

Unidad 2: SEÑALES ELÉCTRICAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Series de Fourier. Trigonometría y exponencial
Transformada de Fourier. Teorema de Parseval.
Espectros de densidad energía/potencia. Teoremas
relacionados con la Transformada de Fourier. Delta de
Dirac, propiedades, aplicaciones. Espectros de señales
periódicas. La transformada discreta de Fourier. Señales
aleatorias en dominio de frecuencia. Espectro de
densidad de potencia. Función de autocorrelación.
Señales de banda angosta, características y modelado.

Teorema de Parseval

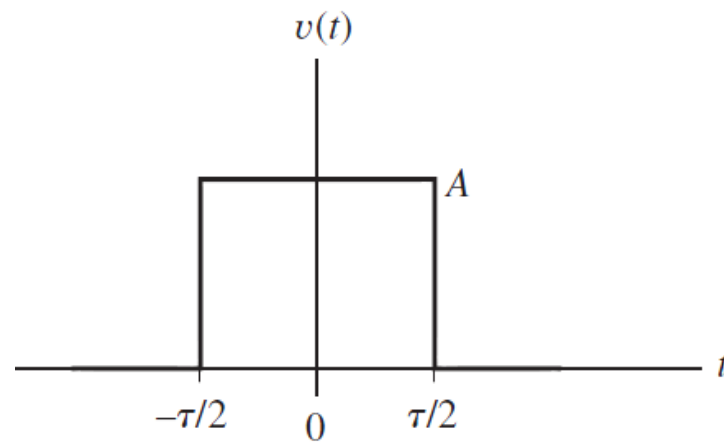
$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) v^*(t) dt$$

$$v^*(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-j2\pi n f_0 t}$$

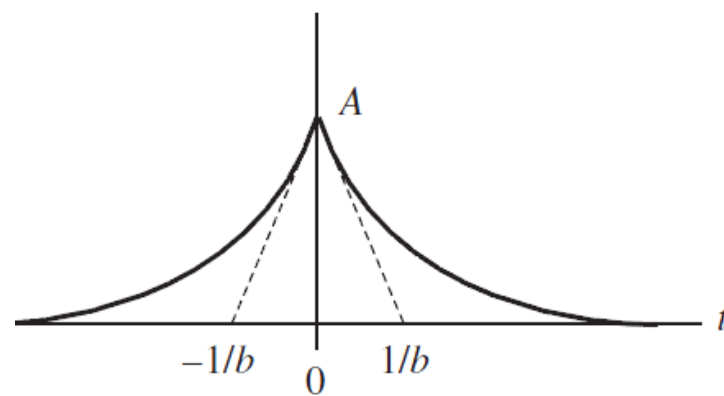
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-j2\pi n f_0 t} \right] dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \right] c_n^* \end{aligned}$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Transformada de Fourier



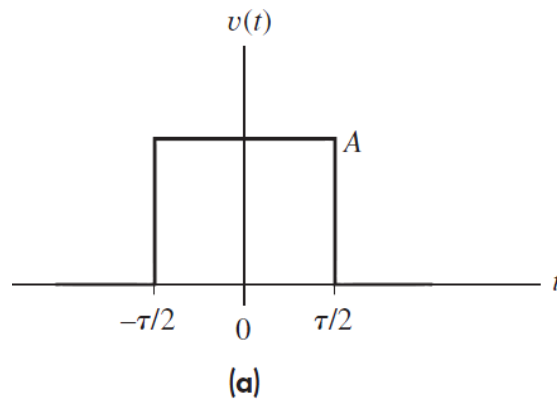
(a)



(b)

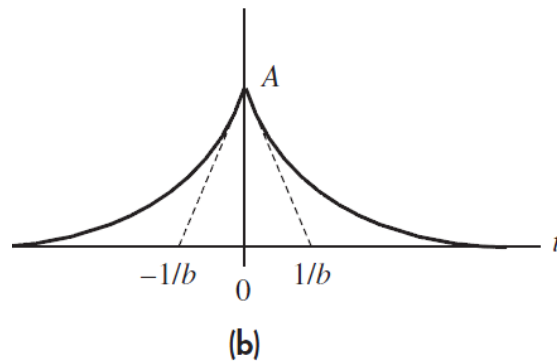
Transformada de Fourier

Definición



$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \right] e^{j2\pi n f_0 t}$$



