Fig.(2), podemos hallar las expresiones matriciales adecuadas.

de 


$x_2 \cdot \frac{1}{S} = x_1$, entonces $\dot{x}_1 = x_2$

de 


$2{,}5\, u \, \frac{1}{S+3} = x_2$

$2{,}5\, u = x_2\,(S + 3)\ ;\ 2{,}5\, u = \dot{x}_2 + 3\, x_2$

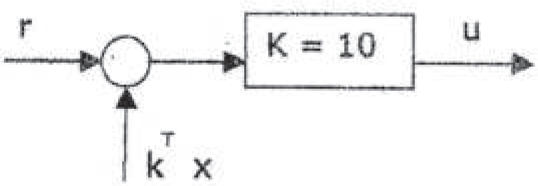
$\boldsymbol{\dot{x}_2 = -3\, x_2 + 2{,}5\, u}$

**Entonces:**

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -3\, x_2 + 2{,}5\, u$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} \quad C^T = [\,1 \quad 0\,] \quad k^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{25} \end{bmatrix}$$

siendo 


Entonces $\quad u = K \cdot (r - k^T \cdot x)$

De ahí que

$$\dot{x}_2 = -3\,x_2 + 2.5\,K\,.\,(r - k\,.\,x)$$

$$\dot{x}_2 = -3\,x_2 + 25\,r\; - 25 \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= -3\,x_2 + 25\,.\,r\; - 25\,. \begin{bmatrix} x_1 + \frac{3}{25}\,x_2 \end{bmatrix}$$

$$= -25\,x_1 - 6\,x_2 + 25\,.\,r$$

Las variables de estado serán

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -25\,x_1 - 6\,x_2 + 25\,r$$

Finalmente tenemos

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -6 \end{bmatrix} \quad y \quad K.b = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

**Cálculo de $\Phi_k(s)$:**

$$(S.I - A_k) = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & -1 \\ 25 & S+6 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_k(s) = (S\,I - A_k)^{-1} = \frac{a\,d\,j\,(S\,I - A_k)}{d\,e\,t\,(S\,I - A_k)}$$

$$a\,d\,j\,(S\,I - A_k) = \begin{bmatrix} S+6 & 1 \\ -25 & S \end{bmatrix}$$

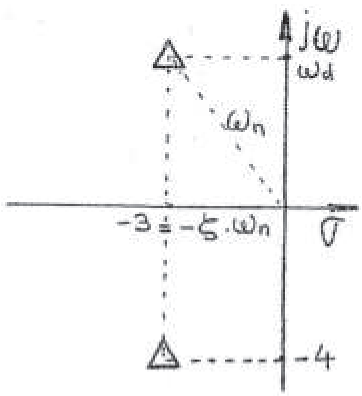
$d\,e\,t\,(S\,I - A_k) = S.(S + 6) + 25 = S^2 + 6\,S + 25$

siendo las raíces del determinante, son los polos de lazo cerrado.

$\Delta = S^2 + 6\,S + 25 = 0$

$S_{1\text{-}2} = -3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 25} = -3 \pm j\,4$

Son para la ganancia dada dos polos complejos conjugados.




donde:

$\omega_d = 4 \qquad \omega_n = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\zeta\,\omega_n = 3$

entonces $\qquad \zeta = \dfrac{3}{\omega_n} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

entonces

$\Delta = (S + 3)^2 + 4^2$

De modo que

$$\Phi_k(s) = \frac{1}{(S + 3)^2 + 4^2} \begin{bmatrix} S + 6 & 1 \\ -25 & S \end{bmatrix}$$

volviendo a la expresión (2), tenemos lo siguiente

$X(s) = \Phi_k(s)\,.\,X(0) \;+\; K\,.\,\Phi_k(s)\,.\,b\,.\,r(s)$

Ahora tenemos

$$X(s) = \frac{\begin{bmatrix} S+6 & 1 \\ -25 & S \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}}{(S+3)^2 + 4^2} + \frac{\begin{bmatrix} S+6 & 1 \\ -25 & S \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} . r(s)}{(S+3)^2 + 4^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Se observa que el determinante de la matriz del sistema (S I - $A_k$) aparece en el denominador de todos los elementos de $\Phi_k(s)$. A su vez este determinante es un polinomio en **S**, y se lo designa comúnmente como polinomio característico del sistema de lazo cerrado. La forma del comportamiento de cada variable de estado es la misma, ya que tienen la misma ecuación característica y por eso la misma localización de sus polos de lazo cerrado.

