

8.3.- Modulación angular

En este caso, la señal moduladora actúa sobre $\phi(t)$, y la amplitud se mantiene constante:

$$e(t) = A.a(t). \cos(\omega_0.t + \phi(t))$$

Si $a(t) = \text{cte.} = 1$ y $\omega_0 = 2.\pi.f_0$: $e(t) = A.\cos(\omega_0.t + \phi(t)) = A.\cos(\theta(t))$

donde: $\theta(t) = \omega_0.t + \phi(t)$

Si se representa $e(t)$ mediante un vector giratorio: $e(t) = \text{Re} \left[A.e^{j\theta(t)} \right]$, su velocidad angular de giro será:

$$\omega_I(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_0 + \omega_i(t)$$

$\omega_I(t)$ es la velocidad (frecuencia) angular instantánea y $\omega_i(t)$ es la velocidad (frecuencia) angular instantánea variacional, con respecto a ω_0 . También se la menciona como “desviación instantánea de frecuencia”.

8.3.1.- Modulación angular de señales analógicas

En modulación angular pueden darse dos casos:

Modulación de fase (PM): El ángulo de fase $\phi(t)$ es proporcional al mensaje modulador:

$\phi(t) = k_p.x(t)$, donde la dimensión de k_p es [rad/volt]

La frecuencia instantánea será: $\omega_I(t) = \omega_0 + \omega_i(t) = \omega_0 + k_p \cdot \frac{dx(t)}{dt}$

La máxima desviación posible de fase que ocurre cuando $x(t)$ toma sus valores extremos x_{\max} y x_{\min} , $\phi(t)_{\max} = k_p.x_{\max}$ y $\phi(t)_{\min} = k_p.x_{\min}$, al mayor valor se lo llama la máxima desviación de fase $\Delta\phi$.

Modulación de frecuencia (FM): La derivada del ángulo de fase $\phi(t)$ es proporcional al mensaje

modulador: $\frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_i(t) = k_\omega.x(t)$ y la fase instantánea: $\phi(t) = \int_{-\infty}^t k_\omega.x(z).dz = k_\omega \cdot \int_{-\infty}^t x(z).dz$

en unidades prácticas: $f_i(t) = \frac{1}{2.\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = k_f.x(t)$ [Hz]

Las constantes k_ω y k_f tiene dimensión [rad/seg.volt] o [Hz/volt] respectivamente.

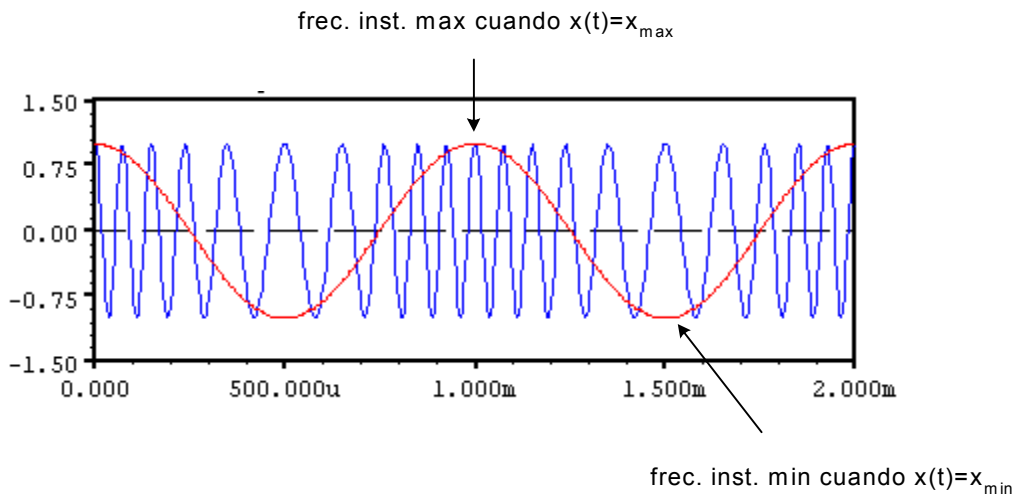
Igual que antes, La máxima desviación de frecuencia instantánea posible, respecto a ω_0 es el mayor valor $k_f.x_{\max}$ o $k_f.x_{\min}$, normalmente mencionada como $\Delta\omega$ o Δf .