$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi ft} dt \right] e^{j2\pi ft} df$$

Transformada de Fourier

Propiedades simples

$$V(0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt$$

$$V(-f) = V^*(f)$$

$$|V(-f)| = |V(f)|$$

$$\arg V(-f) = -\arg V(f)$$

Transformada de Fourier

Propiedades simples

$$V(0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt$$

$$V(-f) = V^*(f)$$

Cuando?

$$|V(-f)| = |V(f)|$$

$$\arg V(-f) = -\arg V(f)$$

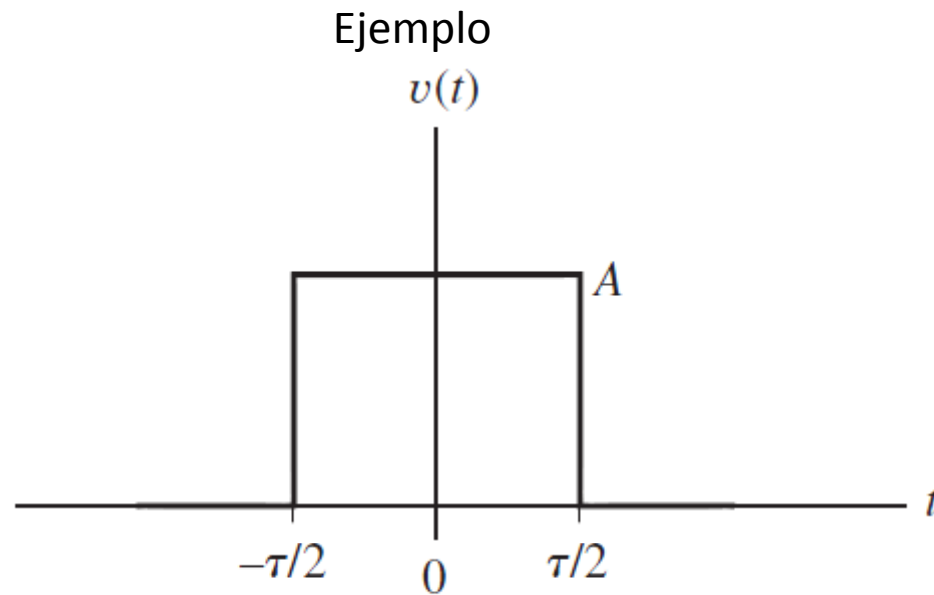
Transformada de Fourier

Propiedades simples

Teorema de Rayleigh

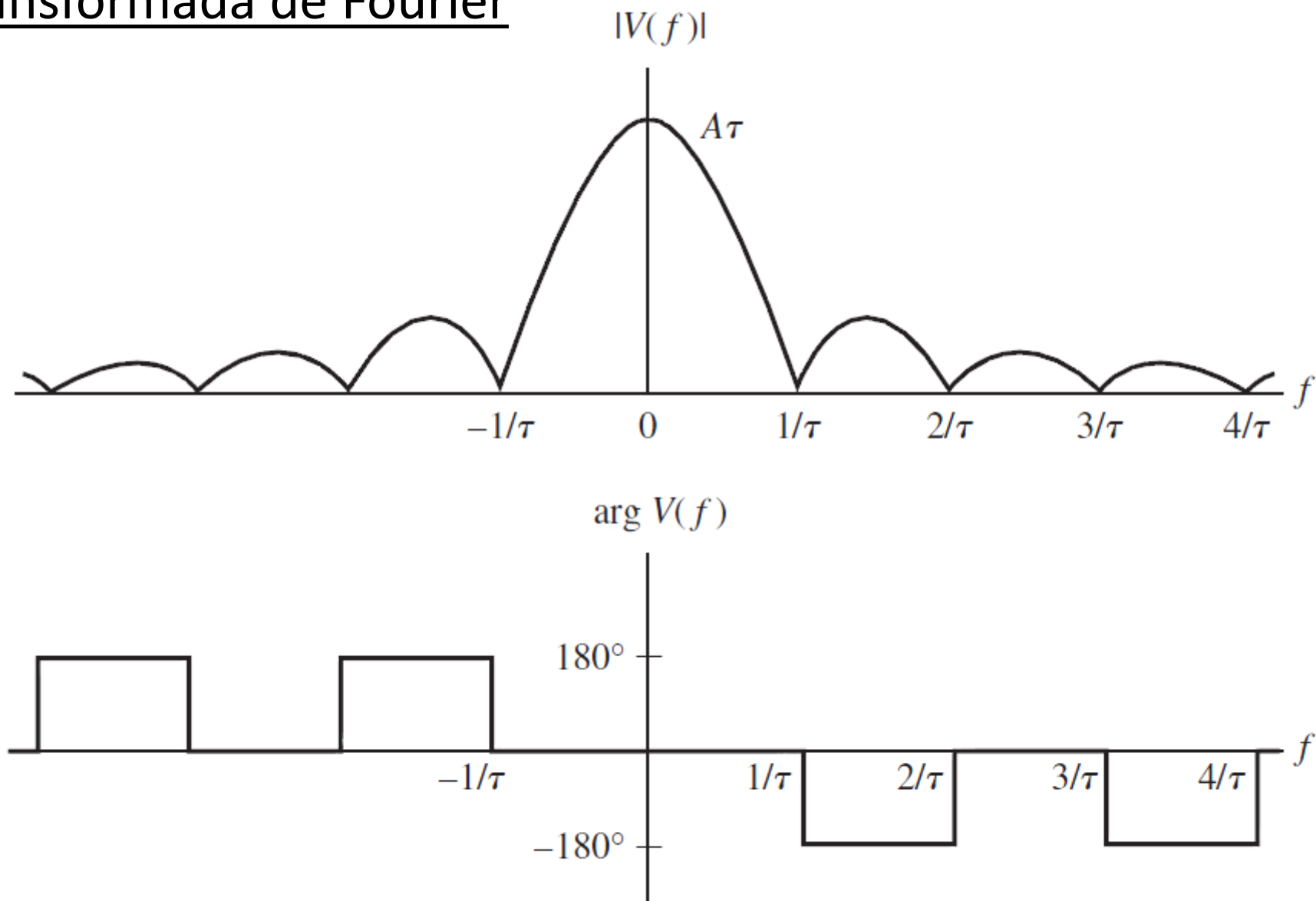
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} V(f) V^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df$$

Transformada de Fourier



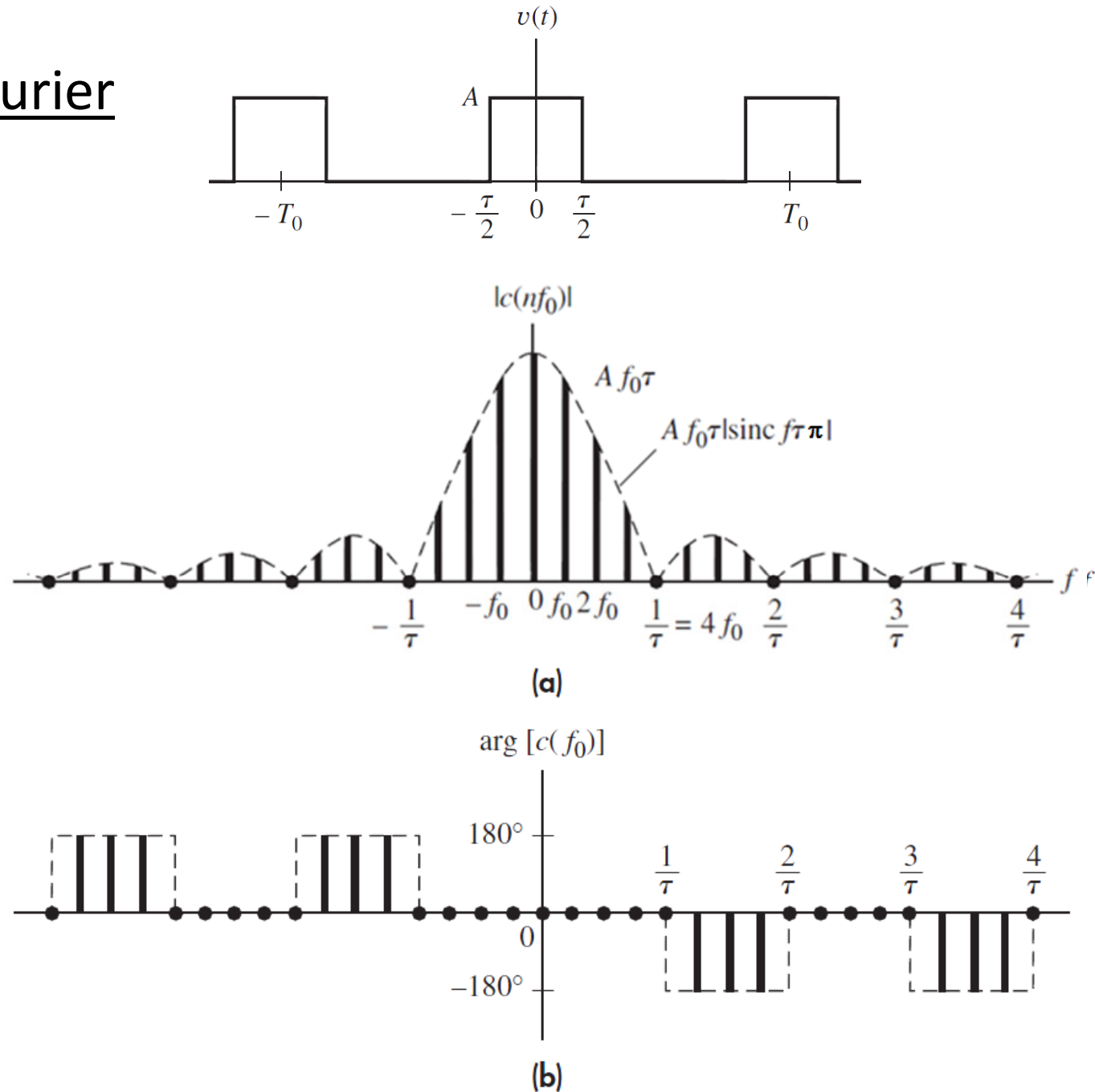
$$\begin{aligned} V(f) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{\pi f} \sin \pi f \tau \\ &= A\tau \operatorname{sinc} f\tau \pi \end{aligned}$$

