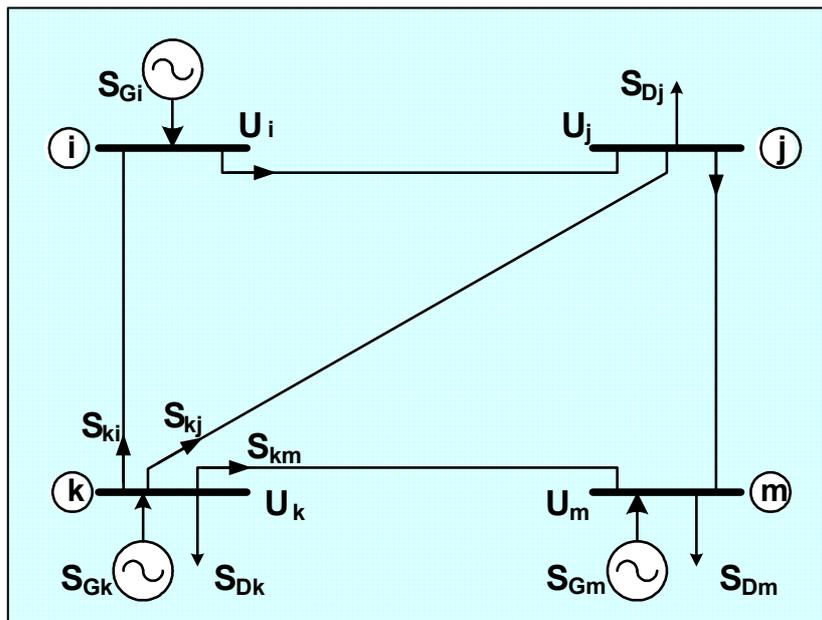


UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMAN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGIA
CARRERA DE INGENIERIA ELECTRICA
SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA



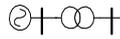
Apunte en proceso de corrección y mejora



FLUJO DE POTENCIA

MSc. Ing. Jorge A. González

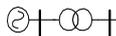
-2015-



INDICE

- I - INTRODUCCION
- II - OBJETIVO DEL ESTUDIO DE FLUJO DE CARGAS EN UN SEP
- III - MODELO DE LOS COMPONENTES DE UN SEP EN UN ESTUDIO DE FLUJO DE CARGA
- IV - EJEMPLO DE DOS BARRAS PARA UN ESTUDIO CONCEPTUAL DE FLUJO DE CARGA
- V- DIFERENTES TIPOS DE VARIABLES
 - V.1. *LIMITES de las VARIABLES*
- VI- NECESIDAD DE ESTABLECER DIFERENTES TIPOS DE BARRAS
- VII- METODO DE LOS NODOS
- VIII- METODOS ITERATIVOS DE CALCULO
 - VIII.1- *EL METODO DE GAUSS-SEIDEL*
 - VIII.2- *EL METODO DE NEWTON-RAPHSON*
 - VIII.3- *OTROS METODOS*
- IX- EJEMPLO
 - IX.1- *DATOS DEL EJEMPLO*
 - IX.2- *SOLUCION USANDO NEWTON-RAPHSON*
 - IX.3- *SOLUCION USANDO GAUSS-SEIDEL*
 - XI.4- *RESULTADO DEL EJEMPLO USANDO EL COMPUTADOR*

ANEXO



I. - INTRODUCCION

Dentro del análisis de funcionamiento de los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP), el estudio más importante que se realiza cuando el SEP opera normalmente, es el llamado **Flujo de Potencia** o **Flujo de Carga** (Power Load).

Para llevar adelante este análisis, se realizan las siguientes hipótesis:

a) El SEP posee **Simetría de Generación y de Carga**, por lo tanto se lo puede representar con su malla de secuencia directa, analizando el problema de forma monofásica.

b) Opera en un **Estado Normal y Estacionario** (la frecuencia permanece constante).

El estudio de Flujo de Carga (FC) tiene como objetivo encontrar el valor de las tensiones fasoriales (estado del sistema) en todas aquellas barras que no fueron especificadas inicialmente, partiendo de una dada demanda (variables de perturbación), de la topología (a través de su matriz incidencia de nodos) y de las impedancias óhmicas del sistema pasivo (a través de la impedancia primitiva).

Dado un SEP de n barras, resultan $2n$ ecuaciones no lineales independientes, que relacionan todas las tensiones y potencias complejas $\{U = f_n(P, Q, U, \gamma)\}$, con $6n$ variables (incógnitas), por lo que el sistema en principio no tiene solución. Para superar este problema, se especifica o asigna un valor a diferentes variables por barra, hasta tener solo $2n$ variables. De acuerdo a las variables especificadas en cada barra, esta tomará diferentes nombres (de carga, tensión controlada, referencia). Las variables asociadas a cada barra son: $|U_i|, \delta_i, P_{Gi}, Q_{Gi}, P_{Di}, Q_{Di}$

Dado que las ecuaciones no lineales se analizan en un tiempo determinado de la curva de carga (punta, media, valle, etc.) las ecuaciones son algebraicas. Para encontrar la solución de este sistema de ecuaciones, se usan métodos iterativos (Gauss-Seidel, Newton-Raphson).

Una vez calculado el estado del sistema $\{U\}$, se podrán encontrar a posteriori los flujos de carga por todas las líneas, las tensiones de barras y las potencias generadas que no se especificaron inicialmente y las pérdidas en las líneas.

Se estudia luego si todos estos valores encontrados caen dentro de los límites de sus respectivas tolerancias, para garantizar así la operación exitosa del SEP, es decir:

- La generación debe ser siempre igual a la demanda más las pérdidas.
- Las magnitudes de las tensiones de barra deben permanecer dentro del nivel de tolerancia establecido (cercanas a sus valores nominales).
- Los generadores deben operar entre sus límites de potencia activa y reactiva (curva de capacidad).
- Las líneas de transmisión y los transformadores no deben quedar sobrecargados.

Si no se satisfacen estos requerimientos, se "tocan" con cierto criterio las variables especificadas de tensión y potencia en las barras (datos de entrada) y se procede a realizar todo el cálculo nuevamente, obteniéndose otra serie de resultados. Esto continúa hasta que todos los valores de potencia y tensión encontrados, están dentro de sus límites.

Recién en este momento, se puede decir que se encontró una solución viable para que un determinado SEP bajo una dada demanda, pueda operar en condiciones normales.

Se muestra a continuación mediante un diagrama de bloques (Fig. 1), los diferentes pasos que se siguen en un estudio de FC y que serán desarrollados a lo largo de este documento:

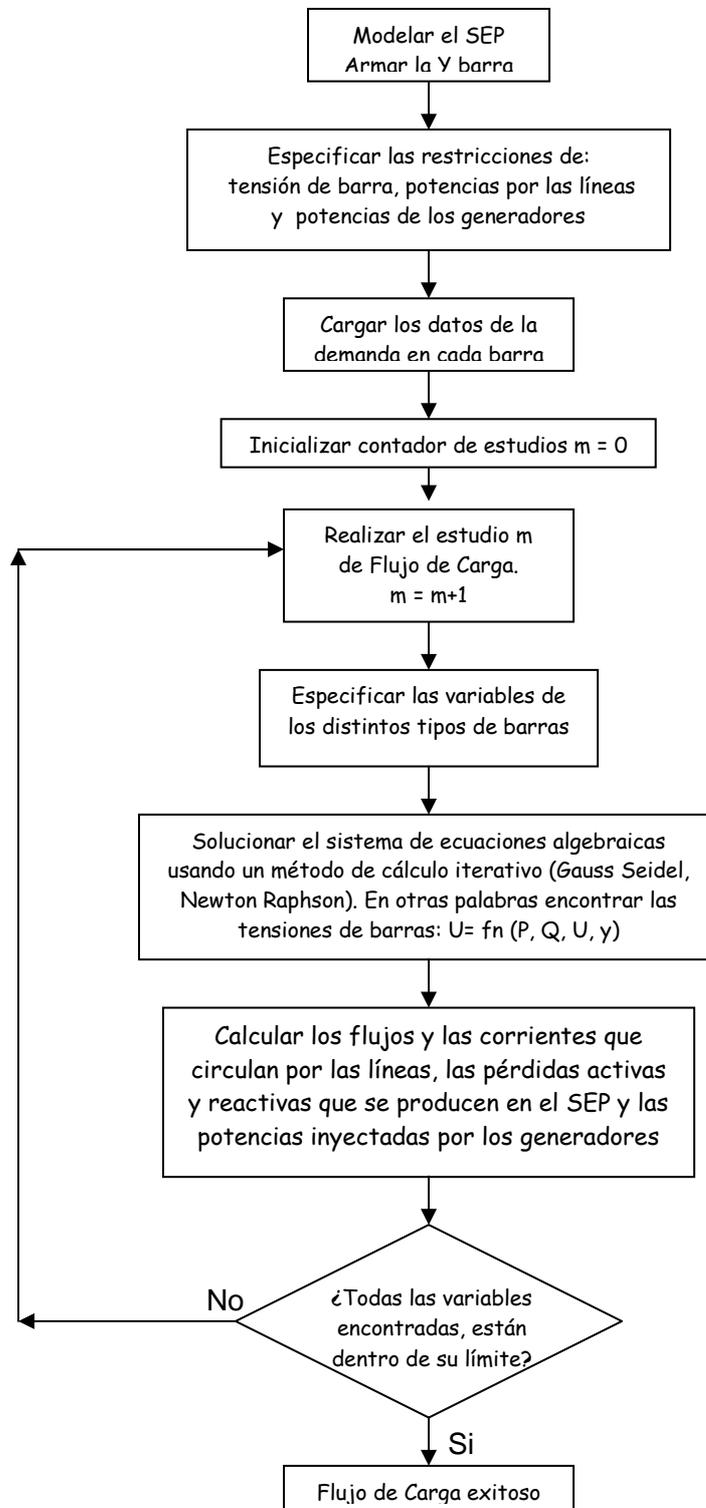


Fig. 1.- Pasos a seguir en un estudio de FC

II.- OBJETIVO DEL ESTUDIO DE FLUJO DE CARGAS EN UN SEP

Se realizan dos preguntas para entender que es el Flujo de Carga:

1) ¿Qué se obtiene en un estudio de Flujo de Carga?

El cálculo del FC que se realiza en un momento determinado para un SEP donde se conoce tanto su topología e impedancias de los elementos que la componen, así como la demanda en todas sus barras, consiste esencialmente en la determinación de:

a) Las **variables de estado** U_k de la red (módulos y ángulos de las tensiones en las barras del sistema) por medio de un método iterativo.

y a partir de estos valores se calculan:

b) Los **flujos de potencia activa y reactiva** P_{km} , Q_{km} , y corrientes que circulan por todas las líneas de transmisión de la red considerada.

c) Las **potencias activas y reactivas inyectadas por aquellos generadores** P_{Gk} , Q_{Gk} que no se habían especificado inicialmente.

d) Las **pérdidas activas y reactivas** p_{km} , en todas las líneas de transmisión del SEP.

Dada una demanda en un dado momento, por ejemplo en el pico de un día típico de invierno del año 2010 de Argentina (curva azul) y un SEP determinado, como se muestra en la Fig. 2, se pueden encontrar las tensiones de barra, flujos de carga, potencias inyectadas y pérdidas en las líneas correspondientes:

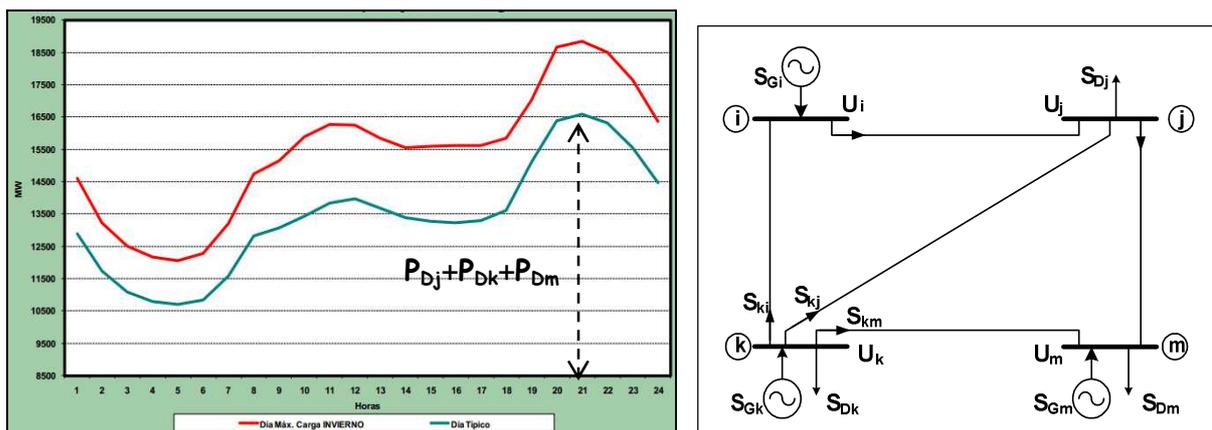


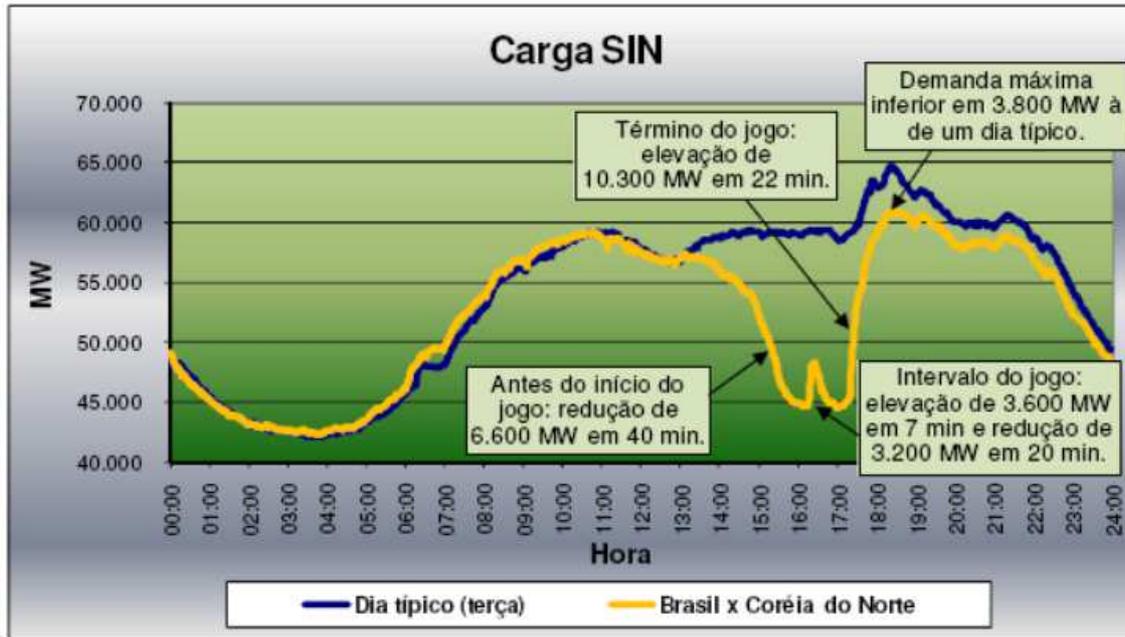
Fig. 2.- Curva de demanda diaria y variables estudiadas en un estudio de Flujo de Carga

2) ¿Para qué se realiza el análisis de Flujo de Carga?

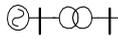
Este análisis es fundamental en:

- a) La etapa de **Planificación de la Expansión** de los SEP donde se realizan estudios de FC a los diferentes escenarios de expansión. El estudio de FC permite filtrar las alternativas que son técnicamente viables de las que no lo son (las variables eléctricas de tensión y potencias, deben caer entre sus límites de funcionamiento). Luego a estas alternativas posibles se le realizan estudios económicos-ambientales para encontrar la mejor opción.
- b) La determinación del **Estado de Operación** del SEP, para una determinada carga y topología. Es muy útil para saber por ejemplo como se debe operar el SEP frente al mantenimiento de sus elementos (salida de una línea, un transformador, un generador) o frente a una demanda extraordinaria prevista (p.e. televisación de un partido de fútbol importante).
- c) El **Análisis de Contingencia**. Dada algunas situaciones imprevistas que podrían suceder en el SEP (apertura de líneas, salida de un generador, aumento o descenso brusco de la demanda, etc.) el operador debe saber actuar frente a esos acontecimientos. Para esto se simulan las diversas contingencias y se realizan para cada una de estas, los estudios de FC necesarios que indicarán cual será la mejor respuesta frente a cada situación (protocolo de actuación frente a contingencias).
- d) El **Despacho Económico Optimo**. Existen en teoría infinitas soluciones de FC exitosas para cada caso analizado, pero solo una será el FC de menor costo económico para el sistema. En este tipo de análisis el FC entrará como una restricción de igualdad en el problema de optimización de costos.

Nota: Un operador experimentado con el análisis de un FC sobre un SEP, deberá correr en el orden de 10 veces el FC para obtener una solución que cumpla con todos los requerimientos.



Como afecta por ejemplo un juego de fútbol en la curva de demanda



III.- MODELO DE LOS COMPONENTES DE UN SEP EN UN ESTUDIO DE FC

Los componentes de un SEP se pueden dividir en:

- 1.- Aquellos ligados entre cualquier nodo y tierra, como los generadores, cargas, reactores.
- 2.- Aquellos ligados entre dos nodos, como las líneas y trafos.

También se los puede dividir en aquellos que pertenecen a:

- a) La parte activa del SEP, constituida por los generadores y las cargas (inyecciones de Potencia)
- b) La parte pasiva del SEP, constituida por las líneas, trafos y reactores

Los elementos de un SEP se modelan de acuerdo al tipo de estudio que se realizará. El modelo de cada componente para un estudio de FC es el siguiente:

a) Generadores y Cargas: En la Fig. n° 3 se ve la representación unifilar de un generador y una carga conectados a una barra k genérica. El generador se modela como una inyección constante S_{Gk} y la demanda como una inyección constante S_{Dk} . La demanda se supone independiente de la tensión, por lo tanto el modelo planteado es a carga constante. Por convención, tiene signo (+) la inyección que llega a la barra y signo (-) la inyección que sale de la barra, obteniéndose por lo tanto una inyección resultante (neta) igual a S_k :

$$S_k = P_k + jQ_k = S_{Gk} + S_{Dk} = (P_{Gk} - P_{Dk}) + j(Q_{Gk} - Q_{Dk}) \quad (5-1)$$

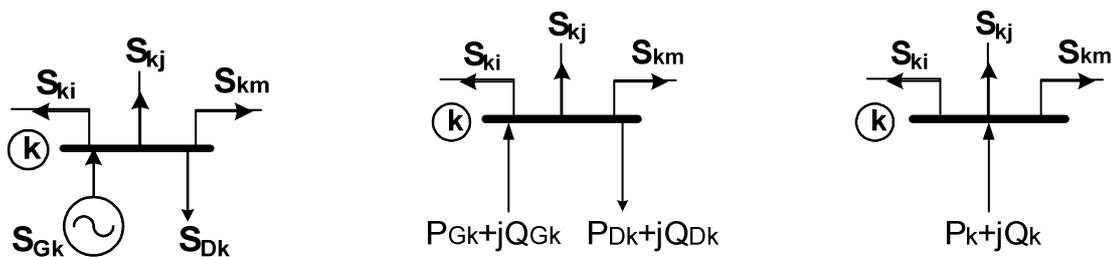
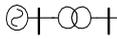


Fig. n° 3.- Modelado de un generador y una carga

Esta inyección resultante S_k no tiene en cuenta los flujos por las líneas de transmisión que llegan a la barra k .



