MÉTODO PARA HALLAR UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN UN CIRCUITO LINEAL

RESUMEN: En este pequeño documento se describe un método para encontrar el sistema de ecuaciones diferenciales (EDs) correspondiente a un circuito eléctrico lineal conteniendo componentes almacenadores de energía. Se usan algunos conceptos de la teoría de grafos, como conjuntos de corte y árboles, que aplicados sobre el circuito de interés permiten determinar correctamente su orden o grado, y simultáneamente aislar los componentes reactivos a partir de los cuales escribir las EDs.

1. INTRODUCCIÓN

Circuitos lineales y su representación mediante ecuaciones diferenciales

Se ha estudiado que un circuito eléctrico lineal que incluya componentes almacenadores de energía (es decir capacitores e inductores), tendrá un funcionamiento dinámico al aplicar alguna señal de entrada. Esto significa que las señales que se consideren dentro del mismo tienen una "historia" que no es trivial de determinar, porque dependen de cómo se desplaza en el tiempo la energía desde un componente hacia otro. Esto queda resumido matemáticamente en que es necesario emplear ecuaciones diferenciales (EDs) para describir el comportamiento del circuito, no siendo suficiente el uso de relaciones matemáticas estáticas.

Tal descripción matemática del funcionamiento del circuito puede resumirse en una ecuación diferencial de orden n-ésimo o, equivalentemente, en **n** ecuaciones diferenciales de primer orden.

El orden de la ecuación diferencial (ED), o la cantidad de variables de estado necesarias para describir el comportamiento del circuito tiene una relación directa con la cantidad de componentes reactivos (inductores y capacitores), siendo en los casos más simple directamente n=cantidad de inductores + cantidad de capacitores.

En ese caso, una manera práctica y muy útil de escribir un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para el circuito es desarrollar una ED por cada capacitor y una por cada inductor, tomando como variables diferenciales las tensiones de los condensadores y las corrientes a través de los inductores. Estrictamente, para cada circuito pueden encontrarse infinidad de sistemas de n ecuaciones de primer orden, pero el mencionado es más natural, ya que las variables diferenciales con que se trabaja son cantidades físicas medibles (tensiones y corrientes sobre los componentes).

Al tomar la tensión de un condensador como variable de estado resulta fácil escribir una ED asociada, simplemente escribiendo una ecuación de nodo, es decir aplicando la regla de Kirchhoff de corriente (RKI) que tenga en cuenta la corriente del condensador. De ese modo aparece naturalmente la derivada de la tensión del condensador ya que tiene relación directa con la corriente en el mismo:

$$C\frac{dv}{dt} = I_C$$

Así, al tomar la corriente por un inductor como variable de estado, resulta simple escribir la ecuación diferencial correspondiente, simplemente escribiendo una ecuación de malla asociada con la tensión del inductor. De nuevo, la derivada de la corriente aparece naturalmente debido a su relación directa con la tensión en la bobina:

$$L\frac{di}{dt} = V_L$$

Procediendo así, se llega a las n EDs lineales de primer orden, que además serán linealmente independientes.

Sin embargo, cómo se mencionó antes, existen situaciones en las que el orden necesario del sistema de EDs resulta menor que el número total de componentes reactivos (cantidad de "L +C"), por lo que cuando se pretenda escribir una ED por cada "L" o "C" resultará que al final sobran EDs. Algo para notar es que el sistema con ecuaciones diferenciales "de sobra" resulta ser un conjunto linealmente dependiente.

2. ORIGEN DE LA REDUCCIÓN DEL ORDEN DEL SISTEMA DE EDs

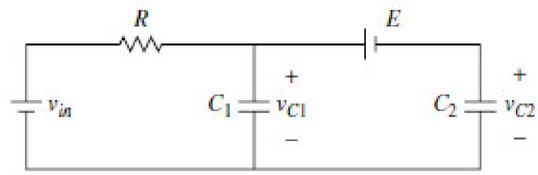
La disminución del orden del sistema de EDs se da debido a 2 situaciones circuitales claramente diferentes: cuando existen lazos (o mallas) capacitivos y/o cuando hay conjuntos de corte inductivo. En ambos casos los componentes están interconectados de una manera en que resulta imposible que las condiciones iniciales tanto como las evolución en el tiempo de las señales de los reactores sean independientes.

