

5.- Construcción de la Matriz Admitancia de Barra del Sistema

Encontradas las matrices de admitancia de barra elementales, estas se pueden combinar para formar la matriz Admitancia de Barra del sistema, Y_{barra} . Esta también puede ser construida, y de una forma más directa, basándose en dos matrices, Incidencia de Nodos e Impedancia de Ramas (Matriz Primitiva).

5.1. - Matriz Incidencia de Nodos

Se puede describir la forma en que los elementos están conectados entre sí en el Sistema (topología), por medio de una gráfica orientada, donde cada rama del Sistema está representada por una línea con una flecha dirigida en un sentido arbitrario adoptado.

Dado por ejemplo el Sistema Unifilar sin acoplamiento mutuo mostrado en la Figura 1, se construye su gráfica orientada (Figura 11):

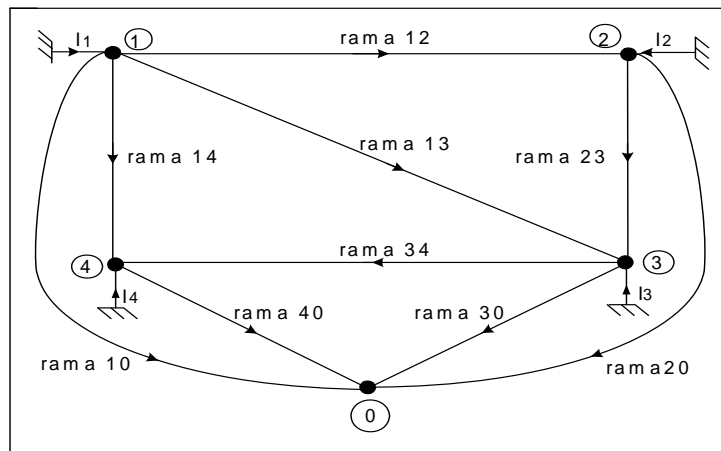


Figura 11

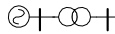
Las ramas 12,13,14,23,34, corresponden al camino eléctrico formado por las impedancias serie de las líneas de transmisión, mientras que las ramas 10,20,30,40 a los caminos eléctricos formados por las capacidades shunt de las líneas, concentradas en los nodos. La rama 30 se la puso para generalizar, pero en realidad no existe ya que en el ejemplo considerado no se tiene capacidad concentrada en el nodo 3. Las corrientes inyectadas netas en los nodos también están representadas.

Si se relacionan las tensiones de ramas con las nodales y se toman en cuenta los sentidos adoptados, se pueden formar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 U_{12} &= U_1 - U_2 & U_{13} &= U_1 - U_3 & U_{14} &= U_1 - U_4 \\
 U_{23} &= U_2 - U_3 & U_{34} &= U_3 - U_4 & & \\
 U_{10} &= U_1 & U_{20} &= U_2 & U_{40} &= U_4
 \end{aligned}$$

Que expresadas en forma matricial resultan:

$$\begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{23} \\ U_{34} \\ U_{10} \\ U_{20} \\ U_{40} \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 23 \\ 34 \\ 10 \\ 20 \\ 40 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$



De manera compacta se puede escribir:

$$\mathbf{U}_{rama_{8 \times 1}} = \mathbf{A}_{8 \times 4} \mathbf{U}_{barra_{4 \times 1}} \tag{29}$$

Donde \mathbf{A} es la matriz que muestra la forma en que inciden las ramas en las barras o nodos del sistema, por lo que se la denomina Matriz Incidencia de Nodos, y es la matriz que involucra todas las matrices \mathbf{A} elementales encontradas anteriormente, ver (15) y (25).

