Unidad 2: SEÑALES ELÉCTRICAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA:

Series de Fourier. Trigonométrica y exponencial

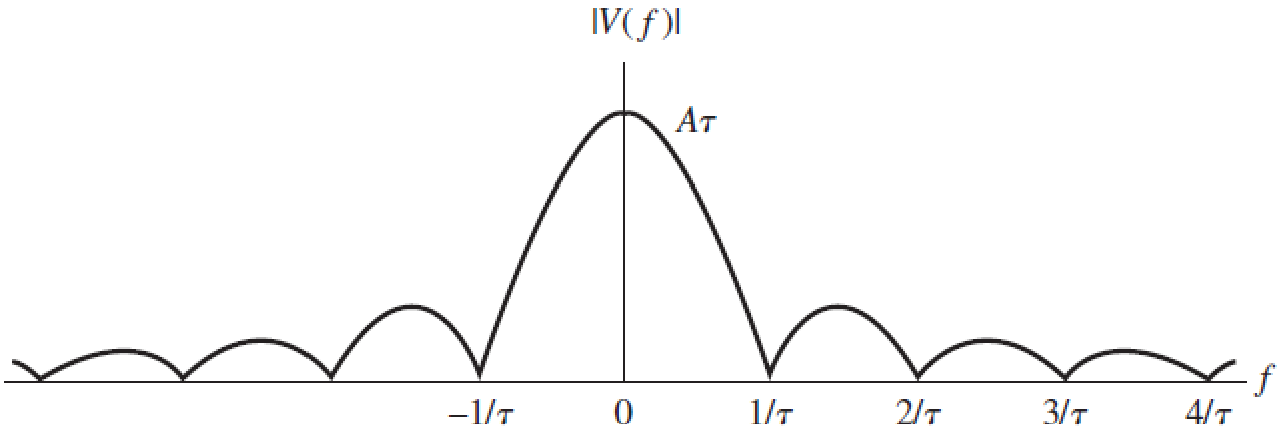
Transformada de Fourier. Teorema de Parseval.

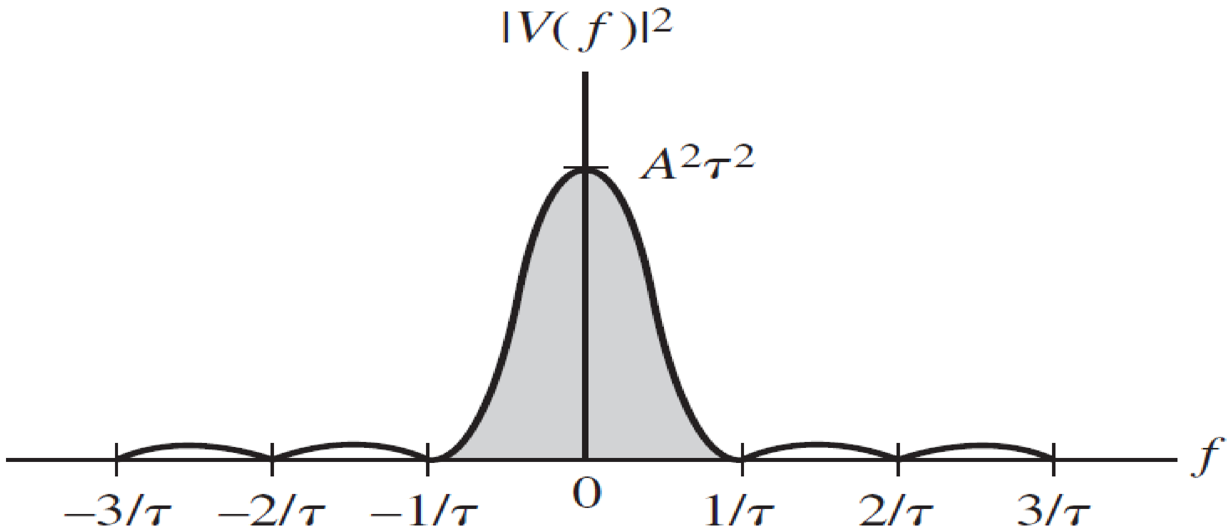
Espectros de densidad energía/potencia. Teoremas relacionados con la Transformada de Fourier. Delta de Dirac, propiedades, aplicaciones. Espectros de señales periódicas. La transformada discreta de Fourier. Señales aleatorias en dominio de frecuencia. Espectro de densidad de potencia. Función de autocorrelación. Señales de banda angosta, características y modelado.