Resumen:

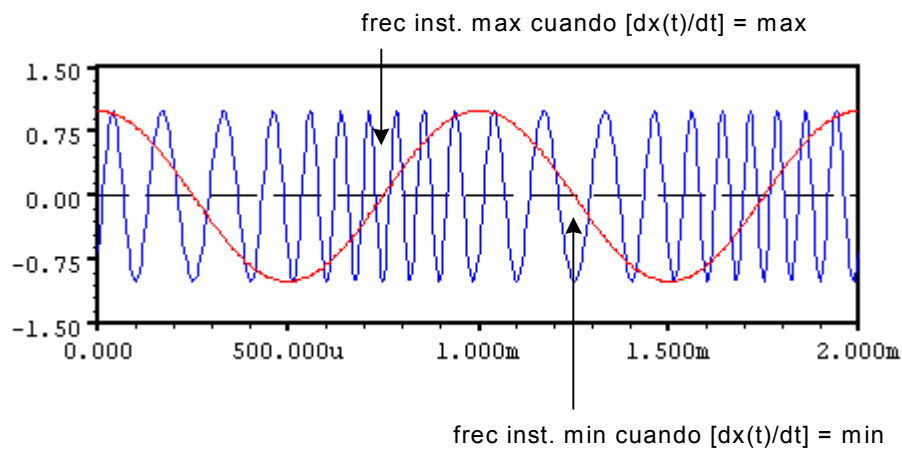
	PM	FM
$\phi(t)$	$k_p.x(t)$	$k_\omega \cdot \int x(t).dt$
$\Delta\phi$	$k_p.x_{\max}$	$k_\omega \cdot \left[\int x(t).dt \right]_{\max}$
$\omega_i(t)$	$k_p \cdot \frac{dx(t)}{dt}$	$k_\omega.x(t)$
$\Delta\omega$	$k_p \cdot \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]_{\max}$	$k_\omega.x_{\max}$

Ejemplo de modulación angular cuando $x(t) = \sin(2\pi.1000.t)$ y $f_0 = 10\text{kHz}$:

a) FM

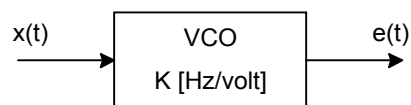


b) PM



8.3.2.- Generación de señales moduladas en ángulo

El generador más simple de modulación angular es el oscilador controlado por tensión (VCO), en él, la frecuencia instantánea de salida es proporcional a una tensión de control:



Entrada (tensión de control) = $x(t)$ Salida $e(t) = A \cdot \cos(\vartheta(t)) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi(t))$

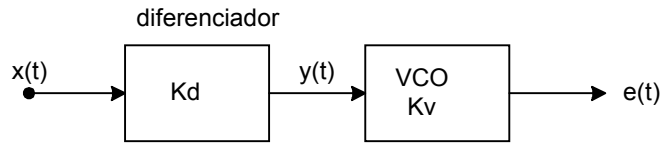
Función de transferencia VCO: $\omega_1(t) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} = K_v \cdot x(t) = \left(\omega_0 + \frac{d\phi(t)}{dt} \right) = (\omega_0 + \omega_i(t))$ o en términos

prácticos: $f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\vartheta(t)}{dt} = \frac{K_v}{2\pi} \cdot x(t) = \left(f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \right) = (f_0 + f_i(t)) = K'_v \cdot x(t)$ donde la dimensión de K'_v es $\{Hz/volt\}$.

La frecuencia central ω_0 es fijada con componentes externos al VCO y ajustada con un eventual tensión continua de polarización (bias) que en algunos casos puede ser una componente de $x(t)$. Para el análisis de

funcionamiento del VCO, normalmente se supone que que $f_i(t) = f_0$ cuando $x(t) = 0$ y además que $\langle x(t) \rangle = 0$.
Entonces: $\omega_i(t) = K_v \cdot x(t)$ o $f_i(t) = K_v' \cdot x(t)$

Para generar modulación de fase, un esquema posible es:



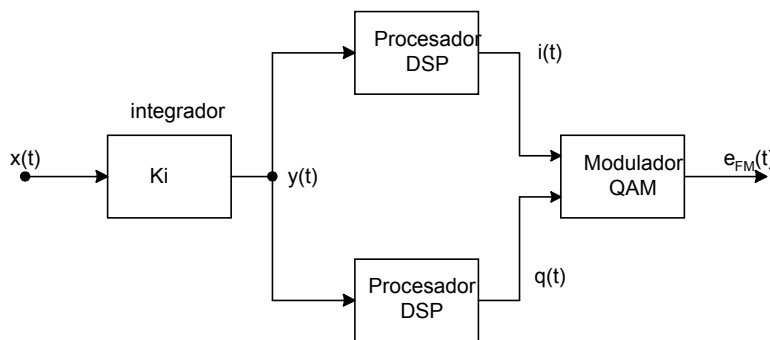
$y(t) = K_d \cdot \frac{dx(t)}{dt}$ donde K_d es una constante de dimensión [seg]. La frecuencia instantánea variacional de $e(t)$

será: $\omega_i(t) = K_v \cdot y(t) = K_v \cdot K_d \frac{dx(t)}{dt}$, mientras que la fase: $\phi(t) = \int \omega_i(t) \cdot dt = K_v \cdot K_d \cdot \int \frac{dx(t)}{dt} \cdot dt = K_v \cdot K_d \cdot x(t)$
[rad]

Otra forma de implementar un modulador de ángulo es mediante un modulador I/Q:

Como $e(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi(t)) = A \cdot \cos(\phi(t)) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - A \cdot \text{sen}(\phi(t)) \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$

Se tiene, para generar FM: $e_{FM}(t) = A \cdot \cos\left(k_f \cdot \int_{-\infty}^t x(t) \cdot dt\right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - A \cdot \text{sen}\left(k_f \cdot \int_{-\infty}^t x(t) \cdot dt\right) \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$



$y(t) = K_i \cdot \int x(t) \cdot dt$, $i(t) = \cos(K_1 \cdot y(t)) = \cos\left(K_i K_1 \cdot \int x(t) \cdot dt\right)$,

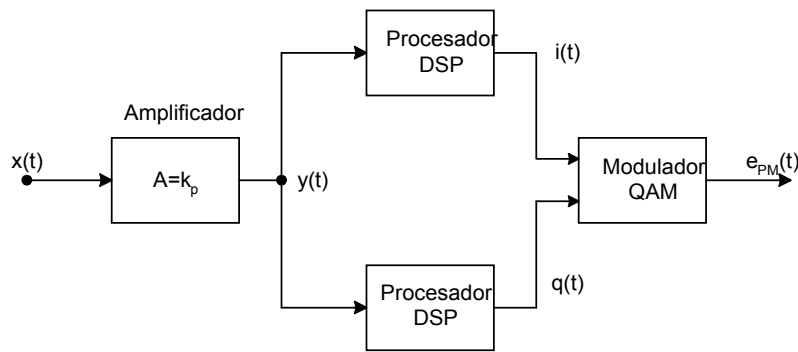
$q(t) = \sin(K_1 \cdot y(t)) = \sin\left(K_i K_1 \cdot \int x(t) \cdot dt\right)$ donde K_i y K_1 son factores de escala de dimensión [1/seg] y [rad/v] respectivamente.

$e_{FM}(t) = A \cdot i(t) \cdot \cos(\omega_0 t) + A \cdot q(t) \cdot \sin(\omega_0 t) =$

$$A \cdot \cos\left(K_i \cdot \int x(t) \cdot dt\right) \cdot \cos(\omega_0 t) + A \cdot \sin\left(K_i \cdot \int x(t) \cdot dt\right) \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Para generar PM:

$e_{PM}(t) = A \cdot \cos(k_p \cdot x(t)) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - A \cdot \text{sen}(k_p \cdot x(t)) \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t)$

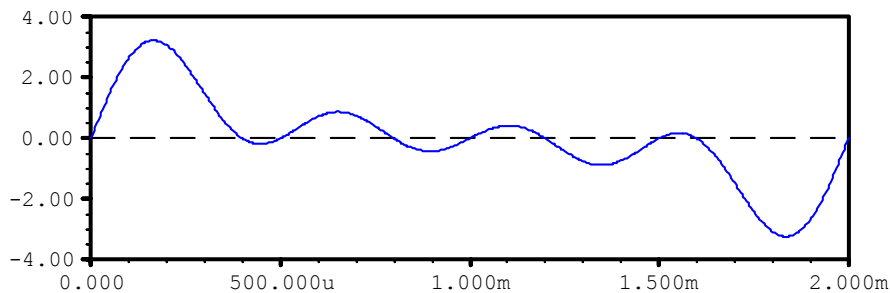


El análisis del diagrama en bloques es idéntico al caso de FM.