Transformada de Fourier



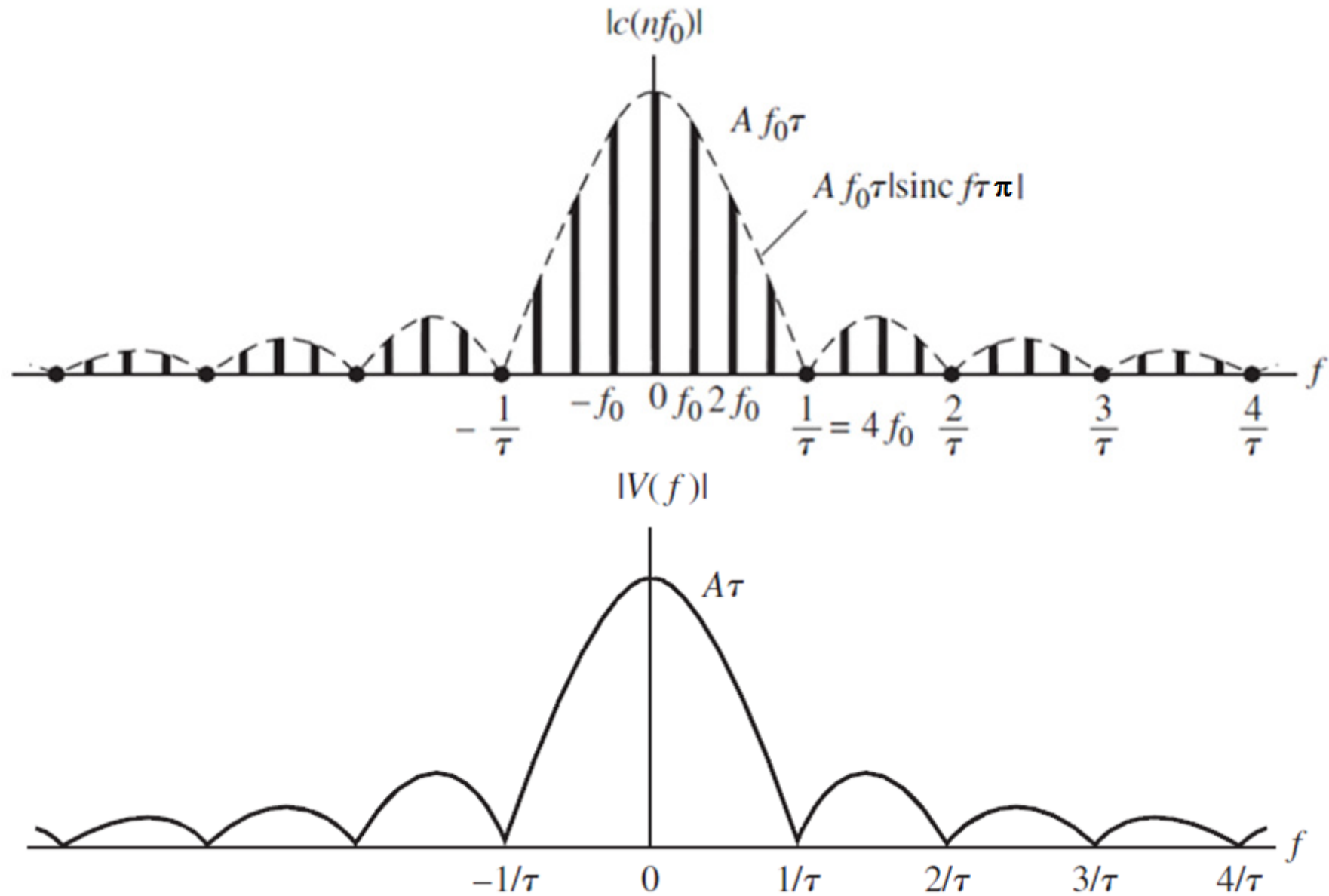
Rectangular pulse spectrum $V(f) = A\tau \operatorname{sinc} f\tau\pi$