Si ahora se aplica en el nodo k, la 1ra Ley de Kirchhoff de potencias (Fig. 4), se obtiene:

$$P_k + \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}(U_k, U_m, \delta_k, \delta_m) = 0$$

$$Q_k + Q_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km}(U_k, U_m, \delta_k, \delta_m) = 0$$

$m \in \Omega_k$: el nodo genérico m, pertenece al conjunto Ω de nodos vecinos a k, en este caso los nodos l y j

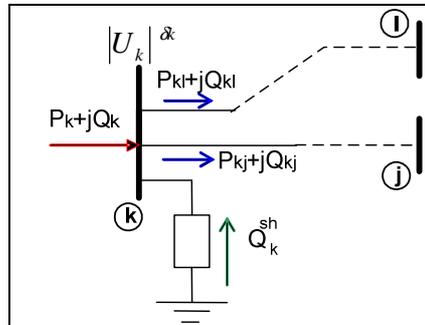


Fig. nº 4.- Aplicación de Kirchhoff de potencias en una barra k

b) **Línea de Transmisión:** Se la modela generalmente como un circuito π , formado por una impedancia serie z_{km} (resistencia + reactancia inductiva) y dos admitancias en paralelo en los extremos de las líneas (b_{km}), cada una con un valor 1/2 de la admitancia shunt total de la línea (ver Fig. 5).

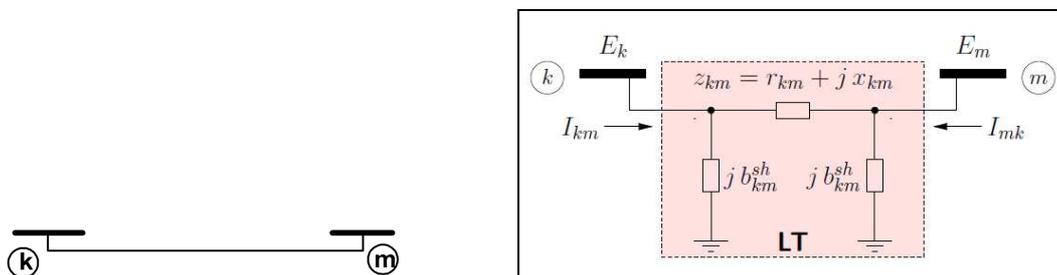


Fig. nº 5.- Modelo de una línea de transmisión

¿Porqué se usa un modelo π , en un lugar de uno T?

c) **Transformadores en fase con regulación de tap:** Se usan para regular tensión bajo carga y se lo modela como un cuadripolo π , donde y_{km} es la admitancia de dispersión y a es la regulación del trafo en [pu] (ver Fig.6). Los nodos k, m son los terminales de entrada y salida del transformador.

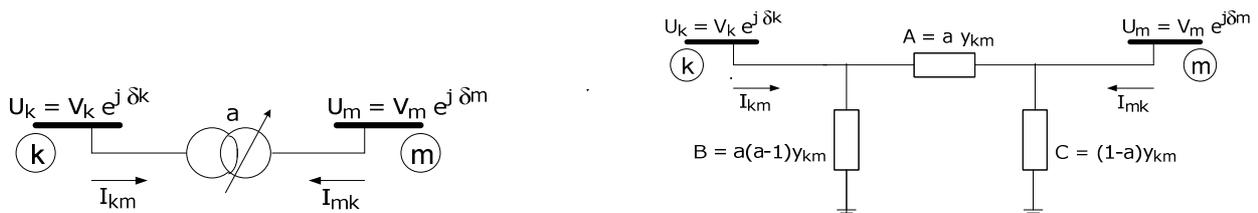
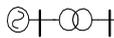


Fig. nº 6.- Modelo general de un trafo con tap



Si se supone que la regulación del trafo está en el lado del secundario, se puede definir a la regulación "a" de un trafo en [pu] como:

$$a = \frac{U_{n1} / [U_{n2}(1+t)]}{U_{B1} / U_{B2}}$$

Donde U_{B1} y U_{B2} son las tensiones bases del SEP en [kV] del lado primario y secundario, la U_{n1} y U_{n2} son las tensiones nominales de placa del trafo en [kV] del primario y secundario, y "t" es la regulación puesta en este caso en el lado secundario.

Por lo visto en la teoría sobre sistemas por unidad se debe cumplir:

$$\frac{U_{B1}}{U_{B2}} = \frac{U_{n1}}{U_{n2}}$$

Por lo tanto, si el trafo no tiene regulación o si la regulación se encuentra en su posición cero ($t=0$), el valor de "a" será igual a uno, por lo que el cuadripolo resulta (ver Fig. 7):

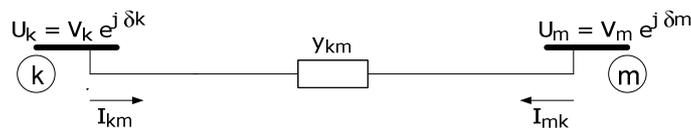


Fig. n° 7.- Modelo de un trafo sin regulador o con regulación cero

Si el trafo tiene un "a" menor o mayor que uno, los cuadripolos obtenidos se muestran en la Fig. 8:

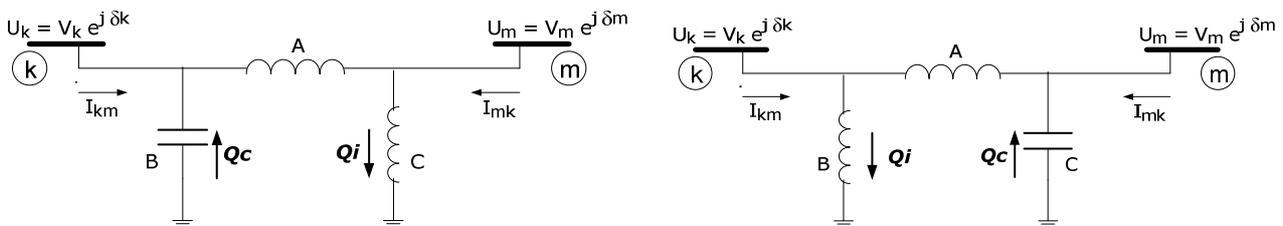
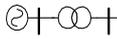


Fig. n° 8.- Modelo de un trafo con regulación "a" menor y mayor que 1

Ejemplo

Dado un trafo con regulador en el lado de alta, que tiene los siguientes datos de placa: 13,6/140 kV, 30 MVA, $u_k=14\%$, con el regulador puesto en $+6\%$ y se lo pone a funcionar en un SEP que tiene las siguientes bases: 13,8/142 kV, 100 MVA

Encontrar la regulación y la admitancia de dispersión



Se calcula la tensión base en el lado de alta:

$$U_{B2} = U_{B1} \frac{U_{n2}}{U_{n1}} = 13,8 \frac{140}{13,6} = 142 \text{ [kV]}$$

Se calcula la regulación "a" en [pu]

$$a = \frac{13,6 / 140 \times (1 + 0,06)}{13,8 / 142} = 0,943 \text{ [pu]}$$

Se calcula la admitancia de dispersión usando la expresión vista en el capítulo de sistema pu:

$$Z_{\text{trafo en el SEP}} \text{ [pu]} = Z_{\text{trafo PLACA}} \text{ [pu]} \left(\frac{U_{B_{PLACA}} \text{ [KV]}}{U_{B_{SEP}} \text{ [KV]}} \right)^2 \frac{S_{B_{SEP}} \text{ [MVA]}}{S_{B_{PLACA}} \text{ [MVA]}} = j0,14 \left(\frac{13,6 \text{ [KV]}}{13,8 \text{ [KV]}} \right)^2 \frac{100 \text{ [MVA]}}{30 \text{ [MVA]}} = j0,45 \text{ pu}$$

$$y_{\text{trafo en el SEP}} \text{ [pu]} = \frac{1}{Z_{\text{trafo en el SEP}}} = -j2,2 \text{ [pu]}$$

d) **CAPACITORES y REACTORES:** como reactancias, mostrado en la FIG. 6, cuyos valores están en función de sus potencias reactivas referidas a la tensión de trabajo.

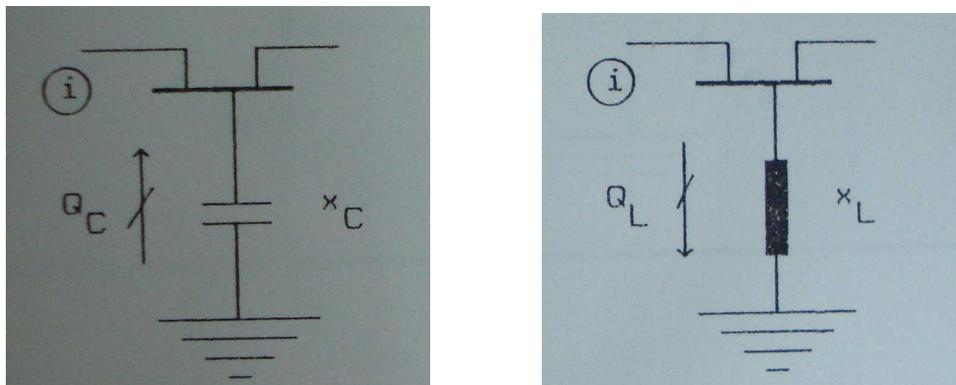
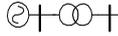


Figura 6

Estos elementos son usados para regular la tensión en barras del sistema. Por ejemplo si la tensión es muy baja en un determinado nodo *i* (generalmente cuando se tiene carga pesada), se inyecta potencia reactiva por lo que se debe tener en el lugar o próximo a él un banco de capacitores o un compensador síncrono, por el contrario si la tensión es muy alta en un determinado nodo *i* (generalmente cuando el sistema está descargado) se deberá consumir potencia reactiva mediante la puesta de una bobina.



IV.- EJEMPLO DE DOS BARRAS PARA UN ESTUDIO CONCEPTUAL DE FC

Dado el diagrama unifilar del SEP de dos barras mostrado en la FIG. 7, se realiza el modelo obteniéndose la Fig. 8:



FIGURA 7

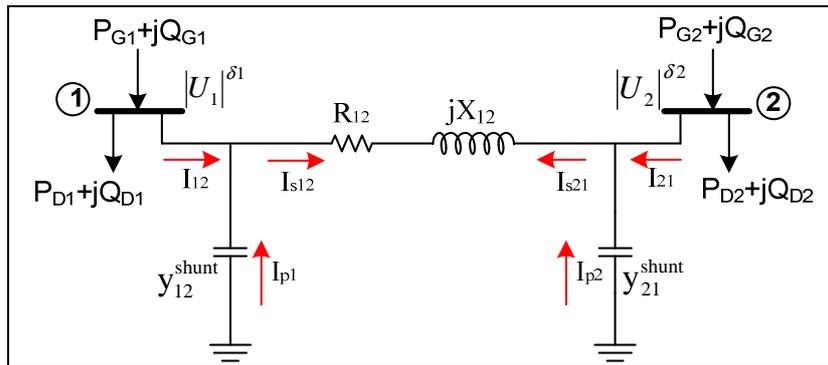


FIGURA 8

Analizando el nodo 1 resulta:

x_c = reactancia capacitiva de la mitad de la línea.

$y_{sh} = \frac{j}{x_c}$ = admitancia capacitiva de la línea de valor igual a la mitad del valor total de la línea . Se supone concentrada en cada extremo de la línea .

$\alpha = \frac{r}{x_L} \ll 1$ en líneas de transmisión (del orden de 0.1)

$U_1 = |U_1| e^{j\delta_1}$ = tensión compleja en el nodo 1.

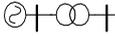
$U_2 = |U_2| e^{j\delta_2}$ = tensión compleja en el nodo 2.

$S_{G1} = P_{G1} + jQ_{G1}$ = potencia compleja generada por el generador 1.

$S_{D1} = P_{D1} + jQ_{D1}$ = potencia compleja de demanda en la barra 1.

$S_1 = U_1 I_1^* = S_{G1} - S_{D1}$ = potencia aparente neta inyectada en el nodo 1.

$I_1 = \frac{S_1^*}{U_1^*} = U_1 y_{sh} + \frac{U_1 - U_2}{r + jx_L}$ = corriente neta inyectada en el nodo 1.



De la misma forma para el nodo 2:

$S_{G2} = P_{G2} + jQ_{G2}$ = potencia compleja generada por el generador 2.

$S_{D2} = P_{D2} + jQ_{D2}$ = potencia compleja de demanda en la barra 2.

$S_2 = U_2 I_2^* = S_{G2} - S_{D2}$ = potencia aparente neta inyectada en el nodo 2.

$$I_2 = \frac{S_2^*}{U_2^*} = U_2 y_{sh} + \frac{U_2 - U_1}{r + jx_L} = \text{corriente neta inyectada en el nodo 2}$$

Haciendo los reemplazos convenientes en las ecuaciones de corrientes, y separando la parte real de la imaginaria, se obtienen las ecuaciones (6-1):

$$P_{G1} - P_{D1} - \frac{|U_1|^2}{x_L} \text{sen } \alpha + \frac{|U_1||U_2|}{x_L} \text{sen } (\alpha - (\delta_1 - \delta_2)) = 0$$

$$P_{G2} - P_{D2} - \frac{|U_2|^2}{x_L} \text{sen } \alpha + \frac{|U_1||U_2|}{x_L} \text{sen } (\alpha + (\delta_1 - \delta_2)) = 0$$

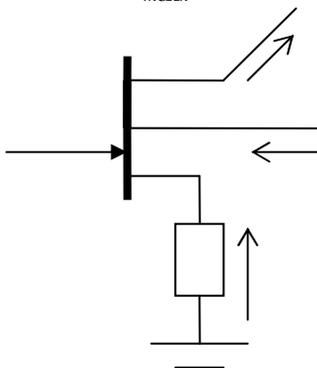
$$Q_{G1} - Q_{D1} + \frac{|U_1|^2}{x_C} - \frac{|U_1|^2}{x_L} \cos \alpha + \frac{|U_1||U_2|}{x_L} \cos (\alpha - (\delta_1 - \delta_2)) = 0$$

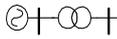
$$Q_{G2} - Q_{D2} + \frac{|U_2|^2}{x_C} - \frac{|U_2|^2}{x_L} \cos \alpha + \frac{|U_1||U_2|}{x_L} \cos (\alpha + (\delta_1 - \delta_2)) = 0$$

Estas ecuaciones (6-1) son llamadas "*Ecuaciones estacionarias de Flujo de Carga*" y no son más que aquellas ecuaciones que resultan de aplicar a un nodo k genérico, la 1ra Ley de Kirchoff de potencias.

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m)$$

$$Q_k + Q_k^{sh} = \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m)$$





Las "Ecuaciones estacionarias de Flujo de Carga" tienen las siguientes características:

- Son algebraicas, porque se considera estado estacionario.
- Son no lineales, por lo tanto no tienen soluciones analíticas, pero si numéricas (métodos iterativos realizados en computadores digitales).

Una función $f(x)$ es lineal si $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$

Si no se cumple esto, la función es no lineal

- Se relacionan tensiones con potencias.
- La frecuencia entra en las ecuaciones en forma indirecta y se la considera constante.
- El balance de potencia activa resulta de la suma de las dos primeras ecuaciones y expresada mediante la ecuación (6-2):

$$\underbrace{P_{G1} + P_{G2}}_{\text{Generación activa}} = \underbrace{P_{D1} + P_{D2}}_{\text{Demanda activa}} + \underbrace{\frac{\text{sen } \alpha}{x_L} \left(|U_1|^2 + |U_2|^2 - 2|U_1||U_2| \cos(\delta_1 - \delta_2) \right)}_{\text{Pérdidas activas}}$$

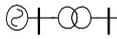
- El balance de potencia reactiva resulta de la suma de las dos primeras ecuaciones y expresada mediante la ecuación (6-3):

$$\underbrace{Q_{G1} + Q_{G2}}_{\text{Generación reactiva}} = \underbrace{Q_{D1} + Q_{D2}}_{\text{Demanda reactiva}} + \underbrace{\frac{\text{cos } \alpha}{x_L} \left(|U_1|^2 + |U_2|^2 - 2|U_1||U_2| \cos(\delta_1 - \delta_2) \right)}_{\text{Pérdidas reactivas}} - \underbrace{\frac{|U_1|^2 + |U_2|^2}{x_C}}_{\text{generación reactiva de la línea}}$$

- Las ecuaciones están en función de la diferencia angular ($\delta_1 - \delta_2$).
- Existen 12 variables y 4 ecuaciones, por lo tanto se deben especificar 8 variables, para que el sistema tenga en principio solución.