8.4.- Análisis espectral de señales moduladas en ángulo

Determinar el espectro de frecuencia de señales moduladas en ángulo es un proceso complicado matemáticamente. se puede analizar el contenido espectral de $e(t)$ utilizando para $x(t)$ señales simples p.ej. \sin o \cos o analizar, utilizando DFT, el espectro de señales específicas y tratar de generalizar los resultados,. En la práctica se usa la Regla de Carson, que dice que el ancho de banda ocupado por una señal modulada en ángulo es, aproximadamente, para FM: $W \approx 2 \cdot (\Delta f + B)$ y para PM: $W \approx 2 \cdot B(\Delta \phi + 1)$, donde B es al ancho de banda de $x(t)$ y Δf , $\Delta \phi$ la máxima desviación de frecuencia o fase ($\Delta \phi$ [radianes]).

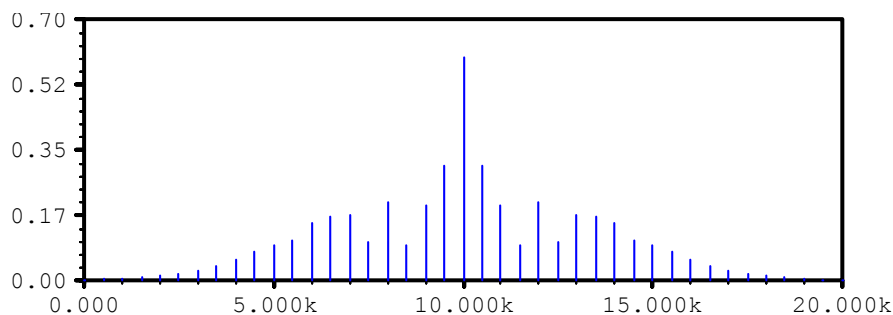
Ejemplos: Se utiliza como señal moduladora la suma de cuatro tonos armónicos de 500, 1000, 1500 y 2000 Hz de la misma amplitud (1 volt). Gráfico de $x(t)$:



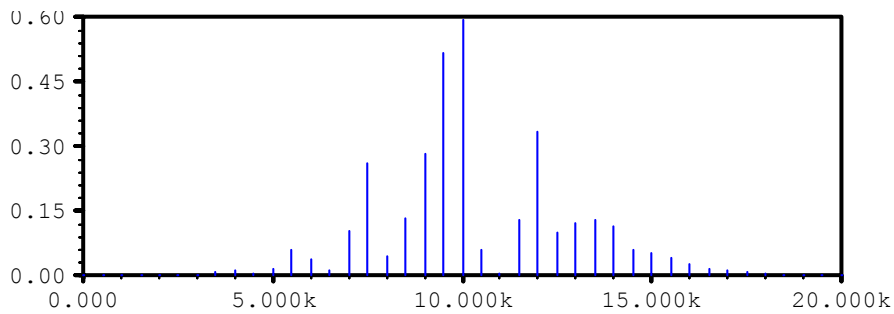
$$x_{max} = x_{min} = 3.3v$$

a) Señal de FM, frecuencia de portadora $f_0 = 10 \text{ kHz}$ y $\Delta f = 5 \text{ kHz}$. Ancho de banda pronosticado: $2(5+2)=14 \text{ kHz}$, es decir se espera que el espectro de la señal modulada abarque de $10-7 = 3 \text{ kHz}$ a $10+7 = 17 \text{ kHz}$.

Espectro:



b) Señal de PM, frecuencia de portadora $f_0 = 10 \text{ kHz}$ y $\Delta\phi = 2.5 \text{ rad}$. Ancho de banda pronosticado: $2.2 \cdot (2.5 + 1) = 14 \text{ kHz}$, igual que antes, se espera que el espectro de la señal modulada abarque de $10 - 7 = 3 \text{ kHz}$ a $10 + 7 = 17 \text{ kHz}$. Espectro:



Los gráficos obtenidos confirman (aproximadamente) el pronóstico, según la regla de Carson.