Series de Fourier



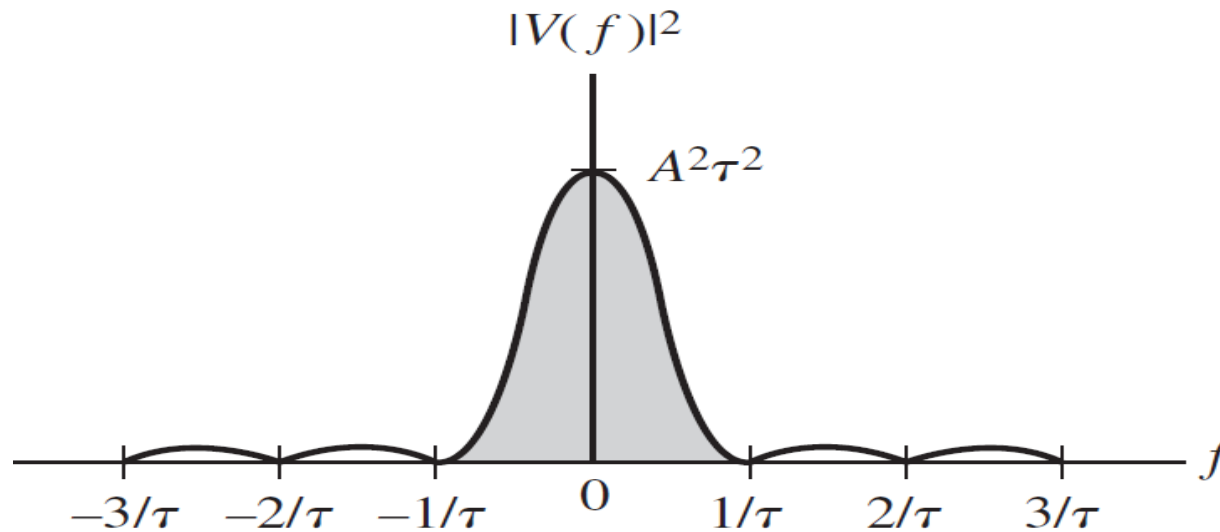
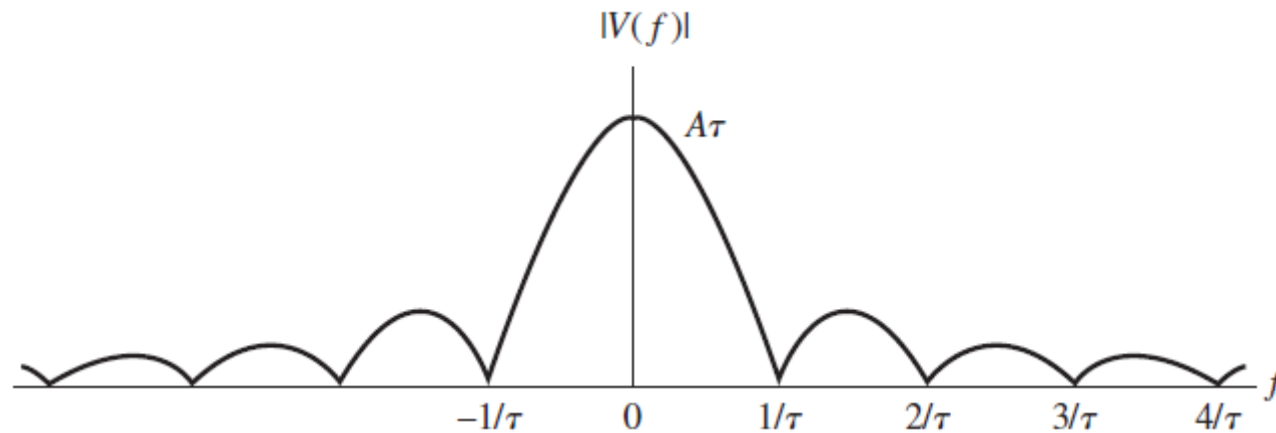
Spectrum of rectangular pulse train with $f_c \tau = 1/4$. (a) Amplitude; (b) phase.