Generalizando para el caso de un sistema con n barras, se tendrá:

- $6n$ variables (si $n=2 \rightarrow 12$ variables)
- $2n$ ecuaciones (si $n=2 \rightarrow 4$ ecuaciones)
- Se deben especificar $4n$ variables (si $n=2 \rightarrow 8$ variables)



La expresión general para encontrar la corriente entre dos barras i y k , es la siguiente:

$$\bar{I}_{ik} = (\bar{U}_i - \bar{U}_k) \cdot \bar{Y}_{ik} \quad (6-4)$$

El flujo de potencia entre los nodos i y k viene dado por:

$$\bar{S}_{ik} = \bar{U}_i \cdot \bar{I}_{ik}^* \quad (6-5)$$

$$\bar{S}_{ki} = \bar{U}_k \cdot \bar{I}_{ki}^*$$

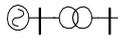
La pérdida en la línea l que une los nodos i y k viene dado por:

$$Per_l = \bar{S}_{ik} + \bar{S}_{ki} \quad (6-6)$$

La pérdida total será la suma de las pérdidas en cada línea:

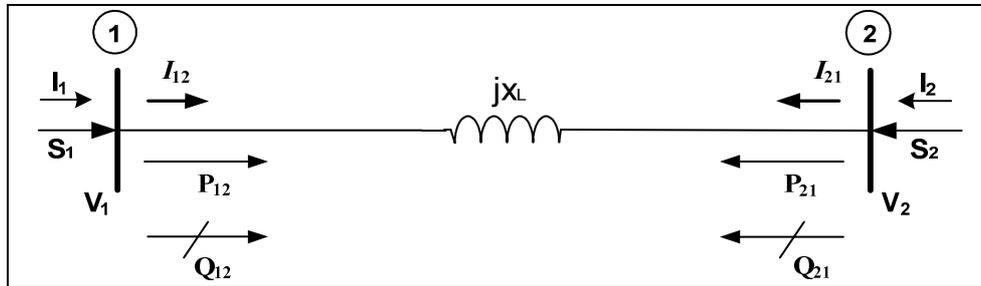
$$Per = \sum_{l=1}^{n_l} Per_l \quad (6-7)$$

donde n_l es el nº de líneas



Flujos de Potencia por una LT sin resistencia ni capacidad

Dada una LT en la que no se consideran las resistencias ni las capacidades, y los módulos de las tensiones en las barras 1 y 2 permanecen constantes con la variación de la carga, entonces los flujos de potencias activos y reactivos son los siguientes:



Flujo de Potencia por una línea sin R ni C

$$S_{12} = P_{12} + jQ_{12} = V_1 I_{12}^*$$

$$S_{21} = P_{21} + jQ_{21} = V_2 I_{21}^*$$

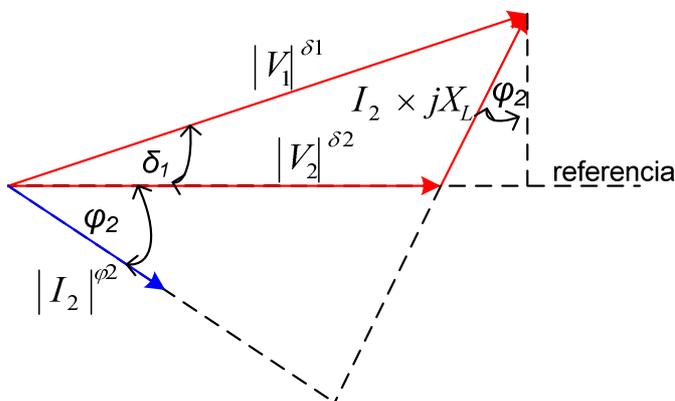
$$V_1 = |V_1| e^{j\delta_1}$$

$$V_2 = |V_2| e^{j\delta_2}$$

$$I_{12} = \frac{V_1 - V_2}{jX_{LT}}$$

$$I_{21} = \frac{V_2 - V_1}{jX_{LT}}$$

Se arma el diagrama fasorial correspondiente al circuito:

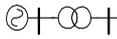


Del diagrama fasorial se puede deducir:

$$|I_2| \times X_L \times \cos \varphi_2 = |V_1| \times \text{sen} \delta_1$$

$$\delta_2 = 0^\circ \text{ (referencia angular)}$$

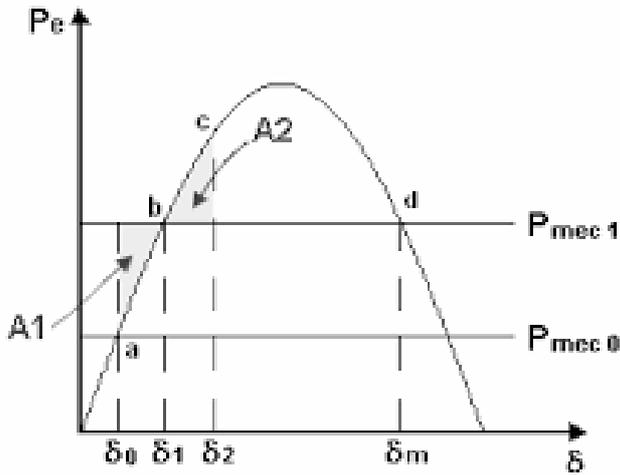
$$|I_2| \times \cos \varphi_2 = \frac{|V_1|}{X_L} \times \text{sen} \delta_1$$



Además como:

$$P_2 = |V_2| \times |I_2| \times \cos \varphi_2$$

$$\frac{P_2}{|V_2|} = \frac{|V_1|}{X_L} \times \text{sen} \delta_1 \Rightarrow P_2 = \frac{|V_1| \times |V_2|}{X_L} \times \text{sen} \delta_1$$



$$P_{21} = - P_{12}$$

Se puede deducir también que:

$$Q_{12} = \frac{|V_1|^2 - |V_1||V_2| \cos(\delta_1 - \delta_2)}{X_{LT}}$$

$$Q_{21} = \frac{|V_2|^2 - |V_1||V_2| \cos(\delta_1 - \delta_2)}{X_{LT}}$$

Si además:

$$|V_1| = |V_2| \Rightarrow Q_{12} = Q_{21}$$

Significa que hay un flujo de reactivo que sale de cada barra hacia adentro de la línea y que es consumido por la inductancia de la línea.

Como en el caso analizado no hay resistencia en la LT, las pérdidas activas son nulas. El flujo de potencia activa que sale del nodo 1, P_{12} , es el mismo que el que llega al nodo 2, $-P_{21}$.

$$P_{12} = - P_{21}$$

La pérdida reactiva en la línea se calcula como:

$$Q \text{ pérdida} = Q_{12} + Q_{21}$$

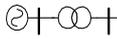
[Mvar], [Mvar/fase], [pu]

$$Q \text{ pérdida} = \frac{|V_1|^2 + |V_2|^2 - 2|V_1||V_2| \cos(\delta_1 - \delta_2)}{X_{LT}}$$

[Mvar], [Mvar/fase], [pu]

$$Q \text{ pérdida} = I_{12}^2 X_{LT}$$

[Mvar], [Mvar/fase], [pu]



V. - DIFERENTES TIPOS DE VARIABLES

Podemos dividir las diferentes variables para un SEP de n barras, de la siguiente manera:

- 1) Variables de Estado compuesta de los módulos y ángulos de las tensiones de barra, y representada por el vector columna x .

$$x = [|V_1|, \delta_1, \dots, |V_n|, \delta_n]^T = \text{matriz transpuesta de las variables de estado}$$

- 2) Variables de Control, formadas por las *potencias activas generadas* (que se pueden controlar a través de la potencia mecánica aplicada al eje de la máquina), y por las *potencias reactivas generadas* (que se pueden controlar a través de la corriente de excitación que circula por los devanados de los polos).

$$u = [P_{G_1}, Q_{G_1}, \dots, P_{G_n}, Q_{G_n}]^T = \text{matriz transpuesta de las variables de control}$$

IMPORTANTE: Realizando un estudio de sensibilidad se encuentra que

- Manipulando la potencia activa generada en la barra i , P_{G_i} , se afecta fuertemente el valor del ángulo en dicha barra, δ_i , no así el valor de su módulo de tensión $|U_i|$, que permanece casi inalterado.
- Manipulando la potencia reactiva generada en la barra i , Q_{G_i} , se afecta fuertemente el valor del módulo de tensión de dicha barra, $|U_i|$, no así el valor del ángulo δ_i que permanece casi inalterado.

PORQUE ?

- 3) Variables de Perturbación o no Controlables, formadas por las *demandas activas y reactivas* de los usuarios del sistema. Debido al carácter aleatorio de la demanda estas perturbaciones sacan al sistema de su estado permanente de funcionamiento.

$$p = [P_{D_1}, Q_{D_1}, \dots, P_{D_n}, Q_{D_n}]^T = \text{matriz transpuesta de las variables de perturbación}$$

$n = n^\circ$ de barras del sistema

LIMITES de las VARIABLES

La solución del F.C. existirá si los valores encontrados están dentro de los límites de las diferentes variables en juego.

- a) Límites en el módulo de tensión de barra (calidad de servicio):

$$|U_i|_{\min} \leq |U_i| \leq |U_i|_{\max} \quad (0.9 \text{ a } 1.1 \text{ p.u. de la } U_{\text{nominal}})$$

- b) Límites en los valores de potencia activa de generación debido a restricciones técnicas en el grupo de impulso de las unidades generadoras:

$$P_{G_{i\min}} \leq P_{G_i} \leq P_{G_{i\max}}$$

- c) Límites en los valores de potencia reactiva de generación debido a, restricciones técnicas en la excitación de las unidades generadoras para el caso de $Q_{G_{i\max}}$, problemas de estabilidad en el caso de $Q_{G_{i\min}}$

$$Q_{G_{i\min}} \leq Q_{G_i} \leq Q_{G_{i\max}}$$

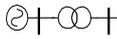


Diagrama de Capacidad de un generador

Representa los límites de potencia activa y reactiva durante la operación de un generador. Estos límites son:

- 1.- corriente de armadura del generador síncrono,
- 2.- corriente de campo
- 3.- subexcitación.
- 4.- límite técnico

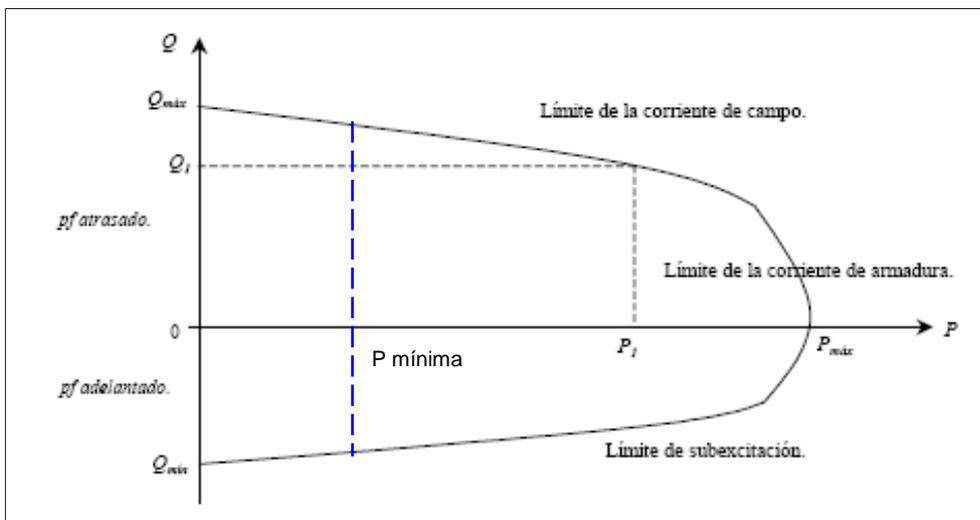
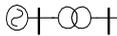


Diagrama típico de capacidad de un generador.



VI - NECESIDAD DE ESTABLECER DIFERENTES TIPOS DE BARRAS

De acuerdo a lo estudiado en el Capítulo VI se debe conocer $4n$ variables ($n = n^0$ de barras) para que el sistema de $2n$ "Ecuaciones estacionarias de Flujo de Carga" (6-1) y $6n$ variables tenga solución, por lo que se hace necesario establecer diferentes tipos de barras. Entre las más importantes se nombra a las siguientes:

	Se conoce a priori	Se especifica	Se calcula
Barra de Carga	P_D, Q_D	P_G, Q_G	$ U , \delta$
Barra de Tensión Controlada	P_D, Q_D	$P_G, U $	Q_G, δ
Barra de Referencia u Oscilante	P_D, Q_D	$ U , \delta$	P_G, Q_G
	4 n variables conocidas		2 n variables a calcular

Si en alguna barra i no existe generación $\rightarrow P_{Gi} = 0, Q_i = 0$

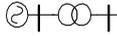
Si en alguna barra i no existe demanda $\rightarrow P_{Di} = 0, Q_{Di} = 0$

- En los tres tipos de barras se conoce la demanda.
- Las barras de Carga son llamadas así porque se conoce la inyección neta de potencia en la barra ($S_i = S_{Gi} - S_{Di}$).
- Las barras de tensión controlada son llamadas así porque se especifica cuanto tiene que valer el módulo de la tensión en dicha barra. Generalmente estas barras están distribuidas por todo el sistema para obtener un perfil adecuado en los niveles de tensión. Este tipo de barra tiene siempre acoplado algún generador de reactivo (banco de capacitores, compensador sincrónico), esto se debe a la fuerte relación que existe entre la potencia reactiva inyectada en la barra y el módulo de tensión en la misma.

Nota: Es una barra que sirve para encontrar una solución adecuada. Durante el estudio de FC cuando no se puede encontrar la solución adecuada o se tiene problemas de convergencia, se puede intentar lo siguiente: a) poner una barra de referencia y todas las demás barras de tensión controlada, para obtener así los Q inyectados que necesita el sistema, b) poner las barras de carga, especificadas con los valores obtenidos del Q , y algunas barras de tensión controlada. Esto a veces funciona y a veces no.

- La barra de referencia
La barra de referencia tiene una doble función:
 - a) Referencia angular (todas las barras están referidos a la posición angular de la tensión de la Barra de referencia, en general se especifica $\delta = 0^\circ$, y el módulo $|U|$ según la experiencia del operador)
 - b) Cierra el balance de potencia al final del cálculo, después de conocer las pérdidas. Es la única barra en la que no se conoce la potencia activa.

Se le llama también oscilante porque el valor de potencia que se debe generar en esta barra estará en función de las pérdidas del sistema, y éstas serán variables dependiendo de como está cargado el sistema. Generalmente esta barra debe corresponderse con una barra donde esté conectada una central con suficiente capacidad de generación y en las proximidades del centro eléctrico del sistema.



¿Cómo se especifica la P generada?

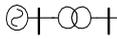
La P generada en una barra i , se la especifica basado en el conocimiento que se tiene del tipo de central, tipo de máquina, etc. que está conectada a esa barra i . Por ejemplo si sobre esa barra i hay una hidro, si el embalse tiene agua, cual es la época del año, etc. Si hay una nuclear, esta debe funcionar \approx a su potencia nominal. Se conoce además el despacho económico de cada máquina. Se debe cumplir al final: $\sum P_{\text{Gspecificado}} \approx P_{\text{demanda}}$

Las pérdidas se conocen recién al final de cada flujo.

¿Cómo se especifica la Q generada?

Debido al desconocimiento de lo que generan de reactivo las líneas, reactores, no se sabe nada acerca de que valor de potencia reactiva se pone como dato \rightarrow se coloca un valor cualquiera, y no se le pone límite a la variación del Q. \rightarrow no se puede hacer cumplir: $\sum Q_{\text{Gspecificado}} \approx Q_{\text{demanda}}$

Un operador experimentado deberá correr unas 10-20 veces el flujo de carga para que el sistema cumpla con las restricciones de tensión en los nodos, flujos de potencia por las líneas y potencias producidas por los generadores (curvas de capacidad).



VII- METODO DE LOS NODOS

La descripción de la topología del sistema a estudiar se realiza mediante la matriz incidencia de nodos (existen otros tipos de matrices de incidencia como la de ramas y de lazos).

La descripción eléctrica del sistema se realiza conociendo las impedancias o admitancias de los diferentes elementos que componen el SEP, formando con estos elementos la matriz primitiva (el orden de esta matriz cuadrada será el número de ramas que tenga el sistema, ya que se asocia a cada rama un elemento del sistema). Esta matriz es diagonal, siempre y cuando no se consideren acoplamientos mutuos, siendo el elemento diagonal la impedancia de la rama i . Si se tiene acoplamientos mutuos entre diferentes ramas del sistema, por ejemplo entre la rama k y la j , se tendrá elementos $z_{kj} = z_{jk}$ diferentes de cero.

Conclusión: La red en estudio queda unívocamente definida a través de su matriz de incidencia y su matriz primitiva.

La matriz admitancia de barra Y_B , cuadrada de orden n^0 de nodos, puede calcularse entonces como:

$$\bar{Y}_{B_{n \times n}} = \bar{A}_{n \times r}^T \cdot \bar{y}_{p_{r \times r}} \cdot \bar{A}_{r \times n} \quad (9-1)$$

$\bar{A}_{n \times r}^T$ = matriz de incidencia de nodo transpuesta, de orden n^0 de nodos x n^0 de ramas

$\bar{y}_{p_{r \times r}}$ = matriz primitiva de admitancias, cuadrada de orden n^0 de ramas

$\bar{y}_p = \bar{z}_p^{-1}$ = inversa de la matriz primitiva de impedancia

$\bar{A}_{r \times n}$ = matriz de incidencia de nodo, de orden n^0 de ramas x n^0 de nodos

Ejemplo: Dado el esquema del sistema mostrado en la FIG. 9 formar la Y_B sin considerar acoplamientos mutuos.

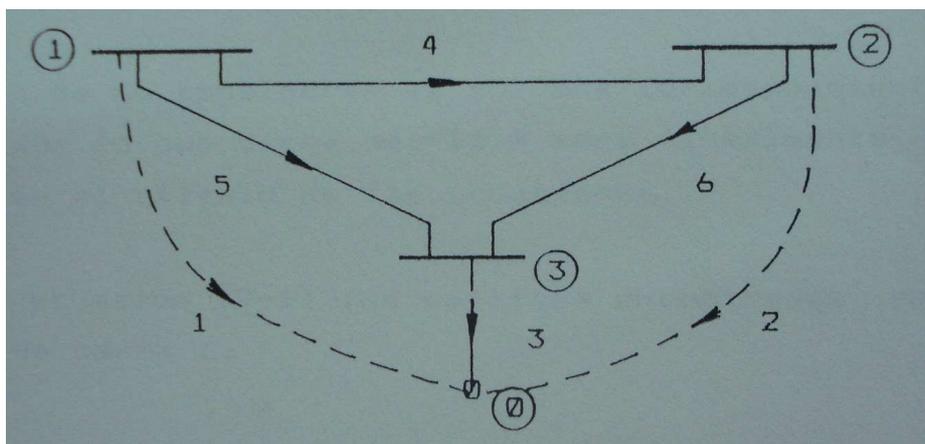
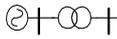


FIGURA 9



La matriz primitiva correspondiente a este sistema es:

$$z_{primitiva} = \begin{bmatrix} z_1 & & & & & \\ & z_2 & & & & \\ & & z_3 & & & \\ & & & z_4 & & \\ & 0 & & & z_5 & \\ & & & & & z_6 \end{bmatrix} \rightarrow y_p = z_p^{-1} \quad (9-2)$$

Cuando se consideren las capacidades a tierra, estarán presentes en el análisis las ramas 1, 2 y 3.

De acuerdo al sentido adoptado (arbitrario) la matriz incidencia nodal $A'_{(n+1)}$, considerando el nodo tierra 0, se forma de la siguiente manera:

(9-3)

	0	1	2	3	
1	-1	1	0	0	I
2	-1	0	1	0	
3	-1	0	0	1	
4	0	1	-1	0	A
5	0	1	0	-1	
6	0	0	1	-1	

← nodos

↑ ramas i

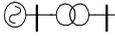
elemento a_{ij} de la matriz $A' = \{$ 1, cuando la rama i sale del nodo j
 -1, cuando la rama i llega al nodo j
 0, cuando la rama i no sale ni llega al nodo j

La matriz A resulta de no considerar la columna correspondiente al nodo 0 de la matriz A', por lo que dicha matriz A será linealmente independiente y podrá ser usada en el cálculo de las ecuaciones.

Reemplazando en la ecuación (9-1) las matrices encontradas se calcula la matriz admitancia de barra:

$$Y_B = \begin{bmatrix} (y_4 + y_5 + y_1) & -y_4 & -y_5 \\ -y_4 & (y_4 + y_6 + y_2) & -y_6 \\ -y_5 & -y_6 & (y_5 + y_6 + y_3) \end{bmatrix} \quad (9-4)$$

Esta matriz es simétrica con respecto a su diagonal principal. Cuando se tienen sistemas de muchas barras esta matriz es rala o esparsa, es decir la mayoría de sus elementos son iguales a cero (90 a 95%), y para almacenar tan sólo los datos diferentes de cero en la memoria del computador, se debe hacer uso de técnicas llamadas de "almacenamiento compacto".



El uso de la matriz admitancia de barra o nodo Y_B , es especialmente apto para el cálculo de redes de energía eléctrica con la ayuda de un computador digital, debido a que la ley de formación de dicha matriz resulta ser muy sencilla.

