Unidad 2: SEÑALES ELÉCTRICAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Series de Fourier. Trigonométrica y exponencial Transformada de Fourier. Teorema de Parseval. Espectros de densidad energía/potencia. Teoremas relacionados con la Transformada de Fourier. Delta de Dirac, propiedades, aplicaciones. Espectros de señales periódicas. La transformada discreta de Fourier. Señales aleatorias en dominio de frecuencia. Espectro de densidad de potencia. Función de autocorrelación. Señales de banda angosta, características y modelado.

* Cap. 2.6 Carlson-Crilly

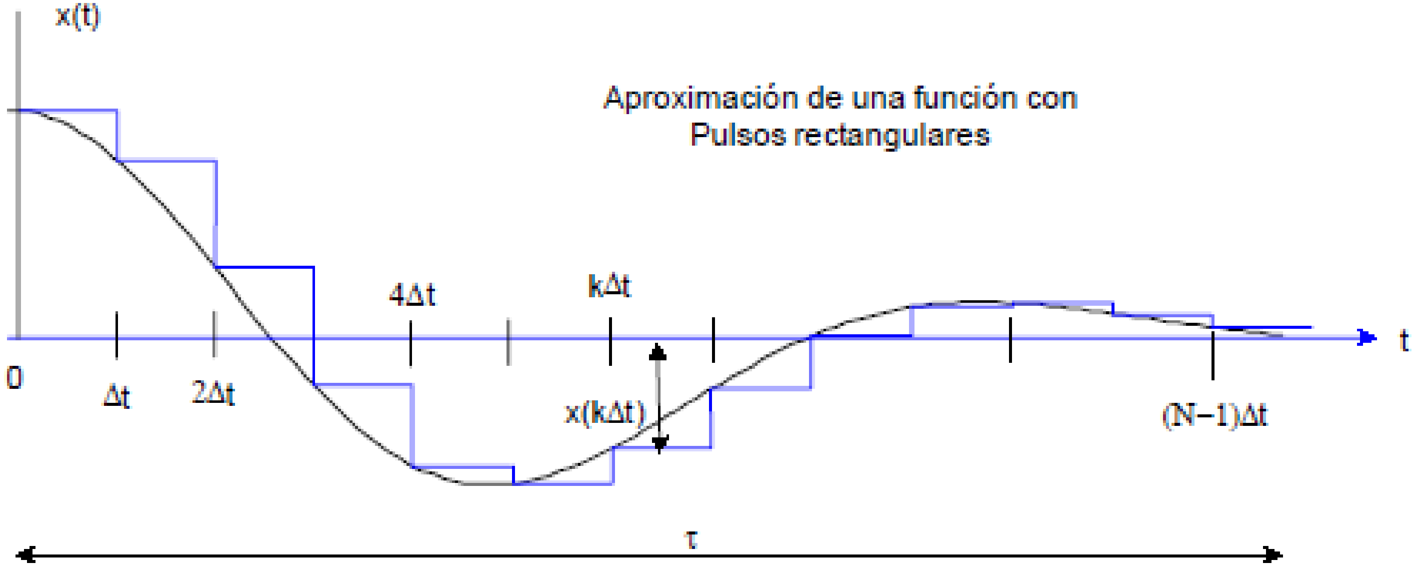
2.5.- La Transformada de Fourier discreta (DFT)

La Transformada de Fourier de una determinada señal, puede calcularse a pesar de no conocerse su expresión matemática *x(t)*, si se dispone de un número adecuado de muestras de la señal a lo largo del tiempo.
Suponer una señal *x(t)* que existe durante un lapso de *T* seg. y es *0* para el resto del tiempo. Si se toman *N* muestras de la señal a intervalos razonablemente cortos, p. ej. a $t = 0, 1\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots k\Delta t, \ldots (N-1)\Delta t$ y se mantiene después de cada muestra el valor $x(k\Delta t)$ durante Δt seg. puede aproximarse la integral para calcular *X(f)* según:

$$X(f) = \int_T x(t).e^{-j2\pi.f.t}.dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} x(k.\Delta t).e^{-j2\pi.f.k.\Delta t}.\Delta t = X_d(f)$$

