Unidad 2: SEÑALES ELÉCTRICAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

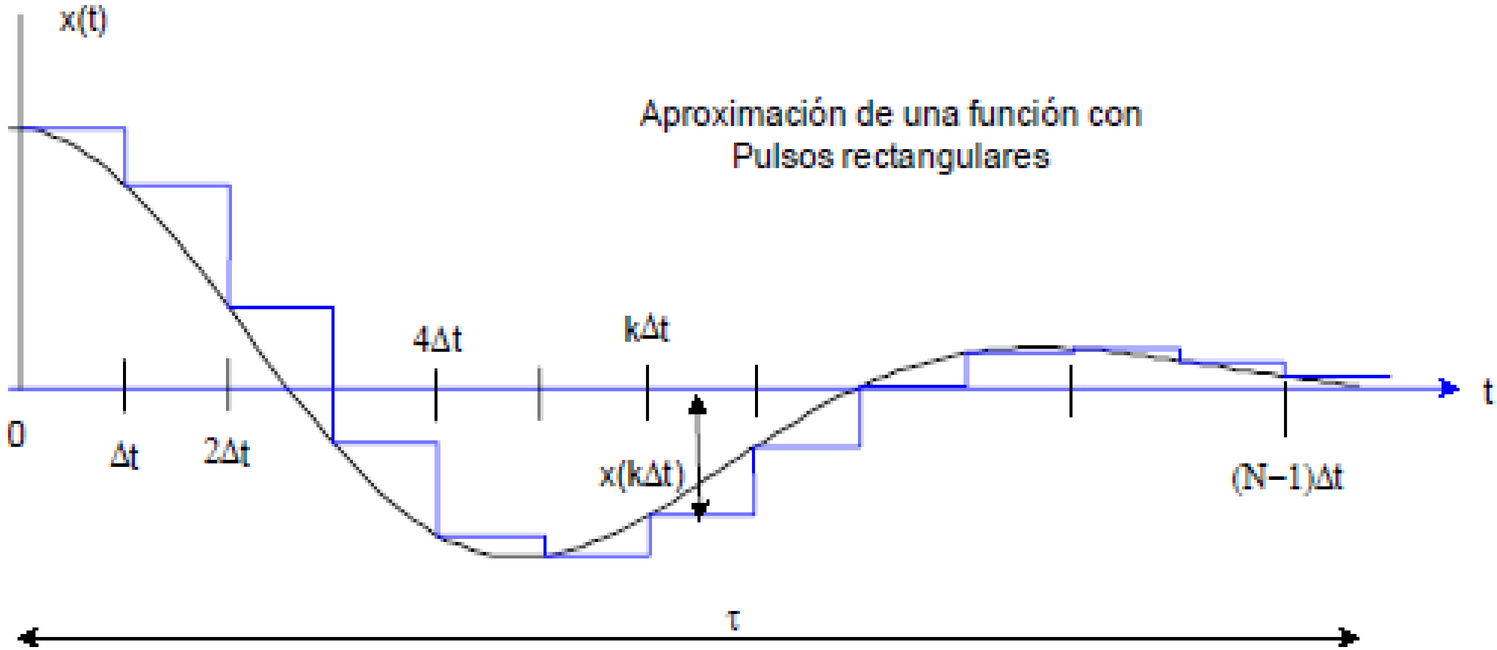
Series de Fourier. Trigonométrica y exponencial Transformada de Fourier. Teorema de Parseval. Espectros de densidad energía/potencia. Teoremas relacionados con la Transformada de Fourier. Delta de Dirac, propiedades, aplicaciones. Espectros de señales periódicas. La transformada discreta de Fourier. Señales aleatorias en dominio de frecuencia. Espectro de densidad de potencia. Función de autocorrelación. Señales de banda angosta, características y modelado.

