Tema 4 Mensajes y señales digitales

Formatos de transmisión.

Recuperación del mensaje.

Codificación de niveles múltiples.

Distorsión intersimbólica.

Ancho de banda ocupado por la señal digital.

Señales digitales y ruido, probabilidad de error.

Transmisión de señales analógicas en forma digital. Muestreo. Sistemas PCM.

Error de cuantificación.

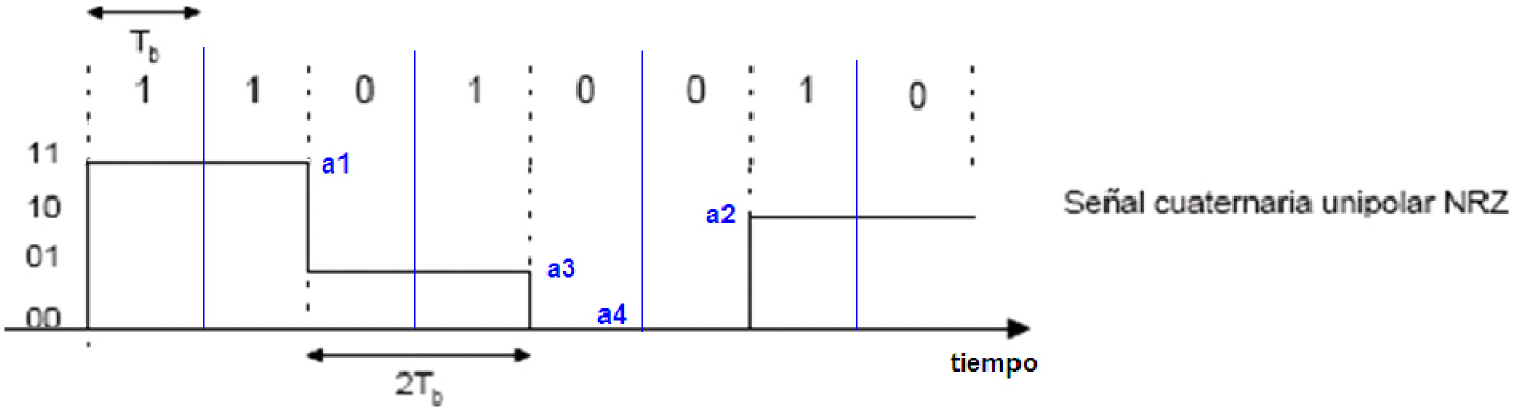
Clase 22

Codificación de niveles múltiples

Transmisión M - aria

- Bit a bit: n=1, transmisión bi-naria (dos amplitudes a_k, k=1, 2)
- De a 2 bit: n=2, transmisión cuater-naria (cuatro amplitudes a_k, k=1, 2, 3, 4)
- etc

Los métodos indicados hasta ahora transmiten bit por bit, es decir, un elemento del mensaje digital se transforma en un elemento de la señal digital, ambos con la misma duración. Es posible generar una señal digital en que, cada elemento represente una determinada secuencia de bits del mensaje digital. En éste caso, la señal digital no será binaria.



En la figura de arriba, se codifican los bits del mensaje de a dos y se asigna a cada elemento de la señal digital un valor de amplitud diferente para cada una de las cuatro secuencias posibles (00, 01, 10, 11). En general, si se codifican n elementos del mensaje digital, harán falta 2^n niveles de la señal digital. Cada uno de estos niveles puede durar hasta nT_b segundos sin que se produzca distorsión intersimbólica, es decir que la velocidad de transmisión se puede reducir a $R_{bs} = \dfrac{1}{nT_b}$ $[baud]$.