. Si Δt es suficientemente pequeño entonces $X_d(f) = X(f)$

$$X(f) = \int_T x(t).e^{-j2\pi.f.t}.dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} x(k.\Delta t).e^{-j2\pi.f.k.\Delta t}.\Delta t = X_d(f)$$



$\Delta t = \dfrac{\tau}{N}$,suponiendo intervalo uniforme entre muestras. La expresión para *X(f)* queda:

$$X_d(f) = \frac{\tau}{N}.\sum_{k=0}^{N-1} x_k.e^{-j2.\pi.f.k.\frac{\tau}{N}} \qquad \text{donde } x_k = x(k.\Delta t)$$

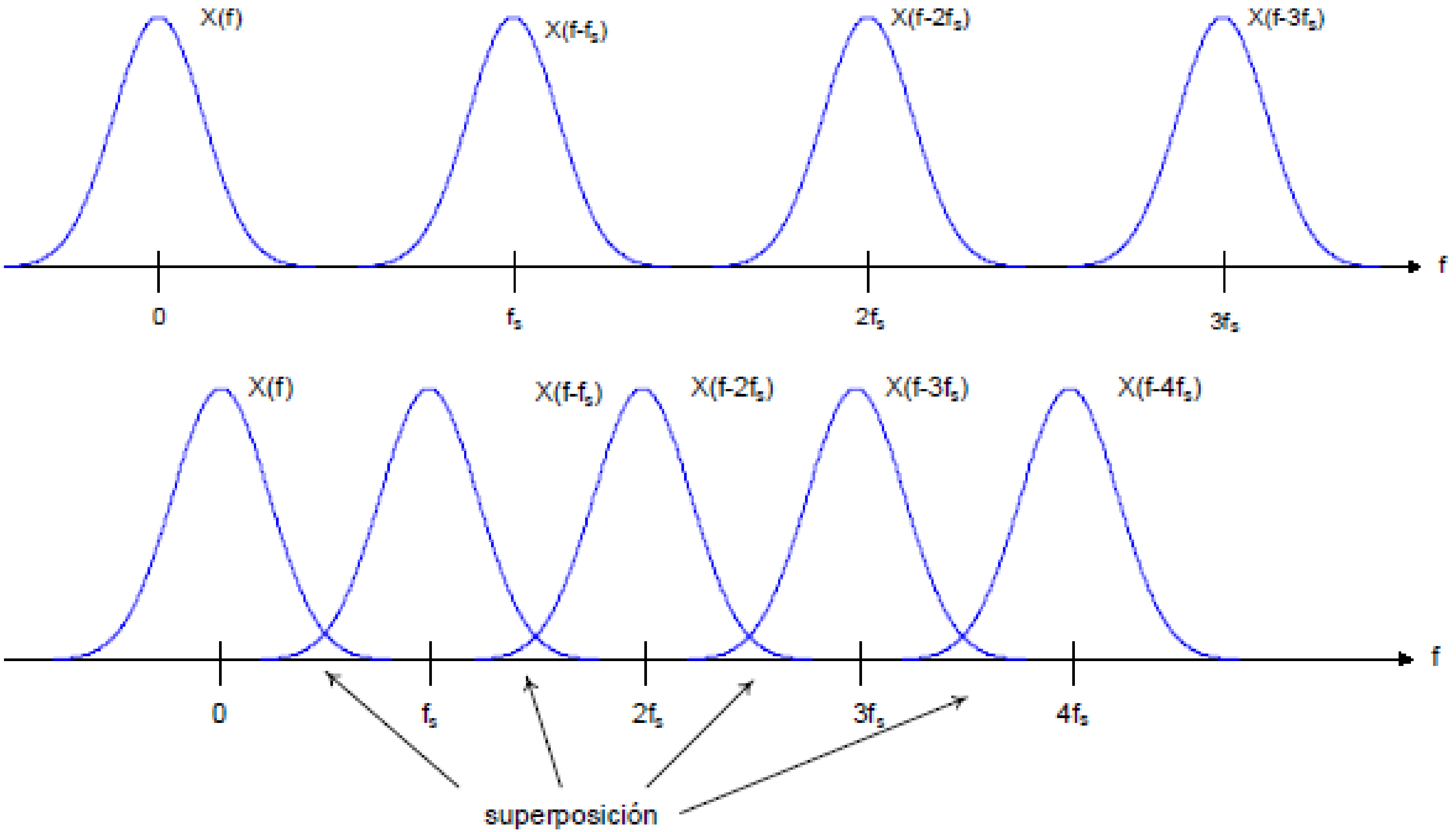
llamando $f_0 = \dfrac{1}{\tau}$, queda: $X_d(f) = \dfrac{1}{N.f_0}.\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x_k.e^{-j\frac{2.\pi}{N}.\frac{f}{f_0}.k}$