Si se relacionan ahora las corrientes nodales con las de rama y se toman en cuenta los sentidos adoptados, se encuentran las siguientes ecuaciones:

$$I_1 = I_{12} + I_{13} + I_{14} + I_{10}$$

$$I_2 = -I_{12} + I_{23} + I_{20}$$

$$I_3 = -I_{13} - I_{23} + I_{43}$$

$$I_4 = -I_{14} - I_{34} + I_{40}$$

Que expresadas en forma matricial resultan:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{13} \\ I_{14} \\ I_{23} \\ I_{34} \\ I_{10} \\ I_{20} \\ I_{40} \end{bmatrix}$$

De manera compacta se puede escribir:

$$\mathbf{I}_{barra_{4 \times 1}} = \mathbf{A}^T_{4 \times 8} \mathbf{I}_{rama_{8 \times 1}} \tag{30}$$

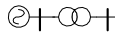
donde \mathbf{A}^T es la Matriz Incidencia de Nodos Transpuesta, ver (13) y (24).

Para construir la matriz \mathbf{A} sin necesidad de deducirla de las ecuaciones de tensiones o corrientes anteriores, se puede formar primero una Matriz \mathbf{A}' , de dimensión n° de ramas x n° total de barras (incluida la barra de referencia), donde el elemento $a_{\alpha\beta}$ de la matriz \mathbf{A}' , vale:

- 1 , cuando la rama orientada α sale del nodo β
- $a_{\alpha\beta} = -1$, cuando la rama orientada α llega al nodo β
- 0 , cuando la rama orientada α no sale ni llega al nodo β

Aplicando esta regla al gráfico orientado de la Figura 11 resulta la siguiente matriz:

$$\mathbf{A}' = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{barras} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 23 \\ 34 \\ 10 \\ 20 \\ 40 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{s} \\ \end{matrix} \tag{31}$$



Esta matriz puede leerse de dos formas diferentes, según se entre por las columnas o por las filas:

- Por ejemplo entrando por la barra 4, se observa en la fila 14 y fila 34 el valor -1 , y en la fila 40 el valor $+1$, indicando que las ramas 14 y 34 llegan a la barra 4, mientras que la rama 40 sale de la barra 4.

- Por ejemplo entrando por la fila correspondiente a la rama 20, se observa en la columna 2 el valor $+1$ y en la columna 0 el valor -1 , indicando que la rama sale del nodo 2 y llega al 0.

La matriz \mathbf{A}' tiene la propiedad que si se suman los elementos $a_{\alpha\beta}$ de cada fila, el resultado es cero.

La matriz que se usa para el cálculo de la $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$ es la que se encuentra sombreada y se la denomina Matriz Incidencia de Nodos, \mathbf{A} . Resulta de eliminar la columna correspondiente al nodo de referencia de la matriz \mathbf{A}' (nodo 0) que es común a todas las barras, obteniéndose por lo tanto $(n-1)$ barras independientes, con las que se pueden escribir $(n-1)$ ecuaciones linealmente independientes.

5.2.- Matriz Impedancia y Admitancia de Ramas

Se puede describir eléctricamente al Sistema Eléctrico de Potencia pasivo (líneas de transmisión, transformadores y reactores) por medio de ecuaciones que caracterizan a todas las ramas pasivas:

$$U_{\alpha} = z_{\alpha} I_{\alpha} = \text{caída de tensión en la impedancia } z_{\alpha} \text{ de la rama } \alpha, \quad \text{con } \alpha = 1, \dots, b \\ b = n^{\circ} \text{ de ramas}$$

Por lo tanto las ecuaciones de todas las ramas pueden expresarse en forma matricial como:

$$\mathbf{U}_{\text{rama}_{b \times 1}} = \mathbf{z}_{\text{rama}_{b \times b}} \mathbf{I}_{\text{rama}_{b \times 1}} \quad (32)$$

Las impedancias de todos los elementos pasivos del sistema están incluidas dentro de un arreglo llamado Matriz Impedancia de Ramas, \mathbf{z}_{rama} , conocida como Matriz Primitiva, que es cuadrada de dimensión " $n^{\circ} \text{ ramas} \times n^{\circ} \text{ ramas}$ " y diagonal (los elementos fuera de la diagonal principal son cero) siempre y cuando no se consideren acoplamientos mutuos. El elemento diagonal z_{α} está ubicado en la posición $\alpha\alpha$ de esta matriz (fila α , columna α).

