Tema 4 Mensajes y señales digitales

Formatos de transmisión.

Recuperación del mensaje.

Codificación de niveles múltiples.

Distorsión intersimbólica.

Ancho de banda ocupado por la señal digital.

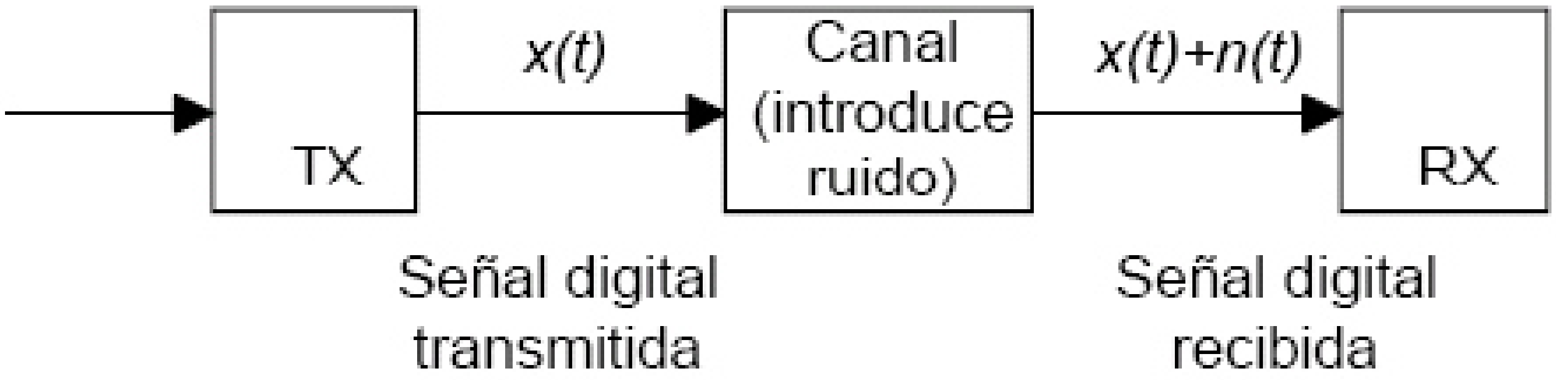
Señales digitales y ruido, probabilidad de error.

Transmisión de señales analógicas en forma digital. Muestreo. Sistemas PCM.

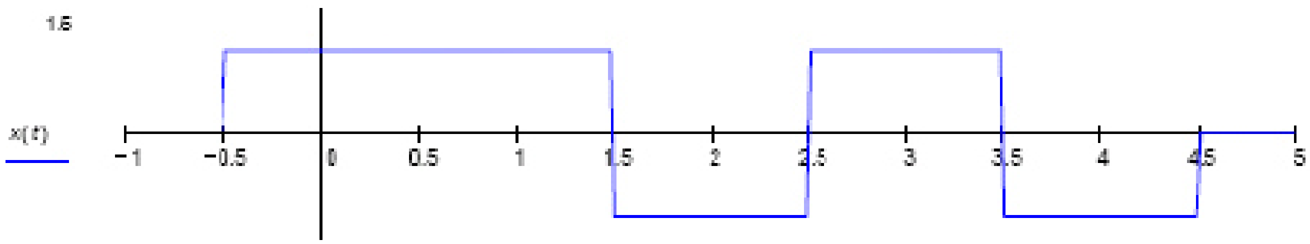
Error de cuantificación.

Clase 23

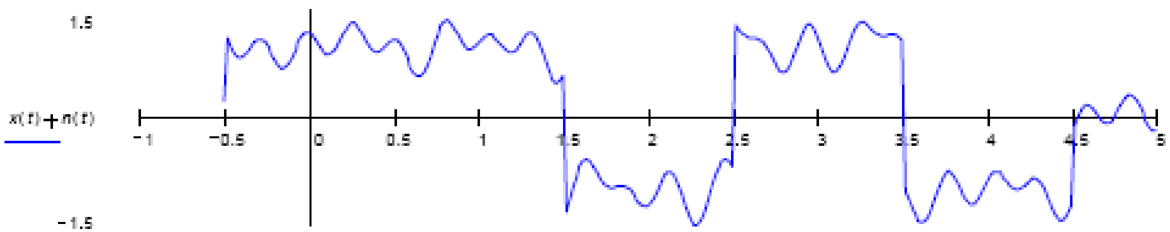
Señales digitales en presencia de ruido



Señal original:



Señal recibida (señal original + ruido):



La señal digital *x(t)* después de ser transmitida por el canal, es recibida sumada a una señal de ruido *n(t)*.

Suposiciones simplificatorias:

a) El número de unos y ceros transmitidos durante un tiempo largo ($>>T_b$) es igual (igual probabilidad de ocurrencia).
b) La señal de ruido introducida $n(t)$ es gaussiana con componente media (continua) nula
c) Método de detección: una muestra por bit, posterior decisión según la muestra tomada esté por encima o debajo del umbral.

Si en un mensaje digital suficientemente largo de N bits, N_e de ellos se reciben con error, se define la probabilidad de error según $P_e=N_e/N$.

Un bit está en error si se transmite un 1 y se recibe un 0 o, se transmite un 0 y se recibe un 1.

$$P_e = P_1 . P_{e1} + P_0 . P_{e0}$$

en la ecuación anterior:

P_1 = Probabilidad de transmisión de un 1

P_{e1} = Probabilidad que, habiéndose transmitido un 1, el receptor recibe un 0.

P_0 = Probabilidad de transmisión de un 0

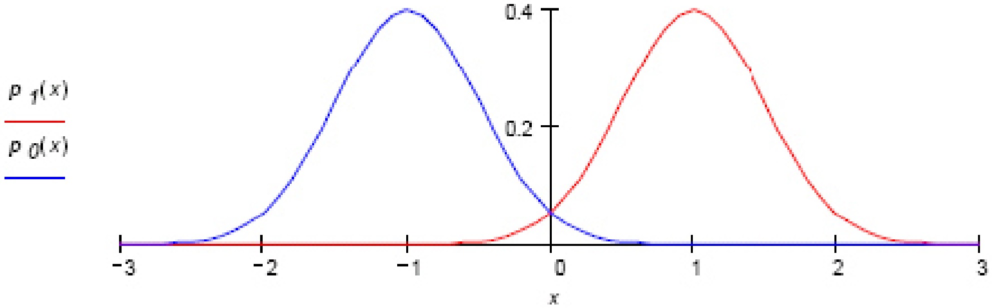
P_{e0} = Probabilidad que, habiéndose transmitido un 0, el receptor recibe un 1

Si $P_1 = P_0 = 0.5$, la ecuación de arriba queda:

$$P_e = \frac{1}{2}.(P_{e1} + P_{e0})$$

Igual probabilidad de ocurrencia

Si se supone transmisión bipolar NRZ, donde un 1 se transmite como una tensión $+A$ volt y un 0 como $-A$ volt y el umbral de decisión del detector es 0 volt, como la función de densidad de probabilidad de $n(t)$ es gaussiana, se tiene que:



P_{e1} P_{e0}

Un 1 transmitido ($x(t)=A$) estará en error si en el instante de muestreo $x(t)+n(t) < 0$ y un 0 transmitido ($x(t)=-A$) estará en error si en el instante de muestreo $x(t)+n(t) > 0$. En términos estadísticos: $P_{e1} = P(n < -A)$ y $P_{e0} = P(n > A)$ Por simetría de la curva gaussiana, estos valores son iguales: $P_{e1} = P_{e0} = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$

$P_e = 1/2 \{Q(A/\sigma) + Q(A/\sigma)\} = Q(A/\sigma)$

Es decir que: $P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$

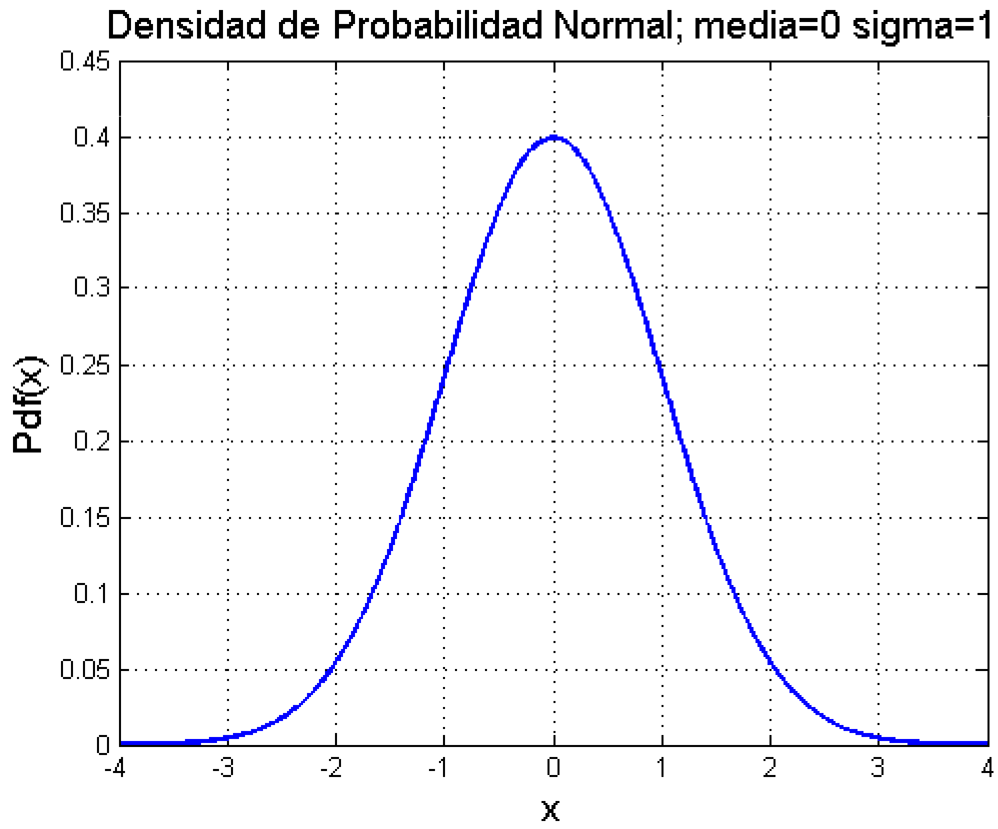
La función de distribución normal o gaussiana

Está definida por: $$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2.\sigma^2}}$$

donde σ y x_0 son la desviacion standard y el valor medio, respectivamente, de la variable x.

La pdf normal es importante en aplicaciones de ingeniería, porque es la que caracteriza a fenómenos aleatorios generados por la acción de un número grande ($\rightarrow \infty$) de agentes con contribuciones infinitesimales de cada uno de ellos tomados individualmente (Teorema del límite central).

Por ejemplo: el movimiento browniano de electrones en el interior de un conductor, que produce el ruido térmico.



La probabilidad de que la variable x supere un determinado valor x_k es:

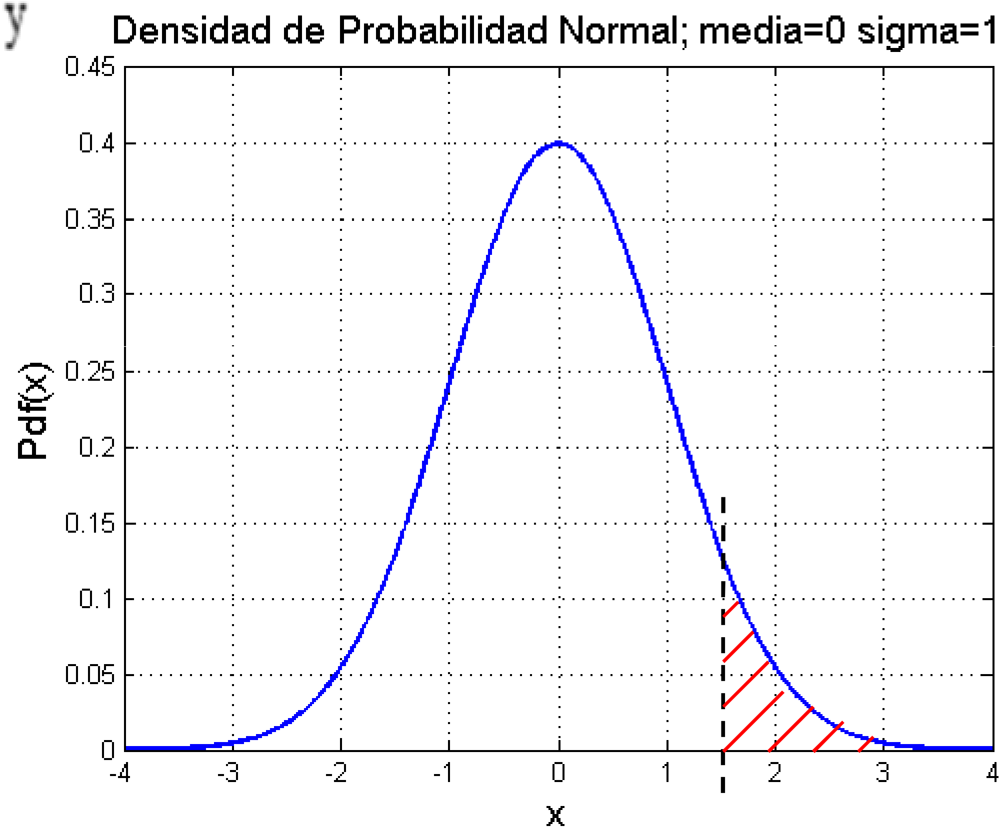
$$P(x > x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.\sigma} . \int_{x_k}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} .du \quad \text{suponiendo } x_0 = 0$$