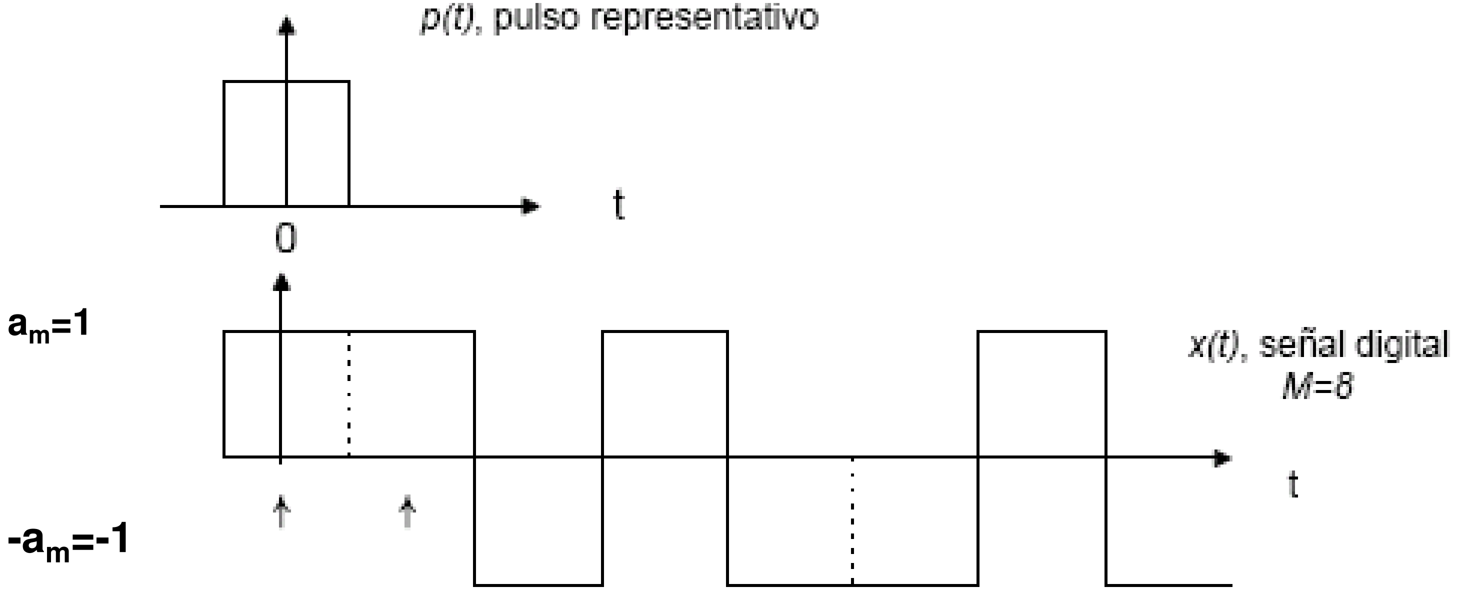
Ventaja: transmisión en menor ancho de banda Desventaja: a mayor *n* aumenta la dificultad de detección.

Distorsión intersimbólica *(inter-symbol interference: ISI)*

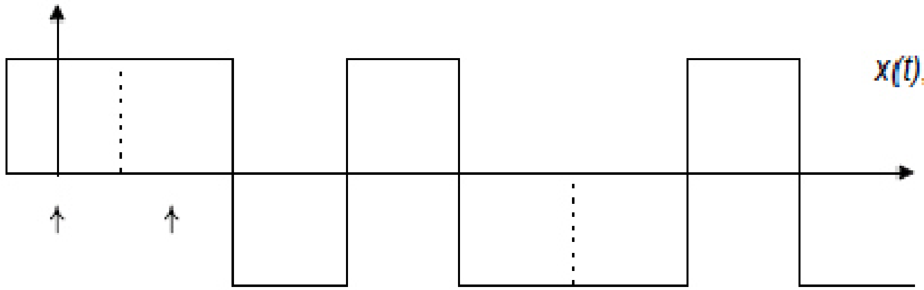
Existe distorsión intersimbólica cuando parte de la señal correspondiente a un determinado bit se difunde a bits adyacentes, eventualmente capaz de generar errores.

Si se adopta, para la señal digital, un pulso *p(t)* para representar cada elemento del mensaje digital, una señal de *M* bits de duración puede ponerse como:

$$x(t) = \sum_k a_k \cdot p(t - k \cdot T_b) = p(t) * \sum_k a_k \cdot \delta(t - k \cdot T_b)$$



donde *k* varía de *1* a *M* y cada valor a_k puede tomar únicamente el valor *+1* o *-1* (se supone transmisión bipolar, si fuera unipolar, sería *1* o *0*). En el ejemplo de arriba, *M=8* y el mensaje es 1 1 0 1 0 0 1 0, es decir que $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=-1$ $a_4=1$, $a_5=-1$, $a_6=-1$, $a_7=1$ y $a_8=-1$.



Si se toman muestras de $x(t)$ en el centro de cada bit, es decir en $t=0, T_b, 2T_b, \dots$, se tiene que, una muestra genérica en algún instante mT_b, donde m es entero y $1 \le m \le M$ vale:

$$x(mT_b) = \sum_k a_k . p(m.T_b - k.T_b) = \sum_k a_k . p((m-k).T_b) = \underbrace{a_m . p(0)}_{\neq \text{ cero}} + \underbrace{\sum_{\text{para todo } k, \text{ excepto } k=m} a_k . p((m-k).T_b)}$$

=0 para todo k excepto k=m.Si es ≠ 0 hay distorsiòn intersimbólica

Notar que $(m\text{-}k)$ es siempre un número entero, positivo o negativo. Para tener distorsión intersimbólica nula, el segundo término tiene que ser igual a 0. Ello se consigue si: (a) $p(t)$ es limitado en tiempo a no mas de T_b seg. de duración y $p(0)$ tiene valor no nulo (el caso de la figura) y (b) $p(0)$ es no nulo y $p(t)$ es nulo a múltiplos + o - de T_b