Al desarrollar $\Phi_k(s)$, lo hicimos en base a manipulaciones matriciales, y una vez hallada reemplazamos su expresión en la Ec. (2), hallando (4). Sustituyendo en (4) el valor de las condiciones iniciales.

X(0) = col (2, 1), tenemos

$$X(s) = \frac{\begin{bmatrix} S+6 & 1 \\ -25 & S \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{(S+3)^2 + 4^2} + \frac{\begin{bmatrix} S+6 & 1 \\ -25 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}}{S.[(S+3)^2 + 4^2]}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 2\,(S+6)+1 \\ -50+S \end{bmatrix}}{(S+3)^2 + 4^2} + \frac{\begin{bmatrix} 25 \\ 25\,S \end{bmatrix}}{S.[(S+3)^2 + 4^2]} \qquad (5)$$

El primer término corresponde a las condiciones iniciales y el segundo a la respuesta forzada.

## CÁLCULO DE LA RESPUESTA A LAS CONDICIONES INICIALES

Como el sistema es lineal debemos hacer R(s) = 0

Por eso tenemos

$$X(0) = \frac{\begin{bmatrix} S+6 & 1 \\ -25 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{(S+3)^2 + 4^2}$$

$$X_1(s)_{ci} = \frac{2\,(S+6)+1}{(S+3)^2 + 4^2} = \frac{2\,S+12+1}{(S+3)^2 + 4^2} = \frac{2\;[S+6{,}5]}{(S+3)^2 + 4^2}$$

### Resolución gráfica

La expansión en fracciones parciales será

$$X_1(s)_{ci} = \frac{2 \text{ Residuo a uno de los polos}}{(S+3)^2 + 4^2}$$

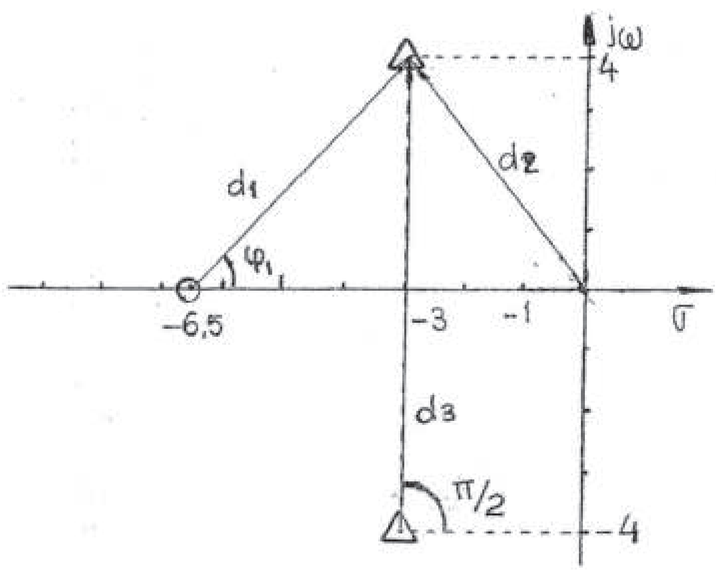



Fig.(3): Cálculo gráfico del residuo.

Cálculo de $\varphi$. $\quad \varphi = \Sigma\,\varphi_z - \Sigma\,\varphi_p = tg^{-1}\,4/3{,}5 = 48{,}8^\circ$ ; $\Sigma\,\varphi_p = \pi/2$.

no se tiene en cuenta $\pi/2$, ya que la respuesta debe ser senoidal.