* Cap. 2 Carlson-Crilly

Espectro de densidad de Energía

Teorema de Rayleigh: $E = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)V^*(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2\,df$





Energy spectral density of a rectangular pulse.

Propiedades de la T. de Fourier

Superposición, linealidad:

$$v(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$$

$$\mathscr{F}[v(t)] = a_1 \mathscr{F}[v_1(t)] + a_2 \mathscr{F}[v_2(t)]$$

Dualidad

$$z(t) = V(t)$$

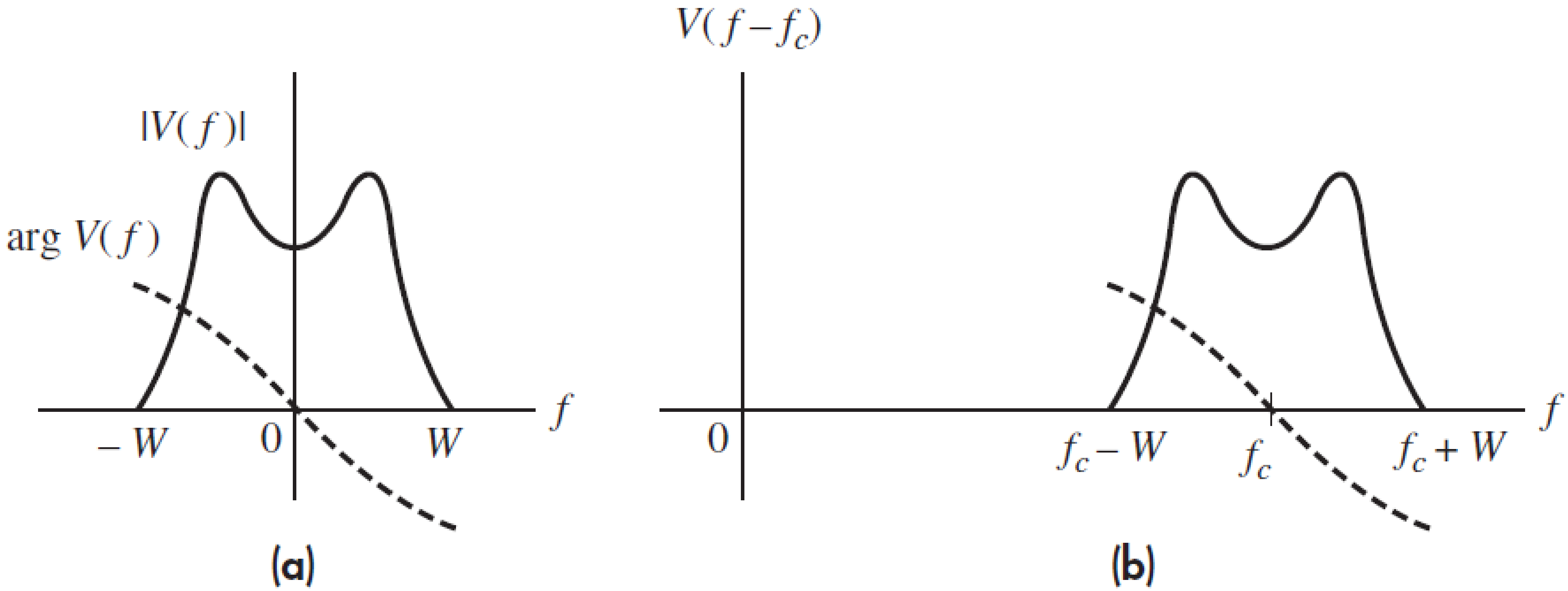
$$\mathscr{F}[z(t)] = v(-f)$$

(gráficamente...)