Si m=5 y k=7 , m-k=-2 . Si a_7. p(-2) ≠ 0 hay distorsión por solapamiento del bit 5 con el bit 7 y asi sucesivamente

Conclusión:
cada bit transmitido dura Tb segundos, los bit aparecen a la frecuencia Rb=1/Tb baud,
Para recuperar el mensaje digital debo tomar muestras a la misma frecuencia con un retardo de Tb/2 segundos (en la mitad de cada bit). Por lo tanto debo recuperar las señal de “clock” del mensaje digital.

Ancho de banda ocupado por la señal digital

Si la señal *x(t)* es transmitida a través de un filtro pasa bajos con función de transferencia *H(f)*. El espectro de la salida (respuesta) será: $R(f) = X(f).H(f)$

Si:

$$x(t) = p(t) * \sum_k a_k.\delta(t - k.T_b) = p(t) * i(t)$$

Se tiene que: $X(f) = P(f).I(f)$ y $R(f) = P(f).I(f).H(f)$

Donde *P(f)* y *H(f)* son funciones conocidas e *I(f)* dependerá de los coeficientes a_k del mensaje digital. Si se define un filtro pasa bajos ideal cuya característica de transferencia sea:

$$H(f) = \frac{1}{P(f)}.rect(f, R_b)$$

Filtro con espectro rectangular

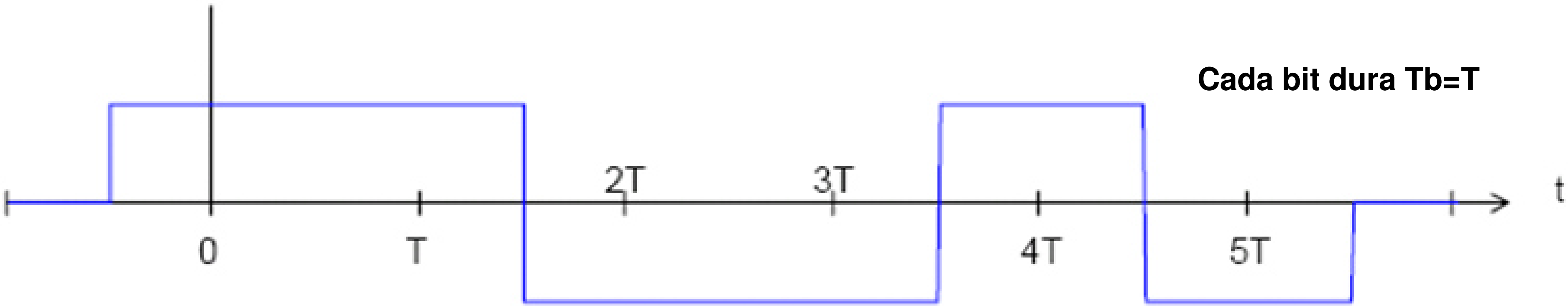
Rb expresado en Hz

es decir transmisión limitada en ancho de banda entre *-Rb/2* y *Rb/2*, el espectro de la respuesta será: $R(f) = I(f).rect(f, R_b)$, y en dominio de tiempo, a través de su transformada inversa:

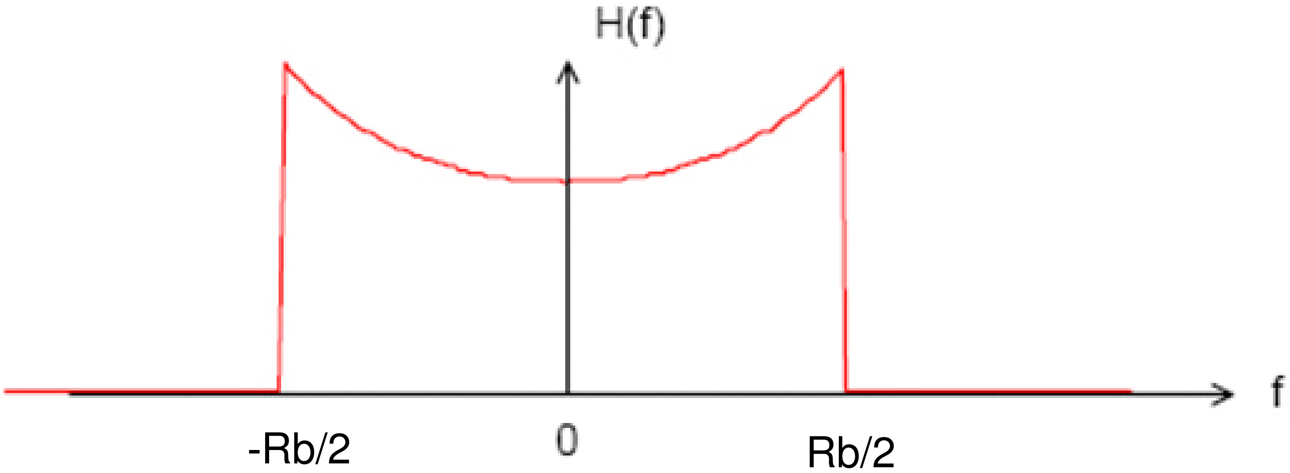
$$r(t) = i(t) * R_b \frac{sen(\pi.R_b.t)}{\pi.R_b.t} = \sum_k a_k.\delta(t - k.T_b) * \frac{sen(\pi.R_b.t)}{\pi.R_b.t}$$