El espectro de la transformada discreta $X_d(f)$ es continuo, y analizando la ecuación de arriba, se ve que:

$$X_d(f+N.f_0) = \frac{1}{N.f_0}.\sum_{k=0}^{N-1} x_k.e^{-j\frac{2.\pi}{N}.\frac{(f+N.f_0)}{f_0}.k} = \frac{1}{N.f_0}.\sum_{k=0}^{N-1} x_k.e^{-j\frac{2.\pi}{N}.\frac{f}{f_0}.k}.e^{-j2.\pi.k} = X_d(f)$$

como k es siempre un número entero, el término $e^{-j2\pi k}$ es igual a 1 por lo que resulta que $X_d(f)$ es periódica en f y su período vale Nf_0 : $N.f_0 = \dfrac{N}{\tau} = \dfrac{1}{\Delta t} = f_s$ donde f_s es la frecuencia a que se toman las muestras de $x(t)$ (frecuencia de muestreo).

El espectro de $X_d(f)$ es el de $X(f)$ repetido a múltiplos de f_s (Es evidente que, una mala elección de f_s puede introducir errores en el cálculo por efecto del traslapamiento de espectros.



Existen algoritmos de cálculo que aceleran el procesamiento de la suma (FFT, Fast Fourier Transform), y normalmente, calculan $X_d(f)$ en múltiplos de f_0 :

$$X_d(nf_0) = \frac{1}{N.f_0}.\sum_{k=0}^{N-1} x_k.e^{-j\frac{2.\pi}{N}.n.k} = X_n$$

resultando un espectro discreto con puntos (líneas) en múltiplos de f_0 (En la terminología de la DFT o FFT, f_0 determina la resolución del espectro o el espacio entre líneas). Si la señal analizada fuera periódica, la toma de muestra debería hacerse durante un período (T=τ) y los coeficientes de la serie de Fourier resultante serían:

$$c_n = \frac{1}{T}.X_d(nf_0) = \frac{1}{N}.\sum_{k=0}^{N-1} x_k.e^{-j\frac{2.\pi}{N}.n.k}$$

La variable f no aparece explícitamente en las funciones de X_n o c_n sino que está implícita en el orden n de la armónica de f_0.

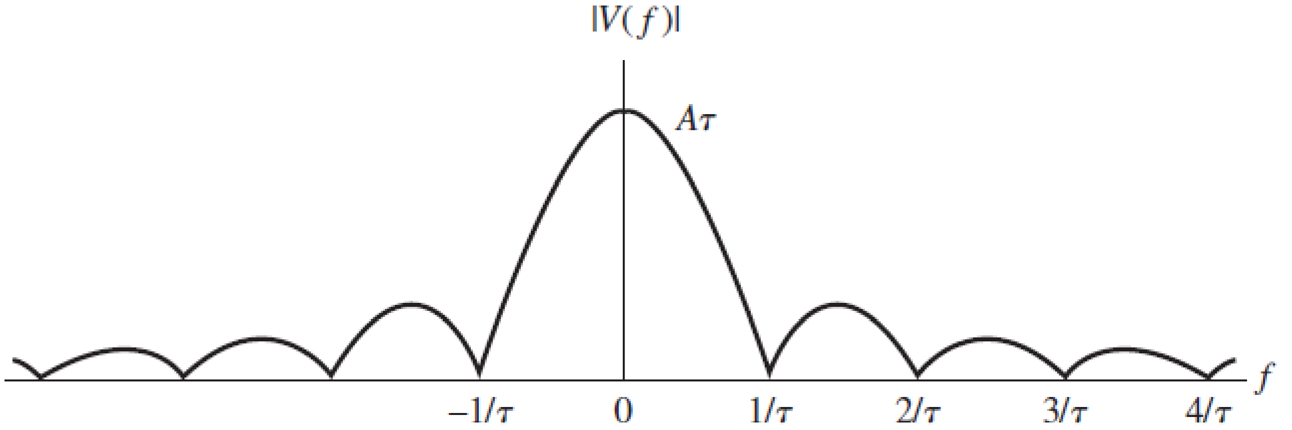
Los paquetes de software que realizan la FFT, tienen las siguientes características: (a) el número de muestras es una potencia de 2 (N=*256,1024, 65536*, etc.) y (b) La resolución del espectro es $1/\tau$ y la máxima armónica calculada es $n_{max}=N/2$, lo que da un ancho de espectro $F_{max} = N.f_0/2 = f_s/2$.