Clase 11. DFT, PSD

Lathi-Ding, cap 3.9; Couch-Cuevas-Romero cap 2.3.
Apuntes Prof. Bilbao

2.5 (Bilbao).- La Transformada de Fourier discreta (DFT)

$$X(f)=\int_T x(t).e^{-j2.\pi.f.t}.dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} x(k.\Delta t).e^{-j2.\pi.f.k.\Delta t}.\Delta t = X_d(f)$$



$$X(f)=\int_T x(t).e^{-j2.\pi.f.t}.dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} x(k.\Delta t).e^{-j2.\pi.f.k.\Delta t}.\Delta t = X_d(f)$$

$$x_k = x(k.\Delta t) \qquad \Delta t = \frac{\tau}{N}$$

$$X_d(f) = \frac{\tau}{N}.\sum_{k=0}^{N-1} x_k.e^{-j2.\pi.f.k.\frac{\tau}{N}}$$

$$f_0 = \frac{1}{\tau}$$

$$X_d(f) = \frac{1}{N.f_0}.\sum_{k=0}^{N-1} x_k.e^{-j\frac{2.\pi}{N}.\frac{f}{f_0}.k}$$

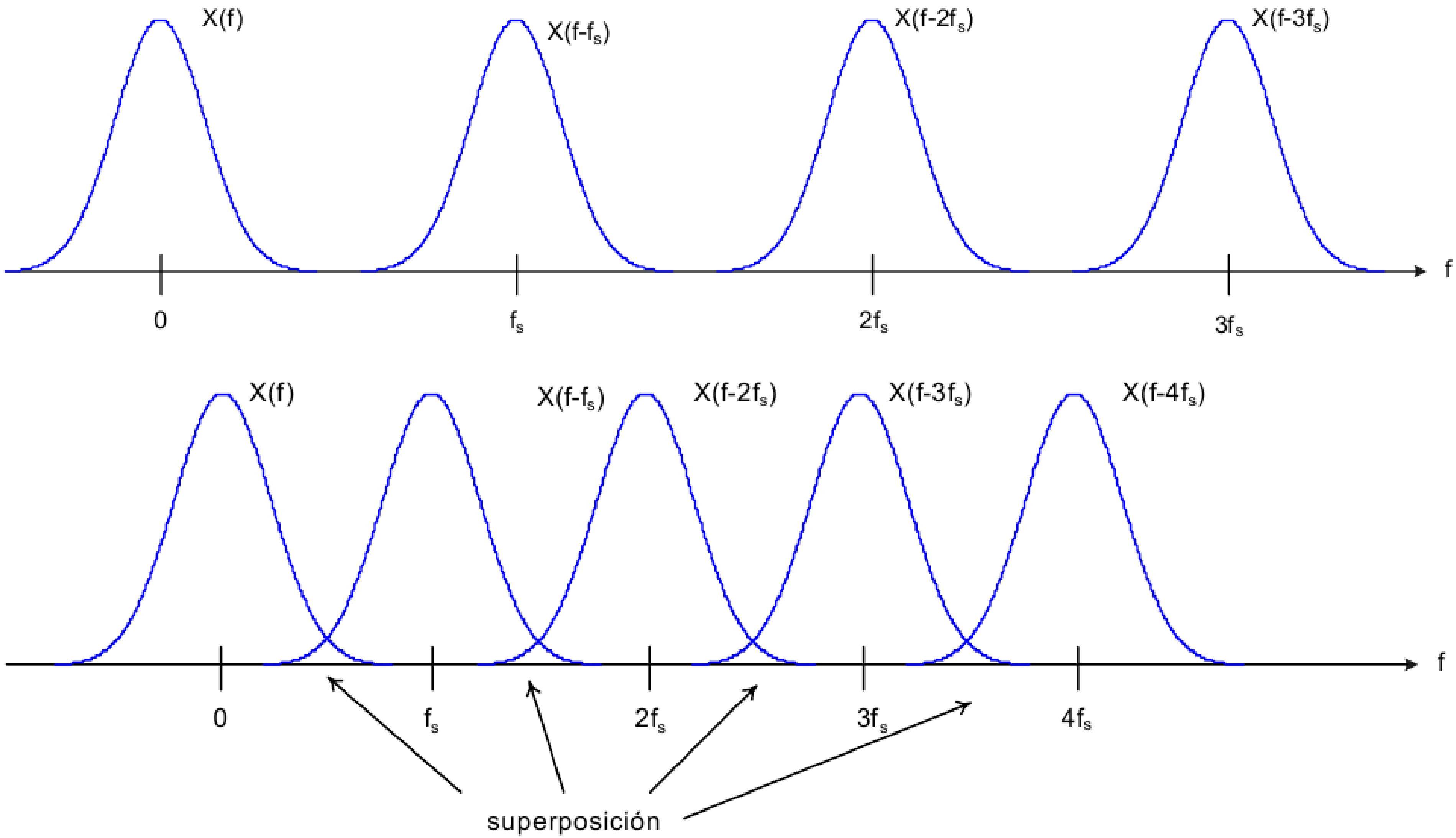
Periodicidad de la transformada discreta