La función $Q(x)$ es de uso común en estadística y está tabulada en tablas matemáticas y calculadoras de mano.

llamando $z = u/\sigma$ queda:

$$P(x > x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \int_{\left(\frac{x_k}{\sigma}\right)}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} .dz$$

$$P(x > x_k) = Q\left(\frac{x_k}{\sigma}\right)$$



Ej.: Q(1.5)=0,0668

Como ejemplo, si $A=5$ volt y el valor eficaz de la señal de ruido es de 2 volt, entonces

$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{5}{2}\right) = Q(2.5) = 6.10^{-3}$$

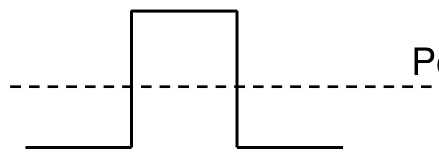
Cada 1000 bits que se transmitan, 6 se recibirán con error, un valor demasiado alto para la mayoría de las aplicaciones. Normalmente, son necesarias tasas de error inferiores a 10^{-4}.

Tasa o probabilidad de error calculada mediante la energía por bit

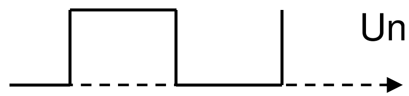
Es común en sistemas de comunicaciones digitales especificar la tasa o probabilidad de error en términos de la **energía promedio por bit transmitido E_b** vs. la **densidad espectral de ruido n_0**. E_b, para transmisión binaria,

está definido como $E_b = \dfrac{Energ.por"1"transmitido + Energ.por"0"transmitido}{2}$. En el caso visto, se tiene que:

Energía prom. por bit transmitido $: E_b = A^2.T_b$ y $A = \sqrt{\dfrac{E_b}{T_b}}$


Polar

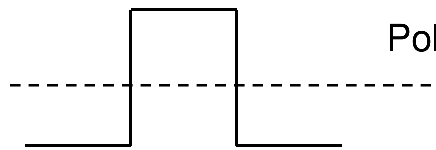
$$E_b = \frac{A^2.T_b}{2} \qquad A = \sqrt{\frac{2.E_b}{T_b}}$$


Unipolar

El valor eficaz de la señal de ruido, suponiendo que se utiliza el mínimo ancho de banda (teórico) para la transmisión de la señal digital, es $\sigma = \sqrt{n_0.B} = \sqrt{n_0.\dfrac{R_b}{2}} = \sqrt{n_0.\dfrac{1}{2.T_b}}$

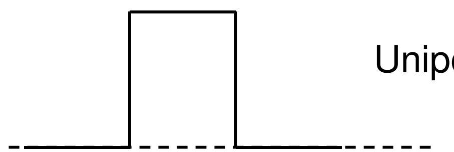
donde n_0 es la densidad de potencia (frecuencias positivas) de la señal de ruido y T_b la duración de cada bit. La probabilidad de error queda:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2.E_b}{n_0}}\right)$$

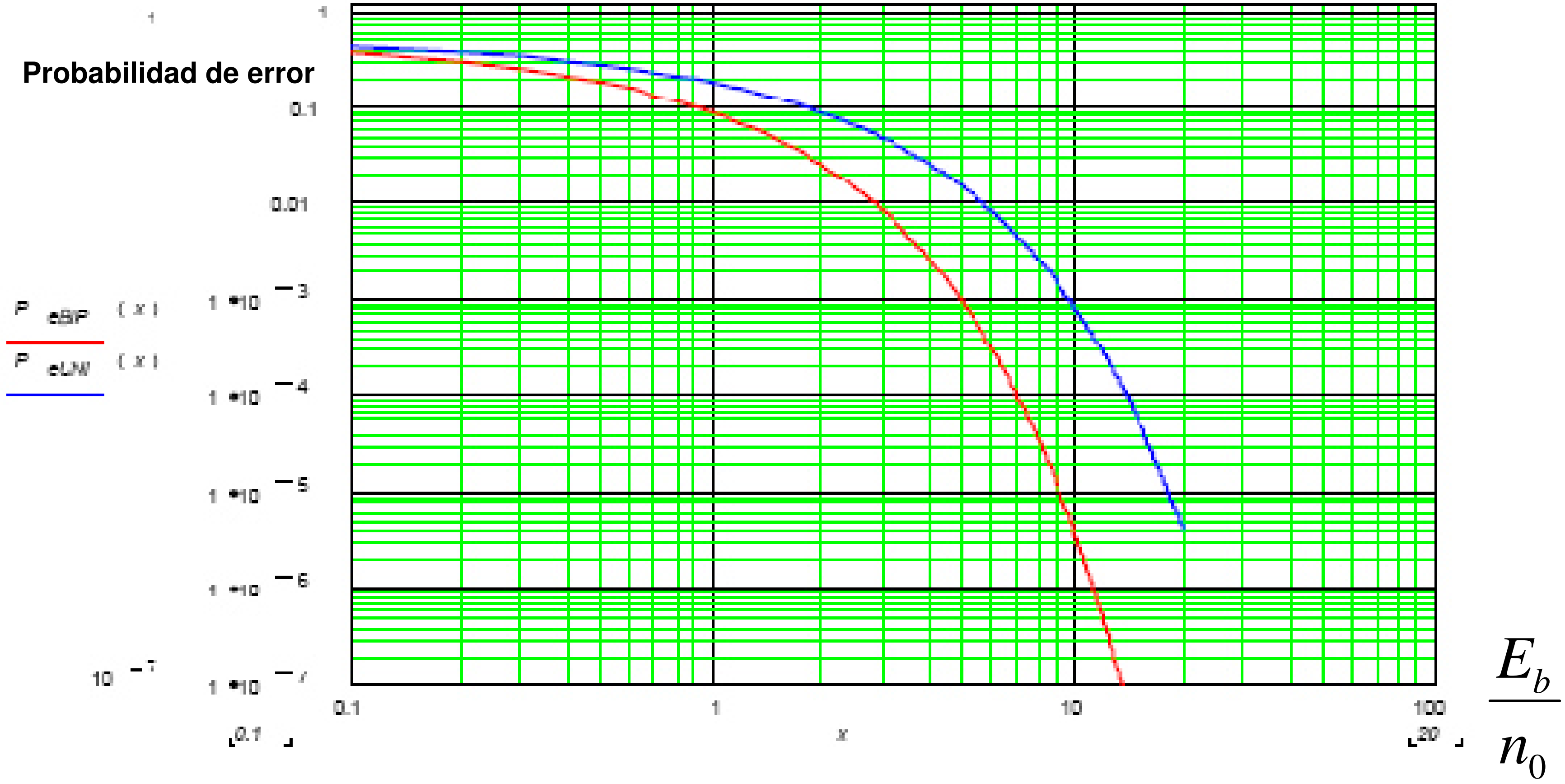

Polar

Si la transmisión hubiera sido unipolar NRZ: 1 transmitido representado por una tensión +A volt y 0 transmitido por 0 volt, es fácil demostrar que (suponiendo umbral de decisión en A/2):

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2.\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{n_0}}\right)$$


Unipolar

Notar la mejor perfomance del método bipolar NRZ. A igualdad de energía por bit transmitido y densidad de ruido, tendrá una menor tasa de error.