Similitud entre SdF y TdF



Espectro de densidad de Energía

Teorema de Rayleigh:
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)V^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df$$



Energy spectral density of a rectangular pulse.

Propiedades de la T. de Fourier

Superposición, linealidad:

$$v(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$$

$$\mathcal{F}[v(t)] = a_1 \mathcal{F}[v_1(t)] + a_2 \mathcal{F}[v_2(t)]$$

Dualidad

$$z(t) = V(t)$$

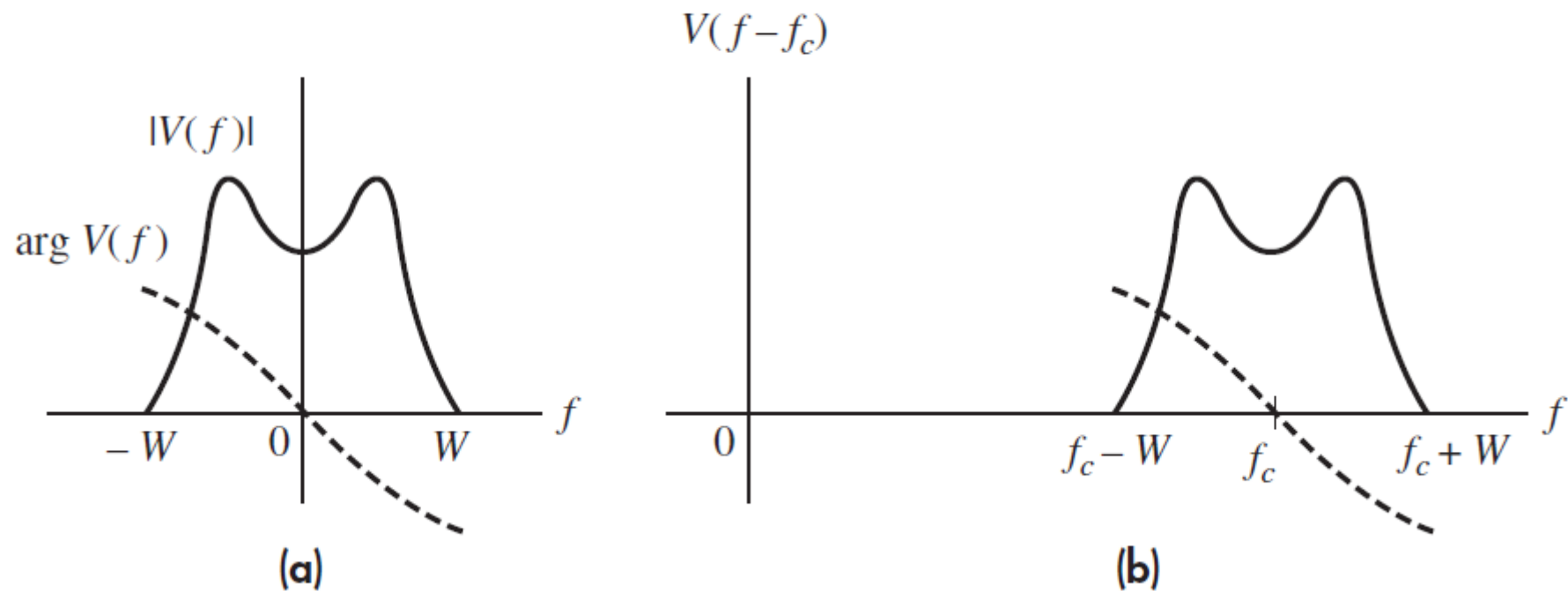
$$\mathcal{F}[z(t)] = v(-f)$$

(gráficamente...)

Propiedades de la T. de Fourier

Translación en la frecuencia:

$$v(t)e^{j\omega_c t} \leftrightarrow V(f - f_c) \quad \omega_c = 2\pi f_c$$