Esta ley de formación de \bar{Y}_B puede ser expresada (y verificada con el ejemplo anterior), como:

1) Los elementos de la diagonal principal $\rightarrow Y_{ii} = \sum_{k \in \Omega} y_{ik}$ (9-5)

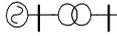
y_{ik} = elemento de la matriz primitiva que está conectado a la barra i , donde k es un nodo que pertenece al conjunto Ω de los nodos vecinos al nodo i .

2) Los elementos fuera de la diagonal $\rightarrow Y_{ij} = -y_{ij} \quad i \neq j$ (9-6)

y_{ij} = elemento de la matriz primitiva conectado entre los nodos i y j .

ES VALIDA ESTA LEY DE FORMACION CUANDO SE TIENEN ACOPLAMIENTOS MUTUOS?

CUAL ES EL SIGNIFICADO FISICO DE LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ Y_B ?



VIII - METODOS ITERATIVOS DE CALCULO

Debido a que las ecuaciones a resolver son del tipo no lineal (ecuaciones 6-1), se hace necesario recurrir a métodos iterativos para poder encontrar, si existe, la solución del problema.

Entre los métodos de cálculo más conocidos se encuentran:

- El método de Gauss-Seidel.
- El método de Newton-Raphson.

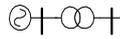
METODOS COMPUTACIONALES PARA EL CALCULO DE FLUJO DE CARGA

Cuando se comenzaron a realizar los estudios de FC se los hacía usando computadoras analógicas (analizadores de red).

Con la aparición de las computadoras los estudios se realizan de manera digital.

Los requerimientos que debe cumplir una técnica computacional para resolver el FC son:

- 1.- Manejar sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales.
- 2.- Manejar números complejos.
- 3.- Manejar un SEP de cientos de barras y líneas.
- 4.- Tener suficiente exactitud en los resultados.
- 5.- Consumir poco tiempo computacional.



METODO ITERATIVO

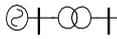
Un método iterativo encuentra la solución x_i del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales $F(x_i)$, de la siguiente manera:

- 1.- Suponer un valor inicial $x_i^{(0)}$, cualquiera en teoría.
- 2.- Usar este $x_i^{(0)}$ en el sistema de ecuaciones $F(x_i) \rightarrow F(x_i^{(0)})$, y encontrar un nuevo y mejor valor $x_i^{(1)}$ usando algún método.
- 3.- Usar este $x_i^{(1)}$ para encontrar $x_i^{(2)}$, y así sucesivamente.
- 4.- Calcular a cada paso, si la diferencia entre $x_i^{(v)}$ y $x_i^{(v+1)}$ (v =número de iteraciones) cae dentro de un error prefijado ξ . Si este es el caso, parar las iteraciones (solución encontrada, convergencia).

El algoritmo usado, (lista de instrucciones computacionales secuenciales) será juzgado tanto por su complejidad, como por su velocidad de convergencia.

Los diferentes métodos usan diferentes esquemas para encontrar $x_i^{(v)}$. Los métodos básicos se dividen en dos:

- Gauss - Seidel
- Newton Raphson (original y sus variantes desacoplado y desacoplado rápido)



VIII.1. METODO DE GAUSS

Es un método simple, que en general ya no se usa pero que tiene valor conceptual. En algunos programas, se realiza la primera iteración con este método, para alimentar luego con el resultado obtenido, al método de Newton Raspón.

Dado un sistema de n ecuaciones, con n incógnitas:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

.....

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = 0$$

que se escribe sintéticamente como:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

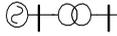
Se puede encontrar \mathbf{x} tal que:

$$\text{dado } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Si se parte de un vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ cualquiera, el algoritmo de cálculo es:

$\mathbf{x}^{(v+1)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(v)})$

La solución del problema estará en los puntos donde la recta x se intersecta con la curva $F(x)$.

**Ejemplo 1:**

Dada una línea de transmisión en DC, como la señalada en la Figura, relacionar las variables de potencia y tensiones. Como es un circuito DC solo se tendrá una ecuación linealmente independiente por barra:

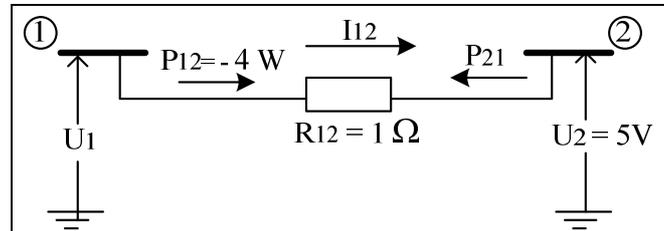


Fig.- Línea de transmisión en continua

$$P_{12} = U_1 I_{12} = U_1 \frac{U_1 - U_2}{R_{12}} = U_1^2 y_{12} - U_1 U_2 y_{12} \rightarrow U_1^2 - 5U_1 + 4 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática de la forma $\rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

Se la puede resolver directamente, obteniéndose las soluciones: $U_1 = 4 \text{ V}$, $U_1 = 1 \text{ V}$

Esta ecuación se la puede resolver aplicando el método de Gauss.

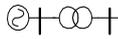
Si bien en este ejemplo las raíces (valores de x que hacen 0 a la función) se pueden calcular directamente, se las pueden encontrar por el método de Gauss.

El sistema de ecuaciones formado es no lineal, algebraico, de dimensión 1, con una incógnita:

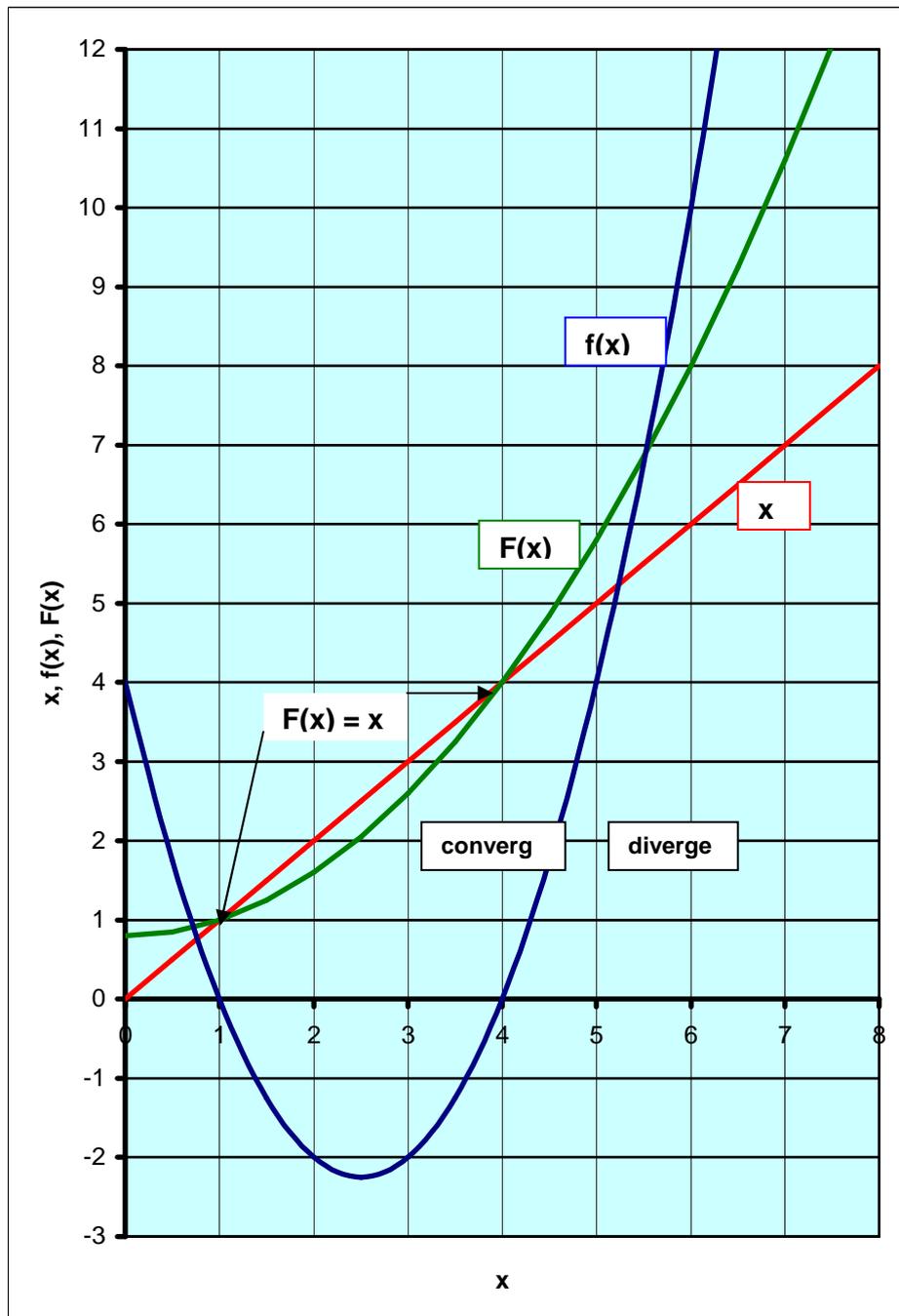
$$f(x) = x^2 - 5x + 4 = 0$$

Paso 1: Encontrar $F(x)$

$$x = 1/5 x^2 + 4/5 = F(x)$$



Se representan gráficamente x , $f(x)$, y $F(x)$:



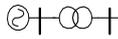
Para que el método comience a funcionar se debe dar un primer valor de arranque (iteración 0), por ejemplo:

$$x^{(0)} = 3$$

Aplicando el algoritmo, el próximo valor de x (iteración 1) será:

$$x^{(v+1)} = F(x^{(v)}) \quad x = 1/5 x^2 + 4/5 = F(x)$$

$$x^{(1)} = F(x^{(0)}) = 1/5 x^{(0)2} + 4/5 = 2.6$$



Se realiza control de convergencia:

$$|x^{(1)} - x^{(0)}| = |2.6 - 3| = 0.4$$

If $(0.4 < \xi=0.001) \rightarrow \text{NO}$

se continúa con la próxima iteración 2:

$$x^{(2)} = F(x^{(1)}) = F(2.6) = 1/5 x^{(1)2} + 4/5 = 2.15$$

$$|x^{(2)} - x^{(1)}| = |2.15 - 2.6| = 0.45$$

If $(0.45 < \xi=0.001) \rightarrow \text{NO}$

Iteración 3:

$$x^{(3)} = F(x^{(2)}) = F(2.15) = 1/5 x^{(2)2} + 4/5 = 1.72$$

$$|x^{(3)} - x^{(2)}| = |1.72 - 2.15| = 0.43$$

If $(0.43 < \xi=0.001) \rightarrow \text{NO}$

Iteración 4:

$$x^{(4)} = F(x^{(3)}) = F(1.72) = 1/5 x^{(3)2} + 4/5 = 1.39$$

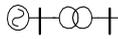
$$|x^{(4)} - x^{(3)}| = |1.39 - 1.72| = 0.33$$

If $(0.33 < \xi=0.001) \rightarrow \text{NO}$

y así sucesivamente (se observa en la Fig. este proceso iterativo)

Una desventaja del método es su lenta convergencia. Otra, es que dependiendo del valor inicial, no hay convergencia.

Por ejemplo, si $x^{(0)}=5$, el sistema diverge (observar el proceso de divergencia en la Figura).



Ejemplo 2

Encontrar las raíces, por el método de Gauss, de un sistema de ecuaciones no lineales de dimensión 2, con dos incógnitas:

$$f(x_1) = 2x_1 + x_1 x_2 - 1 = 0$$

$$f(x_2) = 2x_2 - x_1 x_2 + 1 = 0$$

(la solución es $x_1=1$, $x_2=-1$)

Este sistema se puede escribir como:

$$x_1 = 0,5 - (x_1 x_2)/2 = F(x_1)$$

$$x_2 = -0,5 + (x_1 x_2)/2 = F(x_2)$$

1er Paso: Suponer valores iniciales

$$x_1^{(0)} = 0$$

$$x_2^{(0)} = 0$$

2do. Paso: Aplicar el algoritmo de Gauss, para encontrar nuevos valores $x_1^{(1)}$ y $x_2^{(1)}$

$$x_1^{(1)} = F(x_1^{(0)}) = 0,5 - (x_1^{(0)} x_2^{(0)})/2 = 0.5$$

$$x_2^{(1)} = F(x_2^{(0)}) = -0,5 + (x_1^{(0)} x_2^{(0)})/2 = -0.5$$

3er. Paso: Encontrar si la diferencia es menor que un ξ adoptado

$$\text{IF } (|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0.5) < \xi$$

$$\text{IF } (|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.5) < \xi$$

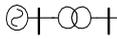
4to. Paso: Aplicar el algoritmo de Gauss, para encontrar nuevos valores $x_1^{(2)}$ y $x_2^{(2)}$

$$x_1^{(2)} = F(x_1^{(1)}) = 0,5 - (x_1^{(1)} x_2^{(1)})/2 = 0.625$$

$$x_2^{(2)} = F(x_2^{(1)}) = -0,5 + (x_1^{(1)} x_2^{(1)})/2 = -0.625$$

Se observa que se converge lentamente a la solución. Es el precio que se paga por su sencillez.

HACER ESTOS EJEMPLOS RESUELTOS CON NEWTON RAPHSON,
VER ARCHIVO (FLUJO DE POTENCIA.PDF)



VIII.2 - EL METODO DE GAUSS-SEIDEL

Se encontrará una expresión de la tensión en una barra i , en función de:

- La potencia inyectada en dicha barra.
- Las tensiones en las barras del sistema.
- Las admitancias de barra del sistema.

El vector de corriente inyectado en las barras se calcula como:

$$\bar{I}_B = \bar{Y}_B \cdot \bar{U}_B \quad (10-1)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \vdots \\ \bar{I}_i \\ \vdots \\ \bar{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \cdots & \bar{Y}_{i1} & \cdots & \bar{Y}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{Y}_{i1} & \cdots & \bar{Y}_{ii} & \cdots & \bar{Y}_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{Y}_{n1} & \cdots & \bar{Y}_{ni} & \cdots & \bar{Y}_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \vdots \\ \bar{U}_i \\ \vdots \\ \bar{U}_n \end{bmatrix}$$

La corriente inyectada en la barra i es:

$$\bar{I}_i = \bar{Y}_{i1} \cdot \bar{U}_1 + \cdots + \bar{Y}_{ii} \cdot \bar{U}_i + \cdots + \bar{Y}_{in} \cdot \bar{U}_n$$

La potencia inyectada en la barra i es:

$$\bar{S}_i = \bar{U}_i \cdot \bar{I}_i^* \rightarrow \bar{I}_i = \frac{\bar{S}_i^*}{\bar{U}_i} = \frac{P_i - jQ_i}{\bar{U}_i^*}$$

Igualo la corriente inyectada en la barra i :

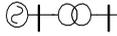
$$\frac{P_i - jQ_i}{\bar{U}_i^*} = \bar{Y}_{i1} \cdot \bar{U}_1 + \cdots + \bar{Y}_{ii} \cdot \bar{U}_i + \cdots + \bar{Y}_{in} \cdot \bar{U}_n \quad (10-2)$$

Se “despeja” ahora la tensión en la barra i , U_i , dejándola escrita de forma conveniente para el cálculo iterativo de las tensiones:

$$\bar{U}_i^{(v)} = \frac{1}{\bar{Y}_{ii}} \left(\frac{P_i - jQ_i}{\bar{U}_i^{*(v-1)}} - \bar{Y}_{i1} \cdot \bar{U}_1 - \sum_{j=2}^{i-1} \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{U}_j^{(v)} - \sum_{j=i+1}^n \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{U}_j^{(v-1)} \right) \quad (10-3)$$

Esta es la tensión compleja de la barra i calculada en la iteración (v) .

¿SE USA ESTA ECUACION PARA CALCULAR LA TENSION COMPLEJA EN LA BARRA DE REFERENCIA?



En la primera iteración, $v=1$, todas las tensiones se adoptan con módulo 1 p.u. y ángulo 0° (partida plana).

En general la convergencia de este método es pobre (para un sistema de 50 barras entre 150 y 200 iteraciones), y se lo usa a veces para inicializar los valores de partida del método de Newton-Raphson. Converge mejor cuanto mayor es el grado de mallado (redes de baja tensión).

Debido a esta baja velocidad de convergencia, se puede aplicar un algoritmo de aceleración: después de haber calculado un valor $\bar{U}_i^{(v)}$ por medio de la ecuación anterior, se lo modifica introduciendo un factor de aceleración ω (generalmente oscila entre 1.3 y 1.7 y puede ser un número complejo). La expresión usada es la siguiente:

$$\bar{U}_i^{(v)} = \bar{U}_i^{(v-1)} + fa \left(\bar{U}_i^{(v)} - \bar{U}_i^{(v-1)} \right)$$

Cálculo de la Potencia Activa y Reactiva inyectada neta en el nodo i

$$\bar{Y}_{ik} = G_{ik} + jB_{ik} = \text{elemento ik de la admitancia de barra } Y_B \quad (10-5)$$

$$S_i^* = P_i - jQ_i = \bar{U}_i^* \cdot I_i = \bar{U}_i^* \cdot \sum_{k=1}^n \bar{Y}_{ik} \cdot \bar{U}_k$$

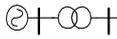
$$P_i^{calc} = \text{parte real} \left\{ \bar{U}_i^* \cdot \sum_{k=1}^n \bar{Y}_{ik} \cdot \bar{U}_k \right\} \quad (10-6)$$

$$P_i^{calc} = |U_i| \cdot \sum_{k \in K} |U_k| \left(G_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k) + B_{ik} \text{sen}(\delta_i - \delta_k) \right) \quad (10-7)$$

$$Q_i^{calc} = - \text{parte imaginaria} \left\{ \bar{U}_i^* \cdot \sum_{k=1}^n \bar{Y}_{ik} \cdot \bar{U}_k \right\} \quad (10-8)$$

$$Q_i^{calc} = |U_i| \cdot \sum_{k \in K} |U_k| \left(G_{ik} \text{sen}(\delta_i - \delta_k) - B_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k) \right) \quad (10-9)$$

$k \in K$ significa que K es el conjunto de todas las barras k adyacentes a la barra i, incluyendo la propia barra i.



Control de Precisión

Para efectuar el control de precisión se suele usar el criterio basado en:

1) La *diferencia de tensiones* entre dos aproximaciones sucesivas para las barras de carga y barras de tensión controlada:

$$\left| \bar{U}_i^{(v)} - U_i^{(v-1)} \right| \leq \varepsilon_u$$

ε_u = tolerancia (0.001 a 0.0001)

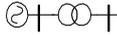
2) *Discordancias de potencias*:

$$\left| \bar{P}_i^{esp} - \bar{P}_i^{calc} \right| \leq \varepsilon_p \quad \text{para barras de carga y de tensión controlada}$$

$$\left| \bar{Q}_i^{esp} - \bar{Q}_i^{calc} \right| \leq \varepsilon_q \quad \text{para barras de carga}$$

$\varepsilon_{p,q}$ = tolerancia (0.001 a 0.0001)

La estrategia de convergencia se inicia con un test de tensión hasta que el error está dentro de la tolerancia. Pasar luego a un test de potencia, hasta que ambos test sean verificados.