A continuación, aclararemos brevemente el significado de estas dos entidades.

2.1 Lazos capacitivos

Un lazo capacitivo es una malla en la cual sólo existen capacitores y fuentes de tensión. En tal lazo resulta que, las tensiones en los condensadores no pueden ser todas independientes. Esto puede entenderse al pensar que, si tenemos 2 condensadores y una fuente de tensión formando un lazo, como en la figura 1, podríamos asignar tensiones arbitrarias a la fuente y a uno de los condensadores; pero el segundo quedaría obligado a tener su tensión igual a la sumatoria de las tensiones de los otros 2 componentes; de allí nace la mencionada dependencia lineal de las variables diferenciales.

Figura 1.
Circuito con un "lazo capacitivo" formado por C_1, C_2 y la fuente de tensión E.



2.2 Conjuntos de corte inductivos

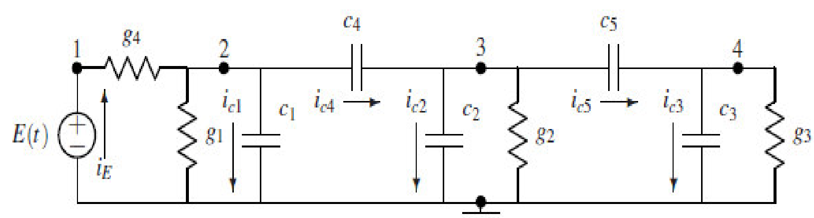
El caso de los "conjuntos de corte inductivo" es ligeramente más difícil de notar, hasta después que se practica un poco.

En una red, se llama **conjunto de corte** (o cut set, en inglés) a un conjunto de componentes, de cualquier tipo, cuya ausencia dejaría a la red separada en dos grupos de nodos, (como si se tuvieran dos islas de nodos separadas).

Por ejemplo se pueden mencionar algunos de los conjuntos de corte de la figura 2:

la fuente *E* y la conductancia *g4* dejan separado el nodo 1 del resto de la red; C_5, C_3 y *g3* separan el nodo 4 del resto de la red.

Figura 2. Conjs. de corte:
a) La fuente *E* y la conductancia *g4* (separan el nodo 1 del resto de la red).
b) C_5, C_3 y *g3* separan el nodo 4 del resto de la red.



La trascendencia de la definición de "conjunto de corte" está en el hecho de que la suma de las corrientes circulando por sus componentes resulta igual a cero. Si se imaginan 2 islas de nodos separadas por el conjunto de corte, la corriente total saliendo de una de las islas tiene que ser idéntica a la suma de corrientes que retornan a la misma proveniente desde la otra isla. Se puede ver esto como una especie de expansión de la Ley de Kirchhoff de las corrientes (LKI), considerando una de las islas como si fuese una especie de "macro-nodo".

Volviendo a los inductores y la disminución de la cantidad de EDs, un **conjunto de corte inductivo**, es simplemente un conjunto de corte formado sólo por bobinas y fuentes de corriente.

Entonces, se aplica a estos componentes inductivos el mismo razonamiento que para un conjunto de corte cualquiera: la sumatoria de sus corrientes debe ser cero. Como el conjunto de corte inductivo está formado por inductores y fuentes de corriente, se nota rápidamente que las corrientes en las bobinas forman un conjunto linealmente dependiente. Por ejemplo, en la figura 3 se ven 2 inductores que

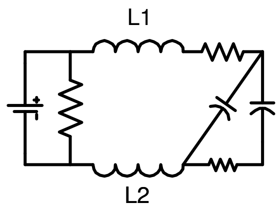


Figura 3
Conjunto de corte inductivo
formado por *L1* y *L2*

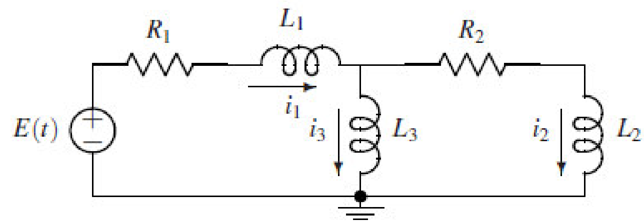


Figura 4
Conjunto de corte inductivo
formado por *L1*, *L2* y *L3*

forzosamente deben tener circulando la misma corriente, por lo que esos 2 inductores sólo aportan una ecuación al sistema de EDs del circuito. Se puede notar también que si una de las bobinas se reemplazase por una fuente de corriente, la bobina restante quedaría obligada a conducir la misma corriente de la fuente pero en el sentido inverso; y entonces se perdería completamente la ecuación diferencial que se tenía.

