

ANALISIS

DE

FLUJOS DE CARGA

2. REPRESENTACION DEL SISTEMA DE POTENCIA.

El diagrama completo de un sistema eléctrico de potencia representando las tres fases es extremadamente complicado, para un sistema eléctrico de tamaño práctico, tanto que no logra representar la información requerida. En su lugar, lo que se ha hecho es desarrollar una serie de símbolos sencillos que representan cada componente del sistema eléctrico, lo cual es utilizado en su representación y resulta en un tipo de diagramas mucho más práctico denominado *diagrama unifilar*. Por otro lado, trabajar con cantidades eléctricas reales, por llamarlas de algún modo, es decir, voltios, amperes, ohms, etcétera, resulta muy complicado e inconveniente. Por esto la necesidad de normalizar cualquier sistema es importante. Esto conduce al desarrollo de un método de normalización conocido como *sistema por unidad*. Lo anterior será discutido poco más adelante.

Es fundamental recordar de los cursos de circuitos, que en un sistema eléctrico trifásico, se puede analizar únicamente una fase, pues la historia de lo que ocurre en las otras, es la misma, únicamente desfasada 240° ó 120° , según se trate de fase *b* ó *c*, tomando en cuenta que la fase retenida para análisis es la fase *a*, y refiriéndonos a secuencia positiva, cuyos conceptos se tratarán capítulos adelante.

2.1 DIAGRAMAS UNIFILAR Y DE REACTANCIAS.

El diagrama unifilar de un sistema eléctrico muestra las principales conexiones y arreglos de sus componentes. Un componente particular puede o no mostrarse, dependiendo de la información requerida en el estudio particular, por ejemplo, los interruptores no son necesarios y pueden omitirse, por tanto, en un estudio de flujos de potencia; sin embargo, si el estudio es de protección es esencial incluirlos. Las redes de sistemas de potencia son representadas por diagramas unificares, usando símbolos adecuados para generadores, motores, transformadores y cargas. Es una forma práctica y conveniente de representar cualquier red, en lugar de mostrara el detalle del diagrama trifásico correspondiente al sistema eléctrico real, el cual puede ser engorroso, confuso y muy complicado para una red de tamaño real. Las conexiones estrella, delta y neutros

aterrizados que ocurren en transformadores, generadores, motores, etcétera, se indican a un lado del símbolo que representa la componente correspondiente.

En el diagrama siguiente se muestra, a manera de ejemplo, el diagrama unificar de un sistema de tamaño pequeño, pero representativo.

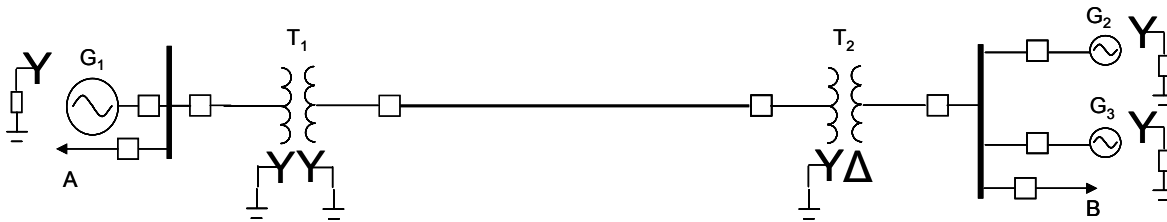


Figura 2.1. 1. Diagrama unificar de Sistema Eléctrico.

Los datos del sistema eléctrico se enumeran a continuación.

Generador No.1: 30 MVA, 10.5 kV, $X'' = 44\%$, $X_n = 1.5 \Omega$

Generador No.2: 15 MVA, 6.6 kV, $X'' = 41\%$, $X_n = 2.5 \Omega$

Generador No.3: 25 MVA, 6.6 kV, $X'' = 32\%$, $X_n = 2.5 \Omega$

Transformador T_1 (3 ϕ): 15 MVA, 33/11 kV, $X = 21\%$

Transformador T_2 (3-1 ϕ): 5 MVA, 20/6.8 kV, $X = 0.24\%$

Línea de Transmisión: 20.5 Ω /fase

Carga A: 15 MW, 11 kV, factor de potencia de 0.9 en atraso

Carga B: 40 MW, 6.6 kV, factor de potencia de 0.85 en atraso.

En el caso del transformador T_2 se trata de un banco de tres unidades monofásicas conectadas como se muestra en el diagrama; por supuesto en este caso, la potencia nominal corresponde a cada unidad y la relación de transformación igualmente. Las reactancias denotadas por X_n , son las reactancias de aterrizado de los generadores. En ocasiones estos valores están especificados, al igual que las reactancias propias de la máquina, en forma normalizada, ya sea en % ó en p.u., en cuyo caso debemos entender que las bases de su normalización son los datos nominales del equipo. En el presente ejemplo, se definen en Ω .

El diagrama de impedancias monofásico, para usarse en casos de sistemas balanceados, se muestra en la figura 2.1.2 a continuación.

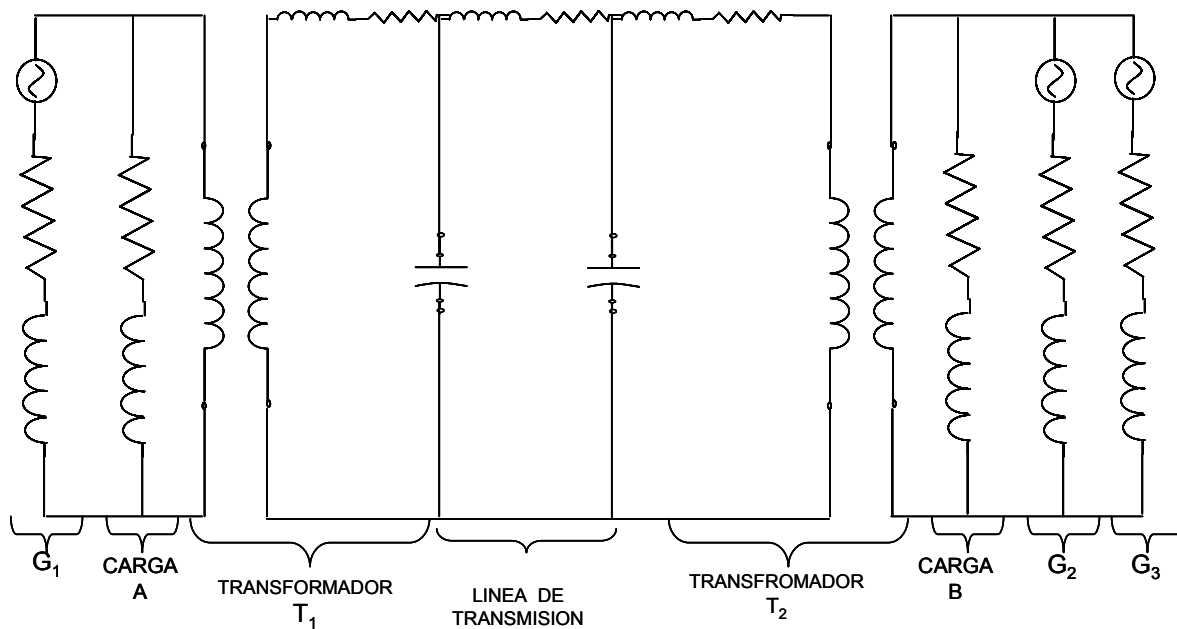


Figura 2.1.2. Diagrama de impedancias monofásico del sistema eléctrico.

En este diagrama se muestran equivalentes monofásicos de los elementos del sistema eléctrico considerado. Los transformadores se muestran como transformadores ideales, en donde sus reactancias de magnetización se han omitido. En el caso de la línea de transmisión, se muestra el modelo Π nominal, aunque los datos especificados anteriormente, incluyen únicamente los parámetros correspondientes al modelo corto de línea de transmisión. En el caso de los generadores se muestra la impedancia, aunque en los datos, se especifican únicamente los valores de sus reactancias subtransitorias. Las cargas se supone que son pasivas. Es importante observar que las impedancias de aterrizado de los generadores no aparecen en el diagrama anterior, debido a que en sistemas balanceados evidentemente estas no intervienen.

Un punto importante en el análisis de los sistemas eléctricos, al igual que para cualquier sistema, es la normalización de dicho sistema, ya mencionada previamente. En la

siguiente sección desarrollaremos las ecuaciones y el procedimiento que nos conducen a dicha normalización.

En las unidades iniciales se discutió de manera detallada la modelación de la línea de transmisión aérea. En cursos previos, se aprendió a modelar la máquina sincrónica, así como los transformadores, por lo que del modelado básico usado en los tipos de estudio que cubren el material presentado aquí, únicamente nos resta exponer algunas consideraciones acerca del modelado de cargas. Existen fundamentalmente dos regímenes en los cuales llevar a cabo el modelado de carga: en estado estable y en régimen transitorio. El segundo caso no se comentará, pues está fuera del alcance del nivel del material presentado, el cual es planeado para un curso introductorio de análisis de los sistemas eléctricos de potencia en estado estable.

2.2 MODELADO DE CARGAS.

Es común que en la literatura a nivel básico se omita la discusión sobre el modelado de cargas, o bien esta sea muy limitada. Lo anterior genera la idea, a ese nivel, de que el modelado de la carga es un asunto concluido y muy simple.

En estas notas tratamos de dar una idea de las complicaciones, que en la realidad, presenta el modelado de ese importante elemento del sistema eléctrico.

Empecemos por dar una breve clasificación de las cargas. Las cargas pueden clasificarse, parcialmente, en:

- Lineales y no lineales, de acuerdo a la función matemática que las define.
- Eléctricas, electromecánicas, etcétera, de acuerdo a su naturaleza y por ende al tipo de variables que se considera.
- Determinísticas o aleatorias, en función del modelo usado.

De acuerdo con un criterio cualitativo se pueden clasificar además, como particulares y globales [9].

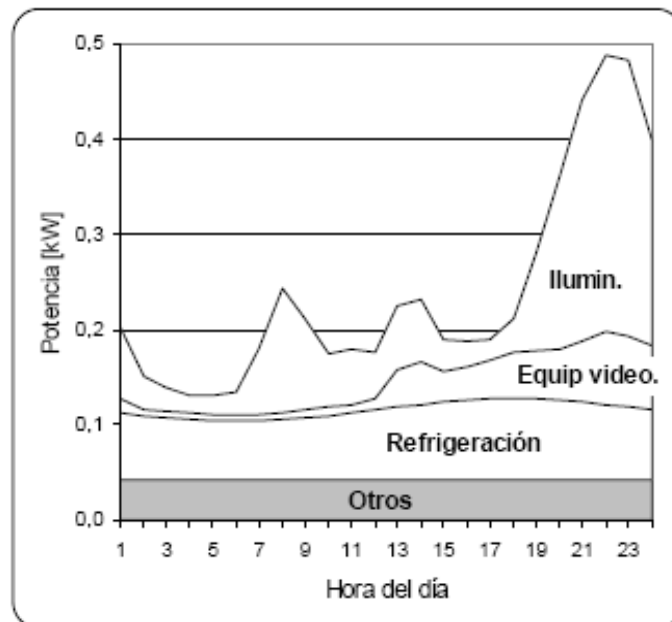
El primer caso corresponde a la presencia de un solo dispositivo, y es el tipo de modelado que típicamente se cubre en los cursos de conversión de la energía. Los modelos concretos

de este caso se obtienen al analizar su comportamiento en el marco conceptual de las leyes electromagnéticas del caso; ejemplo de esto es el modelo de un motor, un horno, etc.

El segundo caso, cargas globales, están relacionados con la existencia de dispositivos de distintas características y se asocian a subestaciones, alimentadores específicos, centros de transformación, etc. Este último tipo de cargas se definen por medio de los denominados *modelos agregados*.

Modelos Estacionarios. Estos modelos de carga son los que comúnmente se discuten o se enumeran en la literatura básica de sistemas de potencia, y son los que se usan en este curso. Los más comunes son:

1. Modelo de inyección de Potencia Constante. Este modelo representa generalmente grandes consumos vistos en las subestaciones. Los valores de P y Q se obtienen a partir de mediciones en la subestación y se representan por *curvas de demanda*. En este modelo, P y Q se suponen *constantes*. Esta es la representación de carga usada generalmente en el estudio de flujos de potencia, y es la que usaremos en las próximas unidades.



Curva de demanda horaria

2. Modelo de Corriente Constante. Su uso es menos frecuente en cargas agregadas y es muy usado en estudios armónicos. En este modelo de carga la corriente es calculada como

$$I = \frac{P - jQ}{V^*} = |I| \angle (\theta - \phi)$$

donde $V = |V| \angle \theta$, y $\phi = \tan^{-1} \frac{Q}{P}$ es el ángulo del factor de potencia. La magnitud de I se mantiene constante.

3. Modelo de Impedancia Constante. Aunque este modelo no es utilizado en flujos, por lo menos no en forma frecuente, es sin embargo muy común en estudios de estabilidad transitoria. Es un modelo de utilidad en cargas agregadas en redes de distribución de medio y bajo voltaje. Si suponemos que P y Q de la carga permanece constante, la impedancia de calcula como sigue

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{|V|^2}{P - jQ}$$

o en forma de admitancia tendríamos

$$Y = \frac{I}{V} = \frac{P - jQ}{|V|^2}$$

Los modelos anteriores forman parte de los llamados *modelos estacionarios genéricos* y respaldan el carácter agregado de la carga. Antiguamente las cargas domésticas e industriales compuestas por calefacción y alumbrado, se modelaban como impedancia constante, mientras las máquinas rotatorias se modelaban como una forma simple de máquina síncrona. Las cargas compuestas se modelan por una mezcla de estos tipos de carga. Existen varias formas de representación de dichos modelos, pero uno de los más aceptados se describe a continuación.

Si se considera una carga cuya potencia es función del voltaje y la frecuencia en el bus donde está conectada, obtenemos un modelo de carga general, dado por

$$P = K_p * (V)^{pv} * (f)^{pf}$$

$$Q = K_q * (V)^{qv} * (f)^{qf}$$

Donde K_p y K_q son constantes que dependen de los valores nominales de las variables P y Q .

Asignando valores a pv , pf , qv y qf , podemos generar los modelos estacionarios mencionados anteriormente.

Las cargas estáticas son relativamente insensibles a la variación de frecuencia, por lo que, $pv = pf = 0$. En este caso tenemos que $P = K_p$ y $Q = K_q$, lo cual constituye el modelo de *inyección de potencia constante*.

Si hacemos $pv = qv = 1$ y $pf = qf = 0$ obtenemos

$$P = K_p * V \quad Q = K_q * V$$

O bien

$$P/V = K_p = I \quad Q/V = K_q = I,$$

lo cual representa el modelo de *corriente constante*.

Finalmente si $pv = qv = 2$ y $pf = qf = 0$, obtenemos el modelo de admitancia como se muestra

$$P = K_p * V^2 \quad Q = K_q * V^2$$

de donde

$$P/V^2 = K_p = Y \quad Q/V^2 = K_q = Y$$

La tabla que se muestra enseguida nos proporciona valores típicos de parámetros de carga característicos

CARGA	<i>pv</i>	<i>qv</i>	<i>pf</i>	<i>qf</i>
Lámpara de filamento	1.6	0	0	0
Lámpara fluorescente	1.2	3.0	-1.0	2.8
Calefactor	2.0	0	0	0
Motor de inducción media carga	0.2	1.6	1.5	-0.3
Motor de inducción plena carga	0.1	0.6	2.8	1.8
Horno de reducción	1.9	2.1	-0.5	0
Planta de aluminio	1.8	2.2	-0.3	0.6

Estas características se pueden combinar para obtener la característica general de la carga en un bus.

Para ilustrar este tipo de modelos de carga característica, supongamos que tenemos n cargas homogéneas, con características individuales pv_j y potencia nominal P_j . Dicho grupo de cargas tendrá un modelo global dado por

$$(pv_j)_{global} = \frac{\sum_{j=1}^n (pv_j * P_j)}{\sum_{j=1}^n (P_j)}$$

Las otras características globales se pueden determinar de manera similar.

Por supuesto, tal como ocurre con el modelado de otros elementos del sistema, existen limitantes en la aplicación de estos modelos. Uno muy característico se presenta en el caso de que ocurra un valor bajo de voltaje.

El problema mencionado se puede observar cuando $pv, qv \leq 1.0$ y el voltaje cae a un valor muy pequeño. A medida que $|V|$ decrece, no se registra decremento en $|I|$. En el caso límite, $|V| = 0$, existe un flujo de corriente lo cual no tiene sentido, dada la naturaleza no dinámica del modelo.

Lo anterior nos conduce a considerar que las características de carga son válidas solamente para pequeñas desviaciones de voltaje, con respecto al valor nominal.

Además también podemos ver que pequeños errores en magnitud y fase de un voltaje pequeño, producen grandes errores en magnitud y fase de corriente, lo cual resulta en pérdida de exactitud, además de convergencia pobre o divergencia en métodos iterativos.

Estos problemas se pueden superar usando una característica de carga de impedancia constante para representar las cargas cuando el voltaje cae por debajo de un valor predeterminado.

2.3 SISTEMAS EN POR UNIDAD (P.U.).

La Normalización de los sistemas es una tarea necesaria prácticamente en todas las áreas de la Ingeniería, y la Ingeniería de los Sistemas de Potencia no es la excepción. La variedad de valores numéricos tanto en variables eléctricas (voltaje, corriente, potencia, etc.), como en parámetros (impedancia, admitancia, etc.), hace imprescindible el recurrir a la normalización para facilitar el manejo numérico de los problemas presentados en el análisis de los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP).

La definición básica para expresar una variable ó parámetro en forma normalizada está dada por:

$$\text{Cantidad en pu} = \text{Cantidad Real (en unidades originales)} / \text{Cantidad Base}$$

$$\text{Cantidad en \%} = (\text{Cantidad en pu}) \cdot 100.$$

Algunas de las ventajas de la normalización (del sistema en *p.u.*) son:

1. Su representación resulta en datos con más significado donde las magnitudes relativas de todas las cantidades de circuitos similares pueden compararse directamente.
2. La impedancia en *p.u.* de cualquier transformador es la misma cuando se refiere al primario ó al secundario.

3. La impedancia en *p.u.* de un transformador en un sistema trifásico es la misma sin importar el tipo de conexión del devanado (estrella-delta, estrella-estrella ó delta-delta).
4. El método en *p.u.* es independiente de cambios de voltaje y desfases a través de transformadores, donde los voltajes de base en los devanados son proporcionales al número de vueltas de estos.
5. Los fabricantes de transformadores usualmente especifican los valores de las impedancias en *p.u.* ó por ciento de los datos nominales de placa de los equipos. Por tanto la impedancia nominal puede usarse directamente, si las bases escogidas son las mismas que las de placa.
6. Los valores en *p.u.* de las impedancias caen dentro de un rango de valores muy estrecho, mientras que los valores óhmicos tiene un espectro numérico muy amplio. Además existen tablas en manuales de referencia con valores típicos para los diferentes tipos de equipo, y se puede verificar si para un equipo dado el valor de su impedancia es correcto ó está en un rango adecuado, consultando en dichos manuales de referencia.
7. Todo lo anterior nos conduce a concluir que es conveniente realizar las simulaciones de los SEP normalizados, dado que además numéricamente representa ventajas en cuanto al control del error.

Las cuatro cantidades eléctricas más usuales son:

1. Voltaje, V (V)
2. Corriente, $A(I)$
3. Volt-Amperes, VA
4. Impedancia, V/A (Z).

Se puede observar que solamente V y A están involucradas y por lo tanto se requiere especificar solamente dos cantidades, de las cuatro arriba listadas, y las otras dos quedarán definidas en función de éstas. Típicamente en el análisis de sistemas de potencia se especifican el voltaje y la potencia aparente (V y VA) y las otras dos cantidades se calculan en función de éstas. La potencia aparente se selecciona debido a que es común a

través de toda la red, mientras que los niveles de voltaje cambian como resultado de la presencia de los transformadores.

Si seleccionamos V_{base} y VA_{base} , podemos calcular $I_{base} = VA_{base} / V_{base}$ y además $Z_{base} = (V_{base})^2 / VA_{base}$, en ambos casos para sistemas monofásicos. Con lo anterior en mente, podemos calcular las cantidades en *p.u.* (por unidad) como sigue:

$$V_{pu} = V_{act} / V_{base}, \quad I_{pu} = I_{act} / I_{base}, \quad Z_{pu} = Z_{act} / Z_{base}, \quad P_{pu} = P_{act} / VA_{base}, \\ Q_{pu} = Q_{act} / Q_{base}.$$

Como las unidades de VA y V son muy pequeñas en la práctica, son más comunes en su lugar MVA y kV, respectivamente. En forma monofásica podemos entonces definir:

$$I_{base} = \frac{MVA_{base} * 10^3}{kV_{base}} \qquad Z_{base} = \frac{(kV_{base})^2}{MVA_{base}}.$$

Hasta aquí se ha hecho mención de que estas relaciones son válidas en base monofásica, sin embargo en forma trifásica estas cantidades se pueden usar como sigue:

CONEXIÓN ESTRELLA

$$kV_{base(3\phi)} = \sqrt{3} * kV_{base(1\phi)}$$

$$I_{base(3\phi)} = I_{base(1\phi)}$$

$$MVA_{base(3\phi)} = 3 * MVA_{base(1\phi)}$$

$$Z_{base(3\phi)} = \frac{(kV_{base(3\phi)})^2}{MVA_{base(3\phi)}} = \frac{(kV_{base(1\phi)})^2}{MVA_{base(1\phi)}}$$

CONEXIÓN DELTA

$$kV_{base(3\phi)} = kV_{base(1\phi)}$$

$$I_{base(3\phi)} = \sqrt{3} * I_{base(1\phi)}$$

$$MVA_{base(3\phi)} = 3 * MVA_{base(1\phi)}$$

$$Z_{base(3\phi)} = \frac{(kV_{base(3\phi)})^2}{MVA_{base(3\phi)}} = \frac{(kV_{base(1\phi)})^2}{MVA_{base(1\phi)}}$$

De lo anterior podemos concluir que $Z_{base(3\phi)} = Z_{base(1\phi)}$. Es importante mencionar que las cantidades más comúnmente usadas son trifásicas, pues el equipo es usualmente trifásico y los datos de placa están dados en esa misma base. La excepción a esto lo constituyen los bancos de transformadores compuestos por tres unidades monofásicas, cada una de las cuales con sus propios datos nominales.