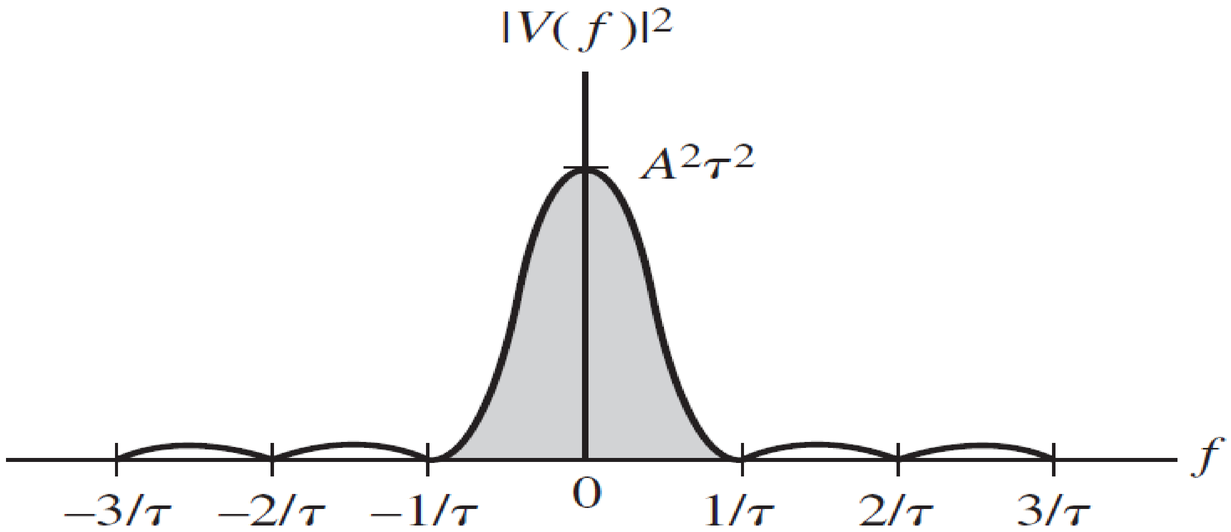
Resumen de las características de la DFT

1. La Transformada discreta de Fourier (DFT) es un cálculo aproximado de T.d.F a partir de una muestra de señal conteniendo N valores temporales.
2. El espectro producido por la DFT resulta periódico, con período igual a la frecuencia de muestreo.
3. Si bien la DFT puede producir un espectro contínuo, los algoritmos normalmente empleados calculan el espectro en N frecuencias, que son armónicas de la frecuencia correspondiente al tiempo de observación de la señal (1/T, llamada también resolución), además de f=0.
4. Si la señal muestreada se considera periódica, el espectro resultante debe incluir un factor igual a la frecuencia 1/T. En este caso la DFT parece más estar aproximando a la Serie de F. que a la Transformada.
5. La frecuencia de muestreo debe respetar la regla de Nyquist, para evitar el fenómeno de aliasing.

Espectro de densidad de Energía

Teorema de Rayleigh: $$E = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)V^*(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2\,df$$





Energy spectral density of a rectangular pulse.

Espectro de densidad de Potencia
(Densidad espectral de potencia)

$$\mathcal{P}_w(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \left(\frac{|W_T(f)|^2}{T} \right)$$

Espectro de voltaje eficaz de ruido del OPA TL082