Propiedades de la T. de Fourier

Translación en la frecuencia:

$$v(t)e^{j\omega_c t} \leftrightarrow V(f - f_c) \qquad \omega_c = 2\pi f_c$$



Propiedades de la T. de Fourier

Translación en la frecuencia:

$$v(t)\cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{e^{j\phi}}{2} V(f - f_c) + \frac{e^{-j\phi}}{2} V(f + f_c)$$

Propiedades de la T. de Fourier

Translación en la frecuencia:

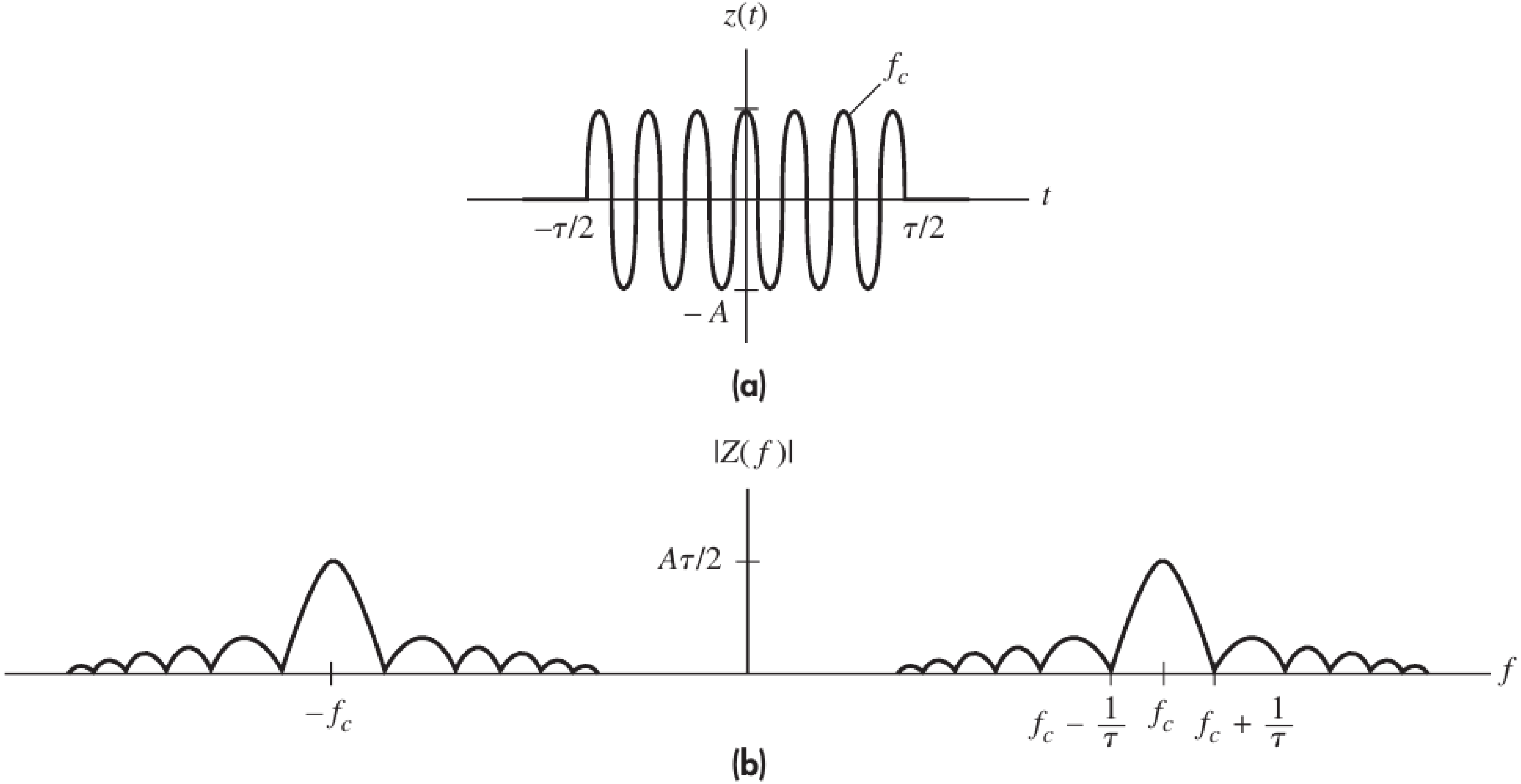
$$z(t) = A\Pi\left(t,\tau\right)\cos\omega_c t$$

$$Z(f) = \frac{A\tau}{2}\,\mathrm{sinc}\,(f - f_c)\tau + \frac{A\tau}{2}\,\mathrm{sinc}\,(f + f_c)\tau$$

(partes)

Propiedades de la T. de Fourier

$$Z(f) = \frac{A\tau}{2}\,\mathrm{sinc}\,(f - f_c)\tau + \frac{A\tau}{2}\,\mathrm{sinc}\,(f + f_c)\tau$$



(*a*) RF pulse; (*b*) amplitude spectrum.