En la figura 4, las 3 bobinas presentes forman un conjunto de corte, por lo que tan sólo las corrientes a través de 2 de ellas podrán asignarse libremente. La corriente en cualquiera de las bobinas queda obligada a ser igual a la suma algebraica de las otras dos. Ahora, si una de las bobinas se reemplazase por una fuente de corriente, las corrientes en las restantes 2 bobinas no podrían tomar valores independientes; entre las dos sólo mostrarían un grado de libertad. Esta situación sería totalmente análoga a la que ocurre con los condensadores del circuito de la figura 1.
Otra forma de llamar a un conjunto de corte inductivo es simplemente "**corte inductivo**".

Además de lo mencionado en la introducción, el método que queremos aprender aquí, servirá para identificar a los lazos capacitivos y cortes inductivos.
En el apartado siguiente se describirán algunos elementos más de la teoría de grafos, que serán necesarios para enunciar nuestro método.

3 ÁRBOLES, RAMAS Y ENLACES EN UN CIRCUITO

En la teoría de grafos se dice que un árbol, es un subconjunto de un grafo que engloba todos los nodos del mismo y no contiene "ciclos" (o lazos cerrados). Esto, aplicado a los circuitos eléctricos, se traduce como que un árbol es un conjunto de componentes uniendo todos los nodos del circuito, pero sin formar lazos cerrados. Un árbol de la teoría de grafos toma su nombre de los árboles de la botánica, ya que al no formar ciclos, tiene una estructura abierta y ramificada. Por lo mismo, Cada componente entre 2 nodos dentro del árbol recibe el nombre de "rama".

Al considerar circuitos de apenas unos cuantos componentes, ya se empieza a notar que en el mismo se pueden construir muchos arboles distintos, creciendo el número de los posibles árboles exponencialmente al crecer el número de componentes del circuito.

Tan sólo nos resta mencionar el concepto de "enlace" (o link, en inglés), que consiste en un componente que queda fuera del árbol construido. Un par de ejemplos de árboles distintos correspondientes a un mismo circuito pueden verse en las figs. 5 y 6.

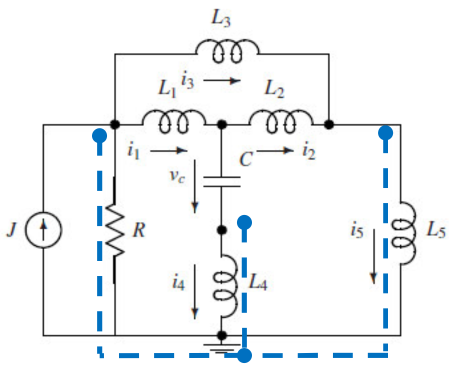


Figura 5,

Árbol 1

Ramas: *R, L_4 y L_5*

Links: *J, L_1, L_2, L_3 y C*

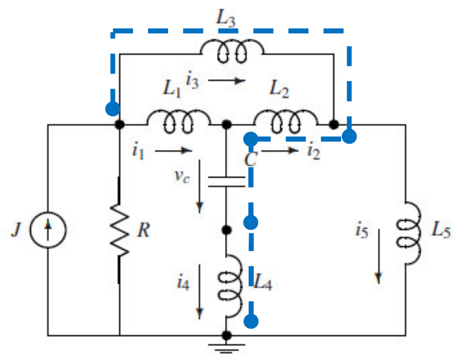


Figura 6

Árbol 2

Ramas: *L_2, L_3, L_4, L_5 y C*

Links: *J, R, L_4 y L_1*

Entendidos los conceptos anteriores, ya podemos enunciar un conjunto de pasos a seguir para escribir las EDs del circuito.