TRANSFORMADORES.

Supongamos, con el fin de obtener relaciones generales, que existen taps[†] o derivaciones en ambos devanados del transformador monofásico mostrado en la figura 2.1.3.

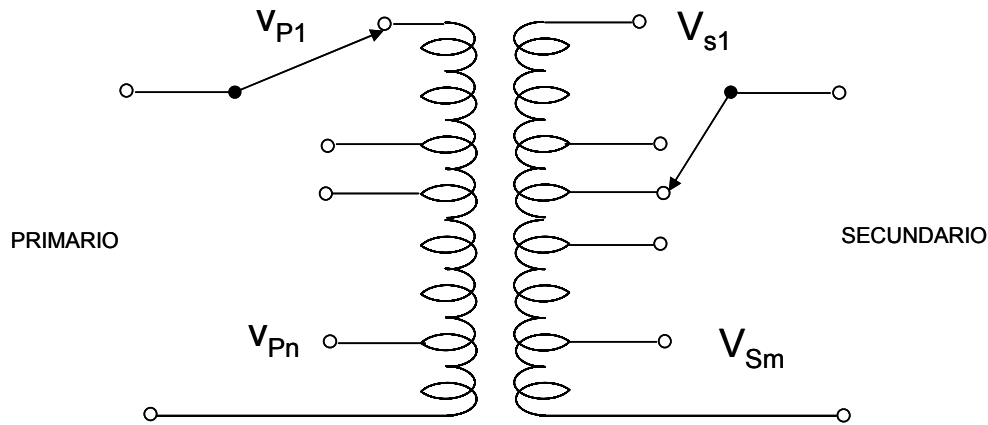


Figura 2.1.3. Modelo general de un transformador.

Suponga que se selecciona una base en kV para el devanado primario, entonces los kV_{base} para el devanado secundario serán

$$kV_{base(sec)} = kV_{base(pri)} \frac{V_{S(no\ min\ al)}}{V_{P(no\ min\ al)}}$$

$V_{S(no\ min\ al)}$ y $V_{P(no\ min\ al)}$ son las posiciones del tap expresadas en kV para los lados secundario y primario, respectivamente. El subíndice (nominal) indica la posición del tap para el voltaje nominal. Más adelante esta relación de taps se expresará en por unidad.

Impedancia base:

$$Z_{base(sec)} = \frac{\left(kV_{base(sec)}\right)^2}{MVA_{base}}$$

$$Z_{base(pri)} = \frac{\left(kV_{base(pri)}\right)^2}{MVA_{base}}$$

Impedancia del transformador (*p.u.*):

$$Z_{pu(sec)} = \frac{Z_{act(sec)}}{Z_{base(sec)}}$$

$$Z_{pu(pri)} = \frac{Z_{act(pri)}}{Z_{base(pri)}}$$

Razón del Tap:

$$Z_{pu(pri)} = \frac{Z_{act(pri)}}{Z_{base(pri)}}, \text{ entonces } Z_{act(pri)} = a^2 * Z_{act(sec)}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} Z_{act(pri)} &= \frac{Z_{act(pri)}}{Z_{base(pri)}} = \frac{a^2 Z_{act(sec)}}{\left(kV_{base(pri)}\right)^2 / MVA_{base}} \\ &= \frac{a^2 Z_{act(sec)}}{a^2 \left(kV_{base(sec)}\right)^2 / MVA_{base}} \\ &= \frac{Z_{act(sec)}}{Z_{base(sec)}} = Z_{pu(sec)} \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que:

$$Z_{pu(pri)} = Z_{pu(sec)} .$$

CAMBIO DE BASE.

Debido a que los datos de placa de los equipos están normalizados, tomando como base los datos nominales del propio equipo, es decir $kV_{nominal}$ y $MVA_{nominal}$, es preciso hacer un cambio de base, pues en general las bases del equipo no coinciden con las del sistema.

Suponga además que se usarán nuevas bases denominadas kV_{base2} y MVA_{base2} , entonces

$$\text{tenemos } Z_{pu2} = \frac{Z_{act}}{Z_{base2}} .$$

Es importante notar que $Z_{act} = Z_{pu1} Z_{base1} = Z_{pu2} Z_{base2}$, ó bien

$$Z_{pu2} = Z_{pu1} \frac{Z_{base1}}{Z_{base2}} = Z_{pu1} \frac{(kV_{base1})^2 / MVA_{base1}}{(kV_{base2})^2 / MVA_{base2}}$$

de donde obtenemos

$$Z_{pu2} = Z_{pu1} \left(\frac{kV_{base1}}{kV_{base2}} \right)^2 \frac{MVA_{base1}}{MVA_{base2}}$$

Esta última expresión es útil cuando los datos nominales del equipo son diferentes a las bases de sistema seleccionadas.

IMPEDANCIAS MUTUAS EN PU.

En los circuitos de transmisión que comparten el mismo derecho de vía existe acoplamiento magnético en la red de secuencia cero, razón por la cual es importante encontrar la forma para expresar en *p.u.* dichas impedancias de acoplamiento.

Considere los dos circuitos acoplados magnéticamente, mostrados en la figura 2.1.4.

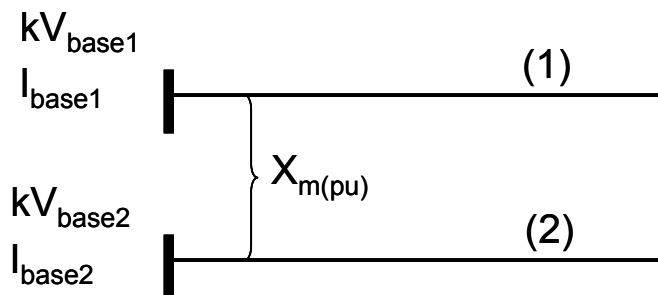


Figura 2.1.4. Circuitos magnéticamente acoplados.

Por supuesto que los MVA_{base} es común a través de todo el sistema.

En términos de la línea (2) tenemos

$$X_{m2(pu)} = \frac{X_{m(act)}}{X_{base2}} = \frac{X_{m(act)}}{kV_{base2} / I_{base1}}$$

$$= \frac{X_{m(act)}}{kV_{base2}} I_{base1} \frac{kV_{base1}}{kV_{base1}}$$

$$= \frac{X_{m(act)} MVA_{base}}{kV_{base2} kV_{base1}},$$

dado que la potencia base es la misma en todo el sistema.

De lo anterior obtenemos

$$X_{m(pu)} = X_{m(act)} \frac{MVA_{base}}{kV_{base1} kV_{base2}}$$

Notar que debido a que $Z_{m(base)} = \frac{kV_{base2} kV_{base1}}{MVA_{base}}$, entonces tenemos finalmente

$$X_{m(pu)} = \frac{X_{m(act)}}{Z_{m(base)}}$$

Para ejemplificar el uso del método de normalización en por unidad (*p.u.*), usaremos el sistema mostrada en la figura 2.1.1 al inicio de esta unidad.

Primeramente dividimos el sistema que se va a normalizar en zonas caracterizadas por el mismo voltaje. Esto se muestra en la figura 2.1.5.

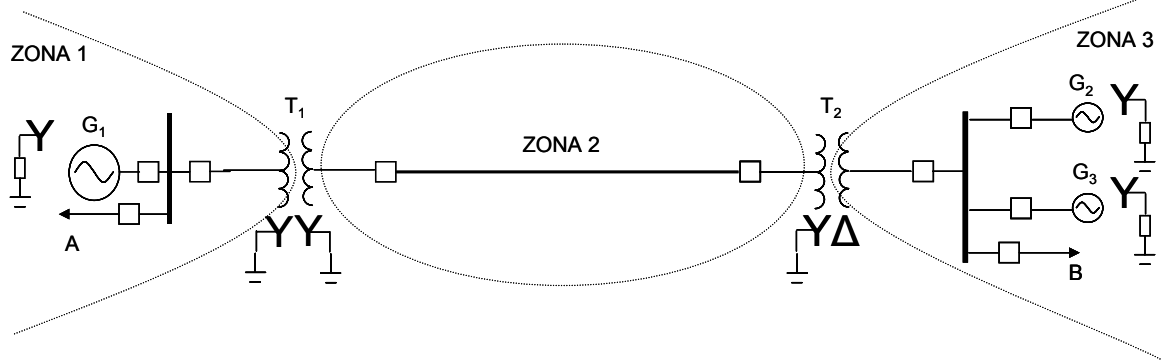


Figura 2.1.5. Sistema dividido en zonas de voltajes.

Empezamos definiendo las bases de voltajes en todo el sistema. Supongamos que se decide usar como bases de sistema: $MVA_{base} = 30 \text{ MVA}$, y $kV_{base} = 33 \text{ kV}$ en la zona de transmisión. De acuerdo a lo anterior tenemos que $kV_{base1} = 33 \text{ kV}$, dado que el voltaje base coincide con el voltaje nominal. Las demás bases de voltaje son calculadas tomando en cuenta la relación de transformación de los transformadores y sus conexiones.

Para las demás bases $kV_{base1} = 33 \left(\frac{11}{33} \right) = 11 \text{ kV}$ referida a través de T_1 y

$$kV_{base3} = 33 \left(\frac{6.8}{20 \cdot \sqrt{3}} \right) = 6.48 \text{ kV}, \text{ referida a través de } T_2.$$

Esta última base merece un comentario: los valores de voltaje indicados en la razón de transformación se deben a que T_2 es un banco de unidades monofásicas, conectado en estrella-delta y en los datos que se dieron anteriormente, la relación de transformación se refiere a la relación de transformación de cada unidad, así como la potencia, es la potencia de cada unidad, o sea monofásica. Además, tomando en cuenta la conexión de las unidades del banco, tenemos que para el lado de alto voltaje se requiere el factor de $\sqrt{3}$, debido a la conexión en delta en ese punto.

Una vez calculadas las bases de voltajes en todas las zonas, las bases restantes, o sea de corrientes e impedancias, se calcularán únicamente si se requieren. En el presente ejemplo, únicamente incluiremos en la normalización del parámetro de la línea de transmisión, la impedancia base de la zona correspondiente (zona 2).

Con esto la siguiente tarea consiste en cambiar de base los parámetros de las componentes del sistema eléctrico, cuyos valores estén especificados en forma normalizada, lo cual es lo

más comúnmente encontrado en los datos de placas de los equipos. En los datos proporcionados previamente, se especifican los datos de generadores y transformadores normalizados, sobre las bases de valores nominales de las variables eléctricas de estos equipos. Como no coinciden en general con las bases del sistema que seleccionamos, deberemos cambiarlos de base y referirlos por tanto, a las bases de sistema. Lo anterior se muestra a continuación.

Para el generador G_1 tenemos:

$$X'' = (0.44) \left(\frac{10.5}{11} \right)^2 \left(\frac{30}{30} \right) = 0.40$$

Mientras que para la reactancia de aterrizado

$$X_{n1} = \frac{1.5\Omega}{\left(\frac{11^2}{30} \right)} = 0.37 \text{ pu}$$

Para el generador G_2

$$X'' = (0.41) \left(\frac{6.6}{6.48} \right)^2 \left(\frac{30}{15} \right) = 0.85$$

y la reactancia de neutro

$$X_{n2} = \frac{2.5\Omega}{\left(\frac{6.48^2}{30} \right)} = 1.79 \text{ pu}$$

Para el generador G_3

$$X'' = (0.32) \left(\frac{6.6}{6.48} \right)^2 \left(\frac{30}{25} \right) = 0.40$$

con reactancia de aterrizado

$$X_{n3} = \frac{2.5\Omega}{\left(\frac{6.48^2}{30} \right)} = 1.79 \text{ pu} .$$

En el caso de los transformadores, el cambio de base será como sigue.

Para T_1

$$X_{T1} = (0.21) \left(\frac{11}{11} \right)^2 \left(\frac{30}{15} \right) = 0.42$$

mientras que para T_2 tenemos

$$X_{T_2} = (0.24) \left(\frac{20 \cdot \sqrt{3}}{33} \right)^2 \left(\frac{30}{15} \right) = 0.53.$$

Observe que en la relación de transformación podemos usar indistintamente la relación de

cualquier lado del transformador, dado que $\frac{20 \cdot \sqrt{3}}{33} = \frac{6.8}{6.48}$.

En el caso de la línea de transmisión, el valor del parámetro está en ohmios, por lo que en lugar de cambio de base, efectuamos su normalización directamente

$$X_{LT} = \frac{20.5 \Omega}{Z_{base2}} = \frac{20.5 \Omega}{\left(\frac{33^2}{30} \right)} = 0.56 \text{ pu}$$

Carga A: $P_A = 15 \text{ MW}$, por lo que $|S_A| = \frac{15}{0.9} = 16.67 \text{ MVA}$, y con esto obtenemos

$Q_A = \sqrt{(16.67^2 - 15^2)} = 7.27 \text{ MVar}$, de donde: $S_A = 15 \text{ MW} + j7.27 \text{ MVar}$. Por lo que el valor normalizado de potencia será

$$S_A = \frac{15 + j7.27}{30} = 0.5 \text{ puMW} + j0.24 \text{ puMVar}.$$

Carga B: $P_A = 40 \text{ MW}$, entonces $|S_B| = \frac{40}{0.85} = 47.06 \text{ MVA}$, de donde

$Q_B = \sqrt{(47.06^2 - 40^2)} = 24.8 \text{ MVar}$, por lo que: $S_B = 40 \text{ MW} + j24.8 \text{ MVar}$, y el valor normalizado resulta

$$S_B = \frac{40 + j24.8}{30} = 1.33 \text{ puMW} + j0.83 \text{ puMVar}.$$

2.2. FORMULACION DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA.

INTRODUCCION.

El estudio de flujos de carga o flujos de potencia, como se le llama también a menudo, está ligado tanto a la evolución de los sistemas eléctricos, como a la evolución de las computadoras digitales. Antes de los años 40s, la cantidad de interconexiones en los sistemas eléctricos era muy pequeña, por lo cual los sistemas eléctricos eran predominantemente radiales. Los estudios de dichos sistemas eran sencillos relativamente, al menos se podían realizar sin recurrir a grandes recursos de cálculo, que a la postre no existían. Sin embargo una vez que se hicieron patentes las ventajas de la interconexión, la complejidad de los sistemas eléctricos fue creciendo, y los estudios requeridos más demandantes. Afortunadamente esta evolución de los sistemas eléctricos coincidió con el advenimiento de la computadora digital. La primera mención de la computadora en el estudio de flujos de potencia se remonta al año de 1947 y se relaciona con el artículo titulado “Machine computations of power network performance”, AIEE Transactions, vol. 66, escrito por L.A. Dunstan. Sin embargo, el crédito por la formulación del problema con una orientación adecuada para su programación en computadora digital, se concede, generalmente, a J. Ward y H. Hale, quienes escribieron el artículo “Digital computer solution of power flow problems” en el AIEE Transactions, vol. 75, 1956. El sistema utilizado en su artículo es ampliamente utilizado como sistema de pruebas, para validar métodos de análisis de flujos de potencia aún hoy en día, es quizás el sistema más utilizado con ese propósito.

Pero ¿Cuál es el objetivo del estudio de flujos de potencia?. El objetivo de este estudio es obtener los voltajes nodales. Con estas variables conocidas, determinaremos los flujos en las líneas de transmisión, y en general de los elementos del sistema de transmisión, dados los niveles de demanda y generación.

Aunque la red se considera lineal, sin embargo es bien conocido que el modelo matemático para el estudio de flujos de potencia es *no-lineal*; lo anterior se debe al hecho de que en su formulación se utiliza de manera explícita de la potencia eléctrica, como el producto de $V \cdot I$, las cuales son cantidades complejas. Esto se discutirá de manera más amplia y clara más adelante.

Por último es importante mencionar que las aplicaciones del estudio de flujos de potencia son tan vastas como importantes. Constituyen la herramienta esencial para el análisis, la planeación y el diseño de tanto de los sistemas eléctricos, como de la operación y control de los mismos.

FORMULACION DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA.

Antes de iniciar la formulación del problema de flujos de potencia, es imprescindible plantear la relación que existe entre P , Q , $|V|$ y δ (ángulo del voltaje, relacionado con la frecuencia).

Consideremos una línea de transmisión, como se muestra en la figura 1, en la cual se ha omitido la resistencia serie, con el fin de simplificar el análisis posterior, lo cual no compromete las conclusiones, además de que en líneas aéreas de transmisión en efecto la relación x/r es muy alta, lo cual significa que el valor de la resistencia es despreciable para algunos fines.

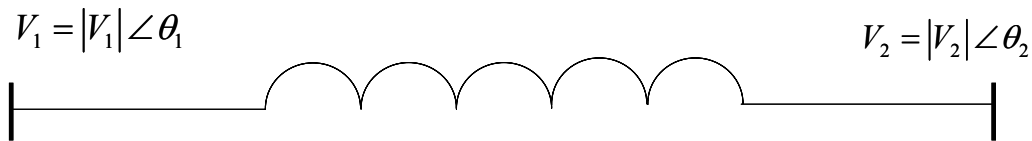


Figura 2.2.1. Potencia transferida entre dos buses.

La potencia S_{12} será igual a

$$\begin{aligned}
 S_{12} &= V_1 I_{12}^* = V_1 \left(\frac{V_1 - V_2}{jx} \right)^* = \frac{|V_1|^2 - V_1 V_2^*}{-jx} = j \left(\frac{V_1^2}{x} - \frac{V_1 V_2^*}{x} \right) \\
 &= j \left(\frac{|V_1|^2}{x} - \frac{|V_1||V_2|}{x} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \right) = j \left(\frac{|V_1|^2}{x} - \frac{|V_1||V_2|}{x} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \right) \\
 &= \frac{|V_1||V_2|}{x} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) + j \left[\frac{|V_1|^2}{x} + \frac{|V_1||V_2|}{x} \cos(\theta_1 - \theta_2) \right].
 \end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos, separando parte real y parte imaginaria de la última expresión

$$P_{12} = \Re\{S_{12}\} = \frac{|V_1||V_2|}{x} \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$Q_{12} = \Im\{S_{12}\} = \frac{|V_1|^2}{x} - \frac{|V_1||V_2|}{x} \cos(\theta_1 - \theta_2) \approx \frac{|V_1|}{x} (|V_1| - |V_2|)$$

la última aproximación se debe a que $(\theta_1 - \theta_2)$ es muy pequeño y por tanto $\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$.

Lo anterior muestra que existe una fuerte dependencia entre P - δ , por un lado, y entre Q - $|V|$ por otro. Por lo que podemos observar que, debido a que δ está relacionado con la frecuencia, entonces un exceso de MW generados tiende a elevar la frecuencia, mientras que un exceso de MVAR generados tiende a elevar $|V|$. Es también muy importante observar que mientras f (frecuencia) es una variable de efecto global y por tanto su cambio se siente en todo el sistema, $|V|$ es una variable de efecto local y sus cambios, por consecuencia, no son uniformes y son más grandes en los buses con mayor exceso de Q. En este punto es importante hacer la observación de que el término **bus** constituye un tecnicismo de uso muy extendido, y es sinónimo de nodo. Lo usaremos de aquí en adelante, en virtud de que ya es un término demasiado extendido en el argot técnico, esperando que no provoque histeria en los defensores de la lengua española, a los cuales les pedimos disculpas de antemano, si es que este material llegara a caer en sus manos.

Las observaciones anteriores son cruciales en la comprensión de la formulación del modelo de flujos de potencia.

Los aspectos más importantes del estudio de flujos pueden resumirse como sigue [1]:

1. Solamente los generadores pueden producir potencia activa, P. La localización y capacidad de dichos generadores es fija. La generación debe ser igual a la demanda más las pérdidas y esta ecuación de balance de potencia debe cumplirse en todo momento (también debe cumplirse para el caso de Q). Dado que la potencia generada debe dividirse entre los generadores en una razón única con el objeto de lograr operación económica óptima, los niveles de generación deben mantenerse en puntos definidos por anticipado.

2. Los enlaces de transmisión pueden transmitir solamente ciertas cantidades de potencia (cargabilidad), debemos asegurarnos de operar dichos enlaces cerca de los límites de estabilidad ó térmico.
3. Se deben mantener los niveles de voltaje de operación de ciertos buses dentro de ciertas tolerancias. Lo anterior se logra mediante la generación apropiada de potencia reactiva.
4. Si el sistema eléctrico que es el objeto del estudio forma parte de un sistema más grande ("power pool"), deberá cumplir con ciertos compromisos contractuales de potencia en puntos de enlace con los otros sistemas vecinos.
5. Los disturbios ocurridos después de grandes fallas en el sistema, pueden causar salidas de servicio; los efectos de dichos eventos pueden minimizarse mediante estrategias de pre-falla apropiadas desarrolladas a través de múltiples estudios de flujos de potencia.
6. Para llevar a cabo de manera apropiada y eficiente la tarea de planeación, es imprescindible el uso extensivo de estudios de flujos de potencia.