La descripción eléctrica puede expresarse también en función de sus admitancias:

$$I_{\alpha} = y_{\alpha} U_{\alpha} = \text{corriente que circula por la impedancia } y_{\alpha} \text{ de la rama } \alpha$$

Por lo tanto las ecuaciones de todas las ramas pueden expresarse en forma matricial como:

$$\mathbf{I}_{\text{rama}_{b \times 1}} = \mathbf{y}_{\text{rama}_{b \times b}} \mathbf{U}_{\text{rama}_{b \times 1}} \quad (33)$$

La expresión (33) se puede encontrar también, multiplicando (32) por $\mathbf{z}_{\text{rama}}^{-1}$:

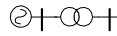
$$\mathbf{z}_{\text{rama}}^{-1} \mathbf{U}_{\text{rama}} = \mathbf{z}_{\text{rama}}^{-1} \mathbf{z}_{\text{rama}} \mathbf{I}_{\text{rama}}$$

donde:

$$\mathbf{y}_{\text{rama}_{b \times b}} = \mathbf{z}_{\text{rama}_{b \times b}}^{-1}$$

Como se considera que la matriz impedancia primitiva es diagonal, entonces:

$$y_{\alpha} = \frac{1}{z_{\alpha}} \quad (34)$$



Aplicando (38) se encuentra:

$$\mathbf{Y}_{\text{barra}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{12} & & & & & & & \\ & y_{13} & & & & & & \\ & & y_{14} & & & & & \\ & & & y_{23} & & & & \\ & & & & y_{34} & & & \\ & & & & & y_{10} & & \\ & 0 & & & & & y_{20} & \\ & & & & & & & y_{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{\text{barra}_{4 \times 4}} = \begin{bmatrix} (y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{10}) & -y_{12} & -y_{13} & -y_{14} \\ -y_{12} & (y_{12} + y_{23} + y_{20}) & -y_{23} & 0 \\ -y_{13} & -y_{23} & (y_{23} + y_{13} + y_{34}) & -y_{34} \\ -y_{14} & 0 & -y_{34} & (y_{34} + y_{14} + y_{40}) \end{bmatrix}$$

Este resultado es el mismo que se encontró al comienzo del estudio, ver expresión (8).

5.4.- La Matriz Admitancia de Barra en un SEP de n barras

La ecuación matricial compleja encontrada en (37) se puede generalizar para un SEP de n barras:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \vdots \\ \bar{I}_i \\ \vdots \\ \bar{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \cdots & \bar{Y}_{1i} & \cdots & \bar{Y}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{Y}_{i1} & \cdots & \bar{Y}_{ii} & \cdots & \bar{Y}_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{Y}_{n1} & \cdots & \bar{Y}_{ni} & \cdots & \bar{Y}_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \vdots \\ \bar{U}_i \\ \vdots \\ \bar{U}_n \end{bmatrix} \quad (39)$$

donde n es el número de barras del SEP, sin considerar el nodo tierra (nodo 0).

En forma compacta se puede escribir:

$$\mathbf{I}_{\text{barra}_{n \times 1}} = \mathbf{Y}_{\text{barra}_{n \times n}} \mathbf{U}_{\text{barra}_{n \times 1}} \quad (40)$$

Es decir, el vector de corrientes de barra (corrientes inyectadas netas en la barra) es igual al producto de la matriz admitancia de barra y el vector de tensiones de barra (tensiones de fase), donde:

$$\mathbf{Y}_{\text{barra}_{n \times n}} = \mathbf{A}_{n \times b}^T \mathbf{y}_{\text{rama}_{b \times b}} \mathbf{A}_{b \times n} \quad (41)$$

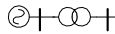
Resultando que el elemento ii de la matriz admitancia de barra vale:

$$Y_{ii} = \sum_{k \in \Omega} y_{ik} \quad \Omega = \text{conjunto de los nodos vecinos del nodo } i \text{ (incluido el nodo tierra)}. \quad (42)$$

y el elemento fuera de la diagonal:

$$Y_{ij} = Y_{ji} = -y_{ij} \quad (43)$$

La matriz admitancia de barra $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$ es cuadrada de orden $n \times n$, es simétrica respecto de la diagonal principal y es esparsa para los SEP reales (aproximadamente un 90-95 % de sus elementos son iguales a cero). Si todos lo elementos fueran diferentes de cero, esto significaría que cada nodo del SEP está conectado físicamente con todos los otros nodos. Para almacenar los datos diferentes de cero en la memoria del computador, se hace uso de técnicas llamadas de "almacenamiento compacto".