El Método de GAUSS-SEIDEL con Diferentes Tipos de Barras

a) UNA BARRA DE REFERENCIA Y LAS DEMAS BARRAS DE CARGA

Si se tiene la barra de referencia (con el módulo y ángulo de su tensión especificados), y las demás son barras de carga (con sus potencias inyectadas activas y reactivas especificadas), el cálculo se realiza aplicando la ecuación escrita abajo (obtenida de la ecuación general (10-3)) a todas las barras de carga:

$$\bar{U}_i^{(v)} = \frac{1}{\bar{Y}_{ii}} \left[\frac{P_i^{esp} - jQ_i^{esp}}{\bar{U}_i^{*(v-1)}} - \bar{Y}_{i1} \cdot \bar{U}_1 - \sum_{k=2}^{i-1} \bar{Y}_{ik} \cdot \bar{U}_k^{(v)} - \sum_{k=i+1}^n \bar{Y}_{ik} \cdot \bar{U}_k^{(v-1)} \right]$$

obteniéndose los valores de las tensiones complejas en todas las barras, salvo en la de referencia que ya es conocida.

Ejemplo Conceptual

Se tiene un SEP compuesto por ejemplo de 5 barras y 4 ramas, tal como se muestra en la Fig. siguiente. Se supone que la barra número 1 es la de referencia (debe existir en esta barra una central eléctrica) y las otras barras son de carga.

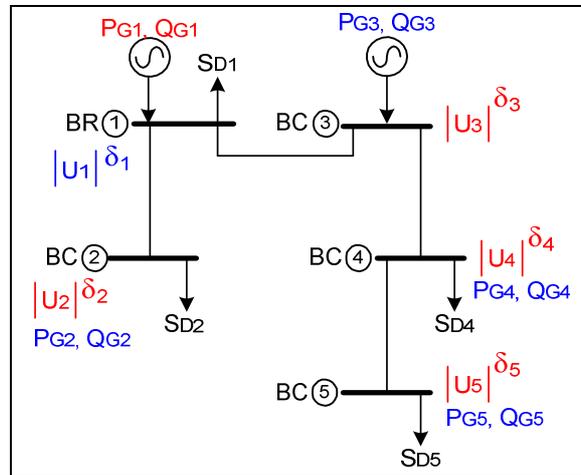


Fig.xxx.- SEP para el ejemplo conceptual

Aplicar conceptualmente el método de Gauss-Seidel para la resolución del problema:

- Se supone armada la matriz admitancia de barra Y_B .

$$Y_B = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} \end{bmatrix}$$

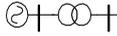
- Por definición, en la barra de referencia se *especifica* su valor de tensión:

$$\bar{U}_1 = |U_1| \angle \delta_1$$

- Por definición, en las barras de carga se *especifican* los valores de potencia tanto activa como reactiva, es decir que son conocidos:

$$P_2^{esp}, P_3^{esp}, P_4^{esp}, P_5^{esp}$$

$$Q_2^{esp}, Q_3^{esp}, Q_4^{esp}, Q_5^{esp}$$



Iteración v= 1:

1- En la primera iteración se *adopta* partida plana para todas las barras de carga, es decir:

$$\bar{U}_2^{(0)} = \bar{U}_3^{(0)} = \bar{U}_4^{(0)} = \bar{U}_5^{(0)} = 1^{0^0}$$

Como la barra 1 es una de referencia no se calcula su valor de tensión, por lo que se empieza con el cálculo de la tensión en la barra 2 usando la ecuación (10-3-1) ya que es una de carga:

$$\bar{U}_2^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{22}} \left[\frac{P_2^{esp} - jQ_2^{esp}}{\bar{U}_2^{*(1-1)}} - \bar{Y}_{21} \cdot \bar{U}_1 - \sum_{k=2+1}^5 \bar{Y}_{2k} \cdot \bar{U}_k^{(1-1)} \right]$$

$$\bar{U}_2^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{22}} \left[\frac{P_2^{esp} - jQ_2^{esp}}{\bar{U}_2^{*(0)}} - \bar{Y}_{21} \cdot \bar{U}_1 - \bar{Y}_{23} \cdot \bar{U}_3^{(0)} - \bar{Y}_{24} \cdot \bar{U}_4^{(0)} - \bar{Y}_{25} \cdot \bar{U}_5^{(0)} \right]$$

A continuación se calcula el valor de tensión en la barra 3:

$$\bar{U}_3^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{33}} \left[\frac{P_3^{esp} - jQ_3^{esp}}{\bar{U}_3^{*(1-1)}} - \bar{Y}_{31} \cdot \bar{U}_1 - \sum_{k=2}^{3-1} \bar{Y}_{3k} \cdot \bar{U}_k^{(1)} - \sum_{k=3+1}^5 \bar{Y}_{3k} \cdot \bar{U}_k^{(1-1)} \right]$$

$$\bar{U}_3^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{33}} \left[\frac{P_3^{esp} - jQ_3^{esp}}{\bar{U}_3^{*(0)}} - \bar{Y}_{31} \cdot \bar{U}_1 - \bar{Y}_{32} \cdot \bar{U}_2^{(1)} - \bar{Y}_{34} \cdot \bar{U}_4^{(0)} - \bar{Y}_{35} \cdot \bar{U}_5^{(0)} \right]$$

Se puede notar que en este cálculo se usa el valor $\bar{U}_2^{(1)}$ encontrado en el paso anterior.

A continuación se calcula el valor de tensión en la barra 4:

$$\bar{U}_4^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{44}} \left[\frac{P_4^{esp} - jQ_4^{esp}}{\bar{U}_4^{*(1-1)}} - \bar{Y}_{41} \cdot \bar{U}_1 - \sum_{k=2}^{4-1} \bar{Y}_{4k} \cdot \bar{U}_k^{(1)} - \sum_{k=4+1}^5 \bar{Y}_{4k} \cdot \bar{U}_k^{(1-1)} \right]$$

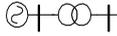
$$\bar{U}_4^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{44}} \left[\frac{P_4^{esp} - jQ_4^{esp}}{\bar{U}_4^{*(0)}} - \bar{Y}_{41} \cdot \bar{U}_1 - \bar{Y}_{42} \cdot \bar{U}_2^{(1)} - \bar{Y}_{43} \cdot \bar{U}_3^{(1)} - \bar{Y}_{45} \cdot \bar{U}_5^{(0)} \right]$$

Por último se calcula el valor de tensión en la barra 5:

$$\bar{U}_5^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{55}} \left[\frac{P_5^{esp} - jQ_5^{esp}}{\bar{U}_5^{*(1-1)}} - \bar{Y}_{51} \cdot \bar{U}_1 - \sum_{k=2}^{5-1} \bar{Y}_{5k} \cdot \bar{U}_k^{(1)} - \sum_{k=5+1}^5 \bar{Y}_{5k} \cdot \bar{U}_k^{(1-1)} \right]$$

$$\bar{U}_5^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{55}} \left[\frac{P_5^{esp} - jQ_5^{esp}}{\bar{U}_5^{*(0)}} - \bar{Y}_{51} \cdot \bar{U}_1 - \bar{Y}_{52} \cdot \bar{U}_2^{(1)} - \bar{Y}_{53} \cdot \bar{U}_3^{(1)} - \bar{Y}_{54} \cdot \bar{U}_4^{(1)} \right]$$

Observación: En este método los valores de tensión anteriormente calculados son introducidos en el cálculo del siguiente valor de tensión .



En este punto del cálculo se realiza el test de convergencia para cada barra del sistema, es decir:

$$\left| \bar{U}_2^{(1)} - \bar{U}_2^{(1-1)} \right| \leq \varepsilon_u \quad \left| \bar{U}_3^{(1)} - \bar{U}_3^{(1-1)} \right| \leq \varepsilon_u$$

$$\left| \bar{U}_4^{(1)} - \bar{U}_4^{(1-1)} \right| \leq \varepsilon_u \quad \left| \bar{U}_5^{(1)} - \bar{U}_5^{(1-1)} \right| \leq \varepsilon_u$$

Si la diferencia es mayor que la tolerancia adoptada se pasa a la iteración siguiente.

Iteración v= 2:

$$\bar{U}_2^{(2)} = \frac{1}{\bar{Y}_{22}} \left[\frac{P_2^{esp} - jQ_2^{esp}}{\bar{U}_2^{*(1)}} - \bar{Y}_{21} \cdot \bar{U}_1 - \bar{Y}_{23} \cdot \bar{U}_3^{(1)} - \bar{Y}_{24} \cdot \bar{U}_4^{(1)} - \bar{Y}_{25} \cdot \bar{U}_5^{(1)} \right]$$

$$\bar{U}_3^{(2)} = \frac{1}{\bar{Y}_{33}} \left[\frac{P_3^{esp} - jQ_3^{esp}}{\bar{U}_3^{*(1)}} - \bar{Y}_{31} \cdot \bar{U}_1 - \bar{Y}_{32} \cdot \bar{U}_2^{(2)} - \bar{Y}_{34} \cdot \bar{U}_4^{(1)} - \bar{Y}_{35} \cdot \bar{U}_5^{(1)} \right]$$

$$\bar{U}_4^{(2)} = \frac{1}{\bar{Y}_{44}} \left[\frac{P_4^{esp} - jQ_4^{esp}}{\bar{U}_4^{*(1)}} - \bar{Y}_{41} \cdot \bar{U}_1 - \bar{Y}_{42} \cdot \bar{U}_2^{(2)} - \bar{Y}_{43} \cdot \bar{U}_3^{(2)} - \bar{Y}_{45} \cdot \bar{U}_5^{(1)} \right]$$

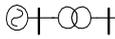
$$\bar{U}_5^{(2)} = \frac{1}{\bar{Y}_{55}} \left[\frac{P_5^{esp} - jQ_5^{esp}}{\bar{U}_5^{*(1)}} - \bar{Y}_{51} \cdot \bar{U}_1 - \bar{Y}_{52} \cdot \bar{U}_2^{(2)} - \bar{Y}_{53} \cdot \bar{U}_3^{(2)} - \bar{Y}_{54} \cdot \bar{U}_4^{(2)} \right]$$

En este punto del cálculo se realiza nuevamente el test de convergencia para cada barra del sistema, es decir:

$$\left| \bar{U}_2^{(2)} - \bar{U}_2^{(1)} \right| \leq \varepsilon_u \quad \left| \bar{U}_3^{(2)} - \bar{U}_3^{(1)} \right| \leq \varepsilon_u$$

$$\left| \bar{U}_4^{(2)} - \bar{U}_4^{(1)} \right| \leq \varepsilon_u \quad \left| \bar{U}_5^{(2)} - \bar{U}_5^{(1)} \right| \leq \varepsilon_u$$

Se continua entonces en forma iterativa hasta que el test de convergencia sea satisfecho, o si no hasta que en un número suficiente de iteraciones no se encuentre la solución del problema (posibilidad de divergencia).



b) UNA BARRA DE REFERENCIA, BARRAS DE CARGA Y TENSION CONTROLADA

Para las barras de carga se aplica la ecuación (10-3-1).

Para las barras i correspondientes a las barras de tensión controlada, (donde se especifica el módulo de tensión $|U_i|^{esp}$ y la potencia activa inyectada P_i^{esp}), se debe calcular el ángulo de la tensión compleja δ_i^{calc} y la potencia reactiva inyectada Q_i^{calc} . Por lo tanto se aplicará la ecuación (10-3-2) escrita abajo (obtenida de la ecuación (10-3)) a todas las barras de tensión controlada i:

$$\bar{U}_i^{(v)} = \frac{1}{\bar{Y}_{ii}} \left[\frac{P_i^{esp} - jQ_i^{calc^{(v-1)}}}{\bar{U}_i^{*(v-1)}} - \bar{Y}_{i1} \cdot \bar{U}_1 - \sum_{k=2}^{i-1} \bar{Y}_{ik} \cdot \bar{U}_k^{(v)} - \sum_{k=i+1}^n \bar{Y}_{ik} \cdot \bar{U}_k^{(v-1)} \right]$$

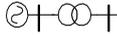
El valor encontrado luego del cálculo es:

$$U_i^{(v)} = |U_i|^{calc} \cdot e^{j\delta_i^{calc}} \quad (10-10)$$

pero en la próxima ecuación esta tensión entra como:

$$U_i^{(v)} = |U_i|^{esp} \cdot e^{j\delta_i^{calc}} \quad (10-11)$$

ya que el valor del módulo de tensión está especificado y por lo tanto no debe modificarse.



Ejemplo Conceptual

Se tiene el mismo SEP del ejemplo anterior, pero ahora la barra 3 es una barra de tensión controlada.

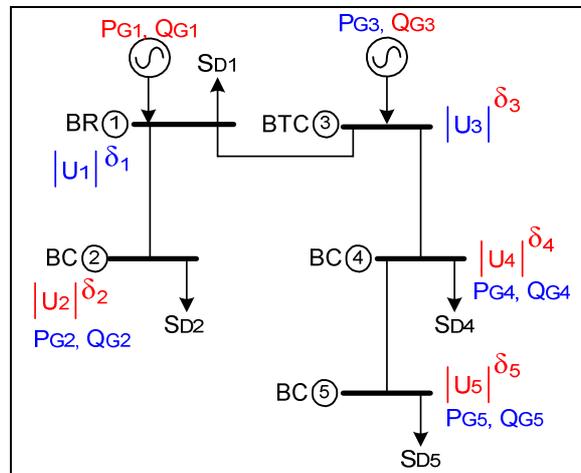


Fig.xxx.- SEP para el ejemplo conceptual

Se parte de lo siguiente:

- Se conoce la Y_B .
- Se especifica el valor de tensión de la barra de referencia.
- Se especifican los valores de potencia activa y reactiva de las barras de carga.
- Se especifican los valores de potencia activa de las barras de tensión controlada

Iteración $v= 1$:

- En la primera iteración se *adopta* partida plana para todas las barras de carga, es decir:

$$\bar{U}_2^{(0)} = \bar{U}_4^{(0)} = \bar{U}_5^{(0)} = 1 \quad 0^\circ$$

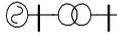
y se adopta un ángulo de 0° en la barra de tensión controlada (barra 3), ya que por definición en esta barra se especifica el módulo:

$$\bar{U}_3^{(0)} = |U_3| \quad 0^\circ$$

Como la barra 1 es una de referencia no se calcula su valor de tensión, por lo que se empieza con el cálculo de la tensión de la barra 2 usando la ecuación (10-3-1) ya que es una de carga:

$$\bar{U}_2^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{22}} \left[\frac{P_2^{esp} - jQ_2^{esp}}{\bar{U}_2^{*(0)}} - \bar{Y}_{21} \cdot \bar{U}_1 - \bar{Y}_{23} \cdot |U_3|^{esp} \quad 0^\circ - \bar{Y}_{24} \cdot \bar{U}_4^{(0)} - \bar{Y}_{25} \cdot \bar{U}_5^{(0)} \right]$$

Se nota en esta ecuación que el valor del módulo de tensión a ser usado en la barra 3 es el especificado (ya que este valor es conocido)



A continuación se calcula el valor de tensión en la barra de tensión controlada número 3, usando la ecuación (10-3-2):

$$\bar{U}_3^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{33}} \left[\frac{P_3^{esp} - jQ_3^{calc(1-1)}}{\bar{U}_3^{*(1-1)}} - \bar{Y}_{31} \cdot \bar{U}_1 - \sum_{k=2}^{3-1} \bar{Y}_{3k} \cdot \bar{U}_k^{(1)} - \sum_{k=3+1}^5 \bar{Y}_{3k} \cdot \bar{U}_k^{(1-1)} \right]$$

Pero para poder encontrar este valor debemos calcular antes cuanto vale la potencia reactiva inyectada en la barra 3 usando la ecuación (10-9):

$$Q_3^{calc(v)} = |U_3| \cdot \sum_{k \in \mathcal{K}} |U_k| \left(G_{3k} \sin(\delta_3^{(v)} - \delta_k) - B_{3k} \cos(\delta_3^{(v)} - \delta_k) \right)$$

Suponer que la barra 3 se encuentra unida a la barra de referencia 1, y a una barra de carga 4:

$$Q_3^{calc(0)} = |U_3| \cdot \left\{ |U_1| \left(G_{31} \sin(\delta_3^{(0)} - \delta_1) - B_{31} \cos(\delta_3^{(0)} - \delta_1) \right) + |U_4|^{(0)} \left(G_{34} \sin(\delta_3^{(0)} - \delta_4^{(0)}) - B_{34} \cos(\delta_3^{(0)} - \delta_4^{(0)}) \right) \right\}$$

Por lo tanto la tensión en la barra 3 resulta:

$$\bar{U}_3^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{33}} \left(\frac{P_3^{esp} - jQ_3^{calc(0)}}{\bar{U}_3^{*(0)}} - \bar{Y}_{31} \cdot \bar{U}_1 - \bar{Y}_{32} \cdot \bar{U}_2^{(1)} - \bar{Y}_{34} \cdot \bar{U}_4^{(0)} - \bar{Y}_{35} \cdot \bar{U}_5^{(0)} \right)$$

$$\bar{U}_3^{(1)} = |U_3|^{(1)} \cdot e^{j\delta_3^{(1)}}$$

Pero como ya se había especificado el módulo de tensión de la barra 3, la tensión compleja definitiva es:

$$\bar{U}_3^{(1)} = |U_3|^{esp} \cdot e^{j\delta_3^{(1)}}$$

A continuación se calcula el valor de tensión en la barra 4 y 5 usando la ecuación (10-3-1) ya que dichas barras son de carga:

$$\bar{U}_4^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{44}} \left(\frac{P_4^{esp} - jQ_4^{esp}}{\bar{U}_4^{*(0)}} - \bar{Y}_{41} \cdot \bar{U}_1 - \bar{Y}_{42} \cdot \bar{U}_2^{(1)} - \bar{Y}_{43} \cdot \bar{U}_3^{(1)} - \bar{Y}_{45} \cdot \bar{U}_5^{(0)} \right)$$

$$\bar{U}_5^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{55}} \left(\frac{P_5^{esp} - jQ_5^{esp}}{\bar{U}_5^{*(0)}} - \bar{Y}_{51} \cdot \bar{U}_1 - \bar{Y}_{52} \cdot \bar{U}_2^{(1)} - \bar{Y}_{53} \cdot \bar{U}_3^{(1)} - \bar{Y}_{54} \cdot \bar{U}_4^{(1)} \right)$$