El problema se puede dividir a su vez, en los siguientes problemas [1]:

1. Formulación de un modelo matemático adecuado para la red. Debe describir adecuadamente las relaciones entre voltajes y potencias en el sistema interconectado.
2. Especificación de las restricciones de potencia y voltaje que deben aplicarse a todos los buses.
3. Cálculo numérico de las ecuaciones de flujos de potencia sujetas a las restricciones arriba mencionadas. De estas ecuaciones obtenemos todos los voltajes de la red.
4. Cuando todos los voltajes de bus han sido determinados, podremos finalmente calcular los flujos de potencia en todos los elementos de transmisión, y con esto, las pérdidas de potencia.

Con el fin de plantear el problema básico del análisis de flujos de potencia, hacemos uso del sistema más simple posible, sin perder generalidad, dado que este sistema, consistente de dos buses, contiene los elementos básicos de cualquier sistema eléctrico. Esto permite, sin obscurecer el problema con la complejidad, innecesaria en esta etapa

por otro lado, del tamaño. Lo anterior significa que el problema que se va a analizar contiene los elementos suficientes para llevar a cabo dicho planteamiento.

El sistema eléctrico mencionado, y que se muestra en la figura 1, contiene un generador y una carga, en cada bus, y los buses se unen con una línea de transmisión, la cual se modelará a través un circuito Π nominal.

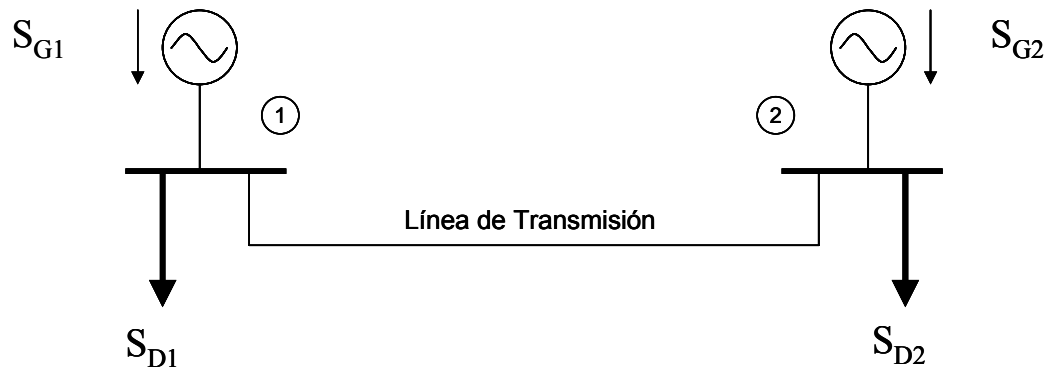


Figura 1. Sistema de dos buses.

En este sistema, cada bus es alimentado por un generador que inyecta una potencia S_{G1} y S_{G2} , respectivamente. A su vez existen cargas en cada uno, que consumen potencias S_{D1} y S_{D2} , o también podríamos decir que “inyectan” potencias $-S_{D1}$ y $-S_{D2}$, respectivamente. Aquí es importante mencionar que la convención más común consiste en considerar positiva la potencia inyectada en un bus, y por tanto, una potencia extraída en un bus, se puede considerar que es una potencia inyectada negativa. Por otro lado, el voltaje de cada bus es V_1 y V_2 , respectivamente. Dichos voltajes son, por supuesto, *fasores*, cuya definición completa se dará más adelante. La línea de transmisión que une los buses se representa por medio de un circuito Π nominal. Como se puede observar en la figura 2, esta línea está caracterizada por las admitancias en derivación a cada lado de los buses, así como la impedancia serie, cuya metodología de cálculo se vio en las unidades introductorias del curso de Sistemas Eléctricos de Potencia I.

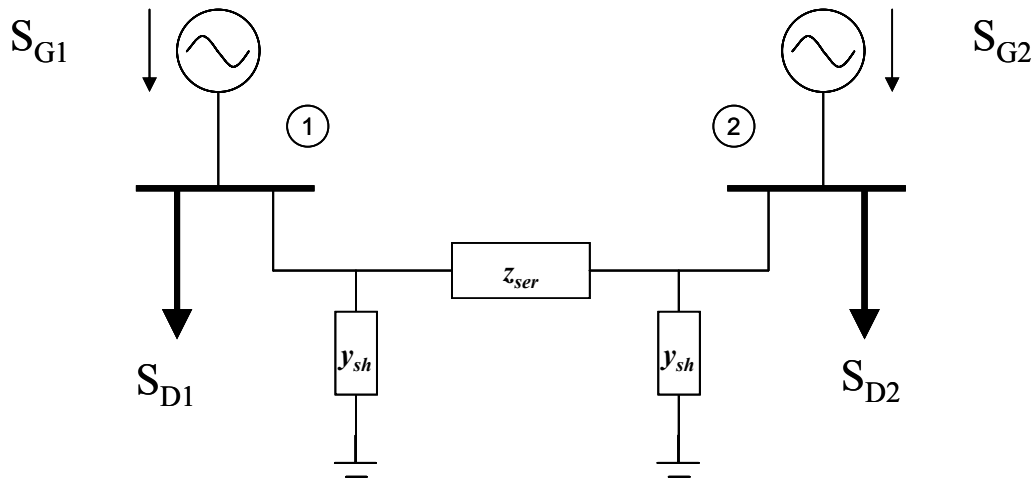


Figura 2. Sistema de dos buses. Representación de la línea de transmisión.

En la siguiente parte del análisis, concentraremos la inyección total en cada bus, es decir la suma de las inyecciones provenientes del generador y las cargas correspondientes, para lo cual usaremos un símbolo adecuado, como se muestra en la figura 3, que defina la naturaleza de una “fuente” de inyección de potencia nodal.

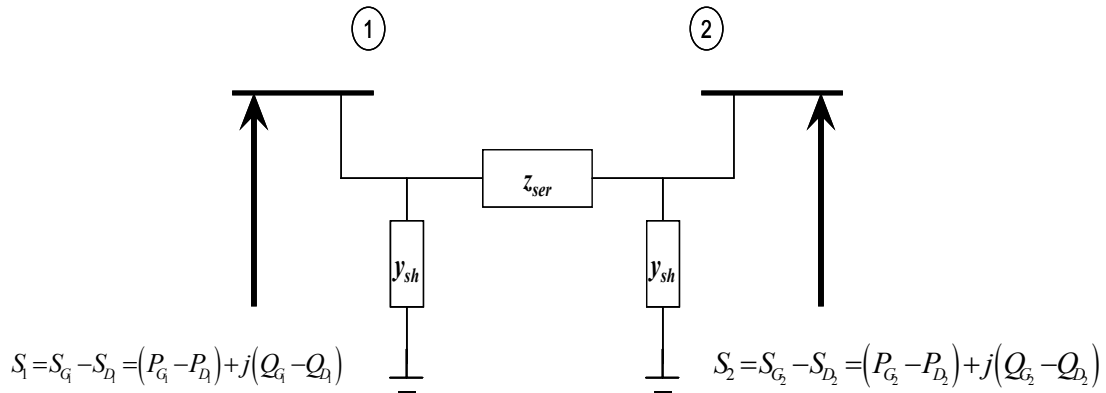


Figura 3. Sistema de dos buses. Inyecciones netas de potencia.

Tal como se muestra en la figura, la potencia neta inyectada en cada bus está dada por :

$$S_1 = S_{G_1} - S_{D_1} = (P_{G_1} - P_{D_1}) + j(Q_{G_1} - Q_{D_1}) \tag{2.2.1}$$

en el bus1, mientras que para el bus2 será:

$$S_2 = S_{G_2} - S_{D_2} = (P_{G_2} - P_{D_2}) + j(Q_{G_2} - Q_{D_2}) \quad (2.2.2)$$

Es importante notar que en la figura 3, las flechas de trazo grueso representan las “fuentes” de inyección de potencia en ambos buses.

También se debe hacer hincapié en que la *potencia neta inyectada* al bus, dada por las ecuaciones anteriores, para los buses 1 y 2 respectivamente, se refiere a la denominada *potencia de bus* y se define, como puede observarse, como la diferencia entre la potencia de generación y la potencia de carga en dicho bus.

Recordemos que la parte real de la primera (potencia activa del generador), se obtiene por manipulación automática del par de entrada, proporcionado por la máquina prima y su valor en todo momento debe cumplir con el balance de potencia, que implica que su valor debe ser igual a la suma de la demanda más las pérdidas. El criterio de *frecuencia constante* indica que el balance se mantiene. En cuanto a la componente imaginaria de la misma (potencia reactiva), se mantiene a través de la manipulación de la corriente de campo en el generador, manteniendo el voltaje constante a un nivel predeterminado en cada bus, lo cual constituye el criterio de que el balance en potencia reactiva se mantiene.

ECUACIONES DE FLUJOS DE POTENCIA.

En esta sección obtendremos el modelo básico de las ecuaciones de flujos de potencia, usando el sistema eléctrico de dos buses.

La potencia inyectada al bus 1, S_1 , estará dada por $S_1 = V_1 \cdot I_1^*$ en donde I_1 es la corriente neta inyectada al bus 1. Esta corriente se compone de dos términos; con referencia a la figura 3, vemos que una de esas componentes circula por la rama en derivación Y_{sh} , mientras que la otra circulará por la rama serie Z_{ser} . En el primer caso, la corriente será igual a $V_1 \cdot Y_{sh}$, mientras que en el segundo caso su valor será $(V_1 - V_2) \cdot Y_{ser}$, donde Y_{ser} es el inverso de Z_{ser} .

Tomando en cuenta lo anterior tendremos para la corriente del bus 1

$$I_1 = \frac{S_1^*}{V_1^*} = V_1 Y_{sh} + (V_1 - V_2) Y_{ser} \quad (2.2.3)$$

y de manera similar para el bus 2

$$I_2 = \frac{S_2^*}{V_2^*} = V_2 Y_{sh} + (V_2 - V_1) Y_{ser} \quad (2.2.4)$$

Si factorizamos, estas ecuaciones podrán escribirse como sigue

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{S_1^*}{V_1^*} = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 &= \frac{S_2^*}{V_2^*} = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

donde definimos

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_{sh} + Y_{ser} \\ Y_{12} &= Y_{21} = -Y_{ser} \\ Y_{22} &= Y_{sh} + Y_{ser} \end{aligned}$$

Observamos que los elementos anteriores son elementos de la matriz de admitancias nodales, \mathbf{Y}_{BUS} . Tomando en cuenta lo anterior, podremos definir las siguientes variables nodales

$$I_{BUS} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{vector de corrientes de bus (o nodales)}$$

$$V_{BUS} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{vector de voltajes de bus (o nodales)}$$

$$Y_{BUS} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de admitancias de bus (o nodales)}$$

Con las definiciones anteriores podemos escribir las ecuaciones (3.5) en forma compacta como sigue

$$I_{BUS} = Y_{BUS} * V_{BUS} \quad (2.2.6)$$

la cual invertida nos conduce a la conocida forma alternativa

$$V_{BUS} = Z_{BUS} * I_{BUS} \quad (2.2.7)$$

Además sabemos que

$$Z_{BUS} \triangleq (Y_{BUS})^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

es la matriz de impedancia de bus (o nodal).

Estas últimas dos ecuaciones matriciales son *lineales*, lo cual está acorde con el hecho de que la red eléctrica que estamos modelando es lineal. Sin embargo en realidad, son las potencias y no las corrientes lo que conocemos, por lo cual al escribir estas ecuaciones en función de la potencia, obtenemos

$$\begin{aligned} S_1^* &= P_1 - jQ_1 = Y_{11}V_1V_1^* + Y_{12}V_2V_1^* \\ S_2^* &= P_2 - jQ_2 = Y_{21}V_1V_2^* + Y_{22}V_2V_2^* \end{aligned} \quad (2.2.8).$$

Fundamentalmente estas son las ecuaciones de flujos de potencia. Es importante observar que están en función de los voltajes nodales.

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma más compacta y conveniente de la siguiente forma

$$\begin{aligned} P_1 - jQ_1 &= V_1^* \sum_{k=1}^2 Y_{1k} V_k \\ P_2 - jQ_2 &= V_2^* \sum_{k=1}^2 Y_{2k} V_k \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

En general, las ecuaciones anteriores pueden escribirse

$$P_i - jQ_i = V_i^* \sum_{k=1}^n Y_{ik} V_k \quad (2.2.10).$$

En forma polar, cada voltaje nodal se define como magnitud $|V_k|$ y ángulo δ_k , medido con respecto a alguna referencia angular, por el momento aún no definida. Por otro lado las admitancias se definen como $Y_{ij} = |Y_{ij}| \angle \gamma_{ij}$. Con esto, la ecuación (2.2.10) nos quedaría como sigue

$$P_i - jQ_i = \sum_{k=1}^n |V_i| |Y_{ik}| |V_k| e^{j(\delta_k - \delta_i + \gamma_{ik})} \quad (2.2.11)$$

donde para el caso presente del sistema de dos buses, $n = 2$.

Si separamos en parte real e imaginaria la ecuación anterior se convierte en las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} P_i &= \sum_{k=1}^n |V_i| |Y_{ik}| |V_k| \cos(\delta_k - \delta_i + \gamma_{ik}) \triangleq f_{pi} \\ Q_i &= \sum_{k=1}^n |V_i| |Y_{ik}| |V_k| \text{sen}(\delta_k - \delta_i + \gamma_{ik}) \triangleq f_{qi} \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Ahora referiremos nuestro análisis al caso del sistema de dos buses, con el objeto de simplificar la discusión de la formulación del modelo de flujos de potencia, y evitar hacer oscurecer el análisis con las complicaciones de las ecuaciones generales de orden n , a las cuales regresaremos más adelante, ya con el concepto entendido.

Desarrollando para el caso $n = 2$ las ecuaciones (2.2.12) obtendremos

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{G1} - P_{D1} = \\ &= |Y_{11}| |V_1|^2 \cos \gamma_{11} + |V_1| |Y_{12}| |V_2| \cos(\delta_2 - \delta_1 + \gamma_{12}) \triangleq f_{p1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P_{G2} - P_{D2} = \\ &= |Y_{22}| |V_2|^2 \cos \gamma_{22} + |V_2| |Y_{21}| |V_1| \cos(\delta_1 - \delta_2 + \gamma_{21}) \triangleq f_{p2} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{G1} - Q_{D1} = \\ &= -|Y_{11}||V_1|^2 \operatorname{sen}\gamma_{11} - |V_1||Y_{12}||V_2| \operatorname{sen}(\delta_2 - \delta_1 + \gamma_{12}) \triangleq f_{q1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_{G2} - Q_{D2} = \\ &= -|Y_{22}||V_2|^2 \operatorname{sen}\gamma_{22} - |V_2||Y_{21}||V_1| \operatorname{sen}(\delta_1 - \delta_2 + \gamma_{21}) \triangleq f_{q2} \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Observamos las características de estas ecuaciones. Son ecuaciones *algebraicas* debido a que representan un modelo en estado estable de corriente alterna, lo que las hace además *complejas*. Por otro lado, son *no lineales*, lo cual, salvo para los casos más simples, las hace imposibles de resolver analíticamente, por lo que se requiere recurrir a una *solución numérica*.

Por otro lado el balance de potencia activa es representado por

$$P_{G1} + P_{G2} = P_{D1} + P_{D2} + f_{p1} + f_{p2} = P_{D1} + P_{D2} + P_{perdidas}.$$

Observamos que la suma $f_{p1} + f_{p2}$, representa las pérdidas de potencia activa.

De igual forma tendremos que el balance de potencia reactiva resulta

$$Q_{G1} + Q_{G2} = Q_{D1} + Q_{D2} + f_{q1} + f_{q2} = Q_{D1} + Q_{D2} + Q_{perdidas}.$$

También podemos ver que la suma $f_{q1} + f_{q2}$, representa las “pérdidas” de potencia reactiva. El entrecomillado anterior se debe a que, debemos recordar, que las denominadas pérdidas reactivas, no tienen el mismo sentido de pérdidas en forma de calor, como en el caso de la potencia reactiva, sino representan los requerimientos de energía reactiva de los elementos de transmisión.

Observemos que las funciones $f_{p1}, f_{p2}, f_{q1}, f_{q2}$, y por tanto las pérdidas $P_{perdidas}, Q_{perdidas}$, son función de los voltajes

$$\begin{aligned} P_{perdidas} &= P_{perdidas}(|V_1|, |V_2|, \delta_1, \delta_2) \\ Q_{perdidas} &= Q_{perdidas}(|V_1|, |V_2|, \delta_1, \delta_2) \end{aligned}$$

Si revisamos cuidadosamente las ecuaciones de flujos para, este sistema de ejemplo de dos buses, vemos que tenemos 12 incógnitas: $P_{G1}, P_{G2}, Q_{G1}, Q_{G2}, P_{D1}, P_{D2}, Q_{D1}, Q_{D2}, |V_1|, |V_2|, \delta_1, \delta_2$,

y solamente cuatro ecuaciones. Aunque es importante observar que las últimas dos incógnitas, los ángulos de los voltajes, siempre aparecen en los argumentos de las funciones trigonométricas en forma de diferencias. Esto nos indica que debemos reducir, de alguna manera, el número de incógnitas con el fin de que igual al número de ecuaciones, es decir, a cuatro incógnitas.

En este punto, es importante clasificar las variables involucradas en el modelo. Esta clasificación es muy importante, la cual tiene un enfoque sistémico, y será muy útil para quién estudie, en cursos más avanzados, el problema de flujos de potencia óptimos, y es la que vamos a utilizar. Dividimos en tres grupos las variables del modelo: *variables incontrolables o de perturbación*, *variables de estado* y *variables de control*.

En el primer grupo, representamos las demandas: $P_{D1}, P_{D2}, Q_{D1}, Q_{D2}$. Mientras que el segundo grupo, variables de estado, están representados los voltajes, tanto en magnitud como en ángulo: $|V_1|, |V_2|, \delta_1, \delta_2$. En el tercer grupo, variables de control, obviamente incluimos las generaciones: $P_{G1}, P_{G2}, Q_{G1}, Q_{G2}$.

Evidentemente debemos conocer las demandas, lo cual elimina cuatro variables del grupo de incógnitas, dejándonos aún con ocho. Una primera opción, que probablemente se nos antoje como buena, consiste en que a partir de que se conocen las demandas, lo cual es por supuesto correcto, suponer las cuatro variables de control, es decir las generaciones y entonces terminar con un modelo matemático consistente, que incluye los voltajes y sus ángulos como incógnitas.

La propuesta anterior, aunque parece buena y hasta cierto punto natural, resulta que no es conveniente por varias razones. Por principio, si observamos las ecuaciones de flujos de potencia, nos damos cuenta que los ángulos de los voltajes aparecen como argumento de funciones trigonométricas en forma de *diferencias*, $\delta_1 - \delta_2$, nunca en forma individual y por lo tanto no podemos resolver estos valores en forma individual. Otra enorme limitante a nuestra propuesta es que no podemos especificar las cuatro potencias generadas, por la sencilla razón de que *no conocemos las pérdidas* por anticipado, pues estas son función, como se discutió antes, de los voltajes, es decir de las incógnitas. Lo anterior implica que podemos especificar dos de estas potencias generadas, pero dejar libres las otras dos para que adopten el valor correspondiente en el transcurso del proceso iterativo.

Las dificultades expuestas arriba se pueden solventar como indicamos a continuación. Primeramente, el problema de la diferencia angular se puede resolver si

fijamos uno de los ángulos, dejando el otro como incógnita; en efecto, esto es conveniente porque además nos permite disponer de una referencia fasorial, lo cual es necesario para darle sentido al ángulo de un voltaje fasorial. De esta forma si fijamos el valor de $\delta_1 = 0$, entonces quedará como referencia el fasor del voltaje del bus 1. Con esto, hemos reducido el número de incógnitas a cinco: $|V_1|, P_{G1}, Q_{G1}, |V_2|, \delta_2$. De este grupo restante, debemos fijar otra variable más para poder intentar la solución del problema de flujos. Matemáticamente cualquiera podría ser, pero desde el punto de vista físico existen limitantes. La elección estaría entre $|V_1|$ y Q_{G1} , pues una de estas eliminaría a la otra, debido al fuerte acoplamiento que existe entre estas; recordemos este hecho discutido páginas atrás. Hasta este punto, no hemos fijado ninguna magnitud de voltaje y es necesario mantener los voltajes dentro de ciertos límites, por lo que sería conveniente fijar $|V_1|$, aprovechando la presencia de un generador en ese bus, el cual puede, dentro de sus límites de operación, mantener un voltaje de operación constante; además, como no conocemos las pérdidas de potencia, tanto activa como reactiva, se requiere dejar sin especificar en un bus ambas variables, con el fin de que al final de la solución, exista esta “holgura” y poder cumplir con el balance de potencia. Por lo tanto al dejar libres las variables P_{G1} y Q_{G1} , deberán quedar definidos $|V_1|$ y δ_1 , lo cual lo convierte en una referencia fasorial, como discutimos previamente.

Lo anterior nos deja con un grupo de cuatro incógnitas, $P_{G1}, Q_{G1}, |V_2|, \delta_2$, que constituyen un sistema de ecuaciones consistente, cuatro ecuaciones en cuatro incógnitas, que por su naturaleza no lineal, deberán resolverse en forma numérica.