Se puede también ahora generalizar los conceptos encontrados en el punto 2.1, acerca del significado físico de los elementos de la matriz \mathbf{Y} barra. Así, de la ecuación matricial (39) se deduce que la corriente inyectada en el nodo genérico i vale:

$$I_i = Y_{i1} U_1 + Y_{i2} U_2 + \dots + Y_{ii} U_i + \dots + Y_{ij} U_j + \dots + Y_{in} U_n = \sum_{k=1}^n Y_{ik} U_k \quad (44)$$

y de aquí resulta:

$$\text{a) } Y_{ii} = \frac{I_i}{U_i} \quad \text{con } U_k = 0 \quad \text{para todo } k = 1, 2, \dots, n \quad \text{y } k \neq i \quad (45)$$

El elemento de admitancia de barra en la posición ii (diagonal principal), Y_{ii} , es igual a la corriente inyectada en el nodo i , I_i , cuando en el mismo se tiene aplicada una tensión de 1 pu, y el resto de los nodos está cortocircuitado a tierra ($U_k = 0$).

$$\text{b) } Y_{ij} = \frac{I_i}{U_j} \quad \text{con } U_k = 0 \quad \text{para todo } k = 1, 2, \dots, i, \dots, n \quad \text{y } k \neq j \quad (46)$$

El elemento de admitancia de barra en la posición ij (fuera de la diagonal), Y_{ij} , es igual a la corriente inyectada en el nodo i , I_i , cuando se tiene aplicada una tensión de 1 pu en el nodo j y el resto de los nodos está cortocircuitado a tierra ($U_k = 0$).

5.5.- Sistemas con Acoplamientos Mutuos

Si se tienen acoplamientos mutuos entre diferentes ramas del sistema, la ley de formación general para la construcción de la matriz \mathbf{Y} barra, (42) y (43), deja de ser válida.

Para tomar en cuenta los acoplamientos se procede de la siguiente manera:

Paso 1.- Se construye la matriz impedancia de ramas, \mathbf{z}_{rama} , considerando los acoplamientos.

(Si por ejemplo hay acoplamientos entre las ramas 14 y 34 del Sistema mostrado en la Figura 1, las impedancias en la posición “14 y 41” y “34 y 43” de la matriz \mathbf{z}_{rama} tendrán un valor diferente de cero).

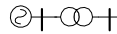
Paso 2.- Se invierte esta matriz \mathbf{z}_{rama} para encontrar la matriz \mathbf{y}_{rama} .

(La admitancia de una rama que no está acoplada, es la inversa de la impedancia de esa rama, expresión (34). Las admitancias de las ramas que están acopladas se calculan aplicando la expresión (22)).

A partir de aquí hay dos caminos a seguir:

A1) Dado el Sistema con acoplamientos, se puede encontrar un Sistema equivalente sin acoplamiento usando los conceptos ya estudiados y dibujados en la Figura 7, y a este Sistema equivalente entonces ya se le puede aplicar la ley de formación general (42) y (43) para la construcción de la matriz \mathbf{Y} barra.

A2) Con la matriz \mathbf{y}_{rama} encontrada y con la matriz de incidencia \mathbf{A} , se calcula la \mathbf{Y} barra mediante la expresión (41).



6.- Ejemplo Conceptual: SEP con acoplamiento

Dado el Sistema mostrado en la Figura 12, que es el mismo Sistema de la Figura 1 pero ahora considerando acoplamientos entre las ramas 14 y 34, encontrar su Y_{barra} .