Propiedades de la T. de Fourier

Convolución:

$$v(t) * w(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda) w(t - \lambda)\, d\lambda$$

$$v(t) * w(t) \leftrightarrow V(f) W(f)$$

$$v(t) w(t) \leftrightarrow V(f) * W(f)$$

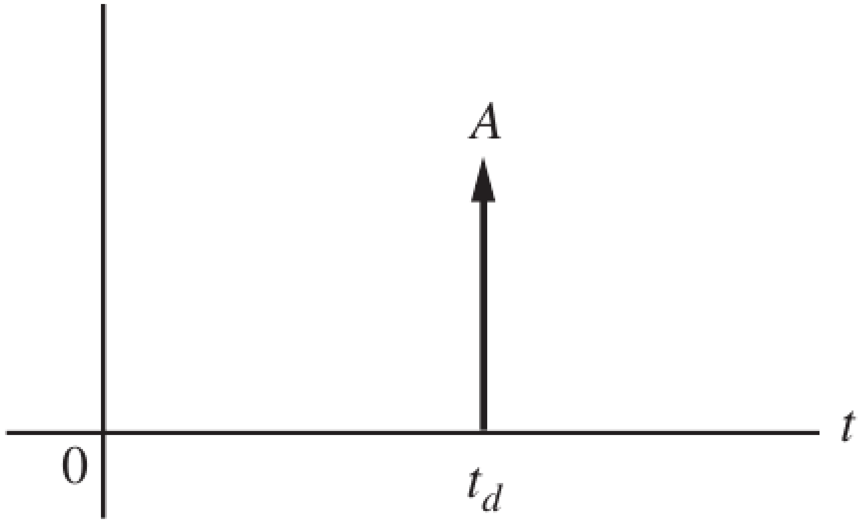
Delta de Dirac:

$$\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, \delta(t)\, dt = \begin{cases} v(0) & t_1 < 0 < t_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Delta de Dirac:



Graphical representation of $A\delta\,(t - t_d)$.

$$v(t) * \delta(t - t_d) = v(t - t_d)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,\delta(t - t_d)\,dt = v(t_d)$$

Delta de Dirac:

$$\mathcal{F}[\,\delta(f)\,] = 1$$

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{F}[\,\delta(t)\,] = 1 \\[2em] A \leftrightarrow A\,\delta(f)\end{gathered}}$$

$$z(t) = V(t)$$

Dualidad:

$$\mathcal{F}[z(t)] = v(-f)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[A\,\delta(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} A\,\delta(f)e^{j2\pi ft}\,df = Ae^{j2\pi ft}\Big|_{f=0} = A$$

T. de Fourier de señales periódicas

$$v_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0) e^{j2\pi nf_0 t}$$

$$V_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)\, \delta(f - nf_0)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

T. de Fourier de señales periódicas

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} \, dt$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} \, dt$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} \, dt = \int_{T_0} v_p(t) e^{-j2\pi f t} \, dt$$

T. de Fourier de señales periódicas

$$c_n = \boxed{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} v_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt}$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t}\, dt \boxed{= \int_{T_0} v_p(t) e^{-j2\pi f t}\, dt}$$

T. de Fourier de señales periódicas

Tren de pulsos: ... ?

Espectro de densidad de Potencia
(Densidad espectral de potencia)

$$\mathcal{P}_w(f) \triangleq \lim_{T \to \infty} \left(\frac{|W_T(f)|^2}{T} \right)$$

Propiedades de la T. de Fourier

Retardo
en el tiempo:

$$v(t - t_d) \leftrightarrow V(f)e^{-j2\pi f t_d}$$

Cambio de escala:

$$v(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} V\left(\frac{f}{\alpha}\right) \qquad \alpha \neq 0$$

RESUMEN CLASE 8

1 . A partir de las propiedades matemáticas de la T.d.F. pueden esbozarse gran cantidad de espectros sin tener que recurrir a la integración.

2. Los espectros de señales periódicas recortadas resultan "anchos" comparados con la delta de Dirac.

3. Los espectros de densidad de energía y de potencia carecen de la información de fase, a pesar de lo cual resultan útiles.

4 . Los espectros de señales periódicas tienen la misma forma de evolvente que la del pulso unitario. Difieren en un factor de escala igual a la frecuencia fundamental.