Los pioneros de la formulación de flujos, quizás Ward y Hale, establecieron la manera sistemática que nos conduce a la obtención del modelo de flujos de potencia para cualquier sistema. Lo anterior implica la clasificación de los buses del sistema en tres clases, que se describen a continuación.

1. Bus de referencia o compensador (en inglés “swing” o “slack”), por su naturaleza de que las potencias tomarán los valores requeridos para que se cumpla el balance de potencias en el sistema, aparte de que al fijar el ángulo de voltaje, estamos definiendo una referencia fasorial.
2. Bus PQ, a veces llamado también bus de carga, aunque esta designación es menos usada en la actualidad. En este tipo de buses, se especifican las potencias

inyectadas al bus, tanto activa como reactiva, quedando libre la magnitud y el ángulo de voltaje.

3. Bus PV, a veces denominado bus de generación, que al igual que en el caso anterior, es una designación menos usada en la actualidad. En este tipo de buses, se especifican la potencia activa inyectada al bus, así como la magnitud de voltaje.

En la siguiente tabla, resumimos estos conceptos.

Tipo de Bus	Variables conocidas o especificadas						Incógnitas obtenidas en el proceso de solución.			
	P_D	Q_D	P_G	Q_G	$ V $	δ	P_G	Q_G	$ V $	δ
<u>Tipo de Bus</u>										
<u>Referencia</u>	•	•			•	•	•	•		
<u>Bus PQ</u>	•	•	•	•					•	•
<u>Bus PV</u>	•	•	•		•		•			•

2.3. REPASO DE TECNICAS NUMERICAS PARA LA SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES.

En los estudios de los sistemas eléctricos, tales como el análisis de flujos de potencia, encontramos sistemas de ecuaciones tanto lineales como no lineales. Dado que el orden de dichos sistemas de ecuaciones es alto, debido al gran tamaño de los sistemas reales, es muy importante tener algoritmos numéricos rápidos y eficientes, que nos permitan obtener la solución de dichos sistemas de ecuaciones.

Nuestro objetivo es resolver un sistema de ecuaciones cuya forma general es

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
 f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3.1}$$

Un caso especial al de arriba lo representa el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
 \end{aligned}
 \tag{2.3.2}$$

que en forma compacta se escribe $A\tilde{x} = \tilde{b}$, donde A es la matriz de coeficientes $[a_{ij}]$

$$\tilde{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad \text{y} \quad \tilde{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T.$$

El sistema de ecuaciones (2.3.1) se resuelve, invariablemente, usando *técnicas numéricas iterativas*. El sistema de ecuaciones (2.3.2) se resuelven mediante el empleo de *métodos directos*, o bien mediante métodos iterativos, que en algunos casos pueden ser ventajosos en la soluciones de grandes sistemas de ecuaciones lineales y dispersos. Dado que en diferentes materias se cubre el material correspondiente a la solución de (2.3.2),

mediante métodos directos, y que el uso de métodos iterativos requiere del conocimiento de material que nos se cubre en un curso introductorio de sistemas eléctricos de potencia, nos limitaremos a exponer un repaso del material correspondiente a métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Se expondrán dos métodos: el Gauss-Seidel y el Newton-Raphson.

METODO DE GAUSS-SEIDEL.

Expresamos (2.3.1) en la forma

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 x_2 &= \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 x_3 &= \Phi_3(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 x_n &= \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

De manera compacta

$$x_i = \Phi_i(\underline{x}) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Suponiendo un vector solución inicial $\underline{x}_i^{(0)}$, las estimaciones del nuevo vector

$\underline{x}_i^{(k+1)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^T$, pueden ser obtenidas mediante: el método de Jacobi (llamado

también método iterativo de Gauss), y el método de Gauss-Seidel.

Método de Jacobi. En el método de Jacobi, las iteraciones se definen por

$$x_i^{(k+1)} = \Phi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Método de Gauss-Seidel. En el método de Gauss-Seidel, los valores recientemente calculados se usan en las ecuaciones, es decir, en la evaluación de las ecuaciones se utilizan los valores más actualizados de que disponemos, es decir

$$x_i^{(k+1)} = \Phi_i \left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, x_n^{(k)} \right) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Las iteraciones se continúan hasta que la máxima diferencia entre valores consecutivos de x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), es menor que un valor predeterminado ε , esto es,

$$\text{Max}_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon.$$

METODO DE NEWTON-RAPHSON.

El método de Newton-Raphson es aplicado directamente al sistema de ecuaciones (2.3.1). Constituye una extensión del caso de 1^{er} orden, por lo cual es conveniente recordarlo brevemente.

Consideremos la ecuación no lineal $f(x) = 0$. Suponiendo un valor de arranque $x^{(0)}$, expandamos en serie de Taylor $f(x)$ alrededor de $x^{(0)}$, o sea, tomando como punto base $x^{(0)}$. La ecuación resulta entonces

$$f(x^{(0)}) + (x - x^{(0)})f'(x^{(0)}) + \frac{1}{2!}(x - x^{(0)})^2 f''(x^{(0)}) + \dots = 0.$$

Despreciando los términos de segundo orden y orden superior, obtenemos

$$f(x^{(0)}) + (x - x^{(0)})f'(x^{(0)}) = 0.$$

De esta última ecuación despejamos x , con el fin de obtener un estimado más cercano a la solución

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

en donde a la x la hemos denominado $x^{(1)}$ en la última ecuación.

La ecuación anterior puede aplicarse de manera iterativa, hasta alcanzar el valor deseado, mediante la ecuación general

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

La convergencia puede probarse mediante el criterio $|f| \leq \varepsilon$. De hecho si el método iterativo converge, $f \rightarrow 0$. Es importante recordar que la ecuación $f(x) = 0$ puede tener varias soluciones, por lo que en caso de converger, el método probablemente lo hará al valor más cercano al valor de arranque.

Sistema de ecuaciones no lineales. Consideramos el sistema de ecuaciones (2.3.1), que repetimos por comodidad

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_2$$

•

•

•

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_n$$

En este sistema mostrado hay una diferencia con respecto al descrito en (2.3.1) sin embargo, y es que en lugar de estar igualadas a cero las ecuaciones, estas están igualadas a un valor constante, y_1, y_2, \dots, y_n . Lo anterior no debe representar ningún problema, puesto que es obvio que se trata del mismo sistema de ecuaciones, solamente que la forma del expuesto arriba es más apropiada para la formulación del problema de flujos, como se verá más adelante.

Siguiendo el esquema del caso de 1^{er} orden, efectuamos la expansión en serie de Taylor para cada una de las funciones que constituyen el sistema de ecuaciones no lineales. Si denominamos al vector $\tilde{x}^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T$, vector de arranque, y suponemos que $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, son las correcciones requeridas para que el vector $\tilde{x}^{(0)}$ sea la solución, tendremos que al sustituir en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) &= y_1 \\
 f_2(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) &= y_2 \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 f_n(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) &= y_n
 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Aplicamos el teorema de Taylor a cada una de las ecuaciones del conjunto (2.3.4). Para la primera ecuación obtenemos

$$f_1(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \Delta x_1 \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_0 + \Delta x_2 \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_0 + \dots + \Delta x_n \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_0 + \Phi_1$$

en este caso Φ_1 es una función de potencias de $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, de grado mayor a 1, así como de derivadas de alto orden de f_1 . Si los estimados iniciales (vector de arranque) están cerca de la solución, los valores de $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ serán muy pequeños y por tanto se podrán despreciar los términos con potencias de grado superior.

De acuerdo a lo anterior, el sistema de ecuaciones tendrá la forma

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \Delta x_1 \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_0 + \Delta x_2 \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_0 + \dots + \Delta x_n \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_0 &= y_1 \\
 f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \Delta x_1 \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_0 + \Delta x_2 \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_0 + \dots + \Delta x_n \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_0 &= y_2 \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \Delta x_1 \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_0 + \Delta x_2 \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_0 + \dots + \Delta x_n \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_0 &= y_n
 \end{aligned}$$

de donde despejando los primeros términos, y usando notación matricial, tendremos

$$\begin{bmatrix} y_1 - f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ y_2 - f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ \dots \\ y_n - f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_0 & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_0 & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \quad (2.3.5)$$

El proceso se trabaja en forma iterativa, en cuyo caso el sistema general sería como

$$\begin{bmatrix} y_1 - f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ y_2 - f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \dots \\ y_n - f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_k & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_k & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_k \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_k & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_k & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_k & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_k & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^k \\ \Delta x_2^k \\ \dots \\ \Delta x_n^k \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

En forma compacta

$$[J] \underline{C} = \underline{D} \quad (2.3.7)$$

donde \underline{C} es el vector de correcciones, mientras \underline{D} es el vector de desajustes, o sea de diferencias de los valores constantes y las funciones evaluadas en el vector obtenido en la iteración correspondiente.

El vector izquierdo contiene las diferencias de los términos conocidos menos las funciones evaluadas con los vectores obtenidos en cada iteración. Lo denominamos vector de diferencias. La matriz de primeras derivadas parciales se conoce como matriz Jacobiana, y sus elementos son valores numéricos obtenidos al evaluar las expresiones obtenidas al evaluar las derivadas indicadas con los vectores obtenidos en cada iteración. Finalmente el vector de la derecha es el vector de correcciones, pues como se indicó anteriormente, representa el vector requerido para corregir el vector solución de la iteración anterior, rumbo a la solución.

Con el objeto de entender el algoritmo, se muestra un ejemplo con un sistema de orden 2.

El objetivo es encontrar la solución del sistema de ecuaciones

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 - 4$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1x_2 - 2x_2^2 + 5$$

Arrancamos el proceso iterativo con

$$\tilde{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Evaluamos las expresiones de la matriz Jacobiana:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

donde las derivadas parciales estarán dadas por las siguientes expresiones

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_1 + 3x_2 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 3x_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_2 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = x_1 - 4x_2$$

Observamos que $y_1 = 4$, $y_2 = -5$, por lo que $f(\tilde{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 4 - 7 \\ -5 - (-6) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Si calculamos la matriz Jacobiana y la invertimos obtendremos

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1129 & 0.04839 \\ 0.03226 & -0.12903 \end{bmatrix}$$

por lo que $\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + [J]^{-1} f(\tilde{x}^{(0)})$, resulta en

$$\tilde{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1129 & 0.04839 \\ 0.03226 & -0.12903 \end{bmatrix} \left\{ -\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0.70968 \\ 1.77419 \end{bmatrix}.$$

Si efectuamos las iteraciones subsecuentes, siguiendo el mismo procedimiento, obtendremos

$$\tilde{x}^{(2)} = \tilde{x}^{(1)} + [J]^{-1} f(\tilde{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.67302 \\ 1.75831 \end{bmatrix}$$

para la segunda iteración.

Antes de seguir con los resultados de las siguientes iteraciones, es importante mencionar que el criterio de convergencia se aplica al vector de diferencias, dado que cuando este vector sea cero, entonces el vector empleado para evaluar las funciones que conforman dicho vector es la solución del problema, de acuerdo a (2.3.6).

Para la tercera iteración tenemos que la inversa de la matriz Jacobiana es

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.13929 & 0.044220 \\ 0.03851 & -0.14500 \end{bmatrix}$$

de donde obtenemos

$$\tilde{x}^{(3)} = \tilde{x}^{(2)} + [J]^{-1} f(\tilde{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0.67259 \\ 1.75820 \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar fácilmente que $\max_i(\tilde{x}^{(3)}) < \varepsilon$. Por tanto, el vector $\tilde{x}^{(3)}$ es la solución.

2.4. FORMULACION Y SOLUCION DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA POR EL METODO DE GAUSS-SEIDEL.

El método de Gauss-Seidel es un algoritmo iterativo para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales. Para iniciar, suponemos un vector solución, a través de en una selección basada en un buen juicio asociado a la experiencia práctica del problema que se quiere resolver. Una de las ecuaciones es usada para obtener el valor mejorado de una variable particular, sustituyendo los valores de las variables restantes, conocidos hasta ese momento. El vector solución se actualiza entonces inmediatamente respecto a esta variable. El proceso se repite para todas las variables hasta completar una *iteración*. El proceso iterativo se repite entonces hasta que el vector converge a una precisión predeterminada. La convergencia en este método, es muy sensible a los valores elegidos para el arranque, pero afortunadamente en estudio de flujos de potencia, seleccionar un vector de arranque cercano a la solución final puede identificarse fácilmente, basado en experiencias previas.

Para explicar el funcionamiento del método de Gauss-Seidel, empezaremos su formulación en un sistema que contiene únicamente buses tipo PQ y el bus compensador. Posteriormente veremos lo fácil que resulta extender el método a sistemas que contienen también buses PV, como son la generalidad de los casos reales. Las ecuaciones de cada bus, consistirán de la ecuación del voltaje de ese bus, en función de los voltajes de los buses vecinos a éste, y de la potencia inyectada a dicho bus, como se vio en la formulación del problema de flujos en la unidad II.2. Las ecuaciones de voltaje se obtienen como se indica a continuación.

Para el *i-ésimo* bus, la corriente de dicho bus (corriente inyectada) se obtiene de

$$S_i^* = P_i - jQ_i = V_i^* I_i \quad (2.4.1)$$

pero sabemos que la corriente del bus es

$$I_i = Y_{i1}V_1 + Y_{i2}V_2 + \dots + Y_{ii}V_i + \dots + Y_{in}V_n = \sum_{k=1}^n Y_{ik}V_k \quad (2.4.2)$$

por lo que despejando de (2.4.1) I_i y sustituyendo (2.4.2) obtenemos

$$I_i = Y_{i1}V_1 + Y_{i2}V_2 + \dots + Y_{ii}V_i + \dots + Y_{in}V_n = \sum_{k=1}^n Y_{ik}V_k = \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} \quad (2.4.3)$$

De esta última ecuación, despejamos el voltaje del bus, o sea V_i , con lo que

$$V_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left[\frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} - (Y_{i1}V_1 + Y_{i2}V_2 + \dots + Y_{i,i-1}V_{i-1} + Y_{i,i+1}V_{i+1} + \dots + Y_{in}V_n) \right] \quad i = 2, \dots, n \quad (2.4.4)$$

o bien en forma más compacta

$$V_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left[\frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} - \sum_{k=1}^n Y_{ik}V_k \right] \quad i = 2, \dots, n \quad k \neq i \quad k \in i \quad (2.4.5)$$

En las dos últimas ecuaciones es importante enfatizar la anotación a la derecha de dichas expresiones, es decir, que existe un término en la sumatoria para cada valor de i , menos para $i = k$, que corresponde al índice del voltaje despejado. Además estamos suponiendo que el índice correspondiente al bus compensador, es 1, por lo que se observa que ha sido excluido del rango de dicho índice. También hay que observar que los valores que toma k , corresponden a buses que están conectados al bus i , por lo que aún cuando el rango se especifica como $i = 2, \dots, n$, no necesariamente dicho índice incluirá los valores que se muestran, por lo que la indicación $k \in i$, significa, “todo k conectado a i ”. Por otro lado el bus compensador *no requiere* de ecuación de voltaje, debido a que recordamos que este se especifica, por lo que no constituye una incógnita. Por esta razón, el rango del índice del bus no contiene el valor de 1.

La ecuación (2.3.5) es la base del algoritmo de Gauss-Seidel. Lo único que falta es incluir en las expresiones (2.3.4) ó (2.3.5) los superíndices que especifiquen con precisión, las variables que deberán usarse en función del método que emplearemos para resolver este sistema de ecuaciones no lineales; en el caso presente, se trata del método de Gauss-Seidel, por lo que recordando que en la solución secuencial de las variables, usamos en el cálculo

de cada una de estas, el valor más reciente de las demás variables (voltajes), en función de las cuales está expresada cada una.

Con lo anterior, si usamos un superíndice para expresar la iteración asociada al valor de cada variable, tendremos a partir de (2.3.4) y (2.3.5)

$$V_i^{(l+1)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left[\frac{P_i - jQ_i}{(V_i^{(l)})^*} - \left(Y_{i1}V_1 + Y_{i2}V_2^{(l+1)} + \dots + Y_{i,i-1}V_{i-1}^{(l+1)} + Y_{i,i+1}V_{i+1}^{(l)} + \dots + Y_{in}V_n^{(l)} \right) \right] \quad (2.4.6)$$

$$i = 2, \dots, n$$

En forma compacta

$$V_i^{(l+1)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left[\frac{P_i - jQ_i}{(V_i^{(l)})^*} - \sum_{k=1}^{i-1} Y_{ik}V_k^{(l+1)} - \sum_{k=i+1}^n Y_{ik}V_k^{(l)} \right] \quad i = 2, \dots, n \quad k \neq i \quad k \in i \quad (2.4.7)$$

Es importante observar que en (2.4.6), el voltaje del bus 1 no tiene superíndice debido a que este voltaje corresponde al bus compensador y como tal no cambia su valor porque en ese bus, el voltaje, tanto en magnitud como en ángulo, se especifica.

Con el antecedente anterior podemos describir el algoritmo basado en el método de Gauss-Seidel.

ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DE FLUJOS DE POTENCIA.

Recordemos que suponemos que nada más existen buses PQ y el compensador, por el momento. Los pasos que caracterizan dicho algoritmo son:

Paso 1. Con la demanda (P_{Di} , Q_{Di}) conocida, si existen buses con generadores conectados a ellos, deberemos especificar sus potencias generadas P_{Gi} y Q_{Gi} . Con lo anterior, se conocen las inyecciones de potencias en todos los buses (PQ), menos en el compensador.

Paso 2. *Ensamblar la matriz Y_{BUS} .* En el análisis de flujos de potencia se usa solamente la red de secuencia positiva (cuya definición se verá en unidades posteriores), por lo que no existen elementos acoplados magnéticamente en dicha red. El procedimiento empleado

para formar la matriz Y_{BUS} , es el de inspección. Dicho procedimiento es muy simple, como se recordará de la unidad I.

Paso 3. *Cálculo iterativo de los voltajes de bus* (V_i $i = 2, \dots, n$). Para iniciar el proceso iterativo, suponemos un conjunto inicial de valores de voltajes. Es práctica común en sistemas de potencia suponer lo que se denomina un “arranque plano”, que consiste de suponer un valor inicial de los voltajes de 1.0 por unidad en magnitud y un ángulo de cero grados (recordar que en procesos numéricos los ángulos se deben manejar en radianes). Lo anterior se debe a que en los sistemas de potencia, la dispersión de voltajes no es significativa, por lo que los valores de los voltajes son cercanos al nominal y sus ángulos pequeños. Con el fin de darle versatilidad a un programa en computadora, las operaciones con números complejos podrían desarrollarse y programarse como ecuaciones reales, dado que no todos los compiladores incluyen el uso de variables complejas, en sus prestaciones. En función de lo anterior programamos $2(n-1)$ ecuaciones en incógnitas reales. Si definimos el voltaje como. Además podemos reducir el tiempo de ejecución, realizando fuera del lazo iterativo algunas operaciones aritméticas, que permanecen invariables con las iteraciones. Usamos el índice 1 para el bus compensador, como se verá en las ecuaciones posteriores.

Definamos

$$A_i = \frac{P_i - jQ_i}{Y_{ii}} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad B_{ik} = \frac{Y_{ik}}{Y_{ii}} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad k \neq i.$$

Por lo que tomando en cuenta lo anterior tenemos

$$V_i^{(l+1)} = \frac{A_i}{(V_i^{(l)})^*} - \sum_{k=1}^{i-1} B_{ik} V_k^{(l+1)} - \sum_{k=i+1}^n B_{ik} V_k^{(l)} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (2.4.8).$$

El proceso iterativo continúa hasta que el cambio en magnitud del voltaje de bus $|\Delta V_i^{(l+1)}|$ entre dos iteraciones consecutivas, es menor que una cierta tolerancia, para todos los voltajes de bus, esto es

$$|\Delta V_i^{(l+1)}| = |V_i^{(l+1)} - V_i^{(l)}| < \varepsilon; \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (2.4.9).$$

Paso 4. *Cálculo de la potencia del bus compensador.* Con los voltajes obtenidos en el paso 3, junto con V_1 variable conocida, obtenemos

$$P_1 - jQ_1 = V_1^* \sum_{k=1}^n Y_{1k} V_k .$$

Paso 5. *Cálculo de flujos en las líneas.* Este es el último y muy importante paso de la solución de flujos de potencia, pues además de proporcionar los flujos en todos los elementos de transmisión, nos permite calcular las pérdidas, tanto en dichos elementos, como las pérdidas totales de la red. Para mostrar lo anterior, consideremos el diagrama mostrado en la figura 2.4.1, en donde vemos un circuito Π , que puede representar un enlace de transmisión o algún otro elemento de transmisión, como un transformador.

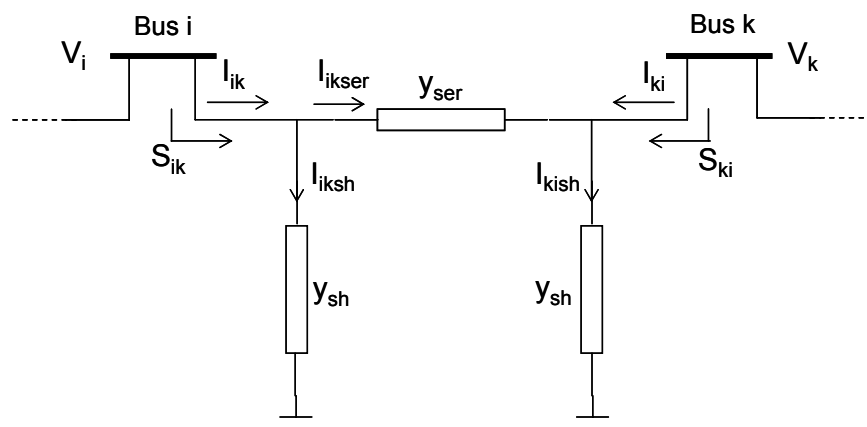


Figura 2.4.1. Elemento de transmisión.