El residuo a los polos complejos, es "dos veces el valor del residuo respecto a uno de los polos complejos".

Entonces:

$$R_{pc} = 2 \, \frac{2 \, . \, d_1}{d_2 \, . \, d_3} = 2 \, . \, \frac{2 \, . \sqrt{3{,}5^2 + 4^2}}{2 \, . \, 4} = 0{,}5 \, . \sqrt{3{,}5^2 + 4^2}$$

$$= 0{,}5 \; . \; 5{,}315 = 2{,}6575 \approx 2{,}66$$

La respuesta será

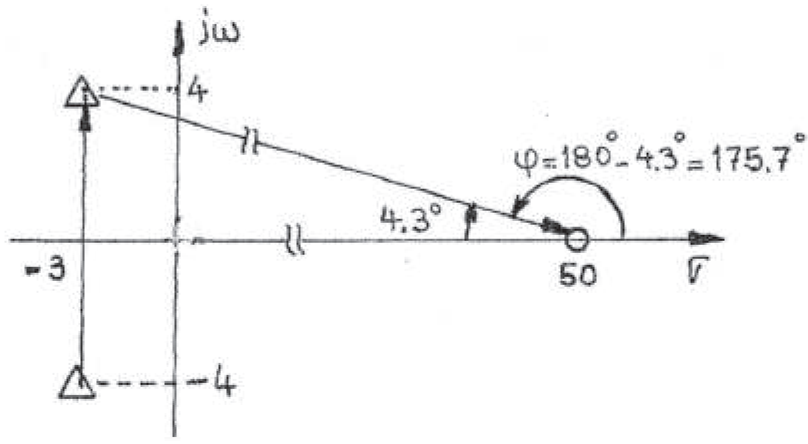
$$X_1(t)_{c\,l} = 2{,}66 \, . \, e^{-3\,.\,t} \; . \; \text{sen}\,(4 \, . \, t + 48{,}8^o)$$

## CÁLCULO DE $X_2(t)_{c\,l}$

Siendo

$$X_2(s)_{c\,l.} = \frac{-50 + S}{(S+3)^2 + 4^2} = \frac{S - 50}{(S+3)^2 + 4^2}$$

### Cálculo gráfico del residuo




Residuo de los polos complejos, es 2 veces el residuo respecto a uno de los polos.

$$2 \cdot R_{pc} = -\frac{2 \cdot \sqrt{53^2 + 4^2}}{2 \cdot 4} = -13{,}288 \approx -13{,}3$$

$$X_2(t)_{ci} = -13{,}3 \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \operatorname{sen}(4 \cdot t + 175{,}7^{\circ})$$

Entonces

$$X_1(t)_{ci} = 2{,}66 \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \operatorname{sen}(4 \cdot t + 48{,}8^{\circ})$$

$$X_2(t)_{ci} = 13{,}3 \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \operatorname{sen}(4 \cdot t + 175{,}7^{\circ})$$

* El signo del residuo de un polo complejo se calcula como ya se indicó.

Como sea debemos recordar que $X_2(t)$, debe ser la derivada de $X_1(t)$, tal como se describen las variables de estado. Hicimos el cálculo gráfico.

## CÁLCULO DE LA RESPUESTA FORZADA

Haciendo las condiciones iniciales nulas.