Propiedades de la T. de Fourier

(Clase n°10)

Translación en la frecuencia:

$$v(t) \cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{e^{j\phi}}{2} V(f - f_c) + \frac{e^{-j\phi}}{2} V(f + f_c)$$

Propiedades de la T. de Fourier

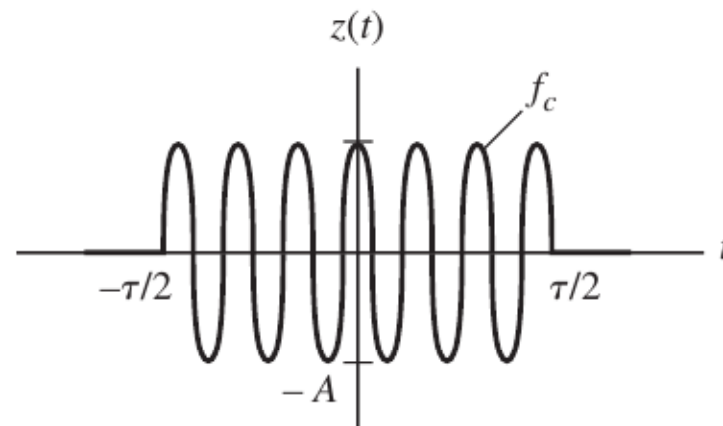
Translación en la frecuencia:

$$z(t) = A\Pi(t, \tau) \cos \omega_c t$$

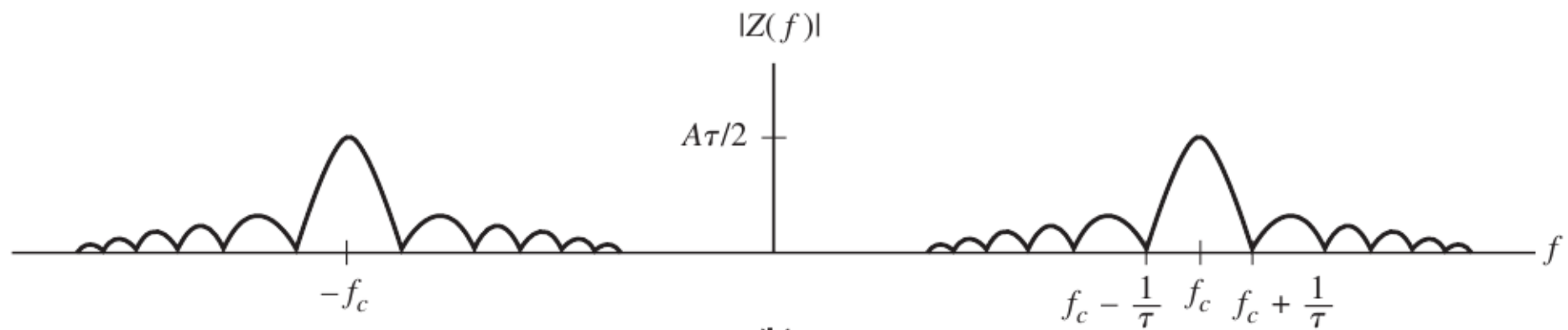
$$Z(f) = \frac{A\tau}{2} \operatorname{sinc}(f - f_c)\tau + \frac{A\tau}{2} \operatorname{sinc}(f + f_c)\tau$$

Propiedades de la T. de Fourier

$$Z(f) = \frac{A\tau}{2} \operatorname{sinc}(f - f_c)\tau + \frac{A\tau}{2} \operatorname{sinc}(f + f_c)\tau$$



(a)



(b)

(a) RF pulse; (b) amplitude spectrum.