como $R_b = 1/T_b$, se ve que *r(t)* toma en los instantes *mTb* el valor correspondiente al término a_m únicamente, siendo la distorsión intersimbólica nula.

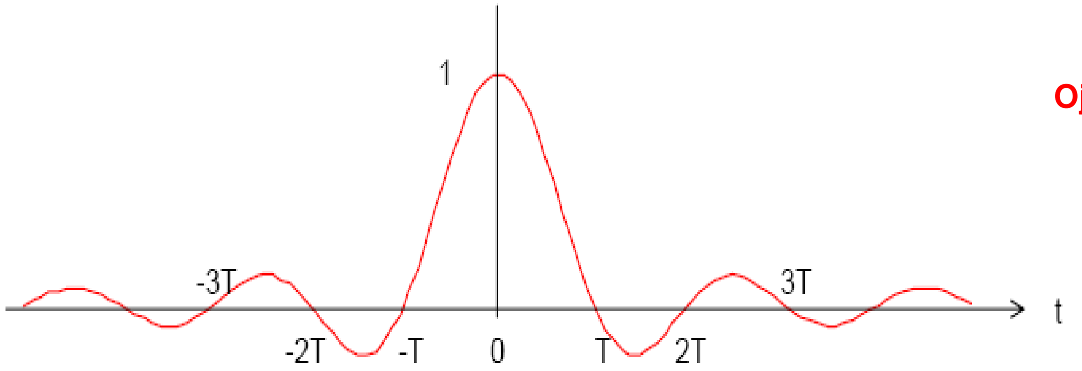
Suponer un mensaje digital 1 1 0 0 1, codificado en forma polar NRZ y $p(t)=rect(t,T_b)$:



La función de transferencia del filtro será :