Tenemos

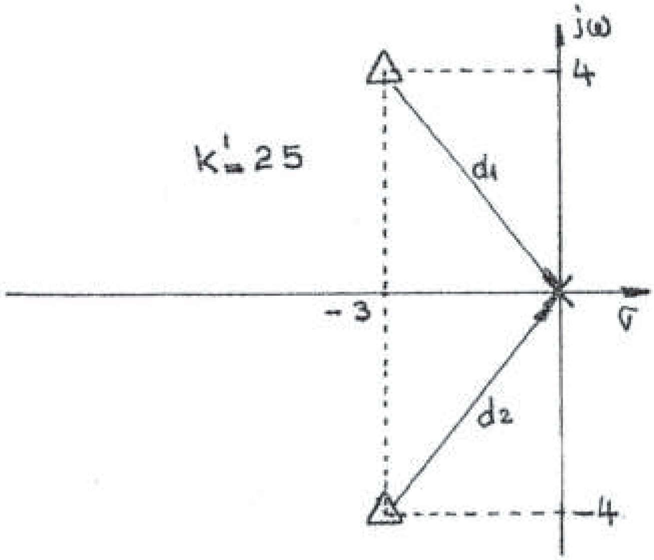
$$X(s)_f = \frac{\begin{bmatrix} S+6 & 1 \\ -25 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}}{(S+3)^2 + 4^2} \cdot r(s) \qquad (6)$$

$$X(s)_f = \frac{\begin{bmatrix} 25 \\ 25 \cdot S \end{bmatrix}}{(S+3)^2 + 4^2} \cdot \frac{1}{S} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{25}{S} \\ 25 \end{bmatrix}}{(S+3)^2 + 4^2}$$

Ud puede comprobar este error calculando la expansión en fracciones parciales.

$$X_1(s)_f = \frac{25}{S\,[(S+3)^2+4^2]} = \frac{R_\Gamma}{S} + \frac{2 \, . \, R_{pc}}{(S+3)^2+4^2}$$

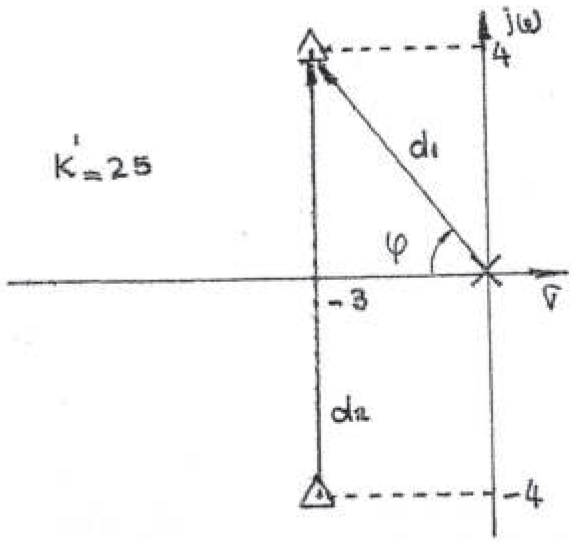
**Residuo al escalón:**




$$R_\Gamma = \frac{25}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1$$

$R_\Gamma = 1$

Dos veces el residuo a uno de los polos complejos.




$$2\,R_{pc} = \frac{2 \times 25}{\sqrt{3^2+4^2} \times 2 \times 4} =$$

$$= -1,25$$

$$\varphi = -t^{-1}\, 4/3 = -53.2^\circ$$

La $x_1$ forzada será: $\quad x_1(t)_f = 1 - 1,25\, e^{-3.t} \, . \, \mathrm{Sen}(4.t + 53.2^\circ)$

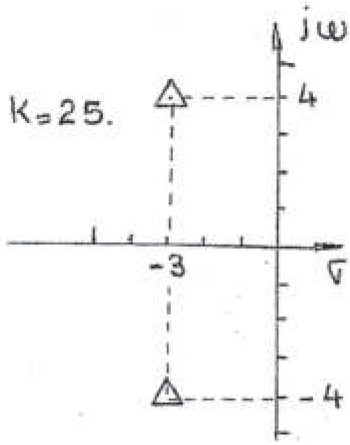
La $x_1(t)$ total será:

$$x_{1t}(t) = x_{1ci}(t) + x_{1f}(t) = 2.66 . e^{-3.t} . \mathrm{Sen}(4.t + 48.8^\circ) + 1 - 1.25 . e^{-3.t} . \mathrm{Sen}(4.t + 53.2^\circ)$$

CÁLCULO DE $x_2(t)_f$, (forzada).