4. MÉTODO PARA LLEGAR A LAS EDs DE UN CIRCUITO

El método consiste sobre todo en **construir un árbol sobre el circuito**, de manera que las ramas y enlaces del mismo indiquen los componentes reactivos necesarios para escribir las EDs. Para que tal árbol tenga esas propiedades, se entiende que no puede ser construido al azar, sino que es necesario que cumpla con reglas especiales.

4. 1 Reglas del método

I. *Regla de formación del árbol*

Formar un árbol sobre del circuito, que cumpla simultáneamente con las siguientes consignas:

a) que abarque: todas las fuentes de tensión, la mayor cantidad posible de condensadores, y quizás algunos resistores.

b) que excluya las fuentes de corriente y las bobinas.

Es decir, al construir el árbol, la intención primordial es dejar dentro del mismo a los condensadores y dejar fuera a las bobinas.

II. *Regla para elegir las variables diferenciales*

Escribir una ED por cada tensión de condensador **dentro** del árbol (empleando la RKI) y, una ED por cada corriente de bobina **fuera** del árbol (empleando la regla de Kirchhoff de las tensiones).

En vez de lo anterior, pueden usarse la carga eléctrica de los condensadores y el flujo magnético de los inductores como variables diferenciales del sistema.

4.2 Comentarios acerca de la información extraíble del árbol

Cuando las consignas I.a y I.b pueden respetarse sin problemas, es el caso trivial en el que se puede escribir una ED por cada L y una por cada C.

En cambio, cuando se encuentra que NO se puede construir un árbol respetando las consignas I.a y I.b. son los casos en los que el número de ecuaciones diferenciales resulta reducido con respecto a la cantidad total de bobinas y condensadores, o sea son los casos que más nos interesan por no ser triviales. Así ocurrirá que algún condensador quedará fuera del árbol (formando un enlace), o se deba incluir en el árbol algún inductor o fuente de corriente.

Como sea que resulte el árbol, se escribirá una ED por cada condensador que sea rama del mismo, y una ED por cada bobina que haya quedado como enlace. Por ejemplo, en el circuito de las figuras 5 y 6 existen 2 conjuntos de corte inductivos (a saber: L_1- L_2- L_4 y L_2- L_3- L_5) por lo que no puede construirse un árbol según las reglas I y II sin incluir como rama del mismo a 2 bobinas. A pesar de contener 1 condensador y 5 bobinas, el sistema sólo es de orden 4. El árbol mostrado en la figura 6 es más apropiado que el de la fig. 5, ya que tiene como una de sus ramas al condensador.

Es importante remarcar que en los casos en los que el método es de ayuda, es decir cuando existen lazos capacitivos y cortes inductivos, "el árbol" que se construya sobre el circuito no es el único posible. Entonces el sistema de EDs al que se llega siguiendo las reglas I y II no es único; pueden construirse otros.

Algo notable es que **cada condensador fuera del árbol se deberá a la existencia de un lazo capacitivo, y cada inductor dentro del árbol se deberá a la existencia de un corte inductivo**.

Además, es posible identificar los lazos capacitivos: el ciclo formado por un condensador-link y el árbol constituye un lazo capacitivo. Esto sucede porque cada enlace en un árbol (cualquiera), puede formar un único ciclo con las ramas de su árbol; el árbol es una estructura abierta, sin ciclos, y los enlaces conectan dos nodos extremos del mismo; y entre 2 nodos extremos de un árbol hay una cadena de ramas; la cadena de ramas más el enlace forman un ciclo.

También se pueden identificar los cortes inductivos: cada bobina dentro del árbol formará un corte inductivo junto con algunos de los links, que sean bobinas y fuentes de corriente. De nuevo, la explicación tiene en cuenta que un árbol es una estructura abierta uniendo todos los nodos de la red; los 2 nodos que unen cada rama quedan separados si se corta la rama; para separar el circuito en 2 conjuntos de nodos, sería necesario eliminar además uno o más links.