En la figura se muestra el elemento conectado entre los buses $i-k$, y las potencias y corrientes a considerar en el cálculo. Primeramente vemos que la corriente que sale de cada bus, se divide en una porción que fluye a través de la rama serie y otra porción que fluye a través de la rama en derivación.

La corriente alimentada por el bus i a la línea está dada por

$$I_{ik} = I_{ikser} + I_{iksh} = (V_i - V_k) y_{ser} + V_i y_{sh}$$

y con esto, podemos establecer que la potencia alimentada por el bus i a la línea será igual a

$$S_{ik} = P_{ik} + jQ_{ik} = V_i I_{ik}^* = V_i (V_i^* - V_k^*) y_{ser}^* + V_i V_i^* y_{sh}^* \quad (2.4.10)$$

De manera similar, la corriente inyectada por el bus k a la línea se divide en dos componentes, una que se va por la rama en derivación y la otra por la rama serie, $I_{ki} = (V_k - V_i)y_{ser} + V_k y_{sh}$. En forma similar al desarrollo anterior, la potencia alimentada a la línea proveniente del bus k , será

$$S_{ki} = V_k I_{ki} = V_k (V_k^* - V_i^*) y_{ser}^* + V_i V_k^* y_{sh}^* \quad (2.4.11).$$

Las pérdidas de potencia en el elemento de transmisión $i-k$ son igual a la suma de las potencias calculadas por (2.4.10) y (2.4.11). Así mismo las pérdidas totales de transmisión serán igual a la suma de todos los flujos en líneas, es decir $\sum (S_{ik} + S_{ki}) \quad \forall i, k$.

Es conveniente notar que la potencia del bus compensador se puede calcular sumando los flujos de potencia de las líneas que terminan en dicho bus; lo anterior constituye otra forma alternativa a la que se mencionó anteriormente en el paso 4.

El algoritmo anterior es útil parcialmente, pues permite exponer la forma más fácil del método de Gauss-Seidel. Sin embargo pocos sistemas (si acaso existe alguno), son tan simples como el actual. En realidad existen múltiples plantas de generación, no únicamente la del bus compensador, como en el caso actual. Además para que la solución de flujos de potencia sea práctica, se requiere tomar en cuenta el hecho de que las variables de control y de estado del sistema, debe estar contenidas dentro de ciertos límites, los cuales están dictados por las especificaciones del equipo y por restricciones operativas. Dichos límites son:

- a. Límite de magnitud de voltaje $|V_i|_{\min} \leq |V_i| \leq |V_i|_{\max}$. El equipo del sistema eléctrico está diseñado para operar a voltajes fijos con variaciones permisibles de $\pm(5-10)\%$ de los valores nominales.
- b. Algunos de los δ_i (variables de estado) deberán satisfacer la desigualdad $|\delta_i - \delta_k| \leq |\delta_i - \delta_k|_{\max}$. Esta restricción limita el máximo ángulo de potencia permisible de la línea de transmisión que conecta los buses $i-k$ y se estipula debido a consideraciones de estabilidad del sistema.

c. Restricciones de generación de potencia.

$$P_{Gi,\min} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi,\max}$$

$$Q_{Gi,\min} \leq Q_{Gi} \leq Q_{Gi,\max}$$

Con respecto a estos últimos límites, hay que recordar que el voltaje en un bus PV puede ser mantenido constante, solamente si está disponible una de fuentes controlable de Q en dicho bus y la generación reactiva requerida está dentro de los límites establecidos.

MODIFICACION DEL ALGORITMO PARA LA INCLUSION DE BUSES PV.

Recordamos que en los buses PV, P y V se especifican, mientras que Q y δ son incógnitas que se determinarán a través del proceso de solución. Esto implica que los valores de Q y δ serán actualizados en cada iteración del proceso de solución del método de Gauss-Seidel, por medio de ecuaciones apropiadas. Lo anterior se lleva a cabo por medio del siguiente procedimiento aplicado al i -ésimo bus tipo PV.

1. Debido a que la limitante más visible en la para utilizar la ecuación (2.4.7) es el desconocimiento de Q_i , por lo que habrá necesidad de calcular dicha variable, antes de usar la ecuación mencionada. Esto se hace usando la ecuación

$$Q_i = -\Im m \left\{ V_i^* \sum_{k=1}^n Y_{ik} V_k \right\} \text{ la cual para el caso presente estará dada por}$$

$$Q_i^{(l+1)} = -\Im m \left\{ \left(V_i^{(l)} \right)^* \sum_{k=1}^{i-1} Y_{ik} V_k^{(l+1)} + \left(V_i^{(l)} \right)^* \sum_{k=i}^n Y_{ik} V_k^{(l)} \right\} \quad (2.4.12).$$

2. El valor actualizado del ángulo δ , se obtiene inmediatamente después del paso 1 como

$$\delta_i^{(l+1)} = \angle V_i^{(l+1)}$$

$$= \text{Angulo de} \left\{ \frac{A_i^{(l+1)}}{\left(V_i^{(l)} \right)^*} - \sum_{k=1}^{i-1} B_{ik} V_k^{(l+1)} - \sum_{k=i+1}^n B_{ik} V_k^{(l)} \right\} \quad (2.4.13)$$

donde

$$A_i^{(l+1)} = \frac{P_i - jQ_i^{(l+1)}}{Y_{ii}}.$$

El algoritmo para buses PQ permanece sin cambios. Sin embargo existen limitantes en la generación de la potencia reactiva, como se mencionó previamente; dichas limitantes requieren que la demanda de Q en cualquier bus, permanezca dentro del rango $Q_{min} \rightarrow Q_{max}$. Si en alguna etapa del proceso de solución, Q sale de estos límites, se fijará a Q_{min} ó Q_{max} , dependiendo del límite violado, y el bus se convertirá en bus PQ , desechando las especificaciones previas de voltaje. Lo anterior implica que el proceso se transfiere al paso 3, que se detalla a continuación.

3. Si $Q_i^{(l+1)} < Q_{i,min}$, entonces asignamos $Q_i^{(l+1)} = Q_{i,min}$, y tratamos el bus i -ésimo como PQ . Calcular entonces $A_i^{(l+1)}$ y $V_i^{(l+1)}$ de las ecuaciones correspondientes. Por otro lado si $Q_i^{(l+1)} > Q_{i,max}$, entonces asignamos $Q_i^{(l+1)} = Q_{i,max}$ y el i -ésimo bus se convierte en PQ y al igual que en el caso anterior actualizamos los valores de $A_i^{(l+1)}$ y $V_i^{(l+1)}$.

Con esto terminamos de resumir el proceso computacional. Recordar que hemos asignado el índice 1 para el bus compensador; si se quiere plantear la posibilidad de que no se tenga esta restricción, si es que se quiere ver como tal, habrá que hacer los ajustes correspondientes en la sumatorias de las ecuaciones.

EJEMPLOS. En este punto hacemos un receso en la exposición de los métodos numéricos usados en el análisis de flujos de potencia, para ejemplificar dichos métodos, a través de ejemplos sencillos.

El primer ejemplo está asociado al método de Gauss-Seidel, y consta de dos partes; la primera ejemplifica dicho método a través de un sistema de cuatro buses, todos ellos, menos el compensador, buses tipo PQ. Haremos una iteración por el método de Gauss-Seidel, tomando en cuenta que las demás iteraciones necesarias para llegar a la solución, serán iguales. El sistema del ejemplo se muestra en la figura 2.4.1, que se muestra enseguida.

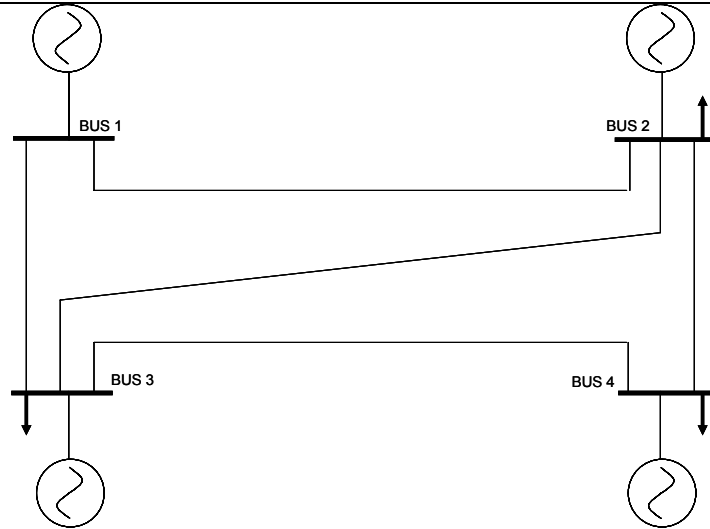


Figura 2.4.1. Sistema de cuatro buses.

La tabla que se muestra a continuación, Tabla 1, muestra los datos de bus del sistema.

TABLA1. DATOS DE BUS

BUS	P_i	Q_i	V_i	Tipo de bus
1	–	–	$1.04\angle 0^\circ$	compensador
2	0.5	-0.2	–	Bus PQ
3	-1.0	0.5	–	Bus PQ
4	0.3	-0.1	–	Bus PQ

Por otro lado, la tabla 2 muestra los datos de los parámetros de las líneas de transmisión del sistema del ejemplo.

TABLA 2. PARAMETROS DE LINEAS.

Línea	R, pu	X, pu	G, pu	B,pu
1-2	0.05	0.15	2.0	-6.0
1-3	0.10	0.30	1.0	-3.0
2-3	0.15	0.45	0.666	-2.0
2-4	0.10	0.30	1.0	-3.0
3-4	0.05	0.15	2.0	-6.0

Es importante observar que la Tabla 1 muestra, que aunque hay generadores en todos los buses, estos serán tipo PQ a condición de que se proporcionen las potencias netas inyectadas a los buses, lo cual constituye el caso de este ejemplo, en su parte inicial. De acuerdo a los datos proporcionados en la Tabla 2, la matriz Y_{BUS} puede obtenerse fácilmente. Dicha matriz resulta

$$Y_{BUS} = \begin{bmatrix} 3-j9 & -2+j6 & -1+j3 & 0 \\ -2+j6 & 3.666-j11 & -0.666+j2 & -1+j3 \\ -1+j3 & -0.666+j2 & 3.666-j11 & -2+j6 \\ 0 & -1+j3 & -2+j6 & 3-j9 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo a los datos y la matriz Y_{BUS} , entonces procedemos a llevar a cabo la primera iteración .

Para el bus 2 tenemos,

$$\begin{aligned} V_2^{(1)} &= \frac{1}{Y_{22}} \left\{ \frac{P_2 - jQ_2}{(V_2^{(0)})^*} - Y_{21}V_1 - Y_{23}V_3^{(0)} - Y_{24}V_4^{(0)} \right\} \\ &= \frac{1}{3.666-j11} \left\{ \frac{0.5+j0.2}{1-j0} - 1.04(-2+j6) - (-0.666+j2) - (-1+j3) \right\} \\ &= \frac{4.246-j11.04}{3.666-j11} = 1.019+j0.046 \text{ pu.} \end{aligned}$$

Para el bus 3

$$\begin{aligned} V_3^{(1)} &= \frac{1}{Y_{33}} \left\{ \frac{P_3 - jQ_3}{(V_3^{(0)})^*} - Y_{31}V_1 - Y_{32}V_2^{(1)} - Y_{34}V_4^{(0)} \right\} \\ &= \frac{1}{3.666-j11} \left\{ \frac{-1-j0.5}{1-j0} - 1.04(-1+j3) - (-0.666+j2)(1.019+j0.046) - (-2+j6) \right\} \\ &= \frac{2.81-j11.627}{3.666-j11} = 1.028-j0.087 \text{ pu.} \end{aligned}$$

Y finalmente para el bus 4

$$\begin{aligned}
 V_4^{(1)} &= \frac{1}{Y_{44}} \left\{ \frac{P_4 - jQ_4}{(V_4^{(0)})^*} - Y_{41}V_1 - Y_{42}V_2^{(1)} - Y_{43}V_3^{(1)} \right\} \\
 &= \frac{1}{3 - j9} \left\{ \frac{0.3 + j0.1}{1 - j0} - (-1 + j3)(1.019 + j0.046) - (-2 + j6)(1.028 - j0.087) \right\} \\
 &= \frac{2.991 - j9.253}{3 - j9} = 1.025 - j0.0093 \text{ pu.}
 \end{aligned}$$

Para la segunda parte del ejemplo, consideremos el mismo caso, con la diferencia de que el bus 2 es ahora tipo PV, con $|V_2| = 1.04$ pu. De nuevo usamos arranque “plano”, y efectuamos la primera iteración, tomando en cuenta que los límites de reactivos en el bus 2 son: $0.2 \leq Q_2 \leq 1.0$.

Antes de calcular el voltaje del bus 2, necesitamos evaluar la potencia reactiva en dicho bus, por lo que

$$\begin{aligned}
 Q_2^{(1)} &= -\Im m \left\{ (V_2^{(0)})^* \left[Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2^{(0)} + Y_{23}V_3^{(0)} + Y_{24}V_4^{(0)} \right] \right\} \\
 &= -\Im m \left\{ 1.04 \left[(-2 + j6)(1.04) + (3.666 - j11)(1.04) + (-0.666 + j2)(1.0 + j0) + (-1 + j3)(1.0 + j0) \right] \right\} \\
 &= -\Im m \{-2.1632 - j0.2079\} = 0.2079 \text{ pu}
 \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
 \delta_2^{(1)} &= \angle \left\{ \frac{1}{Y_{22}} \left[\frac{P_2 - jQ_2^{(1)}}{(V_2^{(0)})^*} - Y_{21}V_1 - Y_{23}V_3^{(0)} - Y_{24}V_4^{(0)} \right] \right\} \\
 &= \angle \left\{ \frac{1}{3.666 - j11} \left[\frac{0.5 - j0.2079}{1.04 - j0} - (-2 + j6)(1.04 + j0) - (-0.666 + j2)(1 + j0) - (-1 + j3)(1 + j0) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$Q_2^{(1)} = 0.2079 \text{ pu.}$$

Con el resultado anterior calculamos el ángulo del voltaje del Bus 2, que finalmente es lo que buscamos, verificando previamente que no se violan los límites de reactivos especificados para dicho bus, lo cual es el caso presente, o sea $Q_{2,\min} \leq Q_2^{(1)} \leq Q_{2,\max}$.

Usando (2.4.13) obtenemos

$$\begin{aligned}\delta_2^{(1)} &= \angle \left\{ \frac{1}{Y_{22}} \left[\frac{P_2 - jQ_2^{(1)}}{(V_2^{(0)})^*} - Y_{21}V_1 - Y_{23}V_3^{(0)} - Y_{24}V_4^{(0)} \right] \right\} \\ &= \angle \left\{ \frac{1}{3.666 - j11} \left[\frac{0.5 - j0.2079}{1.04 - j0} - (-2 + j6)(1.04 + j0) - (-0.666 + j2)(1 + j0) - (-1 + j3)(1 + j0) \right] \right\} \\ &= \angle \left(\frac{4.2267 - j11.439}{3.666 - j11} \right) = \angle(1.0512 + j0.0339).\end{aligned}$$

De donde obtenemos $\delta_2^{(1)} = 1.84658^\circ = 0.0322 \text{ rad}$, y entonces $V_2^{(1)} = 1.04(\cos \delta_2^{(1)} + j \operatorname{sen} \delta_2^{(1)}) = 1.03946 + j0.03351$.

Para el voltaje en el Bus 3

$$\begin{aligned}V_3^{(1)} &= \frac{1}{Y_{33}} \left[\frac{P_3 - jQ_3}{(V_3^{(0)})^*} - Y_{31}V_1 - Y_{32}V_2^{(1)} - Y_{34}V_4^{(0)} \right] \\ &= \frac{1}{3.666 - j11} \left[\frac{-1 - j0.5}{1 - j0} - (-1 + j3)(1.04) - (-0.666 + j2)(1.03946 + j0.03351) - (-2 + j6) \right] \\ &= \frac{2.7992 - j11.6766}{3.666 - j11} = 1.0317 - j0.08937.\end{aligned}$$

Finalmente para el Bus 4

$$\begin{aligned}V_4^{(1)} &= \frac{1}{Y_{44}} \left[\frac{P_4 - jQ_4}{(V_4^{(0)})^*} - Y_{41}V_1 - Y_{42}V_2^{(1)} - Y_{43}V_3^{(1)} \right] \\ &= \frac{1}{3 - j9} \left[\frac{0.3 + j0.1}{1 - j0} - (-1 + j3)(1.0394 + j0.0335) - (-2 + j6)(1.0317 - j0.08937) \right]\end{aligned}$$

$$= \frac{2.9671 - j8.9962}{3 - j9} = 0.9985 - j0.0031.$$

Supongamos ahora que los límites permisibles para la potencia reactiva en el bus 2 son cambiados, y supongamos ahora que $0.25 \leq Q_2 \leq 1.0$ pu. Es obvio que el valor previamente calculado de $Q_2 (= 0.2079)$, permanece igual. Sin embargo este valor ahora viola el límite $Q_{2,\min}$, por lo que debemos entonces fijar el valor de dicha potencia reactiva inyectada al bus 2, en el valor del límite violado, y convertir este bus en un bus tipo PQ, con $Q_2 = 0.25$. Con esto debemos recalculer los voltajes de los buses, con los nuevos valores tomados en cuenta. Los valores de los voltajes en este caso son (tomando en cuenta arranque plano, como antes)

$$\begin{aligned} V_2^{(1)} &= \frac{1}{Y_{22}} \left\{ \frac{P_2 - jQ_2}{(V_2^{(0)})^*} - Y_{21}V_1 - Y_{23}V_3^{(0)} - Y_{24}V_4^{(0)} \right\} \\ &= \frac{1}{3.666 - j11} \left[\frac{0.5 - j0.25}{1 - j0} - (-2 + j6)(1.04) - (-0.666 + j2) - (-1 + j3) \right] \\ &= \frac{4.246 - j11.49}{3.666 - j11} = 1.0559 + j0.0341. \end{aligned}$$

Voltaje en el bus 3

$$\begin{aligned} V_3^{(1)} &= \frac{1}{Y_{33}} \left\{ \frac{P_3 - jQ_3}{(V_3^{(0)})^*} - Y_{31}V_1 - Y_{32}V_2^{(1)} - Y_{34}V_4^{(0)} \right\} \\ &= \frac{1}{3.666 - j11} \left[\frac{-1 - j0.5}{1 - j0} - (-1 + j3)(1.04) - (-0.666 + j2) - (1.0559 + j0.0341) - (-2 + j6) \right] \\ &= \frac{2.8112 - j11.709}{3.666 - j11} = 1.0347 + j0.0893 \text{ pu.} \end{aligned}$$

Voltaje en el bus 4

$$V_4^{(1)} = \frac{1}{Y_{44}} \left\{ \frac{P_4 - jQ_4}{(V_4^{(0)})^*} - Y_{41}V_1 - Y_{42}V_2^{(1)} - Y_{43}V_3^{(0)} \right\}$$

$$= \frac{1}{3-j9} \left[\frac{0.3+j0.1}{1-j0} - (-1+j3)(1.0509+j0.0341) - (-2+j6)(1.0347-j0.0893) \right]$$

$$= \frac{4.063-j9.4204}{3-j9} = 1.0775+j0.0923 \text{ pu}.$$

Aceleración de la Convergencia. En el método de Gauss-Seidel, existe una medida que tiende a mejorar la rapidez del método. Esta medida consiste en efectuar una extrapolación lineal, al final del proceso de cálculo del voltaje, con el fin de obtener un estimado del voltaje en esa iteración, más cercano a la solución. La expresión que caracteriza a dicha extrapolación sería, para el bus i

$$V_{i,acel}^{(l+1)} = V_{i,acel}^{(l)} + \alpha \left(V_i^{(l+1)} - V_{i,acel}^{(l)} \right).$$

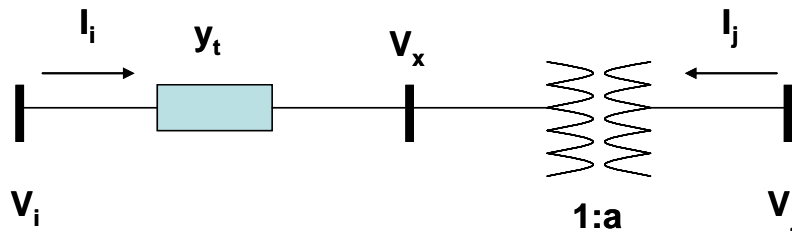
α es el denominado factor de aceleración, que toma valores que pueden ir teóricamente desde 1.0 hasta 2.0, según los libros de métodos numéricos, pero en la aplicación práctica de flujos de potencia, los valores reportados [2] como los más adecuados, están $1.4 \leq \alpha \leq 1.6$. No existe una demostración formal de cual es el valor más adecuado, y la única forma reportada, hasta donde el conocimiento del autor alcanza, consiste en hacer pruebas para encontrar el valor más adecuado para un sistema particular. Sobretudo en el pasado se escribió mucho al respecto [2], [8] y las conclusiones a que se llegaron, son las indicadas arriba.