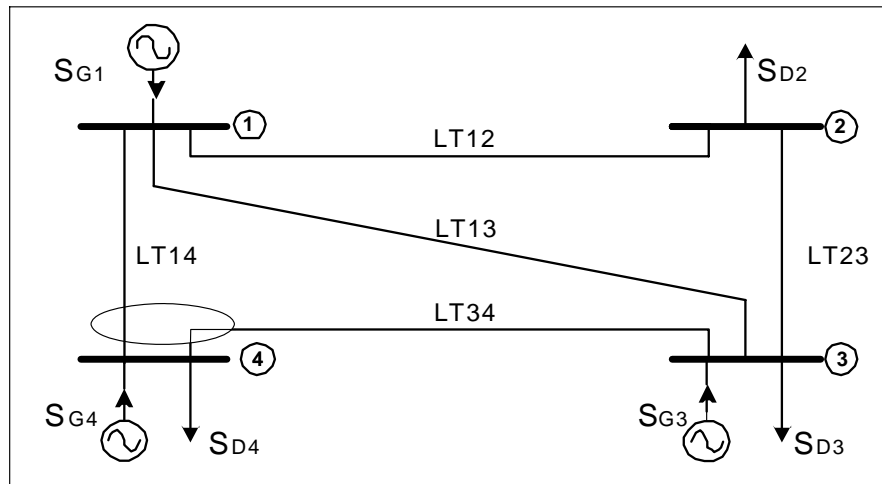


Figura 12

Los valores de impedancias en [pu] son los siguientes:

	Líneas de Transmisión				
	LT12	LT13	LT14	LT23	LT43
impedancia serie	j0,25	j0,20	j0,15	j0,15	j0,20
susceptancia shunt total	j0,02	0	j0,01	0	0
impedancia mutua	j0,1 [pu], entre la LT14 y la LT34				

Solución

Para calcular la impedancia por ejemplo z_{10} , que corresponde a la rama 10, se tiene en cuenta la presencia de todas las capacidades shunt conectadas a este nodo (ver Figuras 2 y 12 y la expresión (6)).

$$b_{10} = (b_{12} + b_{14}) / 2 = j0,015$$

entonces:

$$z_{10} = 1 / b_{10} = -j 66,6 \text{ [pu]}$$

De la misma manera se puede encontrar:

$$z_{20} = 1 / (b_{12}/2) = -j100 \text{ [pu]}$$

$$z_{40} = 1 / (b_{14}/2) = -j200 \text{ [pu]}$$

$$z_{30} = 1 / (b_{13}/2) = \text{infinito}$$

El diagrama de impedancias resulta:

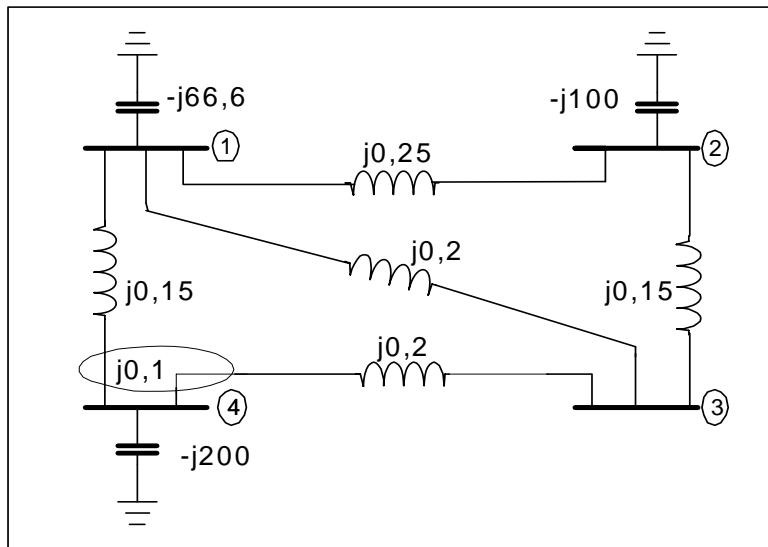


Figura 13

Se realizan los pasos señalados en el punto 5.5

Paso 1.- Se construye la matriz impedancia de ramas por observación de la Figura 13:

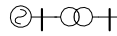
$$\begin{array}{r}
 \text{Ramas} \rightarrow 12 \quad 13 \quad 14 \quad 23 \quad 34 \quad 10 \quad 20 \quad 40 \\
 \downarrow \\
 \begin{array}{l}
 12 \\
 13 \\
 14 \\
 23 \\
 34 \\
 10 \\
 20 \\
 40
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 j0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & j0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & j0,15 & 0 & j0,1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & j0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & j0,1 & 0 & j0,2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j66,6 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j100 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j200
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