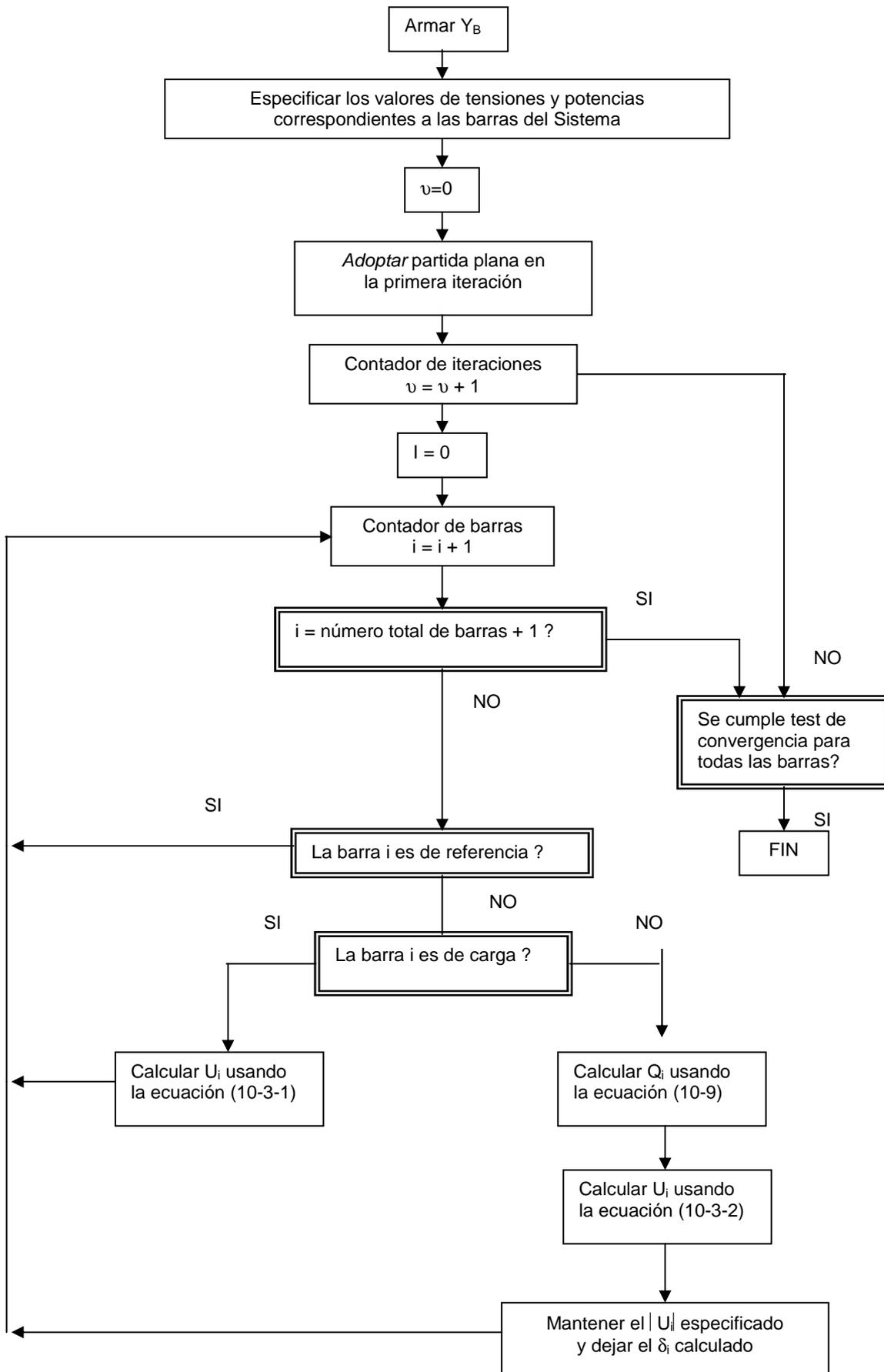
En este punto del cálculo se realiza el test de convergencia para cada barra del sistema, es decir:

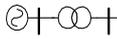
$$\left| \bar{U}_2^{(1)} - \bar{U}_2^{(1-1)} \right| \leq \varepsilon_u \quad \left| \bar{U}_3^{(1)} - \bar{U}_3^{(1-1)} \right| \leq \varepsilon_u \quad \left| \bar{U}_4^{(1)} - \bar{U}_4^{(1-1)} \right| \leq \varepsilon_u \quad \left| \bar{U}_5^{(1)} - \bar{U}_5^{(1-1)} \right| \leq \varepsilon_u$$

Si la diferencia es mayor que la tolerancia adoptada se pasa a la iteración siguiente.

Se continua entonces en forma iterativa hasta que el test de convergencia sea satisfecho, o si no hasta que en un número suficiente de iteraciones no se llegue a la solución del problema.

DIAGRAMA EN BLOQUE DEL CALCULO DE TENSIONES USANDO GAUSS-SEIDEL





VIII.3 - EL METODO DE NEWTON-RAPHSON

El método de N-R es adecuado para el cálculo de las variables de estado en redes de alta tensión ($\geq 132\text{KV}$). Posee en general un buen comportamiento en lo que se refiere a la velocidad de convergencia (3 a 5 iteraciones).

Aplicación del método de N-R para una Función Escalar

El método de N-R linealiza a cada iteración una función no lineal $f(x)$, hasta llegar a la solución o raíz $x_{\text{solución}}$, dentro de una tolerancia especificada ϵ .

$$f(x_{\text{solución}}) = 0$$

En el caso que se tenga una función escalar, se puede observar gráficamente el método:

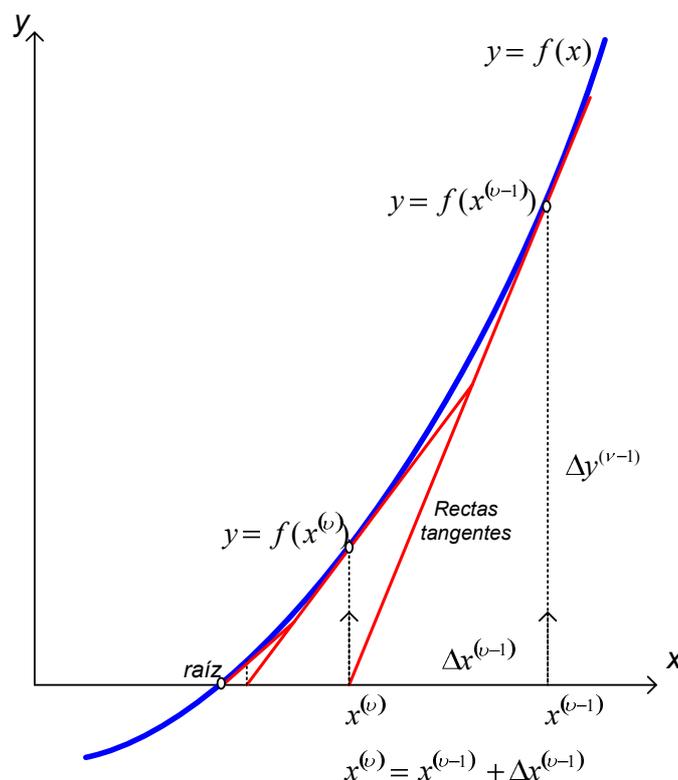
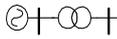


FIGURA 10

Pasos:

- Se adopta un valor $x^{(v-1)}$ y se encuentra el punto $y = f(x^{(v-1)})$.
- Se pregunta si este valor es menor a una tolerancia ϵ . Si no lo es, seguir.
- Se traza la tangente en este punto y se la interseca con el eje de las abscisas, resultando el valor $x^{(v)}$, es decir se aproxima la función $f(x)$ con una línea tangente en el punto $x^{(v-1)}$
- Se usa ahora este valor para encontrar $y = f(x^{(v)})$
- Se pregunta si este valor es menor a una tolerancia ϵ . Si no lo es, seguir.
- Se continúa de esta manera hasta que $f(x^{(v_i)}) < \epsilon$ (tolerancia), lo que implica haber llegado a la raíz en la iteración i .



Este desarrollo gráfico puede ser analizado matemáticamente.

La ecuación no lineal $f(x)$ es desarrollada en una serie de Taylor alrededor del punto $x^{(v-1)}$:

$$f(x^{(v-1)}) + \frac{\partial f(x^{(v-1)})}{\partial x} \cdot (x^{(v)} - x^{(v-1)}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x^{(v-1)})}{\partial x^2} \cdot (x^{(v)} - x^{(v-1)})^2 \dots = 0$$

Se desprecian los términos superiores a 2, resultando una ecuación lineal en el punto $x^{(v-1)}$ (recta tangente):

$$f(x^{(v-1)}) + \frac{\partial f(x^{(v-1)})}{\partial x} \cdot (x^{(v)} - x^{(v-1)}) \cong 0 \Rightarrow \Delta x^{(v-1)} = (x^{(v)} - x^{(v-1)}) \cong - \frac{f(x^{(v-1)})}{\frac{\partial f(x^{(v-1)})}{\partial x}}$$

Se agrega este $\Delta x^{(v-1)}$ encontrado al valor anterior $x^{(v-1)}$, obteniéndose un mejor valor $x^{(v)}$:

$$x^{(v)} = x^{(v-1)} + \Delta x^{(v-1)}$$

Se continúa de esta manera hasta que $f(x^{(v_i)}) < \epsilon$

Aplicación del método de N-R para un Sistema de n ecuaciones con n incógnitas

Dado el sistema de ecuaciones

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\dots = 0$$

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = 0$$

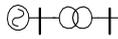
Se expande cada ecuación en una serie de Taylor alrededor del vector de puntos $X^{(v-1)}$

$$X^{(v-1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(v-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(v-1)} \end{bmatrix}$$

$$f_1(X^{(v-1)}) + \frac{\partial f_1(x_1^{(v-1)})}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_1(x_1^{(v-1)})}{\partial x_n} \Delta x_n \cong 0$$

$$\dots \cong 0$$

$$f_n(X^{(v-1)}) + \frac{\partial f_n(x_n^{(v-1)})}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_n(x_n^{(v-1)})}{\partial x_n} \Delta x_n \cong 0$$



De manera matricial el sistema queda escrito como:

$$\begin{bmatrix} f_1(X^{(v-1)}) \\ \vdots \\ f_n(X^{(v-1)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(v-1)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(v-1)} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(X^{(v-1)}) = \begin{bmatrix} f_1(X^{(v-1)}) \\ \vdots \\ f_n(X^{(v-1)}) \end{bmatrix} \quad \Delta X^{(v-1)} = \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(v-1)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(v-1)} \end{bmatrix} \quad J^{(v-1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \text{Jacobiano}$$

De manera condensada se puede escribir:

$$\Delta X^{(v-1)} \cong -[J^{(v-1)}]^{-1} \times f(X^{(v-1)})$$

En cada iteración se debe invertir el jacobiano.

El próximo valor será:

$$X^{(v)} = X^{(v-1)} + \Delta X^{(v-1)}$$

Los valores adoptados inicialmente tienen influencia en la convergencia, y si ésta existe, en el nro. de iteraciones. Esta es la razón por la que a veces el primer valor de la iteración se calcula mediante el método de Gauss-Seidel. Un factor que afecta la convergencia es la ubicación de la barra de referencia (se trata que ésta se localice en el centro de gravedad eléctrico del sistema, y además que en ese lugar se tenga una generación importante).

El método de N-R en el estudio de flujo de carga

La función $f(X)$ se corresponde con las siguientes ecuaciones de potencia inyectada activa y reactiva en las barras i (deducidas anteriormente):

$$P_i^{calc} = |U_i| \cdot \sum_{m \in K} |U_m| (G_{im} \cos(\delta_i - \delta_m) + B_{im} \text{sen}(\delta_i - \delta_m))$$

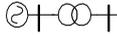
$$Q_i^{calc} = |U_i| \cdot \sum_{m \in K} |U_m| (G_{im} \text{sen}(\delta_i - \delta_m) - B_{im} \cos(\delta_i - \delta_m))$$

K es igual al conjunto de nodos adyacentes al nodo i , incluido el nodo i .

Las variables o incógnitas X se corresponden con las tensiones en las barras i ($i = 2, \dots, n$) es decir:

$$f_i(X) = P_i^{calc} (|U_1|, \delta_1, \dots, |U_n|, \delta_n)$$

$$f_i(X) = Q_i^{calc} (|U_1|, \delta_1, \dots, |U_n|, \delta_n)$$



Algoritmo de Cálculo

El método iterativo se realiza según los pasos siguientes:

Paso 1: Se adopta un perfil plano de tensiones para iniciar la primera iteración. La barra de referencia generalmente tiene el número 1, y por lo tanto no aparece (ya que se conoce de antemano el valor de su tensión compleja).

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \hline |U_2| \\ \vdots \\ |U_n| \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}^{(0)}$$

→ los ángulos están en grados

→ los módulos de las tensiones en p.u.

Paso 2: Calcular el vector de diferencia de potencias (se corresponde con el vector ΔY).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{NPQ} \\ + \\ \text{NPV} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_n \\ \hline \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_n \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} P_2^{esp} - P_2^{calc} (|U_1|, \delta_1, \dots, |U_n|, \delta_n) \\ \vdots \\ P_n^{esp} - P_n^{calc} (|U_1|, \delta_1, \dots, |U_n|, \delta_n) \\ \hline Q_2^{esp} - Q_2^{calc} (|U_1|, \delta_1, \dots, |U_n|, \delta_n) \\ \vdots \\ Q_n^{esp} - Q_n^{calc} (|U_1|, \delta_1, \dots, |U_n|, \delta_n) \end{bmatrix}^{(0)}$$

NPQ = número de barras de carga

NPV = número de barras de tensión controlada

Paso 3: La ecuación general asume la siguiente forma (se corresponde con la ecuación 10-13):

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta P_2}{\delta \delta_2} & \dots & \frac{\delta P_2}{\delta \delta_n} & \dots & \frac{\delta P_2}{\delta |U|_2} & \dots & \frac{\delta P_2}{\delta |U|_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta P_n}{\delta \delta_2} & \dots & \frac{\delta P_n}{\delta \delta_n} & \dots & \frac{\delta P_n}{\delta |U|_2} & \dots & \frac{\delta P_n}{\delta |U|_n} \\ \hline \frac{\delta Q_2}{\delta \delta_2} & \dots & \frac{\delta Q_2}{\delta \delta_n} & \dots & \frac{\delta Q_2}{\delta |U|_2} & \dots & \frac{\delta Q_2}{\delta |U|_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta Q_n}{\delta \delta_2} & \dots & \frac{\delta Q_n}{\delta \delta_n} & \dots & \frac{\delta Q_n}{\delta |U|_2} & \dots & \frac{\delta Q_n}{\delta |U|_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_2 \\ \vdots \\ \Delta \delta_n \\ \hline \Delta |U|_2 \\ \vdots \\ \Delta |U|_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_n \\ \hline \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_n \end{bmatrix}$$

$J \cdot \Delta X = \Delta Y \Rightarrow \Delta X = J^{-1} \cdot \Delta Y$

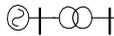
Simplificando la notación, la última expresión queda:

$$\begin{bmatrix} H & | & N \\ \hline M & | & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \hline \Delta |U| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \hline \Delta Q \end{bmatrix}$$

donde H, L, N y M son submatrices formadas por los elementos:

$$\left. \begin{aligned} H_{ik} &= \frac{\delta P_i}{\delta \delta_k} & N_{ik} &= \frac{\delta P_i}{\delta |U|_k} \\ M_{ik} &= \frac{\delta Q_i}{\delta \delta_k} & L_{ik} &= \frac{\delta Q_i}{\delta |U|_k} \end{aligned} \right\} \text{con } i, k = 2, \dots, n \quad (10-15)$$

Cada uno de estos elementos del Jacobiano pueden ser encontrados derivando la P_i^{calc} y la Q_i^{calc} con respecto al ángulo y módulo de la tensión.



Paso 4: Resolución del sistema de ecuaciones:

Lo que se quiere determinar es el valor del vector columna $\begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \text{---} \\ \Delta|U| \end{bmatrix}$

(corresponde al vector Δx de la ecuación (10-13))

Por lo tanto se puede resolver el sistema lineal de ecuaciones, usando por ejemplo el método de eliminación de Gauss, obteniéndose el vector columna:

$\begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \text{---} \\ \Delta|U| \end{bmatrix}^{(0)}$ en la primera iteración.

Paso 5: La solución mejorada resulta:

$\begin{bmatrix} \delta \\ \text{---} \\ |U| \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} \delta \\ \text{---} \\ |U| \end{bmatrix}^{(0)} + \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \text{---} \\ \Delta|U| \end{bmatrix}^{(0)}$

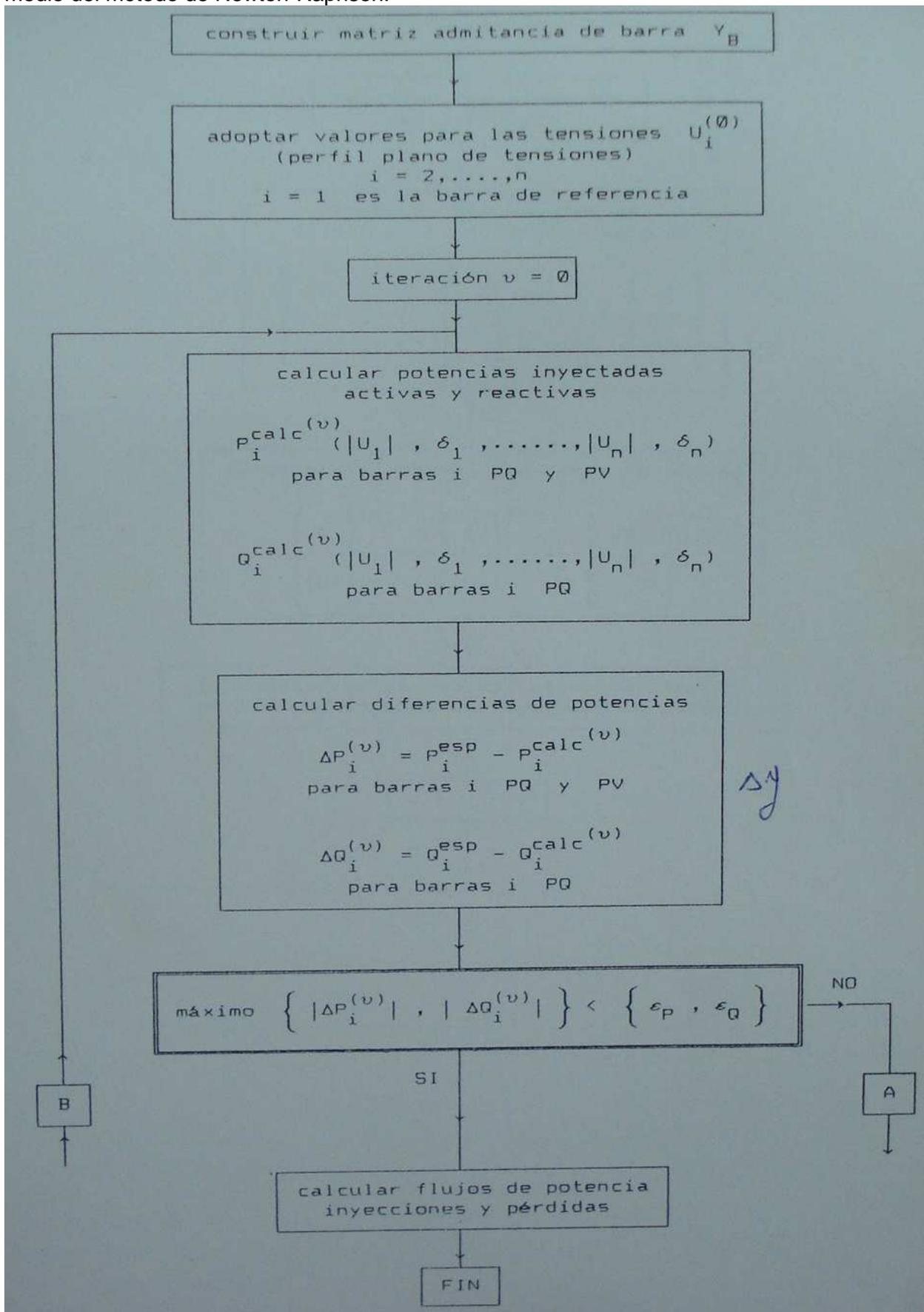
Paso 6: Se aplica el criterio de convergencia:

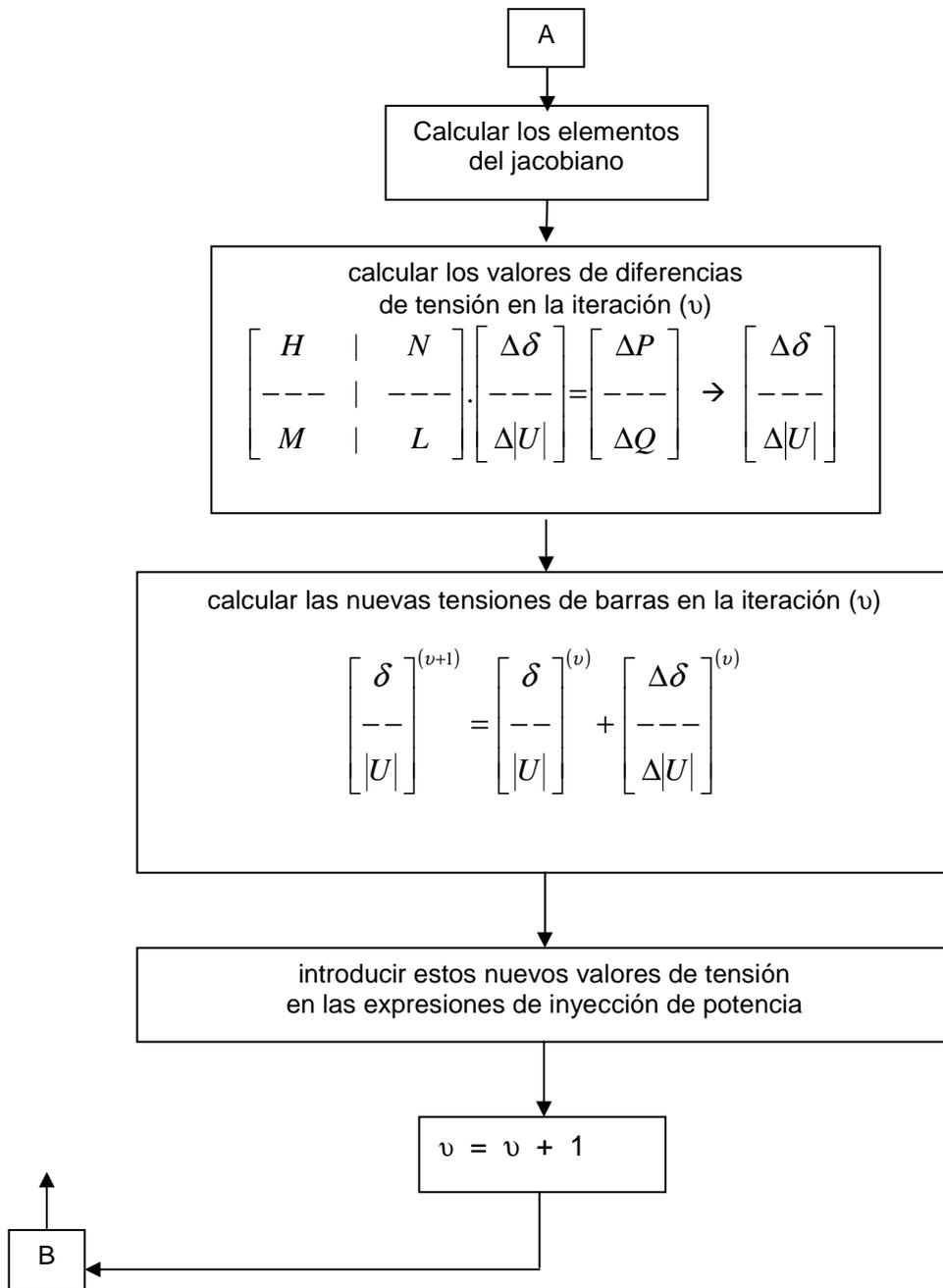
Con esta aproximación se repite el mismo procedimiento hasta lograr:

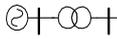
$$\text{máximo } \{ |\Delta P_i|, |\Delta Q_i| \} < \{ \epsilon_P, \epsilon_Q \}$$

Observación: Si el valor calculado de potencia reactiva generada en una barra de tensión controlada i Q_{Gi} (en la iteración v) es mayor o menor que los límites de potencia reactiva del generador, se deberá fijar el valor de Q_{Gi} al valor Q_{GiMax} o min por lo que la barra i se transforma en esta iteración en una barra de carga, por lo que se deberá reformular el jacobiano agregando la línea y la columna correspondiente a la barra i . En la próxima iteración se ve en que condición queda dicha barra i .

Se muestra a continuación un diagrama en bloques básico para calcular el flujo de carga por medio del método de Newton-Raphson.







VIII.4 - EJEMPLO

A continuación se resolverá un mismo problema con el método de Newton-Raphson por un lado, y con el de Gauss-Seidel por el otro.

También se presentará la entrada de datos, correspondiente al mismo ejemplo anterior, y los resultados obtenidos usando un programa de computación de Flujo de Carga desarrollado en la cátedra Sistemas Eléctricos de Potencia.

Datos

Dada la red unifilar de 3 barras mostrada en la figura 11, sin considerar acoplamientos mutuos, calcular usando el método de Newton-Rapson las siguientes variables:

- P_{G1} , Q_{G1} en la barra 1
- Q_{G2} , δ_2 en la barra 2
- $|U_3|$, δ_3 en la barra 3

La potencia base será de 100 MW.

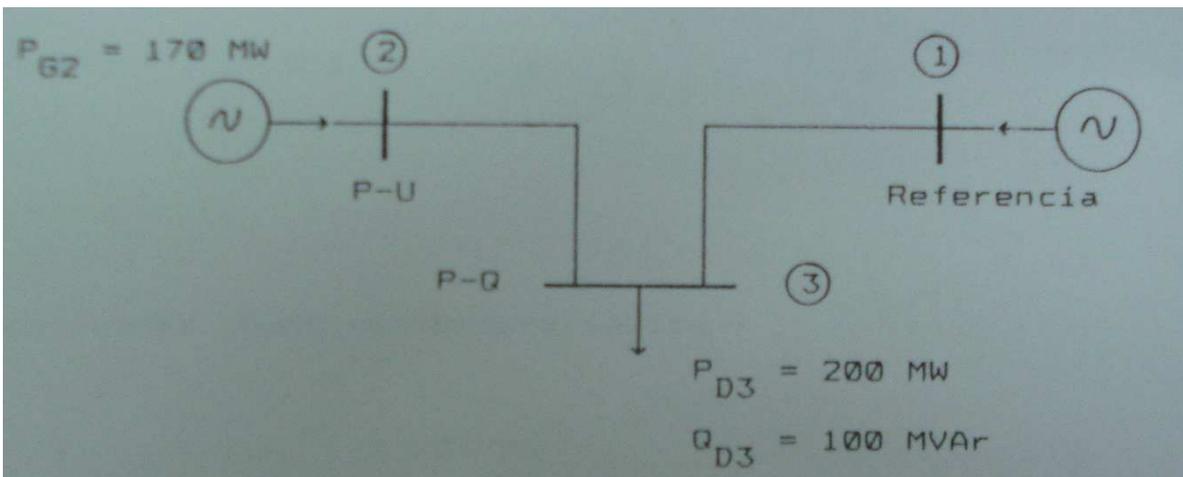
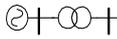


FIGURA 11

Abajo se presenta una tabla con los datos de las diferentes barras y las variables a calcular:

		Se conoce a priori	Se especifica	Se calculará
1	Barra de Referencia u oscilante $ U - \delta$	$P_{D1} = 0$ MW $Q_{D1} = 0$ MVar	$ U_1 = 1.0151$ pu $\delta_1 = 0^\circ$	P_{G1} , Q_{G1}
2	Barra de Tensión Controlada P- $ U $	$P_{D2} = 0$ MW $Q_{D2} = 0$ MVar	$P_{G2} = 170$ MW $ U_2 = 1.0227$ pu	Q_{G2} , δ_2
3	Barra de Carga P-Q	$P_{D3} = 200$ MW $Q_{D3} = 100$ MVar	$P_{G3} = 0$ MW $Q_{G3} = 0$ MVar	$ U_3 $, δ_3



La línea de transmisión entre los nodos 1 y 3 tiene una admitancia primitiva de:

$$Y_{13} = 4.098 - j 4.918 \text{ pu}$$

La línea de transmisión entre los nodos 2 y 3 tiene una admitancia primitiva:

$$Y_{23} = 3.975 - j 10.056 \text{ pu}$$

Las capacidades shunt son despreciables:

$$y_{sh1} = y_{sh2} = y_{sh3} = 0 \text{ pu}$$

VIII. 4.1- SOLUCION USANDO NEWTON-RAPHSON

A) Obtención de la Matriz Admitancia de Barra

Esta matriz se usará en los dos métodos propuestos.

El grafo asociado a la red mostrada en la figura 11 es:

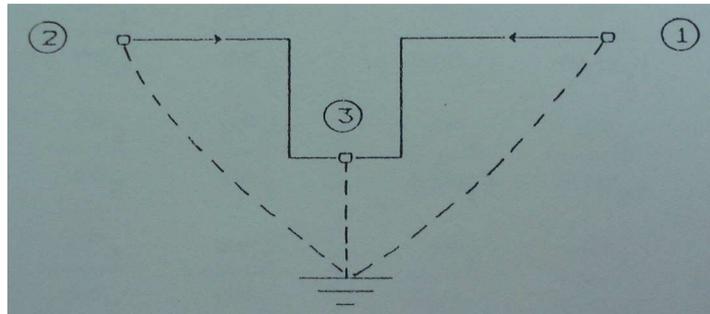


FIGURA 12

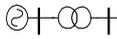
El uso de la matriz admitancia de barra o nodo Y_B , es especialmente apto para el cálculo de redes de energía eléctrica con la ayuda de un computador digital, debido a que la ley de formación de dicha matriz resulta ser muy sencilla. La matriz admitancia de barra usando las ecuaciones (9-5) y (9-6) queda entonces:

$$Y_B = \begin{bmatrix} (y_{13} + y_{sh1}) & 0 & -y_{13} \\ 0 & (y_{23} + y_{sh2}) & -y_{23} \\ -y_{13} & -y_{23} & (y_{23} + y_{13} + y_{sh3}) \end{bmatrix}$$

Esta matriz es simétrica con respecto a su diagonal principal. Cuando se tienen sistemas de muchas barras esta matriz es rala o esparsa, es decir la mayoría de sus elementos son iguales a cero (90 a 95%, POR QUÉ?), y para almacenar tan sólo los datos diferentes de cero en la memoria del computador, se debe hacer uso de técnicas llamadas de "almacenamiento compacto".

Reemplazando los datos se encuentra:

$$Y_B = \begin{bmatrix} 4.098 - j 4.918 & 0 & -4.098 + j 4.918 \\ 0 & 3.975 - j 10.056 & -3.975 + j 10.056 \\ -4.098 + j 4.918 & -3.975 + j 10.056 & 8.073 - j 14.974 \end{bmatrix}$$



B) Obtención de la estructura de la Matriz Jacobiana

El sistema matricial con el jacobiano completo, para el ejemplo a resolver, es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta P_1}{\delta \delta_1} & \frac{\delta P_1}{\delta \delta_2} & \frac{\delta P_1}{\delta \delta_3} & | & \frac{\delta P_1}{\delta |U_1|} & \frac{\delta P_1}{\delta |U_2|} & \frac{\delta P_1}{\delta |U_3|} \\ \frac{\delta P_2}{\delta \delta_1} & \frac{\delta P_2}{\delta \delta_2} & \frac{\delta P_2}{\delta \delta_3} & | & \frac{\delta P_2}{\delta |U_1|} & \frac{\delta P_2}{\delta |U_2|} & \frac{\delta P_2}{\delta |U_3|} \\ \frac{\delta P_3}{\delta \delta_1} & \frac{\delta P_3}{\delta \delta_2} & \frac{\delta P_3}{\delta \delta_3} & | & \frac{\delta P_3}{\delta |U_1|} & \frac{\delta P_3}{\delta |U_2|} & \frac{\delta P_3}{\delta |U_3|} \\ \frac{\delta Q_1}{\delta \delta_1} & \frac{\delta Q_1}{\delta \delta_2} & \frac{\delta Q_1}{\delta \delta_3} & | & \frac{\delta Q_1}{\delta |U_1|} & \frac{\delta Q_1}{\delta |U_2|} & \frac{\delta Q_1}{\delta |U_3|} \\ \frac{\delta Q_2}{\delta \delta_1} & \frac{\delta Q_2}{\delta \delta_2} & \frac{\delta Q_2}{\delta \delta_3} & | & \frac{\delta Q_2}{\delta |U_1|} & \frac{\delta Q_2}{\delta |U_2|} & \frac{\delta Q_2}{\delta |U_3|} \\ \frac{\delta Q_3}{\delta \delta_1} & \frac{\delta Q_3}{\delta \delta_2} & \frac{\delta Q_3}{\delta \delta_3} & | & \frac{\delta Q_3}{\delta |U_1|} & \frac{\delta Q_3}{\delta |U_2|} & \frac{\delta Q_3}{\delta |U_3|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_1 \\ \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \\ \frac{\Delta |U_1|}{|U_1|} \\ \frac{\Delta |U_2|}{|U_2|} \\ \frac{\Delta |U_3|}{|U_3|} \end{bmatrix}$$

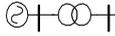
Los valores $\frac{\Delta |U_i|}{|U_i|}$ se dividen por $|U_i|$, para relacionar las fórmulas correspondientes a los elementos del jacobiano, como se verá más adelante.

El jacobiano que se usará para resolver cualquier problema, será aquel reducido y que estará sólo en función de las variables de estado incógnitas, es decir que no se consideran:

- 1) Las filas correspondientes a la potencia activa P y reactiva Q de la barra de referencia, y las filas correspondientes a las potencias reactivas Q de las barras de tensión controlada. POR QUE?
- 2) Las columnas correspondientes al módulo y ángulo de tensión de la barra de referencia y las columnas correspondientes al módulo de tensión de las barras de tensión controlada POR QUE?

Aplicando esta reglas al jacobiano del ejemplo, el mismo queda reducido de la siguiente forma:

$$\left. \begin{matrix} NPQ \\ + \\ NPU \\ \\ NPQ \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta P_2}{\delta \delta_2} & \frac{\delta P_2}{\delta \delta_3} & | & \frac{\delta P_2}{\delta |U_3|} \\ \frac{\delta P_3}{\delta \delta_2} & \frac{\delta P_3}{\delta \delta_3} & | & \frac{\delta P_3}{\delta |U_3|} \\ \frac{\delta Q_3}{\delta \delta_2} & \frac{\delta Q_3}{\delta \delta_3} & | & \frac{\delta Q_3}{\delta |U_3|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \\ \frac{\Delta |U_3|}{|U_3|} \end{bmatrix}$$



C) Obtención de los elementos del Jacobiano

Los elementos del jacobiano se encuentran derivando las expresiones (10-7) y (10-9) con respecto a los módulos y ángulos de tensión:

$$H_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_k} = |U_i| |U_k| [G_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k) - B_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k)]$$

$$N_{ik} = |U_k| \frac{\partial P_i}{\partial |U_k|} = |U_i| |U_k| [G_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k) + B_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k)]$$

$$M_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_k} = -|U_i| |U_k| [G_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k) + B_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k)]$$

$$L_{ik} = |U_k| \frac{\partial Q_i}{\partial |U_k|} = |U_i| |U_k| [G_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k) - B_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k)]$$

de donde se deduce que: $M_{ik} = -N_{ik}$ y $L_{ik} = H_{ik}$

$$H_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = -|U_i|^2 B_{ii} - Q_i^{calc}$$

$$N_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial |U_i|} = |U_i|^2 G_{ii} + P_i^{calc}$$

$$M_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = -|U_i|^2 G_{ii} + P_i^{calc}$$

$$L_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial |U_i|} = -|U_i|^2 B_{ii} + Q_i^{calc}$$

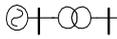
Los valores especificados y adoptados de tensión en las barras 1, 2 y 3 del sistema mostrado en la figura 11 son:

$ U_1 = 1.0151$	$\delta_1 = 0$	→ valores especificados
$ U_2 = 1.0227$	$\delta_2^{(0)} = 0$	→ valores adoptados (partida plana)
$ U_3 ^{(0)} = 1$	$\delta_3^{(0)} = 0$	

Por lo que se puede calcular los elementos del jacobiano:

$$H_{23} = 1.0227 \times 1 [-3.975 \sin(0 - 0) - 10.056 \cos(0 - 0)] \rightarrow \underline{H_{23} = -10.284}$$

$$H_{32} = 1 \times 1.0227 [-3.975 \sin(0 - 0) - 10.056 \cos(0 - 0)] \rightarrow \underline{H_{32} = -10.284}$$



$$N_{23} = 1.0227 \times 1 [-3.975 \cos(0-0) + 10.056 \sin(0-0)] \rightarrow \underline{N_{23} = -4.065}$$

$$N_{32} = -1 \times 1.0227 [-3.975 \cos(0-0) + 10.056 \sin(0-0)] \rightarrow \underline{N_{32} = 4.065}$$

Para calcular H_{22} , se debe encontrar primero el valor de $Q_2^{calc(0)}$ (primera iteración) usando la fórmula (10-9) vista anteriormente:

$$Q_2^{(0)} = -|U_2|^2 B_{22} + |U_2||U_3| (G_{23} \sin(\delta_2 - \delta_3) - B_{23} \cos(\delta_2 - \delta_3))$$

Reemplazando los valores se encuentra:

$$Q_2^{(0)} = 0.232$$

Por lo tanto:

$$H_{22} = -(1.0227)^2 \times (-10.056) - Q_2^{(0)} = 10.517 - 0.232$$

$$\underline{H_{22} = 10.284}$$

De la misma forma para calcular H_{33} se debe conocer primero el valor de $Q_3^{(0)}$:

$$Q_3^{(0)} = -0.302$$

$$\underline{H_{33} = 15.276}$$

Para calcular N_{33} , se debe encontrar primero el valor de $P_3^{calc(0)}$ (primera iteración) usando la fórmula (10-7) vista anteriormente:

$$P_3^{(0)} = |U_3|^2 G_{33} + |U_3||U_1| (G_{31} \cos(\delta_3 - \delta_1)) - |U_3||U_2| (G_{32} \cos(\delta_3 - \delta_1))$$

Reemplazando los valores se encuentra:

$$P_3^{(0)} = -0.150$$

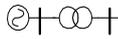
$$N_{33} = 1^2 \times 8.074 + P_3^{(0)}$$

$$\underline{N_{33} = 7.924}$$

Se calculan a continuación M_{33} y L_{33} :

$$\underline{M_{33} = -8.224}$$

$$\underline{L_{33} = 14.672}$$



D) Obtención de los elementos del término independiente

El término independiente del sistema matricial está formado por:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \dots \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix}$$