Como se mencionó anteriormente, el generador puede efectuar control en la magnitud de voltaje, debido a que puede inyectar potencia reactiva en un bus, en la medida requerida con el fin de mantener, dentro de ciertos límites, la magnitud de voltaje en el valor requerido. El generador no es el único dispositivo que puede llevar a cabo este control y de hecho existen dispositivos que pueden controlar no nada más la magnitud de voltaje, sino su ángulo, con la finalidad de controlar, a su vez, el flujo de potencia activa en un elemento de transmisión. Uno de estos dispositivos se discute en la siguiente sección.

TRANSFORMADORES CON CAMBIO DE DERIVACION BAJO CARGA

Un dispositivo muy importante en el control de voltaje y flujo de potencia activa lo constituyen estos transformadores con cambio de derivación bajo carga, en la que en el primer caso, dicho cambio afecta fundamentalmente la relación de vueltas, con el fin de controlar el voltaje. En el otro caso, el control se efectúa sobre el ángulo del voltaje, teniendo esto efecto en el flujo de potencia activa. El dispositivo que se modelará aquí, es un dispositivo electromecánico. En la actualidad existen dispositivos, que se conocen colectivamente como FACTS (Flexible AC Transmisión Systems), por sus siglas en inglés, basados en electrónica de potencia de alta velocidad, los cuales no se discutirán por estar fuera del objetivo de estas notas desarrolladas para un curso introductorio de análisis de Sistemas de Potencia.

Cuando el transformador tiene razón de vueltas no nominal, entonces su representación agrega un transformador ideal en serie con una admitancia, como se muestra en la figura.



Modelo de transformador con cambio de derivación bajo carga

Los buses asociados con las terminales son los buses i y j ; el bus x es un bus ficticio usado para formular el modelo de dicho transformador. La derivación o tap está conectado al bus j . Cabe hacer el comentario de que el término tap es un anglicismo muy usado; sin embargo en español se usa *derivación* o *toma*, lo cual causa a veces confusión. Aquí usaremos el primero.

De la figura anterior vemos que

$$V_x = \frac{1}{a} V_j$$

$$I_i = -a^* I_j$$

La última ecuación se obtiene tomando en cuenta que a puede ser compleja o real, y además considerando que la potencia compleja es la misma en ambos lados del transformador (transformador ideal), por lo que si el voltaje se transforma con un defasamiento de voltaje positivo, la corriente lo hará con un ángulo negativo.

Por otro lado

$$I_i = y_t (V_i - V_x) \quad (i)$$

De donde

$$I_i = y_t V_i - \frac{y_t}{a} V_j$$

Además vemos que

$$I_j = -\frac{1}{a^*} I_i$$

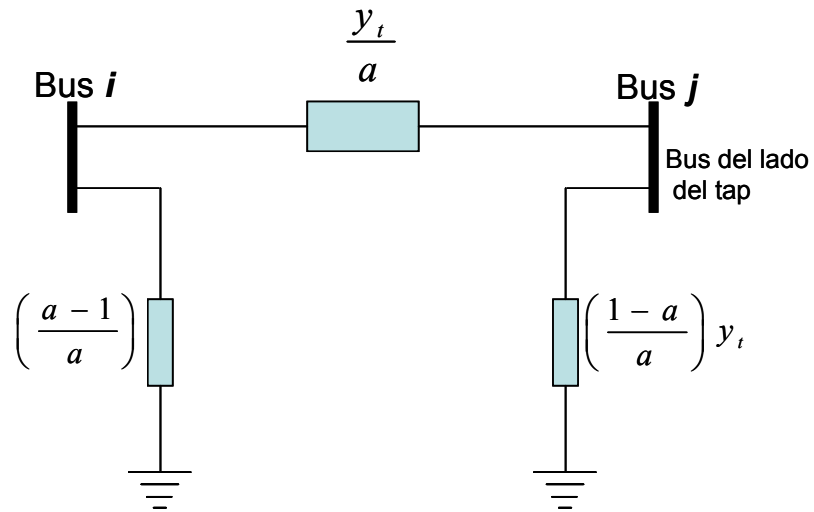
Por lo que si se sustituye la ecuación anterior (i) obtenemos

$$I_j = -\frac{1}{a^*} \left[y_t V_i - \frac{y_t}{a} V_j \right] = -\frac{y_t}{a^*} V_i + \frac{y_t}{|a|^2} V_j \quad (ii)$$

En forma matricial las ecuaciones (i) y (ii) resultan en:

$$\begin{bmatrix} I_i \\ I_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_t & -\frac{y_t}{a} \\ -\frac{y_t}{a^*} & \frac{y_t}{|a|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix}$$

Si a es real, caso de transformador regulador (TCUL por sus siglas en inglés), la matriz de admitancias será simétrica (elemento bilateral) y tendrá una representación a través de un circuito π asociada, como se muestra en la siguiente figura.



Modelo π del transformador con derivación no nominal (TCUL).

2.5. FORMULACION Y SOLUCION DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA POR EL METODO DE NEWTON-RAPHSON.

En la sección II.3 se discutió el método de Newton-Raphson, una técnica numérica para la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales. Este método es la base del planteamiento del problema de flujos de potencia que veremos en esta unidad. Recordemos que el sistema de ecuaciones linealizado se escribe en forma completa como (2.3.6) y en forma compacta como (2.3.7), las cuales repetimos aquí por comodidad

$$\begin{bmatrix} y_1 - f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ y_2 - f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \dots \\ y_n - f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_k & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_k & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_k \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_k & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_k & \dots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_k & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_k & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^k \\ \Delta x_2^k \\ \dots \\ \Delta x_n^k \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

$$[J] \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{D} \quad (2.3.7)$$

Al vector $\underset{\sim}{D}$, se le llamó el vector de desajustes, también llamado vector de residuos por algunos autores. Este vector representa la diferencia entre los términos independientes de cada ecuación, y el valor de dichos términos en función de las incógnitas. Además en este punto es conveniente recordar que al vector $\underset{\sim}{C}$ se le denomina vector de correcciones, pues contiene los valores que hay que agregar a las incógnitas de la k -ésima iteración para mejorar (corregir) el valor anterior, en función del cual se calcularon dichos valores.

La formulación del método de Newton-Raphson es directa, en el sentido de que si recordamos que en esencia el problema de flujos consiste en calcular los voltajes nodales de la red, tomando en cuenta una serie de restricciones, que en su expresión más simple, consisten de inyecciones de potencia conocidas. Dichas inyecciones constituyen las variables y de (2.3.6), mientras que las funciones evaluadas en los valores de las incógnitas obtenidas en la iteración k -ésima, son las expresiones de las potencias.

En otras palabras, los elementos de dicho vector de desajustes serán igual a

$$f_{pi}(|V|, \delta) = P_i(\text{especificada}) - P_i(\text{calculada}) = \Delta P_i = 0 \quad (2.5.1a)$$

$$f_{qi}(|V|, \delta) = Q_i(\text{especificada}) - Q_i(\text{calculada}) = \Delta Q_i = 0 \quad (2.5.1b)$$

donde las expresiones que definen a P_i y a Q_i , son las expresiones que hemos venido usando en varios puntos de este material y que se repiten aquí por conveniencia

$$P_i = |V_i| \sum_{k=1}^n |V_k| |Y_{ik}| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$Q_i = -|V_i| \sum_{k=1}^n |V_k| |Y_{ik}| \text{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(2.5.2)

Por otro lado el vector de correcciones está compuesto por $\Delta|V_i|$ y $\Delta\delta_i$.

Con lo anterior podemos ver que la formulación general del problema de flujos en el método de Newton-Raphson, es decir (2.3.6) en términos de las variables del problema de flujos de potencia como mencionamos será

$$\begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \Delta P_i \\ \Delta Q_i \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet & & & & & & & & \\ & \bullet & & & & & & & \\ & & \bullet & & & & & & \\ & & & \bullet & & & & & \\ & & & & \bullet & & & & \\ & & & & & \bullet & & & \\ & & & & & & \bullet & & \\ & & & & & & & \bullet & \\ & & & & & & & & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \Delta \delta_m \\ \Delta |V_m| \\ \bullet \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{\partial P_i}{\partial \delta_m} & \frac{\partial P_i}{\partial |V_m|} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_m} & \frac{\partial Q_i}{\partial |V_m|} \end{matrix}$$

donde se muestran explícitamente los renglones que corresponden al bus i -ésimo, en el vector de desajustes, y su interacción con el bus m -ésimo, en el vector de correcciones. Los elementos de la matriz Jacobiana muestran los elementos correspondientes a dicha interacción.

Debemos meditar un momento, antes de seguir, sobre la dimensión del modelo matemático. Si suponemos que el número total de buses del sistema (incluyendo el compensador) es n , el número de buses PV es n_{pv} , y el número de buses PQ es n_{pq} . Vemos que en el caso de los buses PQ, se asignarán ambos elementos en el vector de desajustes, pues se conocen

las inyecciones de potencia real y reactiva. Al mismo tiempo recordamos que en estos buses (PQ), son incógnitas la magnitud de voltaje y el ángulo de éste, por lo que aparecerán ambos en el vector de correcciones, para este tipo de bus. Dado lo anterior, nos damos cuenta que habrán dos ecuaciones para cada bus de este tipo.

Por otro lado, en el caso de los buses PV, únicamente se conoce la potencia activa inyectada al bus, por lo que aparecerá únicamente el desajuste de potencia activa en el vector de desajustes correspondiente. Además recordemos que en este tipo de bus se desconocen los ángulos de voltaje, por lo que aparecerá el término correspondiente en el vector de correcciones. Tomando en cuenta lo anterior, vemos que existirá únicamente una ecuación para este tipo de bus.

En base a la discusión anterior vemos que el número de ecuaciones que constituyen el modelo matemático de flujos en el Newton-Raphson será: $2 n_{pq} + n_{pv}$. Es obvio que para el bus compensador no habrá necesidad de escribir ecuación, pues por un lado, no conocemos las inyecciones de potencia activa ni reactiva, por lo que no existen dichos términos en el vector de desajustes; por otro lado, el voltaje de dicho bus (magnitud y ángulo) no constituye incógnita.

La formulación anterior se conoce como *formulación polar*, debido a que las variables se expresan en formato polar. Existe otra formulación, denominada *formulación rectangular*, que está basada en la expresión de las variables del problema en su forma rectangular, de ahí su nombre. Sin embargo, esta última formulación no es tan popular como la formulación polar, debido fundamentalmente a que ésta es más eficiente en general; aunque podrían existir casos en que esto no sea así, estos casos serían especiales.

Hasta este punto vimos la formulación general del modelo de flujos de potencia en su forma polar. Enseguida entraremos en los detalles del método, al desarrollar las expresiones correspondientes a los elementos del vector de desajustes y de la matriz Jacobiana.

Comenzamos definiendo el formato polar de voltajes y admitancias: $V_i = |V_i| \angle \delta_i$, $Y_{ij} = |Y_{ij}| \angle \theta_{ij}$. Es importante hacer notar que existen autores que prefieren utilizar un signo negativo en los ángulos de la admitancia, debido al razonamiento, por supuesto correcto, de que la admitancia de un elemento de transmisión, es esencialmente inductiva, razón por la cual la parte imaginaria será negativa, y por tanto si expresamos esta cantidad en forma polar, su ángulo sería negativo. Sin embargo, lo contrario, que es la definición que

usaremos en este material, no debe causar ningún problema, pues finalmente es cuestión de respetar la definición durante el desarrollo de las expresiones mencionadas y ser consistente con su definición.

Las expresiones de las cantidades que forman el vector de desajustes fueron definidas previamente, ecuaciones (2.5.1a), (2.5.1b) y (2.5.2), las cuales combinadas nos proporcionan las expresiones finales

$$\Delta P_i = P_i^{espec} - \sum_{k=1}^n |V_i| |V_k| |Y_{ik}| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (2.5.3)$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{espec} - \left[-\sum_{k=1}^n |V_i| |V_k| |Y_{ik}| \text{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \right] \quad (2.5.4).$$

Notar que el término $|V_i|$ se introdujo dentro de la sumatoria, debido a que el índice de ésta es k , y por tanto no se produce ninguna alteración realmente en la expresión.

Para desarrollar las expresiones de la matriz Jacobiana, definimos las variables matriciales del modelo como se indica

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \dots \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_1] & \vdots & [J_2] \\ \dots & \vdots & \dots \\ [J_3] & \vdots & [J_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \dots \\ \Delta |V| \end{bmatrix} \quad (2.5.5).$$

La expresión matricial anterior implica las siguientes definiciones,

$$[J_1] = \left[\frac{\partial P}{\partial \delta} \right]$$

$$[J_2] = \left[\frac{\partial P}{\partial |V|} \right]$$

$$[J_3] = \left[\frac{\partial Q}{\partial \delta} \right]$$

$$[J_4] = \left[\frac{\partial Q}{\partial |V|} \right].$$

Las expresiones de la submatriz J_l se obtienen como se muestra enseguida. Primeramente, denominaremos elementos fuera de la diagonal de dicha submatriz, a aquellos que indican

la variación de la potencia en un bus con respecto al ángulo de otro bus; en contraparte, nos referiremos a los elementos de la diagonal de dichas submatrices, como los elementos que indican la variación de la potencia en un bus con respecto a la variación del ángulo en el mismo bus. Con el fin de tener a la mano las expresiones que usaremos para encontrar los elementos de la matriz Jacobiana, repetimos aquí las expresiones de la potencia, ecuación (2.5.2), incluso con una pequeña variante, adecuada para este fin.

Para la potencia activa

$$\begin{aligned} P_i &= \sum_{k=1}^n |V_i| |V_k| |Y_{ik}| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = \\ &= |V_i|^2 |Y_{ii}| \cos \theta_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i| |V_k| |Y_{ik}| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = |V_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i| |V_k| |Y_{ik}| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \end{aligned}$$

mientras que para la potencia reactiva

$$\begin{aligned} Q_i &= -\sum_{k=1}^n |V_i| |V_k| |Y_{ik}| \operatorname{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = \\ &= -|V_i|^2 |Y_{ii}| \operatorname{sen} \theta_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i| |V_k| |Y_{ik}| \operatorname{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = -|V_i|^2 B_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i| |V_k| |Y_{ik}| \operatorname{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \end{aligned}$$

Como se podrá observar, las pequeñas modificaciones son simplemente variantes de las expresiones de potencia, en las que se ha separado, por conveniencia, el término para $k = i$, y además como $Y_{ik} = |Y_{ik}| \angle \theta_{ik}$, por lo que también tendremos $Y_{ik} = |Y_{ik}| \cos \theta_{ik} + j |Y_{ik}| \operatorname{sen} \theta_{ik} = G_{ik} + j B_{ik}$.

Con lo anterior en mente, obtenemos:

Elementos de $[J_1]$:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_k} = -|V_i| |Y_{ik}| |V_k| \operatorname{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad i \neq k \quad (\text{elemento fuera de la diagonal}) \quad (2.5.6a)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i| |Y_{ik}| |V_k| \operatorname{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (\text{elemento diagonal}). \quad (2.5.6b)$$

Elementos de $[J_2]$:

$$\frac{\partial P_i}{\partial |V_k|} = |V_i Y_{ik}| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad i \neq k \quad (2.5.6c)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial |V_i|} = 2|V_i||Y_{ii}| \cos \theta_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |Y_{ik} V_k| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (2.5.6d)$$

Elementos de $[J_3]$:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_k} = -|V_i Y_{ik} V_k| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad i \neq k \quad (2.5.6e)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (2.5.6f)$$

Elementos de $[J_4]$:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |V_k|} = -|V_i Y_{ik}| \text{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad i \neq k \quad (2.5.6g)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|} = -2|V_i||Y_{ii}| \text{sen} \theta_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |Y_{ik} V_k| \text{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (2.5.6h).$$

El proceso iterativo asociado a la ecuación (2.5.5) se puede representar por la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} \Delta P^{(l)} \\ \dots \\ \Delta Q^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_1]^{(l)} & \vdots & [J_2]^{(l)} \\ \dots & \vdots & \dots \\ [J_3]^{(l)} & \vdots & [J_4]^{(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta^{(l)} \\ \dots \\ \Delta |V|^{(l)} \end{bmatrix} \quad (2.5.7)$$

que muestra la ecuación del Newton-Raphson en la iteración l -ésima. Es importante recordar que si tenemos n_{pv} buses PV, entonces el mismo número de ecuaciones que involucran a ΔQ y a ΔV y sus correspondientes $[J_3]$ columnas de la matriz Jacobiana

serán eliminadas. Entonces existirán $n - 1$ restricciones de potencia reactiva y el orden de la matriz será igual a $(2n - 2 - n_{pv}) \times (2n - 2 - n_{pv})$. Además el orden de $[J_1]$ será $(n - 1) \times (n - 1)$, mientras que el orden de $[J_2]$ de $(n - 1) \times (n - 1 - n_{pv})$. Por otro lado el orden de $[J_3]$ es $(n - 1 - n_{pv}) \times (n - 1)$, y finalmente el orden de $[J_4]$ es $(n - 1 - n_{pv}) \times (n - 1 - n_{pv})$.

Los términos del vector de ajustes para la l -ésima iteración serán

$$\Delta P_i^{(l)} = P_i^{espec} - P_i^{(l)} \quad (2.5.8a)$$

$$\Delta Q_i^{(l)} = Q_i^{espec} - Q_i^{(l)} \quad (2.5.8b)$$

y los nuevos estimados para los voltajes de bus

$$\delta_i^{(l+1)} = \delta_i^{(l)} + \Delta \delta_i^{(l)} \quad (2.5.9a)$$

$$\left| V_i^{(l+1)} \right| = \left| V_i^{(l)} \right| + \Delta \left| V_i^{(l)} \right| \quad (2.5.9b).$$

El procedimiento para el método de Newton-Raphson es como sigue:

1. Para buses PQ, en los que se especifican P_i^{espec} y Q_i^{espec} , se deberán inicializar las magnitudes y ángulos de los voltajes, generalmente igual a los del bus compensador ó 1.0 en magnitud y 0.0 en ángulo, esto es, $\left| V_i^{(0)} \right| = 1.0$ y $\delta_i^{(0)} = 0.0$. Para buses PV donde se especifican $\left| V_i \right|$ y P_i^{espec} , los ángulos de fase se inicializan igual al del bus compensador, esto es, 0.0 ó $\delta_i^{(0)} = 0$.
2. Para buses tipo PQ, $P_i^{(l)}$ y $Q_i^{(l)}$ se calculan por medio de las ecuaciones (2.5.2), mientras que $\Delta P_i^{(l)}$ y $\Delta Q_i^{(l)}$ se calculan por medio de las ecuaciones (2.5.8a) y (2.5.8b).
3. Para buses tipo PV $P_i^{(l)}$ y $\Delta P_i^{(l)}$ se calculan a través de (2.5.2) y (2.5.8a), respectivamente.

4. Los elementos de la matriz Jacobiana, se calculan en este punto, usando las ecuaciones (2.5.6a)-(2.5.6h), es decir en este punto se actualiza la matriz Jacobiana.
5. En este paso se resuelve el sistema de ecuaciones lineales de la ecuación (2.5.7).
6. Los nuevos valores de magnitud de voltaje y ángulo son calculados por medio de las ecuaciones (2.5.9a) y (2.5.9b).
7. El proceso continuará hasta que los desajustes de potencia $\Delta P_i^{(l)}$ y $\Delta Q_i^{(l)}$, calculados por medio de las ecuaciones (2.5.8a) y (2.5.8b), cumplan con el criterio de convergencia que deseado, el cual se especificará como parte de los datos de inicialización del programa,

$$\left| \Delta P_i^{(l)} \right| \leq \varepsilon$$

$$\left| \Delta Q_i^{(l)} \right| \leq \varepsilon.$$

Si ocurre convergencia, entonces los valores de las variables obtenidas hasta este punto, serán la solución y se procederá a calcular los flujos en los elementos de transmisión y las pérdidas, tanto en estos como las pérdidas totales del sistema.

EJEMPLO. En este punto es conveniente introducir un ejemplo sencillo, que permita afianzar los conceptos que se han discutido hasta ahora, acerca del método de Newton-Raphson. Consideremos el sistema de tres buses que se muestra en la figura 2.5.1. La Tabla 1, muestra los datos correspondientes a los buses; además, para no complicar innecesariamente el ejemplo, consideremos las tres líneas de transmisión iguales, con una impedancia serie de $0.02 + j 0.08$ pu, y una admitancia en derivación total de $j0.02$ pu. La fuente de potencia reactiva del bus 3 tiene la restricción $0 \leq Q_{G3} \leq 1.5$ pu. Se usará una tolerancia de 0.01 para el desajuste de potencia.

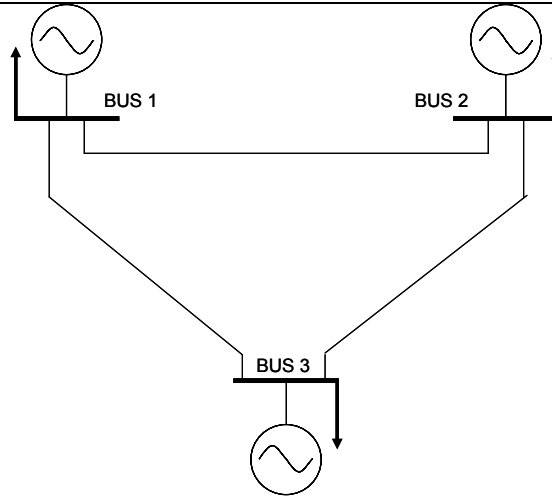


Figura 2.5.1. Sistema de tres buses.