$z_{rama \ 8 \times 8} =$

Paso 2: Se construye la matriz admitancia de ramas. Se usa el resultado del ejemplo 1:

$$\begin{array}{r}
 \text{Ramas} \rightarrow 12 \quad 13 \quad 14 \quad 23 \quad 34 \quad 10 \quad 20 \quad 40 \\
 \downarrow \\
 \begin{array}{l}
 12 \\
 13 \\
 14 \\
 23 \\
 34 \\
 10 \\
 20 \\
 40
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1/j0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1/j0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -j10 & 0 & j5 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1/j0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & j5 & 0 & -j7,5 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/-j66,6 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/-j100 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/-j200
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

$y_{rama \ 8 \times 8} = Z^{-1}_{rama \ 8 \times 8} =$



Ramas → 12 13 14 23 34 10 20 40

↓

y rama $8 \times 8 =$

12	-j4	0	0	0	0	0	0	0
13	0	-j5	0	0	0	0	0	0
14	0	0	-j10	0	j5	0	0	0
23	0	0	0	-j6,66	0	0	0	0
34	0	0	j5	0	-j7,5	0	0	0
10	0	0	0	0	0	j0,015	0	0
20	0	0	0	0	0	0	j0,01	0
40	0	0	0	0	0	0	0	j0,005

El diagrama de admitancia resulta entonces:

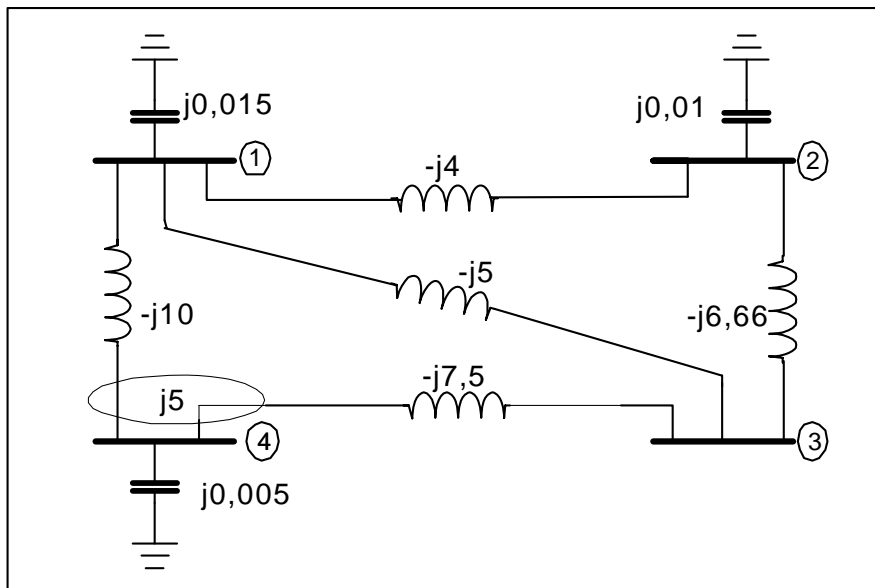


Figura 14

Dos caminos posibles para encontrar la Y barra

A1) Usando la Figura 8b, se realiza el circuito equivalente sin mutua (Figura 15):