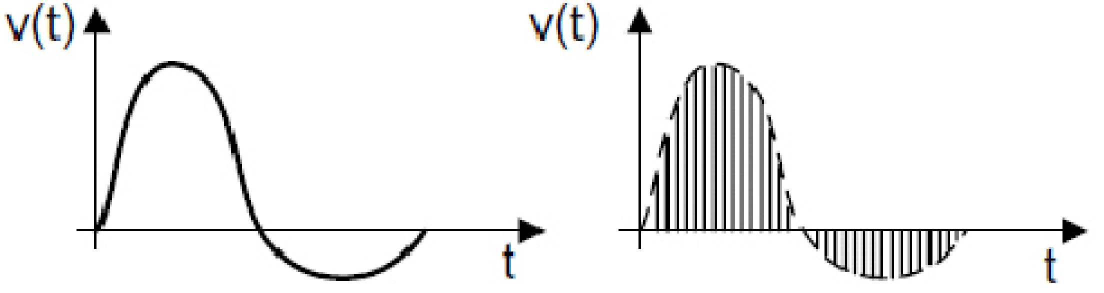
En el gráfico se muestra, para señales polar NRZ y unipolar NRZ, la probabilidad de error vs. un parámetro x definido por:

$$x = \frac{E_b}{n_0}$$

Eb es energía promedio por bit

Transmisión digital de señales analógicas

Se transmite la señal a intervalos regulares de tiempo



<u>Tipos de modulación:</u>

Cuantificada: la información se aproxima por un número finito de valores, PCM

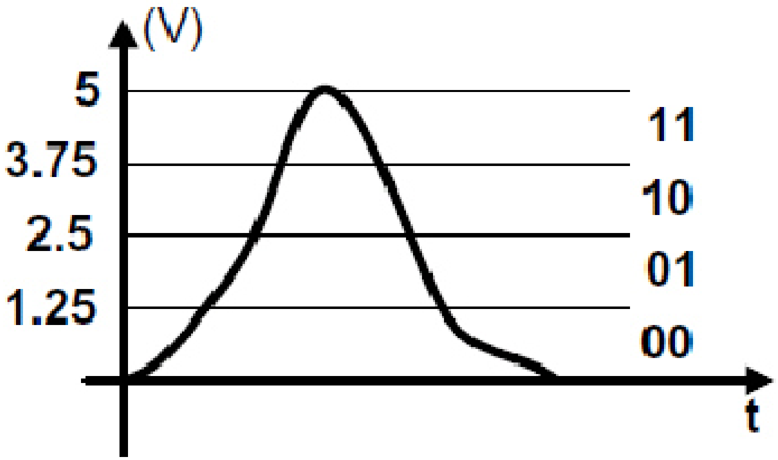
No cuantificada: los parámetros que varían del impulso lo hacen de forma continua en función de la información: PAM, PWM, PPM

VENTAJA: MAYOR INMUNIDAD AL RUIDO QUE LA TRANSMISIÓN ANALÓGICA
PERMITEN TRANSMISIONES A MAYOR DISTANCIA
Circuitería digital de escaso coste
Pulsos digitales pueden ser almacenados
Pueden aplicarse circuitos de detección y corrección de errores

MODULACIÓN POR CODIFICACIÓN DE IMPULSOS (PCM)

Convertidor A/D

N: número de niveles
n: número de bits



Resolución $\boxed{\dfrac{V_{max}}{2^n}}$

Mínimo incremento de la variable analógica necesario ara modificar el bit menos significativo

Modulación de Pulsos Codificados (PCM)

La transmisión de una señal PAM es analógica pues se debe preservar a lo largo del canal de comunicación las amplitudes de los pulsos de muestra. Un sistema PCM codifica cada muestra en una serie de unos y ceros que se transmiten en el intervalo entre ellas. Para poder codificar cada muestra con un valor binario se debe:

a) disponer un T_p suficientemente pequeño para que la muestra represente el valor instantáneo de la señal *x(t)* en el momento de la muestra y

b) asimilar la muestra obtenida al valor mas próximo de un conjunto de valores fijos, que dependerá del número de dígitos disponibles para la codificación. Esto introduce un error (error de cuantificación) que será inversamente proporcional al número de bits disponibles, además impone otra limitación a la señal x(t): debe ser acotada en sus valores de tensión.

Ventajas:

- **Permite efectuar numerosas transmisiones sin pérdidas por degradación**
- **Se presta para ser empleada en sistemas de multiplexado en el tiempo**

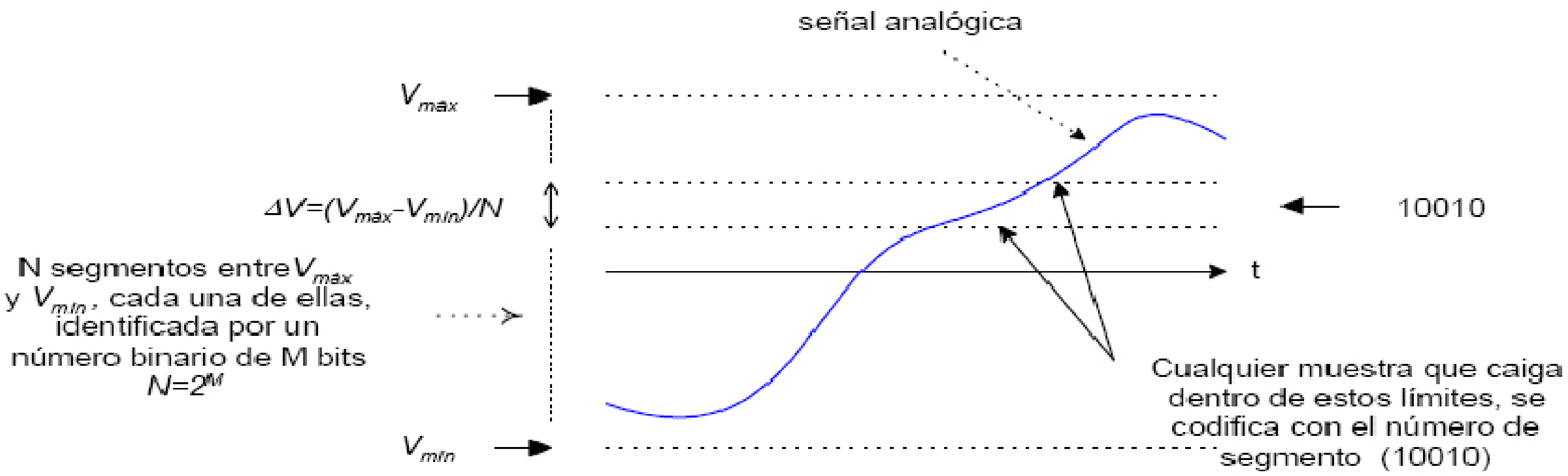
Inconvenientes:

- **Introduce un error ya que no se transmite el valor exacto, sino el discreto más próximo**

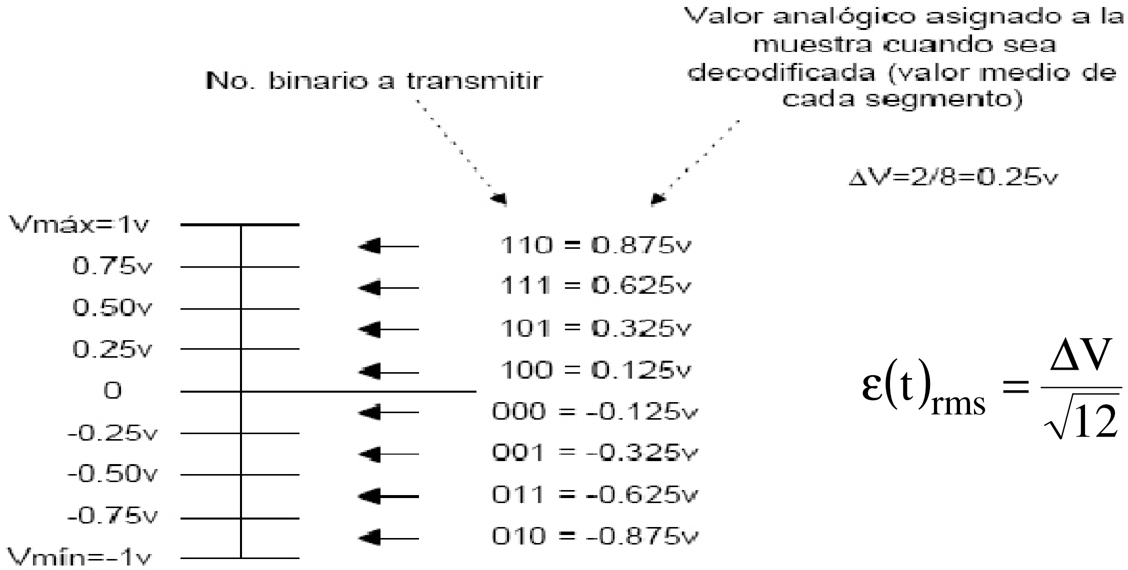
Error de cuantificación

Si se supone que $x(t)$ está limitada en ancho de banda a +/-B Hz y en tensión a $+V_{máx}$ y $-V_{mín}$ volts. Se dispone para la codificación de las muestras de M bits.

Con M bits pueden codificarse $N = 2^M$ valores diferentes, esto significa que el intervalo entre $+V_{máx}$ y $-V_{mín}$ puede dividirse en N segmentos. El mecanismo de cuantización decide que, si una muestra está dentro de alguno de estos segmentos, se asigna a la muestra el valor binario correspondiente. (caso mas simple de cuantificación lineal).