TABLA 1. DATOS DE LOS BUSES DEL SISTEMA

BUS	P_D	Q_D	P_G	Q_G	V
1 (COMP)	2.0	1.0	–	–	$1.04+j0$
2 (PQ)	0.0	0.0	0.5	1.0	–
3 (PV)	1.5	0.6	0.0	–	1.04

Con los datos de las líneas de transmisión proporcionados, podemos ver fácilmente que todos los términos diagonales y de fuera de la diagonal de matriz Y_{BUS} , son iguales entre si, por lo que la matriz resulta

$$Y_{BUS} = \begin{bmatrix} 24.23 \angle -75.95^0 & 12.13 \angle 104.04^0 & 12.13 \angle 104.04^0 \\ 12.13 \angle 104.04^0 & 24.23 \angle -75.95^0 & 12.13 \angle 104.04^0 \\ 12.13 \angle 104.04^0 & 12.13 \angle 104.04^0 & 24.23 \angle -75.95^0 \end{bmatrix}$$

Iniciamos la primera iteración, con arranque plano $V_2^{(0)} = 1 + j0$ y $\delta_3^{(0)} = 0$. Con esto tenemos que las potencias estimadas de los buses son

$$P_2 = |V_2 V_1 Y_{21}| \cos(\theta_{21} + \delta_1 - \delta_2) + |V_2|^2 |Y_{22}| \cos \theta_{22} + |V_2 V_3 Y_{23}| \cos(\theta_{23} + \delta_3 - \delta_2)$$

$$P_3 = |V_3 V_1 Y_{31}| \cos(\theta_{31} + \delta_1 - \delta_3) + |V_3 V_2 Y_{32}| \cos(\theta_{23} + \delta_2 - \delta_3) + |V_3|^2 |Y_{33}| \cos \theta_{33}$$

$$Q_2 = -|V_2 V_1 Y_{21}| \cos(\theta_{21} + \delta_1 - \delta_2) - |V_2|^2 |Y_{22}| \text{sen} \theta_{22} - |V_2 V_3 Y_{23}| \text{sen}(\theta_{23} + \delta_2 - \delta_3),$$

de donde sustituyendo en las ecuaciones anteriores obtenemos los siguientes valores para el estimado de las potencias inyectadas a los buses

$$P_2^{(0)} = -0.23 \quad pu$$

$$P_3^{(0)} = 0.12 \quad pu$$

$$Q_2^{(0)} = -0.96 \quad pu$$

con estos valores podemos calcular los desajustes correspondientes,

$$\Delta P_2^{(0)} = P_2^{espec} - P_2^{(0)calc} = 0.5 - (-0.23) = 0.73 \quad pu$$

$$\Delta P_3^{(0)} = P_3^{espec} - P_3^{(0)calc} = -1.5 - (-0.12) = -1.62 \quad pu$$

$$\Delta Q_2^{(0)} = Q_2^{espec} - Q_2^{(0)calc} = 1 - (-0.96) = 1.96 \quad pu$$

Estos valores son los elementos del vector de desajustes. Estos valores serán confrontados con la tolerancia ε , que se especificó en los datos de entrada del programa.

El siguiente paso, una vez que se ha verificado que aún nos tiene convergencia, es evaluar los elementos de la matriz Jacobiana, por medio de las ecuaciones desarrolladas previamente, (2.5.6a-h), lo cual resulta en la matriz Jacobiana que se muestra a continuación, dentro del sistema de ecuaciones correspondientes al Newton-Raphson.

$$\begin{pmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial \delta_3} & \frac{\partial P_2}{\partial |V_2|} \\ \frac{\partial P_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_3}{\partial \delta_3} & \frac{\partial P_3}{\partial |V_2|} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_3} & \frac{\partial Q_2}{\partial |V_2|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \\ \Delta |V_2| \end{pmatrix}$$

la matriz resulta en los valores siguientes

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial \delta_3} & \frac{\partial P_2}{\partial |V_2|} \\ \frac{\partial P_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_3}{\partial \delta_3} & \frac{\partial P_3}{\partial |V_2|} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_3} & \frac{\partial Q_2}{\partial |V_2|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.47 & -12.23 & 5.64 \\ -12.23 & 24.95 & -3.05 \\ -6.11 & 3.05 & 22.54 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones indicado abajo, obtenemos el vector de correcciones de primera iteración

$$\begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \Delta \delta_3^{(1)} \\ \Delta |V_2|^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.47 & -12.23 & 5.64 \\ -12.23 & 24.95 & -3.05 \\ -6.11 & 3.05 & 22.54 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.73 \\ -1.62 \\ 1.96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.023 \\ -0.0654 \\ 0.089 \end{bmatrix}$$

con lo que los valores corregidos resultan

$$\begin{pmatrix} \delta_2^{(1)} \\ \delta_3^{(1)} \\ |V_2|^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_2^{(0)} \\ \delta_3^{(0)} \\ |V_2|^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \delta_2^{(1)} \\ \Delta \delta_3^{(1)} \\ \Delta |V_2|^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -0.023 \\ -0.0654 \\ 0.089 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.023 \\ -0.0654 \\ 1.089 \end{bmatrix}$$

Calculamos ahora la potencia reactiva inyectada al bus 3, ecuación (2.5.2), en función de las variables actualizadas, con el fin de verificar que cumpla con los límites estipulados; resulta $Q_3^{(1)} = 0.4677$, con lo cual calculamos la potencia generada, que es la que tiene estipulado el límite, como $Q_{G3}^{(1)} = Q_3^{(1)} + Q_{D3} = 0.4677 + 0.6 = 1.0677$, cuyo valor está dentro de límites.

Si proseguimos de la manera que ejemplifica este ejemplo, en tres iteraciones llegamos a los resultados que se muestran a continuación,

$$V_2 = 1.081 \angle -0.024 \text{ rad}$$

$$V_3 = 1.04 \angle -0.0655 \text{ rad}$$

$$Q_{G3} = -0.15 + 0.6 = 0.45 \text{ (dentro de límites)}$$

$$S_1 = 1.031 + j(-0.791)$$

$$S_2 = 0.5 + j1.0$$

$$S_3 = -1.5 - j0.15$$

$$p\acute{e}rdidas\ totales = 0.031\ pu$$

Se le sugiere al lector verificar a detalle los resultados mostrados.

Existen una serie de medidas que se pueden adoptar para hacer más eficiente el método de Newton-Raphson, las cuales van desde detalles de programación, pasando por el uso insustituible de las *técnicas de dispersidad*, por supuesto incluidos los métodos desacoplados, a los cuales nos referiremos más adelante. Pero de este conjunto de medidas, hay una que veremos en este caso y que consiste en una serie de planteamientos que ayudan a hacer más eficiente el método y que denominaremos método de Newton-Raphson *normalizado*, denominado así porque este implica la obtención de las correcciones de magnitud divididas entre la magnitud del voltajes, y de ahí su nombre.

Para iniciar este tema, partimos de las expresiones de potencia que vimos en la ecuación (2.5.2), las cuales volvemos a escribir aquí con pequeñas variantes por conveniencia.

$$P_i = \sum_{k=1}^n |V_i Y_{ik} V_k| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = |V_i|^2 |Y_{ii}| \cos \theta_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) =$$

$$P_i = |V_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = |V_i|^2 G_{ii} + \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = P_i - |V_i|^2 G_{ii}$$

$$= |V_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (2.5.10)$$

$$Q_i = -\sum_{k=1}^n |V_i Y_{ik} V_k| \text{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = -|V_i|^2 |Y_{ii}| \text{sen} \theta_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \text{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) =$$

$$= -|V_i|^2 B_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \text{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = -|V_i|^2 B_{ii} - \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} \quad (2.5.11).$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = -|V_i|^2 B_{ii} - Q_i$$

Iniciamos comparando las expresiones (2.5.6a-b). Empezamos por los elementos fuera de la diagonal, aquellos que se caracterizan por la relación $i \neq k$.

Comparamos (2.5.6a) con (2.5.6g) y vemos que las expresiones del lado derecho de estas ecuaciones, difieren únicamente por un término: $|V_k|$, es decir, que esto lo podemos

expresar como $\frac{\partial P_i}{\partial \delta_k} = |V_k| \frac{\partial Q_i}{\partial |V_k|}$. Lo anterior nos invita a concluir que si multiplicamos el

término fuera de la diagonal de $[J_4]$ por $|V_k|$, no tendremos que calcular ambos términos, es decir calculado el término correspondiente de $[J_4]$, una vez efectuada la multiplicación indicada, se lo asignamos al término correspondiente de $[J_1]$. Lo anterior es cierto y esto simplifica mucho el trabajo computacional sin duda, lo único que tenemos que hacer es tener cuidado y ver las implicaciones asociadas con este hecho. Dichas implicaciones tienen que ver con el hecho de que el término de $[J_4]$ en el modelo matemático del Newton-Raphson, está multiplicando a la corrección de voltaje, por lo que si multiplicamos por una cantidad, debemos dividir entre la misma, con el fin de que la expresión no se altere. Esto puesto en términos de ecuaciones significa

$$\left(\frac{|V_k|}{|V_k|} \right) \frac{\partial Q_i}{\partial |V_k|} \Delta |V_k| \equiv |V_k| \frac{\partial Q_i}{\partial |V_k|} \left(\frac{\Delta |V_k|}{|V_k|} \right).$$

Lo anterior implica claramente que podemos hacer lo mencionado arriba, a condición de corregir el resultado final, pues en este caso no estamos obteniendo la corrección de voltaje, sino ésta dividida entre $|V_k|$, por lo que debemos multiplicar la cantidad obtenida en el proceso por $|V_k|$, antes de sumarla al voltaje de la iteración anterior, para obtener el nuevo estimado de voltaje.

Otro resultado parecido se obtiene al comparar las expresiones (2.5.6c) y (2.5.6e), que corresponden a los elementos fuera de la diagonal de las submatrices $[J_2]$ y $[J_3]$, respectivamente. Realizando dicha comparación vemos que la diferencia entre las expresiones del lado derecho de las ecuaciones mencionadas, difiere únicamente por el signo y la magnitud de voltaje multiplicando a la expresión de $[J_2]$, es decir

$-|V_k| \frac{\partial P_i}{\partial |V_k|} \equiv \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_k}$. Sin embargo, al igual que en el caso anterior, debemos estar alerta y ver que la expresión que se está multiplicando por $|V_k|$, multiplica a la corrección de voltaje correspondiente y por tanto debemos dividir esta última, de otra forma la expresión se alteraría, es decir

$$-\left(\frac{|V_k|}{|V_k|}\right) \frac{\partial P_i}{\partial |V_k|} \Delta |V_k| \equiv -|V_k| \frac{\partial P_i}{\partial |V_k|} \left(\frac{\Delta |V_k|}{|V_k|}\right).$$

De nueva cuenta, lo anterior implica que al resolver el sistema de ecuaciones del modelo matemático del Newton-Raphson, debemos multiplicar el término solución por $|V_k|$, con el fin de obtener la corrección que se usará en la obtención del estimado del voltaje en la iteración correspondiente.

Con respecto a los términos diagonales, también se pueden sacar algunas conclusiones que, al igual que en los casos anteriores, mejoran la eficiencia del método. Para esto empezamos comparando el lado derecho de la ecuación (2.5.6b), que corresponde al término diagonal de $[J_1]$, con la expresión dada en (2.5.11), o sea la ecuación de Q_i .

Escribimos dichas expresiones de nuevo para facilitar su comparación

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \text{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (2.5.6b)$$

$$Q_i = -|V_i|^2 B_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \text{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (2.5.11)$$

Vemos que si sumamos a la sumatoria en (2.5.6b) el término $-|V_i|^2 B_{ii}$, además de cambiarle el signo, obtendremos la expresión de Q_i . En otras palabras tenemos que

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = -Q_i - |V_i|^2 B_{ii}. \quad \text{Esto implica un importante ahorro computacional, debido a que}$$

recordemos que las potencias, tanto P_i como Q_i , se calculan al inicio de la iteración, cuando se calculan los desajustes de potencia.

En el cálculo de los términos diagonales de $[J_2]$, tenemos que si comparamos (2.5.6d) con (2.5.10),

$$\frac{\partial P_i}{\partial |V_i|} = 2|V_i||Y_{ii}|\cos\theta_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |Y_{ik}V_k|\cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (2.5.6d)$$

$$P_i = |V_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (2.5.10)$$

Si multiplicamos (2.5.6d) por $|V_i|$ obtenemos

$$(|V_i|) \frac{\partial P_i}{\partial |V_i|} = 2|V_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = |V_i|^2 G_{ii} + P_i$$

por lo tanto tendremos que $(|V_i|) \frac{\partial P_i}{\partial |V_i|} = |V_i|^2 G_{ii} + P_i$. De nuevo, habiendo calculado el valor de P_i al inicio de la iteración, el ahorro en trabajo computacional en el cálculo de estos términos, es importante.

En el caso de los elementos diagonales de $[J_3]$, comparamos (2.5.6f) con (2.5.10)

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (2.5.6f)$$

$$P_i = |V_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (2.5.10).$$

Observamos que

$$P_i = |V_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \cos(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = |V_i|^2 G_{ii} + \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i}, \quad \text{por lo que despejando}$$

obtenemos $\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = P_i - |V_i|^2 G_{ii}$. De nuevo, esto tiene importancia en el cálculo para la

obtención de estos elementos de $[J_3]$.

Finalmente para los elementos diagonales de $[J_4]$, comparamos las ecuaciones (2.5.6h) con (2.5.11)

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|} = -2|V_i||Y_{ii}| \text{sen} \theta_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |Y_{ik} V_k| \text{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (2.5.6h)$$

$$Q_i = -|V_i|^2 B_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \text{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) \quad (2.5.11)$$

Vemos que

$$(|V_i|) \frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|} = -2|V_i|^2 B_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |V_i Y_{ik} V_k| \text{sen}(\theta_{ik} + \delta_k - \delta_i) = -|V_i|^2 B_{ii} + Q_i, \text{ por lo que}$$

observamos que para utilizar este resultado hemos tenido que multiplicar por $|V_i|$, por lo que se repite la conclusión en el sentido de que la solución obtenida, será la corrección

normalizada. Además podemos ver que $(|V_i|) \frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|} = -\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i}$.

Podemos resumir lo que hemos analizado en estos últimos párrafos.

Elementos Diagonales:

Calculamos:

$$[J_1]_{diag} = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = -Q_i - |V_i|^2 B_{ii}$$

$$[J_3]_{diag} = \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = P_i - |V_i|^2 G_{ii}.$$

Obtenemos:

$$[J_2]_{diag} = |V_i| \frac{\partial P_i}{\partial |V_i|} = [J_3]_{diag} + 2|V_i|^2 G_{ii}$$

$$[J_4]_{diag} = |V_i| \frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|} = -[J_1]_{diag} - 2|V_i|^2 B_{ii}.$$

Elementos Fuera de la Diagonal.

$$[J_1]_{fd} = [J_4]_{fd} \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial P_i}{\partial \delta_k} = \frac{\partial Q_i}{\partial |V_k|}$$

$$[J_3]_{fd} = -[J_2]_{fd} \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_k} = -\frac{\partial P_i}{\partial |V_k|}.$$

En el método normalizado de Newton-Raphson, el sistema de ecuaciones tendrá la forma

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \dots \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_1]_{norm} & \vdots & [J_2]_{norm} \\ \dots & \vdots & \dots \\ [J_3]_{norm} & \vdots & [J_4]_{norm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \dots \\ \frac{\Delta |V|}{|V|} \end{bmatrix}.$$

COMPARACION ENTRE LOS METODOS DE GAUSS-SEIDEL Y NEWTON-RAPHSON.

Es importante hacer una comparación entre los métodos de Gauss-Seidel (GS) y Newton-Raphon (NR). Hay que aclarar que esta comparación la hacemos sobre los formatos discutidos en las presentes notas, es decir en el caso de la formulación a través de la matriz Y_{BUS} , dado que existen un a cantidad importante de variantes, p. ej. Z_{BUS} , y las formulaciones basados en el elemento topológico de lazo, la mayoría de las cuales tiene únicamente interés histórico [2], por lo que generalmente en estos cursos de nivel licenciatura, primordialmente se cubren las formulaciones aquí analizadas.

La primera experiencia que se tiene entre estos dos métodos es que mientras en GS la formulación en formato rectangular trabaja bien, en el caso del NR esta formulación requiere más memoria, que la formulación vista en estas notas, o sea que la formulación polar. Además el GS requiere menos operaciones aritméticas por iteración, debido a la dispersidad de la red y la simplicidad del método; esto último constituye una ventaja con respecto al NR. En el NR los elementos de la matriz Jacobiana deben calcularse en cada iteración, por lo que el costo en tiempo por iteración en este método es más grande que en el GS. Aproximadamente una iteración del NR es equivalente a 7 iteraciones del GS, para un sistema grande típico [11]. El tiempo en ambos métodos se incrementa con el número de buses.

La convergencia del GS es lineal, lo cual lo hace de lenta convergencia. Mientras que el NR tiene una convergencia cuadrática (algunos autores se refieren también como logarítmica), lo cual lo convierte en el mejor de los métodos, desde el punto de vista de convergencia por supuesto. Por otro lado, el número de iteraciones en el GS se incrementa con el número de buses, mientras que en el NR, el número de iteraciones permanece prácticamente constante, independiente del tamaño del sistema. Se requieren, generalmente, de 3 a 5 iteraciones para obtener la solución. Con respecto al efecto de las características de la red en el comportamiento de los métodos, es interesante comentar que se ha observado que el GS es afectado por la selección del bus compensador y la presencia de capacitores serie en las líneas de transmisión. Esto último se debe a que en el GS una condición para convergencia es que la matriz de coeficientes sea diagonalmente dominante, y la presencia de dichos capacitores serie, compromete dicha condición. Por otro lado la sensibilidad del NR es mínima a estas condiciones, que pueden ser causa de una convergencia pobre en el GS.

Podemos concluir que para grandes sistemas, el NR es más rápido, más preciso y más confiables que el GS y , también comparado con otros métodos. De hecho se puede decir que funciona bien para cualquier tamaño de sistema y cualquier tipo de sistema y es apropiado para obtener la solución de una amplia variedad de problemas mal condicionados. Por supuesto todo esto tiene un costo; su programación es considerablemente más compleja y tiene la desventaja de requerir más memoria, aún con el uso de almacenamiento compacto de la matriz Jacobiana y la matriz de admitancias. En contraste las ventajas del GS consisten en la facilidad de su programación, y una utilización más eficiente de memoria, aunque por lo discutido anteriormente, su uso queda restringido a sistemas de pequeña escala.

2.6. FORMULACION Y SOLUCION DEL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA POR EL METODO DE NEWTON DESACOPLADO.

En la unidad II.2, vimos un hecho muy importante y fundamental que debemos tomar en cuenta en la solución del problema de flujos de potencia. Lo anterior se refiere a que un cambio en el ángulo del voltaje δ en un bus, tiene efecto preponderantemente, en el flujo de potencia real, dejando el flujo de la potencia reactiva relativamente sin cambio; por otro

lado, vimos también, que un cambio en la magnitud del voltaje $|V|$ en un bus, afecta preponderantemente el flujo de potencia reactiva, dejando prácticamente sin cambio, el flujo de potencia activa. Esto conduce a una serie de medidas que han culminado en una variante del método de NR, produciendo un método muy eficiente y que discutiremos en esta unidad II.6.

Si recordamos la ecuación matricial del método de NR,

$$\begin{bmatrix} \Delta P^{(l)} \\ \dots \\ \Delta Q^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_1]^{(l)} & \vdots & [J_2]^{(l)} \\ \dots & \vdots & \dots \\ [J_3]^{(l)} & \vdots & [J_4]^{(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta^{(l)} \\ \dots \\ \Delta |V|^{(l)} \end{bmatrix}$$

vemos que lo mencionado en el párrafo anterior, implica que el efecto, sobre la solución, de las matrices $[J_2]$ y $[J_3]$, es prácticamente nulo. Por lo que podemos eliminarlas, resultando con esto el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} [\Delta P] &= [J_1][\Delta \delta] \\ [\Delta Q] &= [J_4][\Delta |V|]. \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores muestran el denominado *método Desacoplado de Newton*. La razón del nombre es obvia, dado que se observa que podemos calcular las correcciones de ángulo de voltaje, en función únicamente de los desajustes de potencia activa, mientras que en el caso de la segunda ecuación muestra que se pueden calcular las correcciones magnitud de voltaje, en función únicamente de los desajustes de potencia reactiva.

No obstante lo mencionado arriba, se puede ver que en estricto sentido, las ecuaciones anteriores no están realmente desacopladas; esto se puede verificar fácilmente, si revisamos las expresiones que definen los términos de las submatrices $[J_1]$ y $[J_4]$. Podemos ver que los elementos de $[J_1]$, dependen de las magnitudes de voltajes, que se resuelven por medio de la segunda ecuación; por otro lado, los elementos de la submatriz $[J_4]$, a su vez

dependen de los ángulos de voltaje, cuyas correcciones resuelve la primera ecuación. Por lo expuesto, entonces vemos que no existe desacoplamiento en estricto sentido.

La meditación sobre estas ideas condujo a Stott y otros [10] a buscar la forma de obtener un método que realmente estuviera desacoplado matemáticamente; además del interés de obtener el desacoplamiento ya mencionado, también es deseable evitar la carga de cálculo tan importante que representa la actualización de la matriz Jacobiana en cada iteración. Estos objetivos se lograron observando la física de los elementos de transmisión, principalmente la línea, y reflejando estas observaciones en simplificaciones adecuadas, con el fin de llegar al objetivo mencionado. Estas simplificaciones dieron por resultado un método con las características mencionadas que se denominó *Método desacoplado rápido*. En lo que sigue, discutimos estas consideraciones y sus efectos sobre el método.