$$X_d(f) = \frac{1}{N.f_0}.\sum_{k=0}^{N-1} x_k.e^{-j\frac{2.\pi}{N}.\frac{f}{f_0}.k}$$

$$X_d(f + N.f_0) = \frac{1}{N.f_0}.\sum_{k=0}^{N-1} x_k.e^{-j\frac{2.\pi}{N}.\frac{(f+N.f_0)}{f_0}.k}$$

$$\frac{1}{N.f_0}.\sum_{k=0}^{N-1} x_k.e^{-j\frac{2.\pi}{N}.\frac{f}{f_0}.k}.e^{-j2.\pi.k} = X_d(f)$$

El espectro de Xd(f) es el de X(f) repetido a múltiplos de fs . Es evidente que, una mala elección de fs puede introducir errores en el cálculo por efecto del translapamiento de espectros



Existen algoritmos de cálculo que aceleran el procesamiento de la suma (FFT, Fast Fourier Transform), y normalmente, calculan Xd(f) en múltiplos de f_0 :

$$X_d(nf_0) = \frac{1}{N.f_0}.\sum_{k=0}^{N-1} x_k.e^{-j\frac{2.\pi}{N}.n.k} = X_n$$

resultando un espectro discreto con puntos (líneas) en múltiplos de f_0 (En la terminología de la DFT o FFT, f_0 determina la resolución del espectro o el espacio entre líneas). Si la señal analizada fuera periódica, la toma de muestra debería hacerse durante un período (T=τ) y los coeficientes de la serie de Fourier resultante serían:

$$c_n = \frac{1}{T}.X_d(nf_0) = \frac{1}{N}.\sum_{k=0}^{N-1} x_k.e^{-j\frac{2.\pi}{N}.n.k}$$

Los paquetes de software que realizan la FFT, tienen las siguientes características: (a) el número de muestras es una potencia de 2 (N=256,1024, 65536, etc.) y (b) La resolución del espectro es 1/τ y la máxima armónica calculada es nmax=N/2 , lo que da un ancho de espectro Fmax = $N.f_0/2$ = fs /2. Antitransformada.

RESUMEN DFT

1. La Transformada discreta de Fourier (DFT) es un cálculo aproximado de T.d.F a partir de una muestra de señal conteniendo N valores temporales.
2. El espectro producido por la DFT resulta periódico, con período igual a la frecuencia de muestreo.
3. Si bien la DFT puede producir un espectro contínuo, los algoritmos normalmente empleados calculan el espectro en N frecuencias, que son armónicas de la frecuencia correspondiente al tiempo de observación de la señal (llamada resolución), además de f=0.
4. Si la señal muestreada se considera periódica, el espectro resultante debe incluir un factor igual a la frecuencia de muestreo. En este caso la DFT parece más estar aproximando a la Serie de F. que a la Transformada.
5. La frecuencia de muestreo debe respetar la regla de Nyquist, para evitar el fenómeno de aliasing.

Espectro de densidad de Potencia
(Densidad espectral de potencia PSD)

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |W_T(f)|^2 \, df = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{T\to\infty} \frac{|W_T(f)|^2}{T} \right) df$$

$$\boxed{\mathcal{P}_w(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \left(\frac{|W_T(f)|^2}{T} \right)}$$

Para señales periódicas:

$$\mathcal{P}(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |c_n|^2 \, \delta(f - nf_0)$$

Espectro de **voltaje eficaz** de ruido del OPA TL082