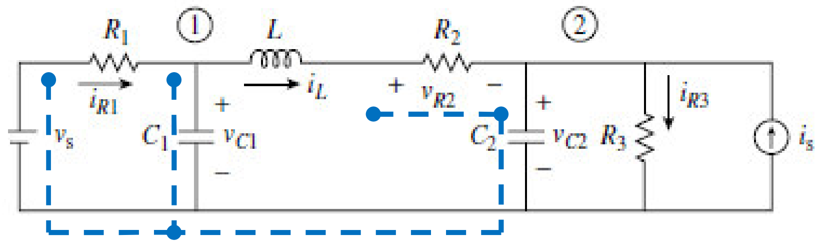
Finalmente, cuando se quiere de escribir la ED asociada con un inductor aplicando la RKV, los componentes considerados en la ecuación forman un lazo; y cuando se quiere encontrar la ED asociada a un condensador, los componentes de la red que se toman en cuenta, resultan ser un conjunto de corte.

5. EJEMPLOS

Ejemplo 1.

En el circuito de la figura 7, existen 2 condensadores y un inductor. Es fácil de construir un árbol respetando las reglas I y II, así como notar que no hay lazos capacitivos ni cortes inductivos. Por lo tanto el sistema de EDs será de orden 3.

Figura 7
Circuito de tercer orden, y un árbol apropiado para detectar lazos capacitivos y cortes inductivos.



Se toman las tensiones de los condensadores (V_{c1} y V_{c2}) y la corriente por la bobina (i_L) como variables dinámicas y resulta el sistema:

$$C_1.Vc_1' = Vs.\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1}.Vc_1 - il$$

$$C_2.Vc_2' = Is - \frac{1}{R_3}.Vc_2 + il$$

$$L.il' = Vc_1 - Vc_2 - il.R_2$$

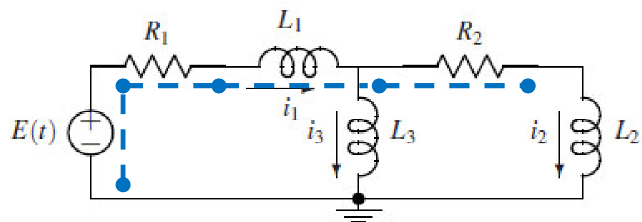
<u>Ejemplo 2</u>

En el circuito de la figura 8 existen 3 inductores, ningún condensador. Se distingue rápidamente que las bobinas forman un conjunto de corte, por lo que se puede anticipar que el orden del sistema no será tres, sino dos.

Al tratar de construir un árbol según las reglas I y II, resulta que para abarcar todos los nodos es necesario que una rama quede constituida por una de las bobinas.

Figura 7

Circuito con 3 inductores. Como hay un corte inductivo, el orden será igual a 2. NO es posible construir un árbol que excluya a todas las bobinas.



A continuación sólo resta escribir las (dos) ecuaciones diferenciales debidas a las bobinas L_2 y L_3 que quedaron como links (fuera del árbol). Las corrientes a través L_2 y L_3 se toman como variables de estado, y las EDs tendrán inicialmente la siguiente forma:

$$L_3.i'_3 = E - R_1(i_2 + i_3) - L1(i'_2 + i'_3)$$
$$L_2 i'_2 = L_3.i'_3 - R_2.i_2$$

En este caso particular, resulta que no sólo en los miembros izquierdos de las ecuaciones aparecen derivadas sino también en los miembros derechos. Es necesario aplicar un poco de álgebra para llegar a tener derivadas tan sólo en los primeros miembros, resultando:

$$i'_2 = a.E + b.i_2 - R_1.i_3$$
$$i'_3 = \frac{L_3}{L_2}.a.E + (\frac{L_3}{L_2}.b - R_2).i_2 - \frac{L_3}{L_2}.R_1.i_3$$

con las constantes: a=L_2/($L_2.L_3$+ $L_1.L_2$+ $L_1.L_3$); y b=($L_1.R_2$ - $L_2.R_1$).L_2

6. BIBLIOGRAFÍA

1. "The Circuits and Filters Handbook, Second Edition" cap. 26, editado por Wai-Kai Chen.

2. "Teoría de redes eléctricas" cap. 2, Balanian-Bickart-Seshu.