En un sistema de potencia bien diseñado y correctamente operado, se tiene las siguientes características:

- Debido a los valores de la reactancia inductiva serie, que caracteriza a las líneas de transmisión de alto voltaje, la diferencia angular $(\delta_i - \delta_k)$ entre buses adyacentes en el sistema es generalmente muy pequeña, por lo que

$$\cos(\delta_i - \delta_k) \approx 1 \quad \text{y} \quad \text{sen}(\delta_i - \delta_k) \approx (\delta_i - \delta_k).$$

- La susceptancia de la línea B_{ik} es mucho mayor (varios ordenes de magnitud) que la conductancia de la misma G_{ik} , por lo que

$$G_{ik} \text{sen}(\delta_i - \delta_k) \ll B_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k).$$

- La potencia reactiva que se inyecta en un bus Q_i , durante la operación normal es relativamente pequeña comparada con el término que acompaña esta cantidad en las ecuaciones que definen los elementos de la matriz Jacobiana.

Es preciso en este punto volver a escribir las ecuaciones que definen los elementos de la matriz Jacobiana, de otra forma se perdería sentido a los argumentos anteriores.

A partir de las expresiones de las potencias obtenidas a partir de

$$P_i + jQ_i = V_i \sum_{k=1}^n Y_{ik}^* V_k^* = |V_i| \sum_{k=1}^n (G_{ik} - jB_{ik}) (|V_k| e^{j(\delta_i - \delta_k)})$$

observar que esta expresión es un poco diferente de la que hemos venido utilizando, simplemente por conveniencia, sin embargo no altera los conceptos en los más mínimo.

Si separamos parte real y parte imaginaria de la ecuación anterior, obtenemos las expresiones de las potencias que buscamos,

$$P_i = |V_i| \sum_{k=1}^n [(G_{ik} \cos \delta_{ik} + B_{ik} \text{sen} \delta_{ik}) |V_k|]$$

$$Q_i = |V_i| \sum_{k=1}^n [(G_{ik} \text{sen} \delta_{ik} - B_{ik} \cos \delta_{ik}) |V_k|]$$

Notar que $\delta_{ik} = \delta_i - \delta_k$, además de que $Y_{ik} \triangleq G_{ik} + jB_{ik}$.

Las expresiones para los elementos fuera de la diagonal de las submatrices $[J_1]$ y $[J_4]$ están dadas por

$$[J_1]_{(i,k)} = [J_4]_{(i,k)} = |V_i| |V_k| (G_{ik} \text{sen} \delta_{ik} - B_{ik} \cos \delta_{ik}) \quad i \neq k$$

mientras que para los elementos de la diagonal, $i = k$, tenemos

$$[J_1]_{(i,i)} = -B_{ii} |V_i|^2 - Q_i$$

$$[J_4]_{(i,i)} = -B_{ii} |V_i|^2 + Q_i.$$

Si sustituimos las consideraciones mencionadas unos párrafos atrás, en las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$[J_1]_{(i,k)} = [J_4]_{(i,k)} = -|V_i| |V_k| B_{ik} \quad i \neq k$$

$$[J_1]_{(i,i)} = [J_4]_{(i,i)} = -B_{ii} |V_i|^2 \quad i = k.$$

El lector puede verificar que la submatriz $[J_1]$ tiene dimensión $(n_{pq} + n_{pv}) * (n_{pq} + n_{pv})$ y $[J_4]$ tiene dimensión $(n_{pq} + n_{pv})$.

Con lo anteriormente obtenido las ecuaciones obtenidas serán

$$\begin{aligned} [\Delta P_i] &= [V_i V_k B'_{pq}] [\Delta \delta_i] \\ [\Delta Q_i] &= [V_i V_k B''_{pq}] \left[\frac{\Delta |V_i|}{|V_i|} \right]. \end{aligned}$$

En estas ecuaciones $[B'_{pq}]$ y $[B''_{pq}]$, son elementos de la matriz $[-B]$, que es el negativo de la matriz nodal de admitancias.

Con el fin de lograr el último de los objetivos mencionados párrafos atrás, es decir, evitar tener que actualizar la matriz Jacobiana en cada iteración, es necesario eliminar los voltajes de las matrices de coeficientes de las dos ecuaciones anteriores. Esto se logra tomando en cuenta que $|V_k| \approx 1.0$, en situaciones de operación normal. Esto es cierto dado que en operación normal los voltajes se caracterizan por valores cercanos al nominal, o sea 1.0 pu en voltajes normalizados; por otro lado, expandamos las expresiones matriciales que restan después de efectuar la aproximación anterior y multiplicar las ecuaciones resultantes por $1/|V_i|$, obtenemos los resultados que buscamos, es decir,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\Delta P_i}{|V_i|} \right] &= [B'] [\Delta \delta_i] \\ \left[\frac{\Delta Q_i}{|V_i|} \right] &= [B''] [\Delta V_i]. \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones anterior representa enormes ventajas; aparte de su desacoplamiento efectivo, vemos que las matrices de coeficientes, $[B']$ y $[B'']$, son constantes en todo el proceso iterativo, por lo que la enorme carga de trabajo de actualización de la matriz Jacobiana, se ha eliminado. Lo anterior implica que cualquier método de factorización triangular, como por ejemplo, Doolittle, Crout ó bifactorización de Zollenkopf, tendrá un impacto enorme tanto en el manejo de la matriz de coeficientes, como en la eficiencia de la solución del sistema de ecuaciones lineales, pues una vez factorizada y guardada la tabla de factores, no habrá necesidad de modificar dicha matriz durante todo el proceso iterativo. El uso de técnicas de dispersidad, indispensables para la simulación de grandes sistemas eléctricos, hacen aún más eficiente este método.

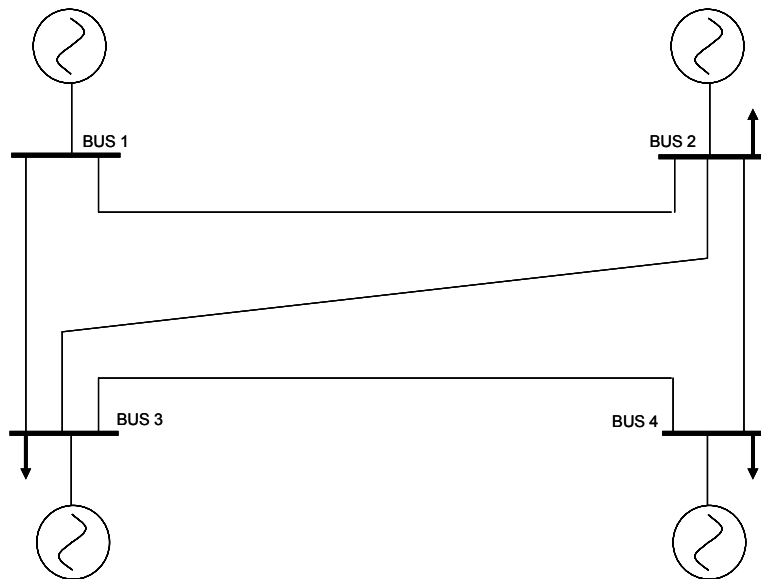
El desacoplamiento completo se logra tomando en cuenta las siguientes simplificaciones

[10]:

- Omitiendo de $[B']$ la representación de aquellos elementos de la red eléctrica que afectan predominantemente el flujo de potencia reactiva: reactancias en derivación y taps de transformadores TCUL (con relación no nominal).
- Omitiendo de $[B'']$ los efectos de los transformadores defasadores, que afectan predominantemente el flujo de potencia activa.

Con las aproximaciones mencionadas en los párrafos anteriores obtenemos finalmente el método desacoplado rápido. Por último es importante mencionar que en el caso de no haber transformadores defasadores, $[B']$ y $[B'']$ serán simétricas.

EJEMPLO. Utilizamos el ejemplo de cuatro buses de la unidad II.4, que usamos para ejemplificar el método de Gauss-Seidel. Los datos de las líneas de dicho sistema, así como los datos de buses, están contenidas en las Tablas 1 y 2 en dicha unidad. Por comodidad mostramos dichas tablas, así como el sistema de potencia.



Sistema Eléctrico del ejemplo.

TABLA 1. DATOS DE BUS

BUS	P_i	Q_i	V_i	Tipo de bus
1	–	–	$1.04\angle 0^\circ$	compensador
2	0.5	–	$ V_2 = 1.04$	Bus PV
3	-1.0	0.5	–	Bus PQ
4	0.3	-0.1	–	Bus PQ

TABLA 2. PARAMETROS DE LINEAS.

Línea	R, pu	X, pu	G, pu	B, pu
1-2	0.05	0.15	2.0	-6.0
1-3	0.10	0.30	1.0	-3.0
2-3	0.15	0.45	0.666	-2.0
2-4	0.10	0.30	1.0	-3.0
3-4	0.05	0.15	2.0	-6.0

No hay que perder de vista que los valores de potencia que se muestran en la Tabla 1, corresponden a la potencia neta inyectada. Además usaremos un “arranque plano”, es decir con magnitudes de voltaje igual a 1.0 y ángulos de cero grados.

La matriz Y_{BUS} es igual a

$$Y_{BUS} = \begin{bmatrix} 3 - j9 & -2 + j6 & -1 + j3 & 0 \\ -2 + j6 & 3.666 - j11 & -0.666 + j2 & -1 + j3 \\ -1 + j3 & -0.666 + j2 & 3.666 - j11 & -2 + j6 \\ 0 & -1 + j3 & -2 + j6 & 3 - j9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9.49\angle -71.57^\circ & 6.32\angle 108.43^\circ & 3.16\angle 108.43^\circ & 0 \\ & 11.59\angle -71.57^\circ & 2.11\angle 108.42^\circ & 3.16\angle 108.43^\circ \\ & & 11.59\angle -71.57^\circ & 6.32\angle 108.43^\circ \\ & & & 9.49\angle -71.57^\circ \end{bmatrix}$$

Primeramente calculamos las potencias inyectadas que nos permitirán, a su vez, calcular los desajustes de potencia.

$$\begin{aligned}
 P_2^{calc} &= |V_2 Y_{21} V_1| \cos(\theta_{12} + \delta_2 - \delta_1) + |V_2 Y_{23} V_3| \cos(\theta_{23} + \delta_3 - \delta_2) + |V_3|^2 |Y_{33}| \cos \theta_{33} + \\
 &+ |V_3 Y_{34} V_4| \cos(\theta_{43} + \delta_3 - \delta_4) = \\
 &= (1.04)^2 * (6.32) * \cos(108.43^\circ) + (1.04)^2 * (11.59) * \cos(71.57^\circ) + (1.04) * (1.0) * (2.11)(11.59) * \cos(108.43^\circ) + \\
 &+ (1.04) * (1.0) * (3.16) \cos(108.43^\circ) = 0.07
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_3^{calc} &= |V_3 Y_{31} V_1| \cos(\theta_{31} + \delta_1 - \delta_3) + |V_3 Y_{32} V_2| \cos(\theta_{32} + \delta_2 - \delta_3) + |V_3|^2 |Y_{33}| \cos \theta_{33} + \\
 &+ |V_3 Y_{34} V_4| \cos(\theta_{34} + \delta_4 - \delta_3) = \\
 &= (3.16 * 1.04) * \cos(108.43^\circ) + (2.11 * 1.04) * \cos(108.42^\circ) + (1.04)^2 * (11.59) * \cos(-71.57^\circ) + \\
 &+ (6.32) * \cos(108.43^\circ) = -1.04 - 0.69 + 3.96 = 2.23 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_4^{calc} &= |V_4 Y_{42} V_2| \cos(\theta_{42} + \delta_2 - \delta_4) + |V_4 Y_{43} V_3| \cos(\theta_{43} + \delta_3 - \delta_4) + |V_4|^2 |Y_{44}| \cos \theta_{44} = \\
 &= (3.16 * 1.04) * \cos(108.43^\circ) + (6.32) * \cos(108.43^\circ) + (9.49) * \cos(-71.57^\circ) = \\
 &= -1.04 - 2.0 + 3.0 = -0.04 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_3^{calc} &= -|V_3 Y_{31} V_1| \text{sen}(\theta_{31} + \delta_1 - \delta_3) - |V_3 Y_{32} V_2| \text{sen}(\theta_{32} + \delta_2 - \delta_3) - |V_3|^2 |Y_{33}| \text{sen} \theta_{33} - \\
 &- |V_3 Y_{34} V_4| \text{sen}(\theta_{34} + \delta_4 - \delta_3) = \\
 &= -(3.16 * 1.04) * \text{sen}(108.43^\circ) - (2.11 * 1.04) * \text{sen}(108.42^\circ) - (1.04)^2 * (11.59) * \text{sen}(-71.57^\circ) - \\
 &- (6.32) * \text{sen}(108.43^\circ) = -3.12 - 2.08 + 11.89 - 6.0 = 0.69
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_4^{calc} &= -|V_4 Y_{42} V_2| \text{sen}(\theta_{42} + \delta_2 - \delta_4) - |V_4 Y_{43} V_3| \text{sen}(\theta_{43} + \delta_3 - \delta_4) - |V_4|^2 |Y_{44}| \text{sen} \theta_{44} = \\
 &= -(3.16 * 1.04) * \text{sen}(108.43^\circ) - (6.32) * \text{sen}(108.43^\circ) - (9.49) * \text{sen}(-71.57^\circ) = -3.12 - 6 + 9 = -0.
 \end{aligned}$$

Con lo anterior podemos ahora calcular los desajustes correspondientes.

$$\Delta P_2 = P_2^{esp} - P_2^{cal} = 0.5 - 0.07 = 0.43$$

$$\Delta P_3 = P_3^{esp} - P_3^{cal} = -1.0 - (2.23) = -3.23$$

$$\Delta P_4 = P_4^{esp} - P_4^{cal} = 0.3 - (-0.04) = 0.34$$

$$\Delta Q_3 = Q_3^{esp} - Q_3^{cal} = 0.5 - 0.69 = -0.19$$

$$\Delta Q_4 = Q_4^{esp} - Q_4^{cal} = -0.1 - (-0.12) = 0.02$$

Con esto completamos los datos para efectuar la solución de $\left[\frac{\Delta P}{V} \right] = [B'] [\Delta \delta]$,

$$\begin{bmatrix} \frac{0.43}{1.04} = 0.41 \\ -3.23 \\ 0.34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \\ \Delta \delta_4 \end{bmatrix}$$

cuya solución es

$$\Delta \delta_2 = -0.15 \text{ rad}$$

$$\Delta \delta_3 = -0.52 \text{ rad}$$

$$\Delta \delta_4 = -0.36 \text{ rad}$$

La solución del modelo reactivo $\left[\frac{\Delta Q}{V} \right] = [B''] [\Delta V]$ resulta

$$\begin{bmatrix} \frac{-0.19}{1.0} \\ \frac{0.02}{1.0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta |V_3| \\ \Delta |V_4| \end{bmatrix}$$

$$\Delta |V_3| = -0.03 \text{ pu}$$

$$\Delta |V_4| = -0.01 \text{ pu}$$

de donde obtenemos para la primera iteración

$$\delta_2^{(1)} = \delta_2^{(0)} + \Delta \delta_2^{(0)} = 0 + (-0.15) = -0.15 \text{ rad}$$

$$\delta_3^{(1)} = \delta_3^{(0)} + \Delta \delta_3^{(0)} = 0 + (-0.52) = -0.52 \text{ rad}$$

$$\delta_4^{(1)} = \delta_4^{(0)} + \Delta \delta_4^{(0)} = 0 + (-0.36) = -0.36 \text{ rad}$$

$$|V_3^{(1)}| = |V_3^{(0)}| + \Delta |V_3^{(0)}| = 1.0 + (-0.03) = 0.97 \text{ pu}$$

$$|V_4^{(1)}| = |V_4^{(0)}| + \Delta |V_4^{(0)}| = 1.0 + (-0.01) = 0.99 \text{ pu}$$

Con estos valores, procederemos a calcular de nueva cuenta las potencias inyectadas para poder entonces evaluar, a su vez, los desajustes correspondientes. En este punto se checa convergencia para saber si ya se está en la solución ó bien, se requiere seguir iterando. El alumno podrá hacer uso del programa en MATLAB[®] que se proporciona con el fin de efectuar las prácticas de simulación, y obtener el resultado final de este ejemplo.

Con el fin de completar la visión completa del algoritmo del método desacoplado rápido, mostramos un diagrama de flujo de este.

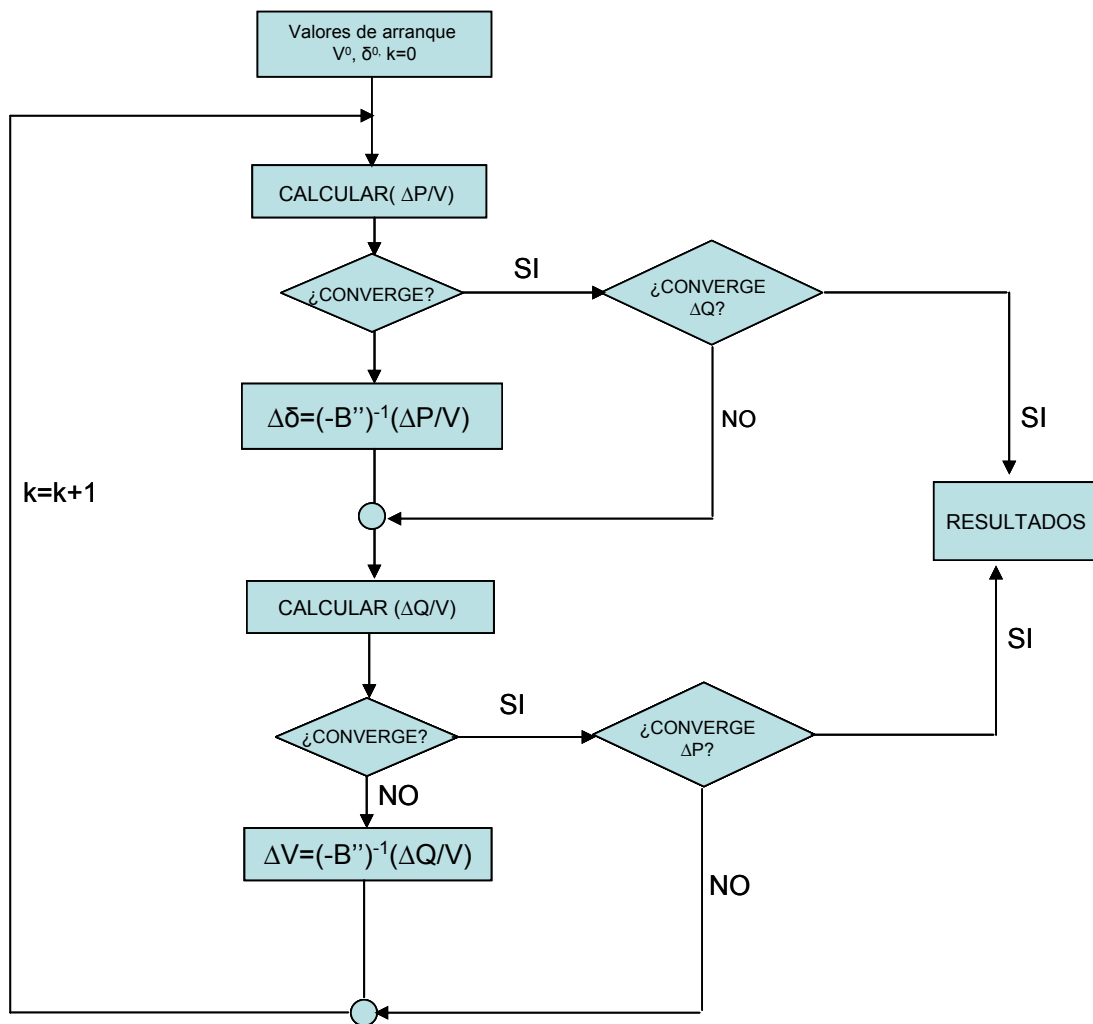


DIAGRAMA DE FLUJO DE METODO DESACOPLADO RAPIDO.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] O. I. Elgerd. Electric energy systems theory, an introduction. 2nd edition. McGraw Hill. (1982).
- [2] G. W. Stagg, A. H. El-Abiad. Computer methods in power system análisis. McGraw Hill. (1968).
- [3] J. J. Grainger, W. D. Stevenson Jr. Power system analysis. McGraw Hill. (1994)
- [4] G. Heydt. Computer analysis methods for power system. Star in a circle publications. (1996).
- [5] H. Saadat. Power system analysis. McGraw Hill. (1999)
- [6] A. Bergen. Power system analysis. Prentice Hall. (1986).
- [7] D. Glover, M. Sarma. Power system analysis and design. 2nd. Edition. PWS. (1994)
- [8] Brameller, et al. Spartsity. Pitman Ltd. (1976)
- [9] Antonio Gómez-Expósito. Análisis y operación de sistemas de energía eléctrica. McGraw Hill. (2002).
- [10] W. F. Tinney, C. E. Hart. Power flow solution by Newton's method. IEEE Trans. PA&S, Vol.86, Nov. 1967.
- [11] B. Stott, O. Alsac. Fast decoupled load flow. IEEE Trans. PA&S, Vol. 93, May 1974, pp. 859-869.