Y cada uno de los elementos se calculan de la siguiente manera:

$$\Delta P_2 = P_2^{esp} - P_2^{calc}$$

en la primera iteración se encuentra:

$$\Delta P_2 = (P_{G2} - P_{D2})^{esp} - P_2^{(0)}$$

$P_2^{(0)}$ se calcula usando de la expresión P_i^{calc} , en la primera iteración:

$$P_2^{(0)} = |U_2|^2 G_{22} + |U_2| |U_3| (G_{23} \cos(\delta_2 - \delta_3) + B_{23} \sin(\delta_2 - \delta_3))$$

Reemplazando los valores se encuentra:

$$P_2^{(0)} = 0.091$$

por lo que la diferencia de potencia activa en la primera iteración resulta

$$\Delta P_2 = 1.7 - 0.091 \rightarrow \underline{\Delta P_2 = 1.609}$$

Siguiendo el procedimiento anterior se encuentran los valores de ΔP_3 y ΔQ_3

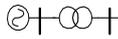
$$\Delta P_3 = P_3 - P_3^{(0)} = -2 - (-0.150) \rightarrow \underline{\Delta P_3 = -1.850}$$

$$\Delta Q_3 = Q_3 - Q_3^{(0)} = -1 - (-0.302) \rightarrow \underline{\Delta Q_3 = -0.698}$$

E) Resolución del sistema de ecuaciones lineales, en la primera iteración

Reemplazando los valores calculados el sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 1.609 \\ -1.850 \\ \dots \\ -0.698 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.284 & -10.284 & | & -4.065 \\ -10.284 & 15.276 & | & 7.924 \\ \dots & \dots & | & \dots \\ 4.065 & -8.224 & | & 14.672 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \\ \dots \\ \frac{\Delta |U_3|}{|U_3|} \end{bmatrix}^{(1)}$$



Aplicando algún método de eliminación (generalmente se usa el de Gauss), se obtiene los siguientes resultados:

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \text{---} \\ \Delta|U_3| \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.1371 \\ 0.0126 \\ \text{---} \\ -0.0786 \end{bmatrix}^{(1)}$$

F) Actualización de los valores iniciales

$$\delta_2^{(1)} = \delta_2^{(0)} + \Delta\delta_2^{(1)} = 0 + 0.1371 \rightarrow \delta_2^{(1)} = 0.1371$$

$$\delta_3^{(1)} = \delta_3^{(0)} + \Delta\delta_3^{(1)} = 0 + 0.0126 \rightarrow \delta_3^{(1)} = 0.0126$$

$$|U_3|^{(1)} = |U_3|^{(0)} + |U_3|^{(1)} = 1 - 0.0786 \rightarrow |U_3|^{(1)} = 0.9213$$

El conjunto de valores para realizar la segunda iteración es:

$ U_1 = 1.0151$	$\delta_1 = 0$	→ valores especificados (constantes)
$ U_2 = 1.0227$	$\delta_2^{(1)} = 0.1371$	→ valores actualizados para la segunda iteración
$ U_3 ^{(1)} = 0.9213$	$\delta_3^{(1)} = 0.0126$	

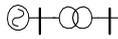
G) Proceso Iterativo

Se vuelve al punto C) y se ejecutan nuevamente los pasos seguidos anteriormente en forma iterativa, hasta que el vector incógnita se encuentre dentro de una tolerancia especificada entre dos iteraciones sucesivas (si el proceso es convergente va tendiendo a cero).

I) SEGUNDA ITERACION

$$\begin{bmatrix} 0.075 \\ -1.178 \\ \text{---} \\ -0.130 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.869 & -9.869 & | & -2.533 \\ -8.9339 & 13.582 & | & 5.033 \\ \text{---} & \text{---} & | & \text{---} \\ 4.900 & -8.675 & | & 11.842 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \text{---} \\ \Delta|U_3| \\ |U_3| \end{bmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \text{---} \\ \Delta|U_3| \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.0106 \\ -0.0139 \\ \text{---} \\ -0.01679 \end{bmatrix}^{(2)}$$



El conjunto de valores para realizar la tercera iteración es:

$ U_1 =1.0151$	$\delta_1=0$	→ valores especificados
$ U_2 =1.0227$	$\delta_2^{(2)}=0.1271$	→ valores actualizados para la tercera iteración
$ U_3 ^{(2)}=0.9059$	$\delta_3^{(2)}=0.0013$	

II) TERCERA ITERACION

$$\begin{bmatrix} 0.00053 \\ -0.00390 \\ \text{-----} \\ -0.00290 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.7121 & -9.7121 & | & -2.4589 \\ -8.767 & 13.285 & | & 4.629 \\ \text{-----} & \text{-----} & | & \text{-----} \\ 4.847 & -8.622 & | & 11.291 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \text{-----} \\ \frac{\Delta|U_3|}{|U_3|} \end{bmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \text{-----} \\ \Delta|U_3| \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.000587 \\ -0.000536 \\ \text{-----} \\ -0.000416 \end{bmatrix}^{(3)}$$

El conjunto de valores para realizar la cuarta iteración es:

$ U_1 =1.0151$	$\delta_1=0$	→ valores especificados
$ U_2 =1.0227$	$\delta_2^{(3)}=0.1265$	→ valores actualizados para la cuarta iteración
$ U_3 ^{(3)}=0.9059$	$\delta_3^{(3)}=-0.0018$	

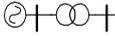
III) CUARTA ITERACION

$$\begin{bmatrix} 0.11 \times 10^{-7} \\ -0.28 \times 10^{-5} \\ \text{-----} \\ -0.19 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.707 & -9.707 & | & -2.458 \\ -8.764 & 13.278 & | & 4.620 \\ \text{-----} & \text{-----} & | & \text{-----} \\ 4.844 & -8.620 & | & 11.278 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \text{-----} \\ \frac{\Delta|U_3|}{|U_3|} \end{bmatrix}^{(4)}$$

La diferencia de tensiones entre dos aproximaciones sucesivas para las barras de carga y barras de tensión controlada vale:

$$|\bar{U}_i^{(v)} - \bar{U}_i^{(v-1)}| \leq \varepsilon_u \quad \varepsilon_u = \text{tolerancia (0.001 a 0.0001)}$$

En el caso analizado se introducen variaciones muy pequeñas en el vector incógnita → que el proceso iterativo converge en la tercera iteración.



H) Cálculo de los flujos de potencia por la red

El conjunto de los valores finales del vector incógnita (tensiones) más los valores de tensiones especificados, compone el conocimiento del estado del sistema, es decir se sabe cuánto valen las tensiones complejas en todas las barras del sistema. A partir de estas tensiones se encuentran en primer lugar las corrientes por las ramas:

$$U_1 = 1.051 e^{j0 \text{ rad}} = 1.0151 e^{j0^\circ}$$

$$U_2 = 1.0227 e^{j0.1265 \text{ rad}} = 1.0227 e^{j7.25^\circ}$$

$$U_3 = 0.9055 e^{-j0.00186 \text{ rad}} = 0.9055 e^{-j0.107^\circ}$$

$$I_{23} = (U_2 - U_3) y_{23} = 1.748 - j0.576 \text{ pu}$$

$$I_{32} = (U_3 - U_2) y_{32} = -1.748 + j0.576 \text{ pu}$$

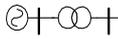
$$I_{13} = (U_1 - U_3) y_{13} = 0.457 - j0.549 \text{ pu}$$

$$I_{31} = (U_3 - U_1) y_{31} = -0.457 + j0.549 \text{ pu}$$

A continuación se calculan los flujos de potencia activa y reactiva por las líneas de transmisión:

$S_{23} = U_2 I_{23}^*$	----->	$S_{23} = 1.6993 + j0.8102 \text{ pu}$
$S_{32} = U_3 I_{32}^*$	----->	$S_{32} = -1.5841 - j0.5187 \text{ pu}$
$S_{13} = U_1 I_{13}^*$	----->	$S_{13} = 0.4643 + j0.5459 \text{ pu}$
$S_{31} = U_3 I_{31}^*$	----->	$S_{31} = -0.4150 - j0.4935 \text{ pu}$

Los valores de potencia que están en p.u. deben ser multiplicados por la potencia base (en este ejemplo $S = 100 \text{ MVA}$) para obtener los valores absolutos.



I) Cálculo de las pérdidas de potencia activa de transmisión

$$perd_{act} = (P_{23} + P_{32}) + (P_{13} + P_{31}) = 169.9 - 158.4 + 46.43 - 41.50$$

$$perd_{act} = 16.43 \text{ MW}$$

Otra manera de calcular las pérdidas activas es aplicando :

$$perd_{act} = \left\{ r_{23} \times |I_{23}|^2 \right\} + \left\{ r_{13} \times |I_{13}|^2 \right\}$$

J) Comprobación final de la potencia activa y reactiva inyectada por el generador en la barra de referencia y en la barra de tensión controlada

Se calculan usando las fórmulas de inyecciones de potencia:

$$P_1 = P_{G1} - P_{D1} = |U_1|^2 G_{11} + |U_1||U_3| \left[G_{13} \cos(\delta_1 - \delta_3) + B_{13} \sin(\delta_1 - \delta_3) \right]$$

Ya que P_{D1} y Q_{D1} valen 0, la potencias inyectadas quedan :

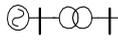
$$P_1 = \underline{P_{G1} = 0.4642 \text{ pu}}$$

$$Q_1 = Q_{G1} - Q_{D1} = -|U_1|^2 B_{11} + |U_1||U_3| \left[G_{13} \sin(\delta_1 - \delta_3) - B_{13} \cos(\delta_1 - \delta_3) \right]$$

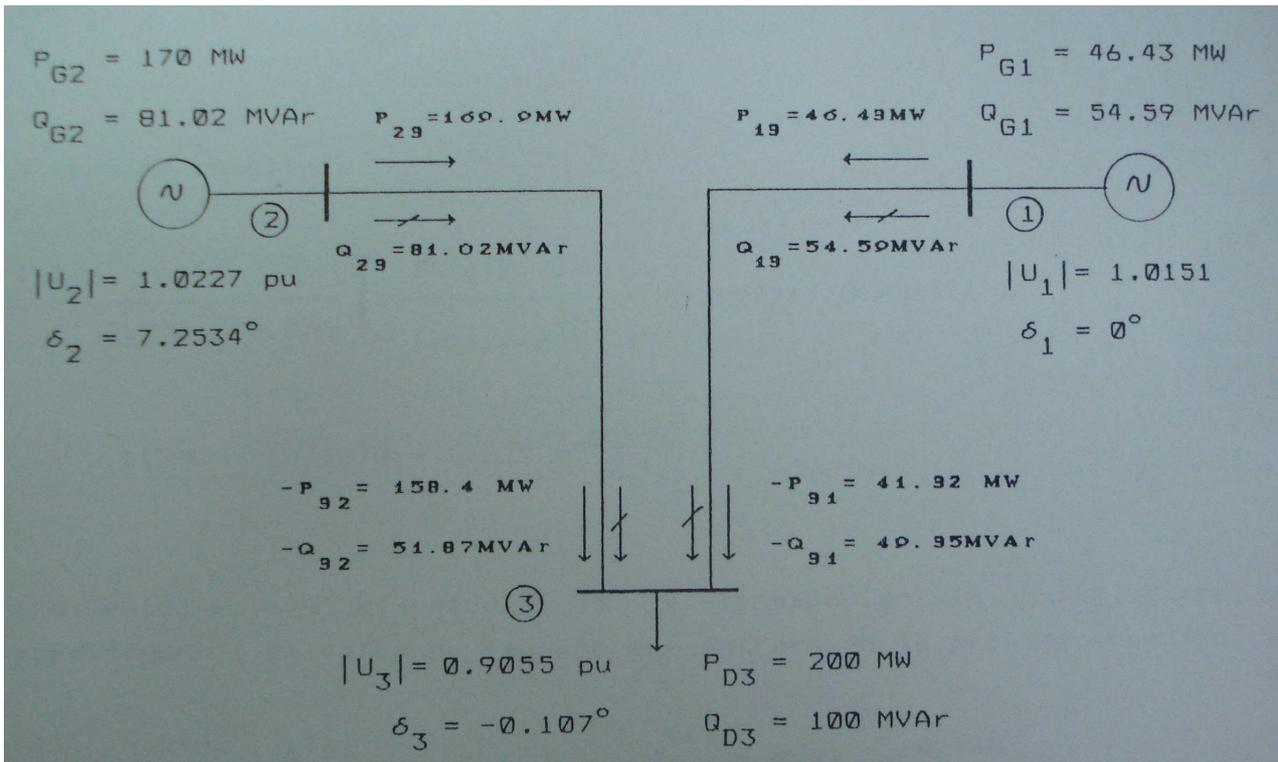
$$Q_1 = \underline{Q_{G1} = 0.5457 \text{ pu}}$$

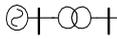
De la misma forma :

$$Q_2 = \underline{Q_{G2} = 0.8100 \text{ pu}}$$



La síntesis de los resultados obtenidos puede ser mostrada en el esquema siguiente:





VIII. 4.2- SOLUCION USANDO GAUSS-SEIDEL

A) Obtención de la Matriz Admittancia de Barra

Se la obtiene de la misma forma que en el punto A) del método anterior .

B) Calculo iterativo de las tensiones

El valor de las tensiones se encuentra aplicando la ecuación general (10-3) .

En el ejemplo considerado, la tensión en la barra 1 no se calcula porque es dato .

La primera iteración se realiza con los valores de una partida plana .

La tensión en la barra 2 ($P-|U|$) en la primera iteración se calcula :

$$\bar{U}_2^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{22}} \left[\frac{P_2^{\text{esp}} - jQ_2^{\text{calc}(0)}}{\bar{U}_2^{*(1-1)}} - \bar{Y}_{23} \cdot \bar{U}_3^{(1-1)} \right]$$

De aquí no se conoce el valor de $Q_2^{\text{calc}(0)}$, por lo que se procede con su cálculo aplicando la ecuación (10-9) de inyección de potencia reactiva . Este valor ya fue encontrado en el punto C) de la aplicación del método de Newton-Raphson, y su valor es :

$$Q_2^{(0)} = 0.232 \text{ pu}$$

La tensión resulta :

$$\bar{U}_2^{(1)} = \frac{1}{3.975 - j10.056} \left[\frac{1.7 - j0.232}{1.0227 e^{j0}} - (-3.975 + j10.056) 1 e^{j0} \right]$$

$$\bar{U}_2^{(1)} = 1.01398 + j0.1278 = 1.022 e^{j0.126}$$

Pero debido a que el módulo de la tensión en la barra 2 ya está especificado , el valor de tensión que entrará en la próxima ecuación será

$$\bar{U}_2^{(1)} = |U_2|_{\text{esp}} e^{j\delta^{(1)}}$$

$$\bar{U}_2^{(1)} = 1.0227 e^{j0.126}$$

La barra 3 es de carga , y su ecuación es :

$$\bar{U}_3^{(1)} = \frac{1}{\bar{Y}_{33}} \left[\frac{P_3^{esp} - jQ_3^{esp}}{\bar{U}_3^{*(1-1)}} - \bar{Y}_{31} \cdot \bar{U}_1 - \bar{Y}_{32} \cdot \bar{U}_2^{(1)} \right]$$

$$\bar{U}_3^{(1)} = \frac{1}{8.073 - j14.974} \left[\frac{-2 - j(-1)}{1 e^{j0}} - (-4.098 + j 4.918) 1.0151 e^{j0} - (-3.975 + j10.056) 1.0227 e^{j0.126} \right]$$

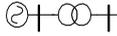
$$\bar{U}_3^{(1)} = \underline{0.85805 + j0.00868}$$

C) Cálculos iterativos

Se realiza ahora la segunda iteración, alimentando la ecuación de tensión con los valores obtenidos en la primera iteración , y así sucesivamente hasta que se converge al valor buscado con la tolerancia deseada .

D) Cálculo de los flujos de potencia y pérdidas en la red

Estos cálculos se realizan de la misma forma que en el método anterior. Los resultados se encuentran en las hojas adyacentes , y fueron obtenidos usando un programa de cálculo de flujo de carga . Cabe señalar la aproximación que tienen los resultados con los encontrados con el método de Newton - Raphson .



IX - OTROS METODOS

Para resolver el sistema de ecuaciones (6-1) existen otros métodos como ser:

1) Newton-Raphson Desacoplado

Este método se diferencia del Newton-Rapson convencional estudiado anteriormente, porque se aplica la siguiente simplificación:

- a) La variación del ángulo de la tensión en la barra i , δ_i , es fuertemente dependiente de la potencia activa inyectada en esa barra, P_i , no así su variación del módulo de tensión, $|U_i|$, por lo que:

$$H = \frac{\delta P_i}{\delta \delta_i} \rightarrow \text{diferente de cero} \qquad N = \frac{\delta P_i}{\delta |U_i|} \rightarrow \text{próxima de cero}$$

- b) La variación del módulo de tensión en la barra i , $|U_i|$, es fuertemente dependiente de la potencia reactiva inyectada en esa barra, Q_i , no así su variación del ángulo de tensión, δ_i , por lo que:

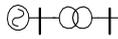
$$M = \frac{\delta Q_i}{\delta \delta_i} \rightarrow \text{próxima de cero} \qquad L = \frac{\delta Q_i}{\delta |U_i|} \rightarrow \text{diferente de cero}$$

El Jacobiano dado por la ecuación (10-14) puede por lo tanto ser simplificado a:

$$J = \begin{bmatrix} H & | & 0 \\ \text{---} & | & \text{---} \\ 0 & | & L \end{bmatrix}$$

2) Newton-Raphson Desacoplado Rápido

Es una simplificación sobre el método anterior considerando que permanecen constantes unas matrices B' y B'' relacionadas con las submatrices H y L .



3) Flujo de Carga Linealizado

El Flujo de Carga por una línea de transmisión es aproximadamente proporcional a la abertura angular de la línea en cuestión, y su sentido va de la barra con ángulo mayor a la menor. Bajo ciertas hipótesis la relación entre los flujos de potencia activa y las aberturas angulares es del mismo tipo que la que existe entre los flujos de corriente y las caídas de tensión en un circuito de corriente continua:

$$P_{ij} = \frac{|U_i||U_j|}{X_{ij}} \text{sen}(\delta_i - \delta_j) = \text{flujo de potencia activa entre barras } i \text{ y } j$$

Si se considera que las tensiones tienen el valor 1 p.u., y que la diferencia angular ($\delta_i - \delta_j$) es pequeña, la ecuación anterior se transforma en:

$$P_{ij} = \frac{(\delta_i - \delta_j)}{X_{ij}}$$

por lo que se puede estimar con bajo costo computacional y precisión aceptable para muchas aplicaciones, la distribución de los flujos de potencia activa en una red de transmisión.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Olle I. Elgerd , "Electric Energy Systems Theory" , Second Edition , 1982 , Mc.Graw-Hill .
- [2] Mucchino , "Flujo de Cargas (Reporte Técnico)" , 1990 , Universidad Nacional de San Juan .
- [3] Alcir Monticelli , "Flujo de Carga en Redes de Energia Eléctrica" , 1983 , Edgard Blucher Ltda..
- [4] Ahmed El-Abiad , "Power Systems Analysis and Planning" , 1985 , McGraw-Hill .