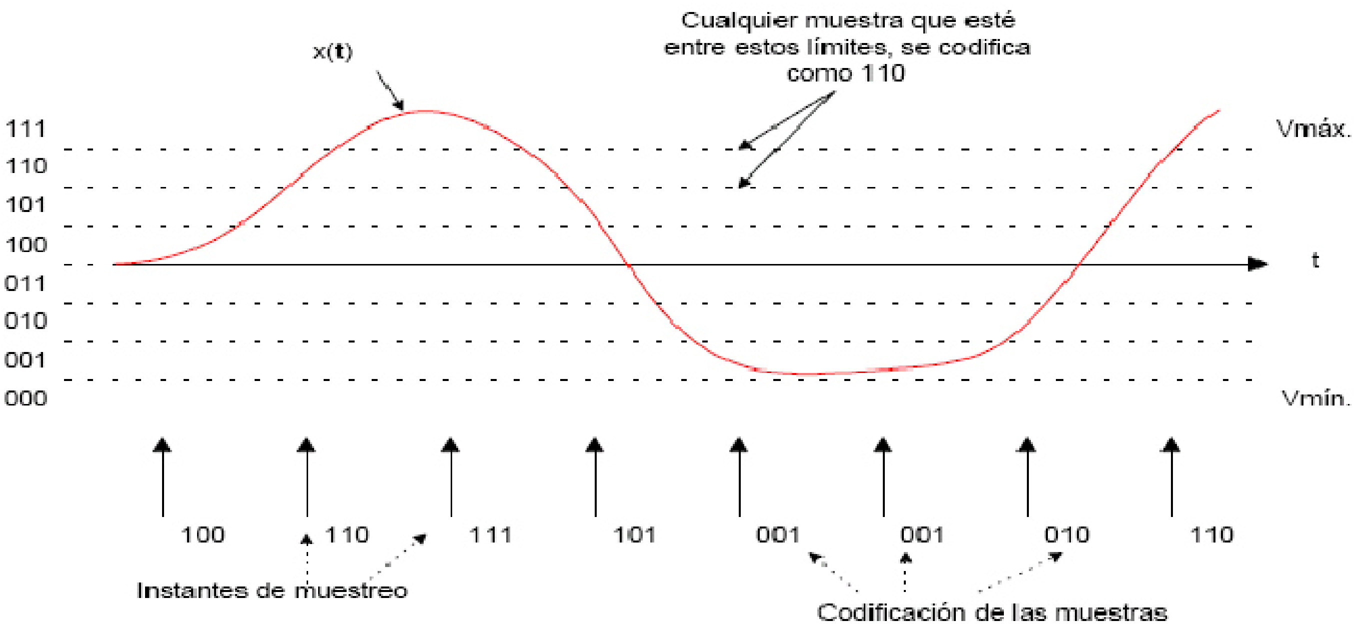


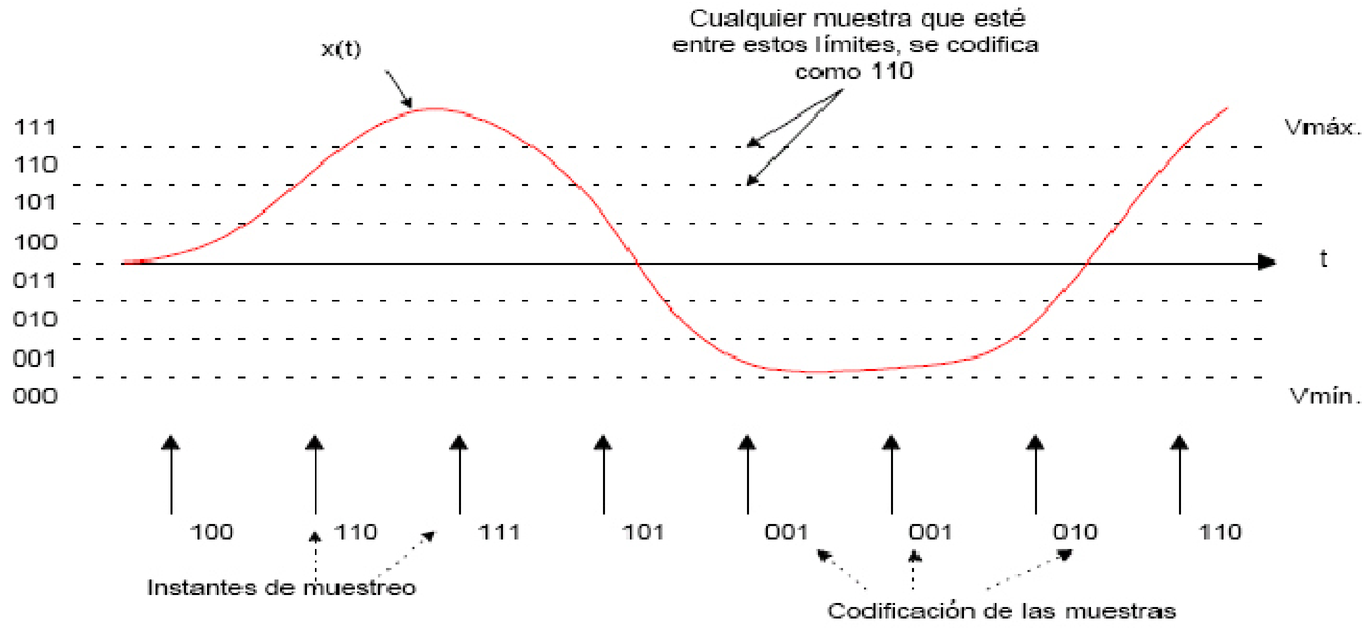
Ejemplo para $M=3$, $N=2^3=8$

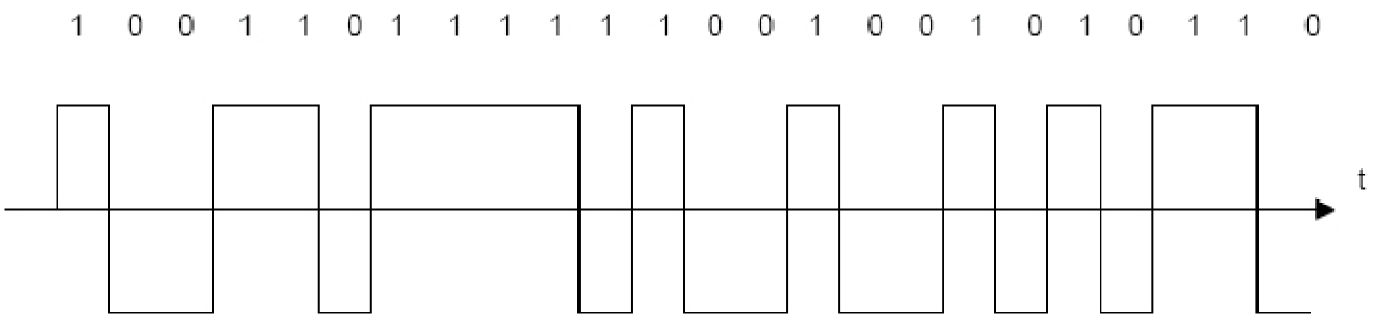


$$\varepsilon(t)_{rms} = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}}$$

Si una muestra determinada vale p.ej. 0.24v será codificada y reconstruida como de 0.125v, lo mismo que una de 0.05v , etc.



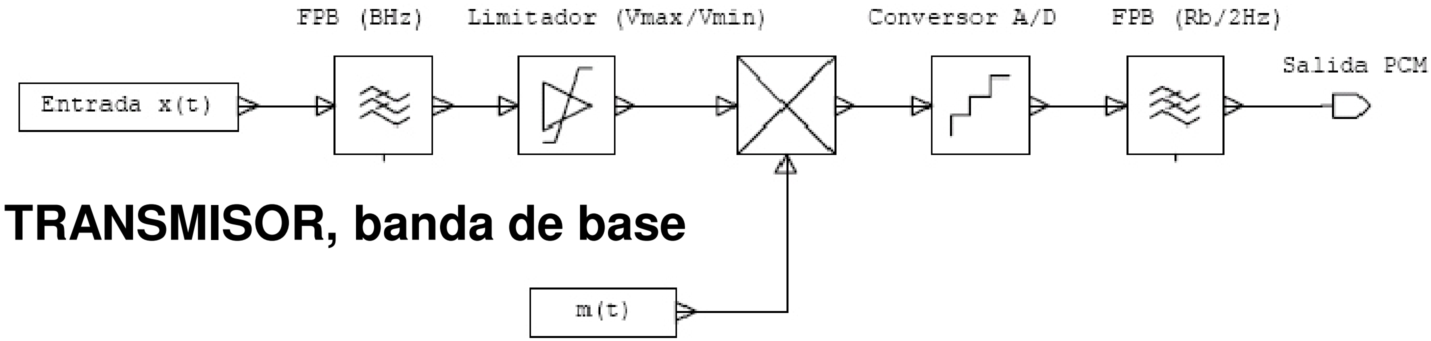




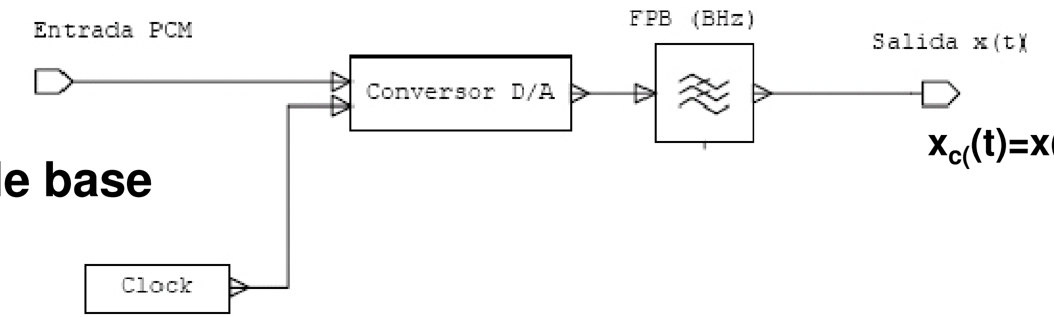
Señal digital a transmitir
(bipolar NRZ)

DETECCIÓN y ERROR DE CUANTIZACIÓN

En el extremo receptor, un conversor D/A transforma el grupo de bits correspondiente a cada muestra en un pulso de amplitud correspondiente al valor binario de la muestra y se regenera, aproximadamente, la señal PAM original. Un posterior filtrado recupera la señal original $x(t)$. La diferencia entre las muestras originales y las reconstruidas puede tomarse, a los efectos del análisis del error de cuantificación, como una señal de ruido que altera el mensaje original. Las muestras decodificadas se consideran muestras exactas de una señal $x_c(t) = x(t) + \varepsilon(t)$, donde $\varepsilon(t)$ es el llamado ruido de cuantificación y $x_c(t)$ es una señal que únicamente toma los valores discretos del cuantizador.