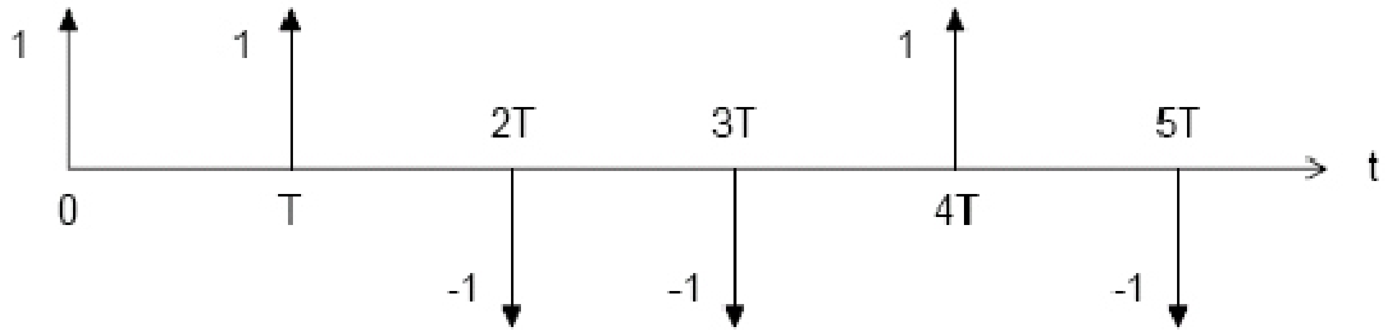


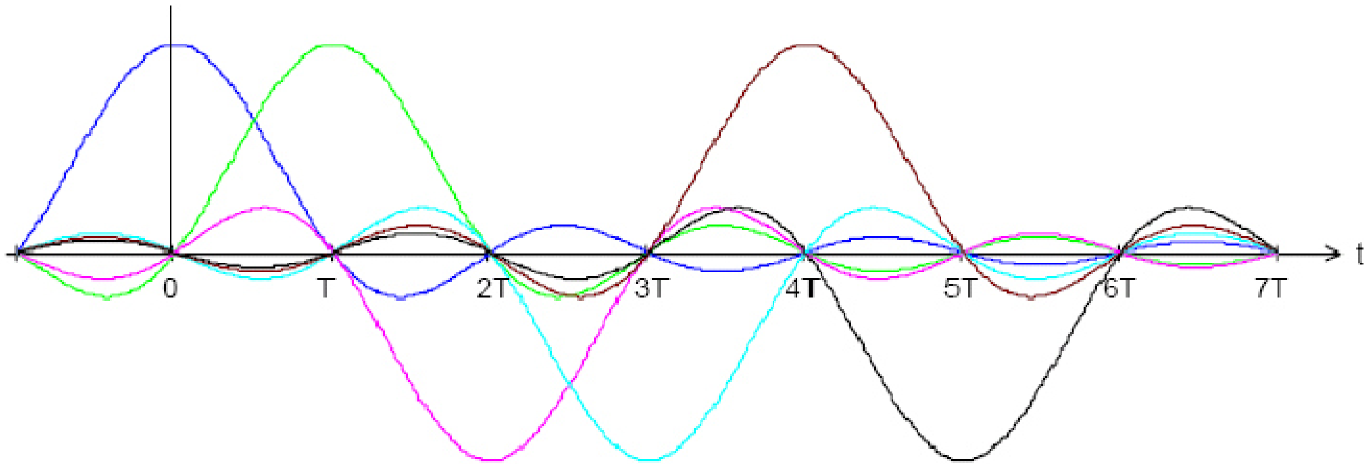
La respuesta, en dominio de tiempo será : $r(t) = \sum_k a_k.\delta(t - k.T_b) * \frac{sen(\pi.R_b.t)}{\pi.R_b.t}$, que es la convolución de:



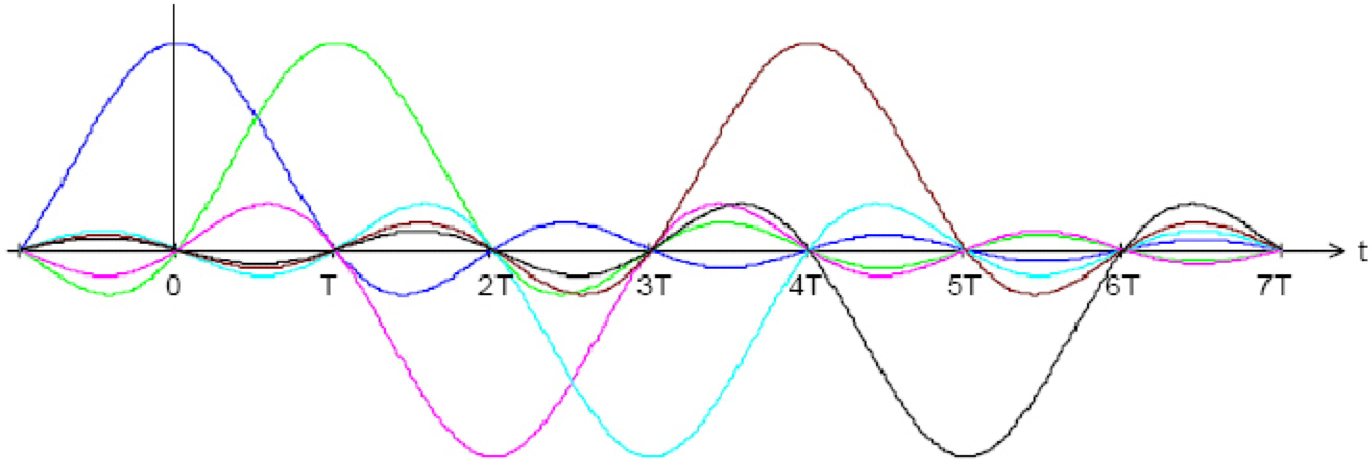
Ojo cada bit dura Tb=T

Mensaje digital 1 1 0 0 1 0





que da como resultado a la forma de onda *sen(x)/x* trasladada a las posiciones de los impulsos y multiplicada por el área de cada uno de ellos.:

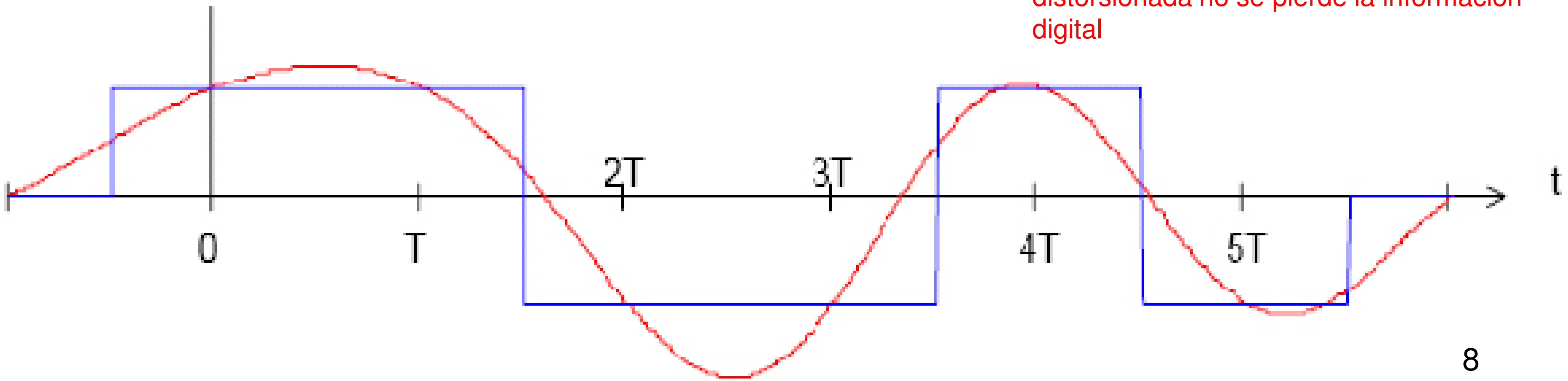


Notar que, en los instantes de muestreo, la única contribución a la señal de salida es la correspondiente al dígito generado en ese instante, las contribuciones de todos los demás es cero. Obviamente la respuesta que es la suma de las señales individuales, está distorsionada pero mantiene los valores originales en los instantes de muestreo.

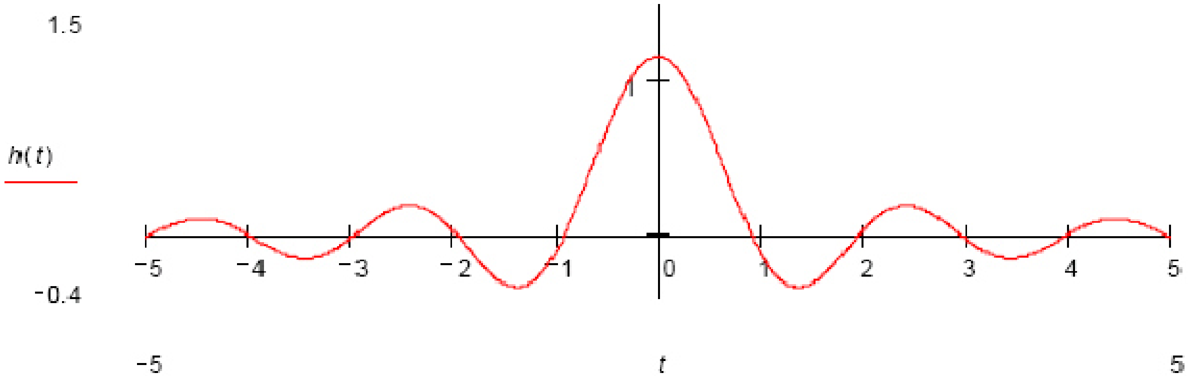
$$r(t) = \sum_k a_k.\delta(t - k.T_b) * \frac{sen(\pi.R_b.t)}{\pi.R_b.t}$$

Mensaje digital 1 1 0 0 1 0

Notar que a pesar que la señal está muy distorsionada no se pierde la información digital