Propiedades de la T. de Fourier

Convolución:

$$v(t) * w(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda) w(t - \lambda) d\lambda$$

$$v(t) * w(t) \leftrightarrow V(f) W(f)$$

$$v(t)w(t) \leftrightarrow V(f) * W(f)$$

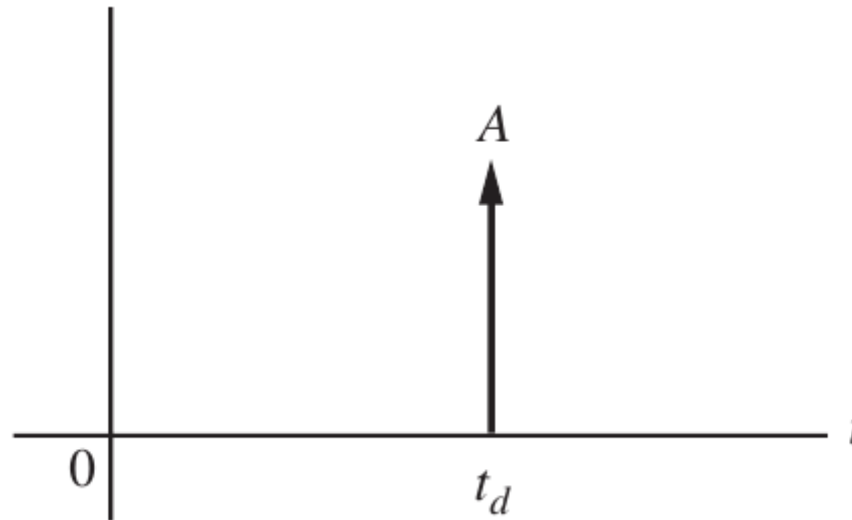
Delta de Dirac:

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) \delta(t) dt = \begin{cases} v(0) & t_1 < 0 < t_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Delta de Dirac:



Graphical representation of $A\delta(t - t_d)$.

$$v(t) * \delta(t - t_d) = v(t - t_d)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) \delta(t - t_d) dt = v(t_d)$$

Delta de Dirac:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

$$A \leftrightarrow A \delta(f)$$

$$z(t) = V(t)$$

Dualidad:

$$\mathcal{F}[z(t)] = v(-f)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[A \delta(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} A \delta(f) e^{j2\pi ft} df = A e^{j2\pi ft} \Big|_{f=0} = A$$

T. de Fourier de señales periódicas

$$v_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$V_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0) \delta(f - nf_0)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

T. de Fourier de señales periódicas

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{T_0} v_p(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

T. de Fourier de señales periódicas

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{T_0} v_p(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Si nos interesa la
frecuencia $f=n.f_0$...

T. de Fourier de señales periódicas

$$V_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0) \delta(f - nf_0)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{T_0} v_p(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$V_p(nf_0) = \frac{1}{T_0} \cdot V(nf_0) \cdot \delta(f - nf_0)$$

T. de Fourier de señales periódicas

Tren de pulsos: ... ?

Propiedades de la T. de Fourier

Retardo
en el tiempo:

$$v(t - t_d) \leftrightarrow V(f)e^{-j2\pi ft_d}$$

Cambio de escala:

$$v(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} V\left(\frac{f}{\alpha}\right) \quad \alpha \neq 0$$

RESUMEN

- 1 . A partir de las propiedades matemáticas de la T.d.F. pueden esbozarse gran cantidad de espectros sin tener que recurrir a la integración.
2. Los espectros de señales periódicas recortadas resultan "anchos" comparados con la delta de Dirac. La finitud en el tiempo se muestra en la frecuencia como un espectro ancho; viceversa.
3. Los espectros de densidad de energía carecen de la información de fase, a pesar de lo cual resultan útiles.
- 4 . Los espectros de señales periódicas (formadas por la repetición de pulsos de forma arbitraria) tienen la misma forma de envolvente que la del pulso unitario. Difieren en un factor de escala igual a la frecuencia fundamental.