De la Ec (6), tenemos.

$$x_2(S)_f = \frac{25 \cdot S}{S.[(S+3)^2+4^2]} = \frac{25}{(S+3)^2+4^2}$$




No hay polos en el origen, la expansión en fracciones parciales será.

$$x_2(S)_f = \frac{R_{pc}}{(S+3)^2+4^2}$$

La respuesta temporal tendrá la forma.

$$x_2(t)_f = R_{pc} . e^{-3.t} . \operatorname{Sen}(4.t+\varphi)$$

CALCULO DEL RESIDUO.

$$R_{pc} = \frac{2 \times 25}{2 \times 4} = 6.25$$

En este caso $\varphi = \pi/2$, que es es el ángulo correspondiente al conjugado al polo considerado en el cálculo del residuo. Este ángulo no se considera, para que la respuesta tenga forma senoidal.

Entonces se tiene lo siguiente.

$$x_2(t)_f \quad 6.25 . e^{-3.t} . \operatorname{Sen} 4.t$$

La $x_2(t)$ total será la siguiente.

$$x_2(t)_T = x_2(t)_{ci} + x_2(t)_f = 13.3\, e^{-3.t} \times Sen(4.t + 175.7^\circ) + 6.25 \times e^{-3.t} \times Sen\, 4.t$$

PREGUNTAS.

1) Cuales son los parámetros que caracterizan la respuesta transitoria de un sistema?

2) Cuando se considera que la respuesta del sistema ha alcanzado el estado estacionario?

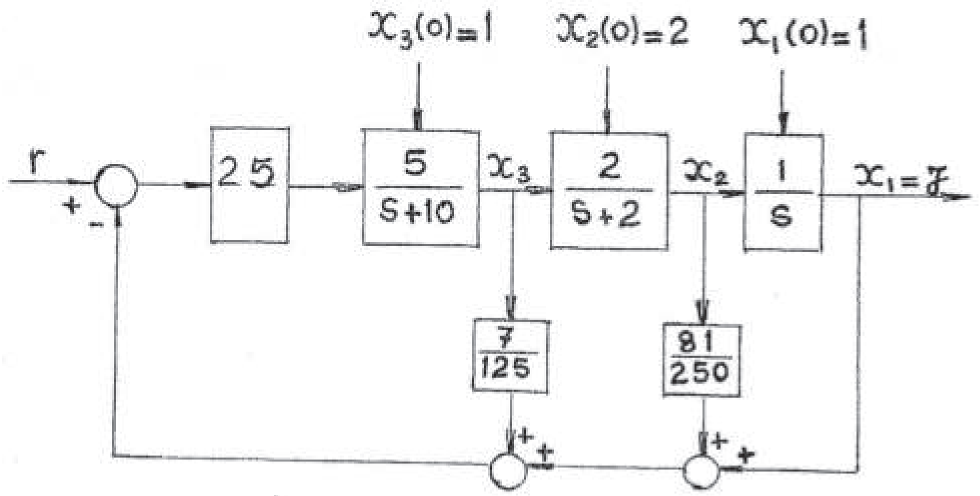
3) Cuantos parámetros intervienen en el valor del sobrepico en la respuesta transitoria de un sistema?

4) En base a que criterio se determinan las zonas deseadas o no, en el posicionamiento de los polos de lazo cerrado?

5) En que se diferencia el cálculo de la respuesta en el tiempo usando: el método clásico (función de transferencia), o el método moderno (variables de estado).

PROBLEMAS.

1. Para el sistema de la figura.




a. Halle la respuesta total en el tiempo.

b. Dibuje las curvas correspondientes a las variables $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$.

PROBLEMA 2.

Dada la siguiente planta.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

donde

$$u=r-k^{T}.x$$

Siendo

$$k=\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \qquad y \quad K=1 \qquad x(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a_ Dibuje el diagrama de bloques para la planta y el sistema.

b_ Halle la respuesta total en el tiempo.

c_ Haga la representación de $y(t)$.

d_ De la gráfica de $y(t)$, determine los valores caracteristicos de la gráfica de $y(t)$.