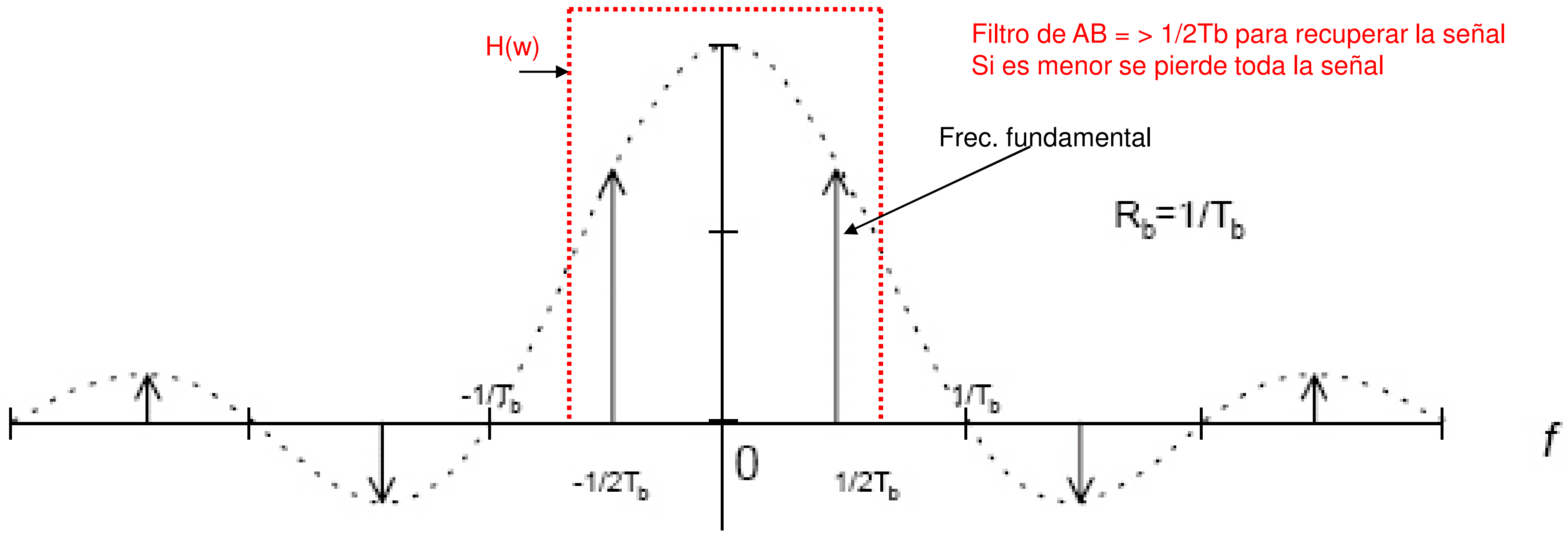
La respuesta al impulso (normalizada para $T_b=1$) del filtro $H(f)$ es: $h(t)=\int_{-0.5}^{0.5}\frac{\pi f}{\sin(\pi f)}.e^{j2\pi ft}.df$



La respuesta al impulso $h(t)$ se anula a múltiplos de T_b. Puede demostrarse que, en general, no existe distorsión intersimbólica si una señal digital se transmite a través de filtros que cumplen con esta característica.

Lo anterior indica que una señal digital de R_b baud puede ser transmitida, sin perder información, en un ancho de banda de $R_b/2$ Hz$^+$ (ancho de banda de Nyquist) utilizando un filtro adecuado. Además, el ancho de banda $R_b/2$ Hz es el valor mínimo (teórico) adecuado para la transmisión sin distorsión. Esto surge de la siguiente consideración:

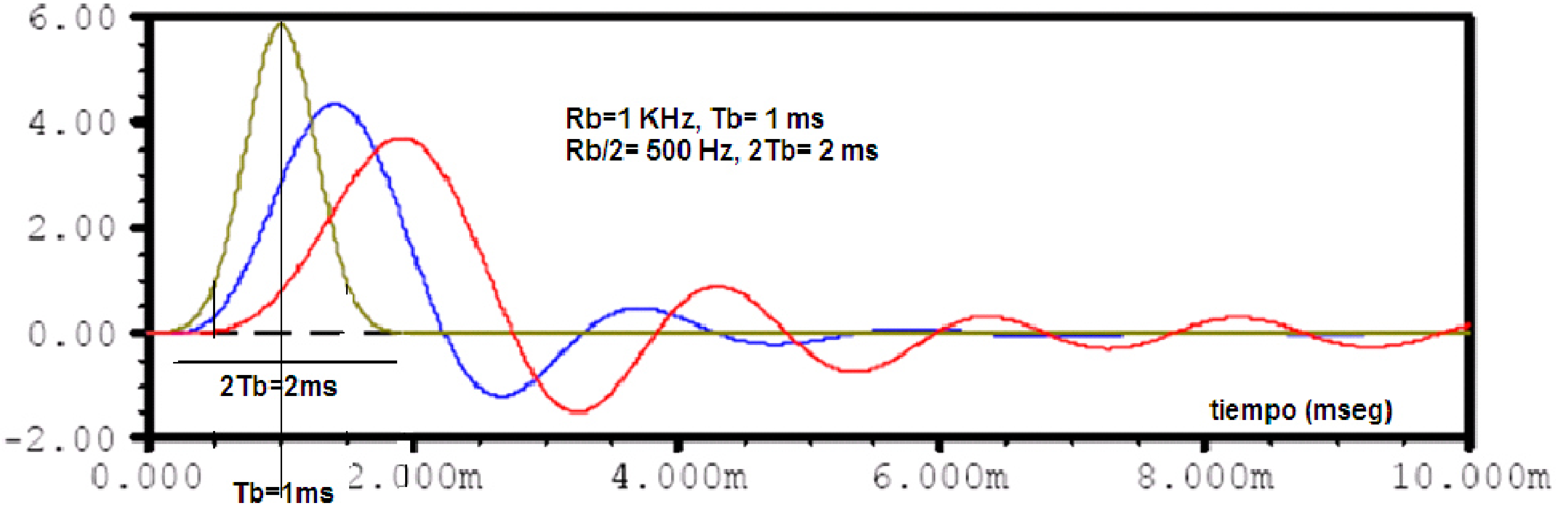
Suponer una secuencia ... 1 0 1 0 1 0 ... , que puede considerarse, desde el punto de vista de ocupación de ancho de banda, como el caso mas desfavorable de un sistema de transmisión digital. Suponiendo, como antes, transmisión polar NRZ y $p(t)=rect(t,T_b)$, su espectro será :