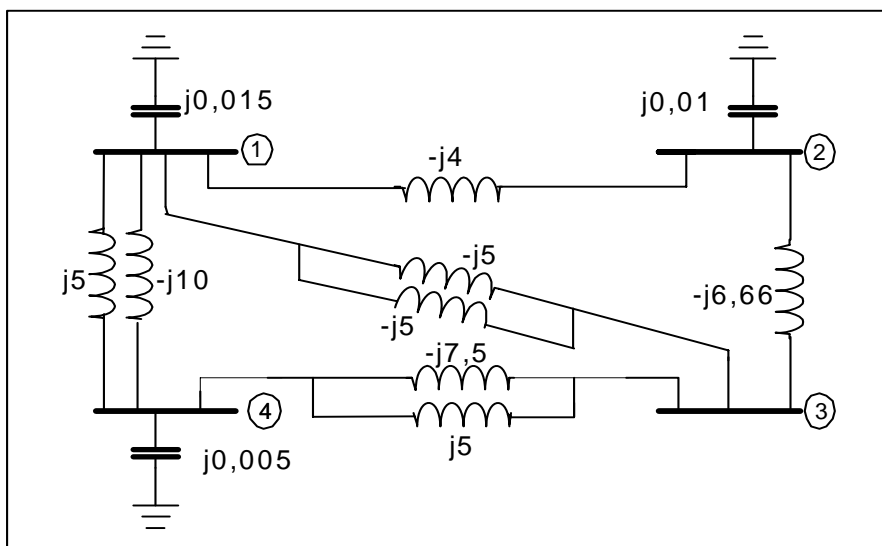


Figura 15

Se aplica la ley de formación general para construir la matriz $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$ (expresión (42) y (43)):

$$\mathbf{Y}_{\text{barra}_{4 \times 4}} = \begin{array}{c} \text{Barras} \rightarrow \\ \downarrow \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} -j4 - j10 - j5 + j0,015 & j4 & j10 & j5 \\ j4 & -j4 - j6,66 + j0,01 & j6,66 & 0 \\ j10 & j6,66 & -j6,66 - j10 - j2,5 & j2,5 \\ j5 & 0 & j2,5 & -j2,5 - j5 + j0,005 \end{bmatrix}$$

La Y barra encontrada vale:

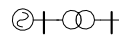
$$\mathbf{Y}_{\text{barra}_{4 \times 4}} = \begin{bmatrix} -j18,985 & j4 & j10 & j5 \\ j4 & -j10,65 & j6,66 & 0 \\ j10 & j6,66 & -j19,16 & j2,5 \\ j5 & 0 & j2,5 & -j7,495 \end{bmatrix}$$

A2) Se aplica la expresión dada en (41):

$$\mathbf{Y}_{\text{barra}_{4 \times 4}} = \mathbf{A}_{4 \times 8}^T \mathbf{y}_{\text{rama}_{8 \times 8}} \mathbf{A}_{8 \times 4}$$

$$\mathbf{y}_{\text{rama}_{8 \times 8}} \mathbf{A}_{8 \times 4} = \begin{bmatrix} -j4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j10 & 0 & j5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j6,66 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j5 & 0 & -j7,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j0,015 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j0,005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_{\text{rama}_{8 \times 8}} \mathbf{A}_{8 \times 4} = \begin{bmatrix} -j4 & j4 & 0 & 0 \\ -j5 & 0 & j5 & 0 \\ -j10 & 0 & j5 & j5 \\ 0 & -j6,66 & j6,66 & 0 \\ j5 & 0 & -j7,5 & j2,5 \\ j0,015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j0,005 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{A}_{4 \times 8}^T \mathbf{y}_{rama_{8 \times 8}} \mathbf{A}_{8 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j4 & j4 & 0 & 0 \\ -j5 & 0 & j5 & 0 \\ -j10 & 0 & j5 & j15 \\ 0 & -j6,66 & j6,66 & 0 \\ j5 & 0 & -j7,5 & j2,5 \\ j0,015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j0,005 \end{bmatrix}$$

La Y barra encontrada vale:

$$\mathbf{Y}_{barra_{4 \times 4}} = \begin{bmatrix} -j18,985 & j4 & j10 & j5 \\ j4 & -j10,65 & j6,66 & 0 \\ j10 & j6,66 & -j19,16 & j2,5 \\ j5 & 0 & j2,5 & -j7,495 \end{bmatrix}$$

Este es el mismo resultado que se llegó usando el camino **A1**.

Nota: Si la impedancia mutua es positiva es porque las corrientes magnetizan en el mismo sentido. Esto se toma en cuenta haciendo que el sentido de las ramas 14 y 34 (Figura 11) lleguen o salgan de la barra 4 (en el caso analizado las ramas llegan).

Por último la ecuación matricial de corrientes resulta:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j18,985 & j4 & j10 & j5 \\ j4 & -j10,65 & j6,66 & 0 \\ j10 & j6,66 & -j19,16 & j2,5 \\ j5 & 0 & j2,5 & -j7,495 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$