TRANSMISOR, banda de base

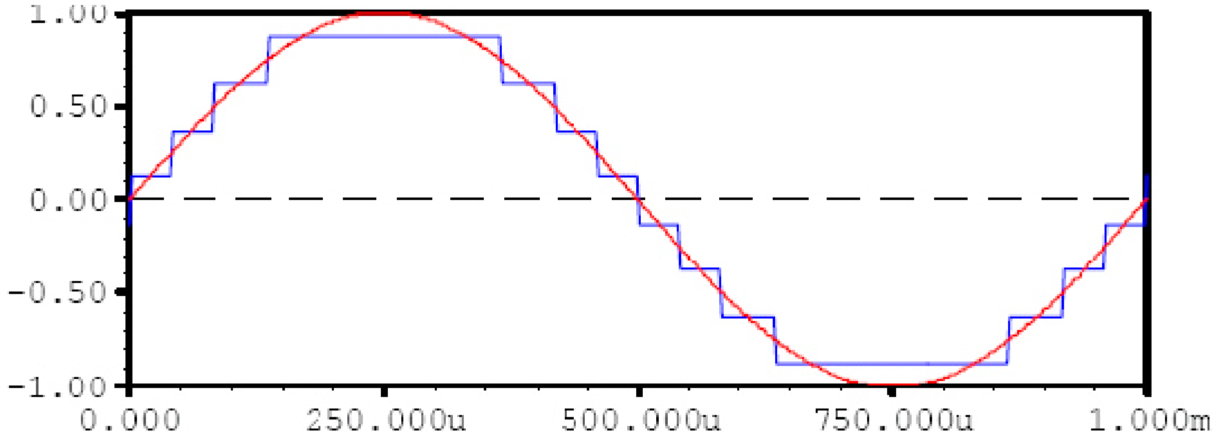


$x_{c(}(t)=x(t) + \varepsilon(t)$

RECEPTOR banda de base

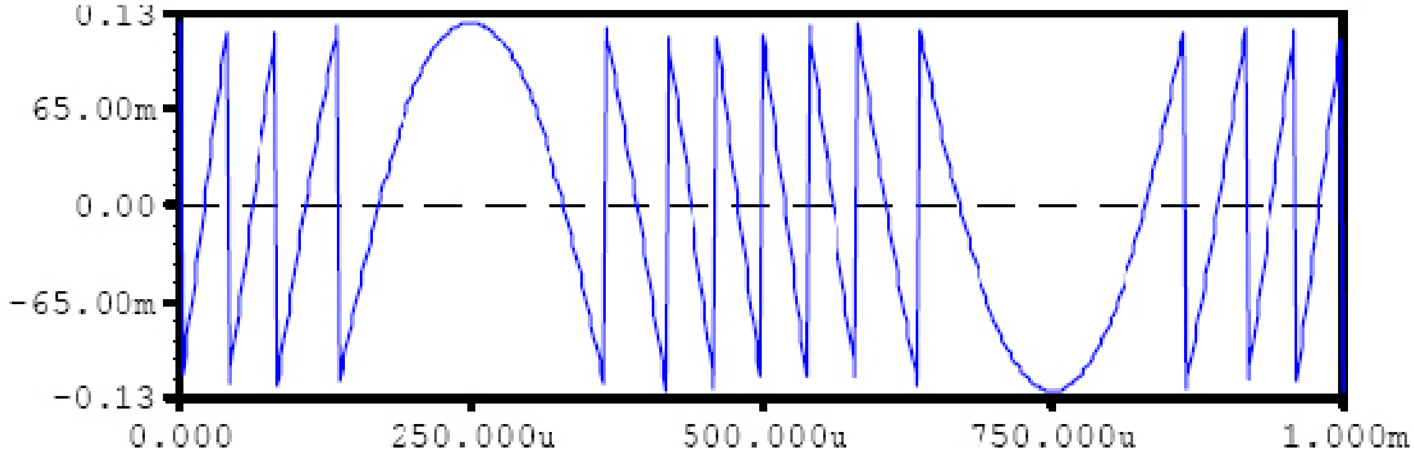
Ejemplo

Gráfico para $x(t)=sen(2\pi 1000Hz.t)$ y $x_c(t)$, cuantificación a 8 niveles (M=3)

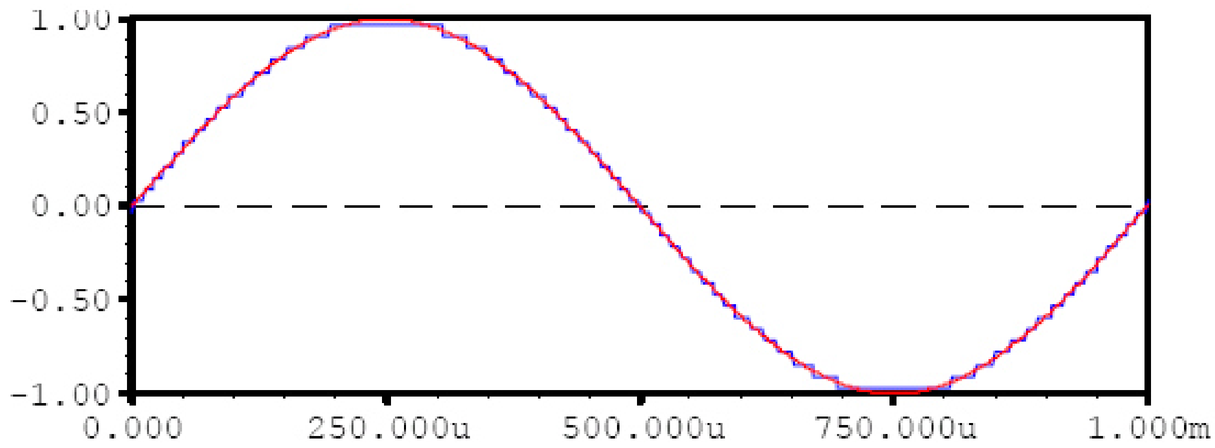


Error de cuantificación:

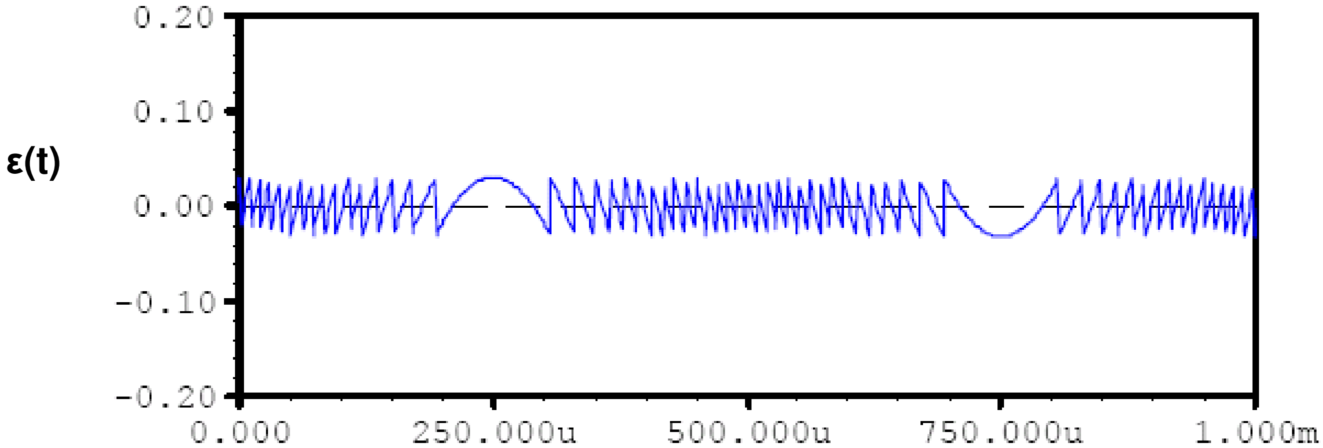
$\varepsilon(t)$



Idem que antes con 32 niveles de cuantificación (M=5)



Error de cuantificación, notar disminución de amplitud con respecto a M=3



Ejemplo:

Una fuente de información produce un mensaje digital binario de 256 kbps, como para su transmisión se dispone de un canal de 50 kHz de ancho de banda, se decide transformarlo en una señal digital de niveles múltiples. Determine:

a) El número de niveles necesario y la cantidad de bits que deberán agruparse en cada símbolo de la señal a transmitir.

b) Cual sería el sistema de modulación más ventajoso para la transmisión?. Justifique su elección.

Solución:

Rb=256 Kbaud

a) Ancho de banda mìnimo necesario =Rb/2 =256/2=128 KHz. Tomo por exceso 150>128 KHz y para obtener una relación de enteros

m= 150/50= 3 bit , grupos de 3 bits, niveles=2^3 = 8 niveles.

Agrupando de a 3 bit el Ancho banda queda reducido a = 128/3 = 42 KHz que pasa por el canal de 50 KHz

Ejemplo 2:

Una señal de audio *x(t)*, limitada en ancho de banda a 3600 Hz se debe transmitir, previa codificación en PCM, por un canal digital (binario) cuya velocidad de transmisión es de 40 kbps.

Calcular:

(a) La frecuencia (mínima) a que se debe tomar las muestras de *x(t)*,

(b) El número (máximo) de bits con que se puede codificar cada muestra

(c), El valor eficaz del ruido de cuantificación suponiendo cuantización uniforme, suponiendo que *x(t)* varía entre ±3volts.

Solución:

Fs=3600 . 2= 7200 Hz, AB=40 Kbaud= 40 KHz, Rb=2. 40 = 80 Kbaud, m=Rb/Fs=80.10^3 /7,2. 10^3 = 10 ,aprox. 2^{10}= 1024 niveles

Codifico de a 10 bits

Delta=6V/1024= 6 mV, ruido o error cuantificacion= 6/raiz de 12 = 3 mV valor rms de ruido.

Ejemplo 3:

Una señal de aleatoria con función de densidad de probabilidad constante entre ±10 volt y limitada en ancho de banda a 12 kHz debe codificarse para ser transmitida por un sistema PCM (supóngalo de cuantificación uniforme). Determinar:

(a)La mínima frecuencia de muestreo,

(b)El número de bits necesarios para codificar en forma binaria cada muestra, si se busca que la relación entre la potencia media de señal y la potencia media de ruido de cuantificación sea mejor que 30 dB

(c)La mínima velocidad de transmisión en baud.

Solución: fs= 2.12 KHz=24 KHz, calculo delta = 0,5, 64 niveles, m=6

Rb= fs. m = 24000 . 6= 144 Kbps, min veloc= Rb/2 = 72 Kbps. ABanda canal= 72 KHz

Ejemplo 4: solución, B=15KHz, fs=44KHz, m=16 bit, N=2^{16}, deltaV=10V/N=150 uV, ε=45 uV

1. Los parámetros básicos de un sistema PCM de grabación de discos compactos de dos canales (estereofónico) son, <u>para cada uno de ellos</u>: Señal analógica de entrada, limitada a 15 kHz de ancho de banda, toma de muestras a 44 kHz y 16 bits disponibles para codificar cada muestra.. Suponiendo que la señal analógica de ambos canales no tiene componente continua y que el muestreo es ideal, calcular: (a) El número de niveles de la señal cuantificada, (b) La velocidad de transmisión <u>por canal</u> de la señal digital resultante y (c) El valor eficaz del ruido de cuantificación, suponiendo cuantización uniforme y que la amplitud de pico de la señal analógica es ± 5 volt.

2. Con los datos básicos del problema anterior, calcular la capacidad en bits que debe tener un disco compacto para almacenar una señal de una hora de duración.

Solución, Tb=1/ Rb=1/m . Rb=1/44.10^3. 16=1,42 10^{-6} seg, en 1 hora= 2,5 Gbits

Ejemplo 5:

solución, fs=10KHz, A=2. Vp, ε=5. 10^{-4}. Vp (V), deltaV=17 . 10^{-4}.Vp (V), N=4000, m=12, Rb=120Kbps

1. Determinar los siguientes parámetros de un sistema PCM para que sea capaz de transmitir una señal analógica de 5 [kHz] de ancho de banda y excursión de tensión entre $\pm V_p$ [volts] bajo la condición de que el error de cuantificación máximo admisible es el 0.05% de V_p : (a) frecuencia de muestreo, (b) N° de bits y (c) velocidad (mínima) de transmisión de la señal digital.

Ejemplo 6: solucion, fs=20KHz, Rb=256Kbps, m=Rb/fs=13 bit, N=2^{13}, deltaV=100V/N=12 mV, ε=3,5 mV

Una tensión analógica definida por $v(t) = \sum_{n=1}^{n=10} 5.sen\left(2\pi n f_0 t + \varphi_n\right)$ [volt] , donde $f_0 = 1$ [kHz] y los φ_n pueden tener cualquier valor entre -π y +π, debe ser transmitida por un sistema de PCM que transmite a 256 kbps. Si se debe diseñar el sistema para minimizar el error de cuantificación, determine (a) El número de muestras por segundo que deben tomarse, (b) El máximo error de cuantificación que tendrá cada muestra para la frecuencia de muestro calculada.