Si se filtra la señal con un filtro rectangular ideal que tenga transmisión constante entre $-\frac{R_b}{2}-\Delta f$ y $\frac{R_b}{2}+\Delta f$ [Hz] con $\Delta f \rightarrow 0$, el resultado será de dos impulsos en $\pm R_b/2$, que en dominio de tiempo representa una señal armónica de frecuencia $R_b/2$ Hz, es decir que mantiene la información digital ... 1 0 1 0 1 0 ... mientras que si se reduce el ancho de banda del filtro a $-\frac{R_b}{2}+\Delta f$ y $\frac{R_b}{2}-\Delta f$ [Hz], no existe salida. Esto sugiere que el ancho de banda $R_b/2$ es el mínimo admisible.

En la práctica, se toma el ancho de banda necesario para transmitir una señal digital de R_b bps entre $0,5R_b$ y R_b [Hz], usualmente $0,75.R_b$.

Respuesta al impulso (aplicado en *t=0*) de algunos filtros reales:

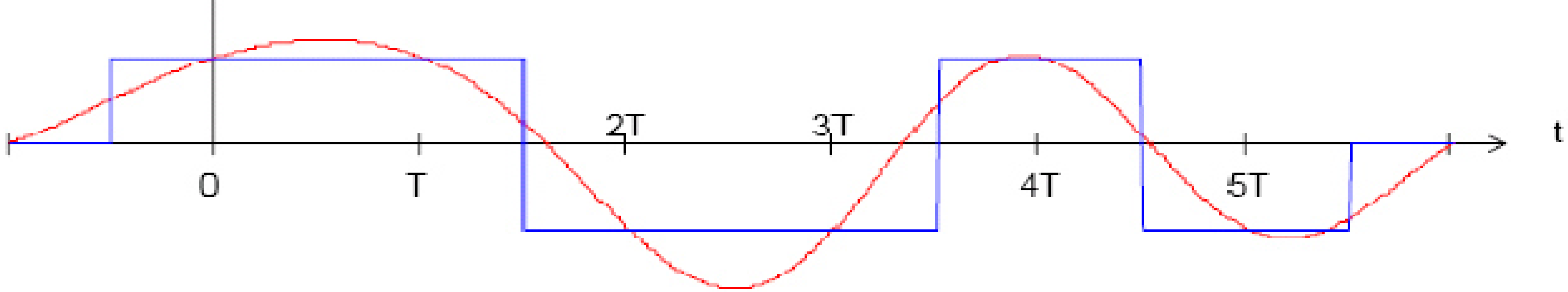


Por orden a partir de t=0: Gaussiano, Butterworth(orden 6), Chebychev (Orden 6, ripple 1dB), todos con

frecuencia de corte de –3dB de 500 Hz . Notar que, para una señal de *Rb=1* [kbaud], salvo el Gaussiano, introducirían distorsión intersimbólica, mayor en el Chebychev que en el Butterworth.

RESUMEN: $x(mT_b)=\sum_k a_k.p(mT_b-k.T_b)=\sum_k a_k.p((m-k).T_b)=a_m.p(0)+\sum_{para\ todo\ k,\ excepto\ k=m} a_k.p((m-k).T_b)$

Mensaje digital 1 1 0 0 1 0



Distorsión intersimbólica
Para tener distorsión intersimbólica nula el segundo tèrmino debe ser = 0.
Esto se consigue si:
a) p(t) dura no mas de Tb segundos y
b) p(0)≠0 y p(t) = 0 a múltiplos enteros (+) o (–) de Tb.

Ancho de Banda de la señal digital
Una señal digital de Rb baud puede ser transmitida, sin perder información, en un ancho de banda De Rb/2 Hz (ancho de banda de Nyquist) <u>utilizando un filtro adecuado.</u> Además, el ancho de banda Rb/2 Hz es el valor mínimo (teórico) adecuado para la transmisión sin distorsión.

Ojo las unidades. Si Rb=64 Kbps el ancho de banda mínimo es Rb/2 = 32 KHz