8.5.- Modulación angular de señales digitales

Si $x(t)$ es una señal digital bipolar NRZ de amplitud ± 1 y se aplica a un modulador de FM de fase continua (p.ej. VCO), se tiene que:

cuando $x(t) = 1$ $f_i = f_0 + \Delta f$ y cuando $x(t) = -1$, $f_i = f_0 - \Delta f$

Es decir que $e(t)$ será:

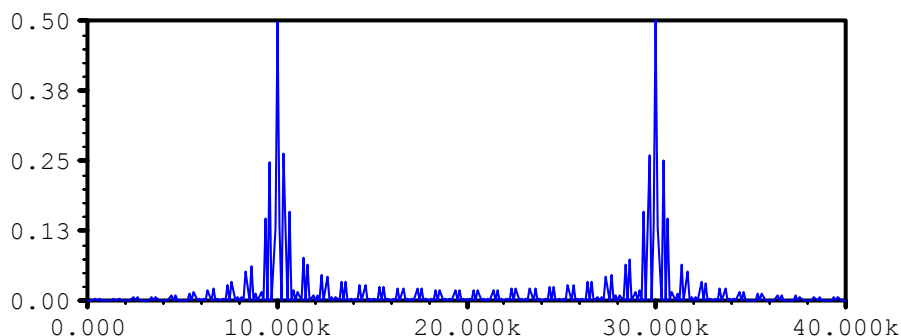
$$\text{cuando } x(t) = 1 \quad e(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (f_0 + \Delta f) \cdot t)$$

$$\text{cuando } x(t) = -1 \quad e(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (f_0 - \Delta f) \cdot t)$$

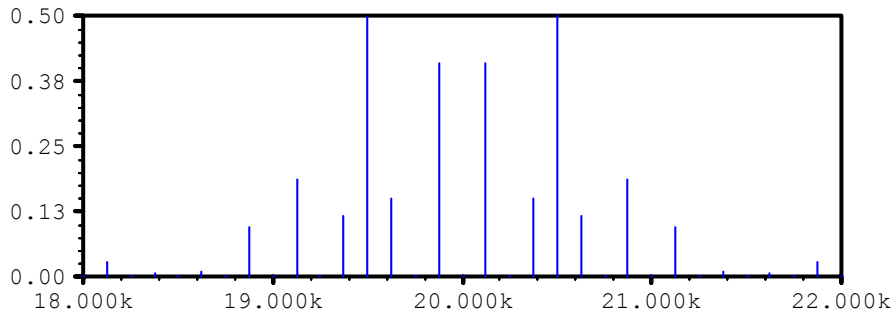
El método se denomina FSK (Frequency Shift Keying).

La regla de Carson es válida para el caso de transmisión digital: si la señal digital $x(t)$ es de velocidad R_b bps (ancho de banda teórico $R_b/2$ Hz) el ancho de banda ocupado por la señal FSK será, aproximadamente, $W = 2 \cdot (\Delta f + R_b/2)$ Hz.

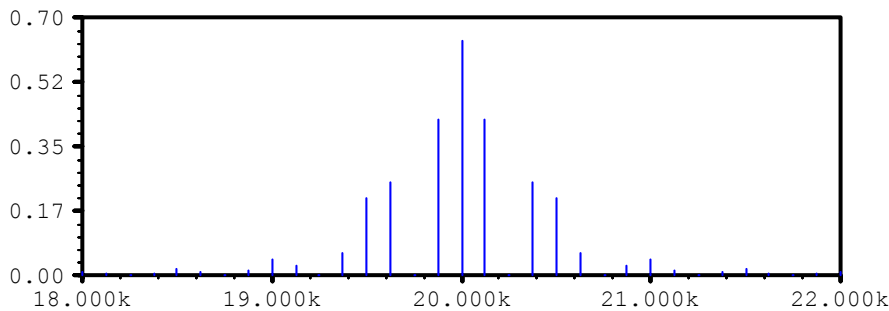
Cuando $\Delta f \gg R_b$, caso de FSK de banda ancha (WFSK), el espectro de la señal modulada se concentra en las frecuencias de 1 y 0 (lógicos) y puede considerarse la señal FSK como la suma de dos señales ASK. P. ej., una secuencia repetitiva 11010010 de 1 kbps que module una portadora $f_0 = 20 \text{ kHz}$ con $\Delta f = 10 \text{ kHz}$ presenta el siguiente espectro:



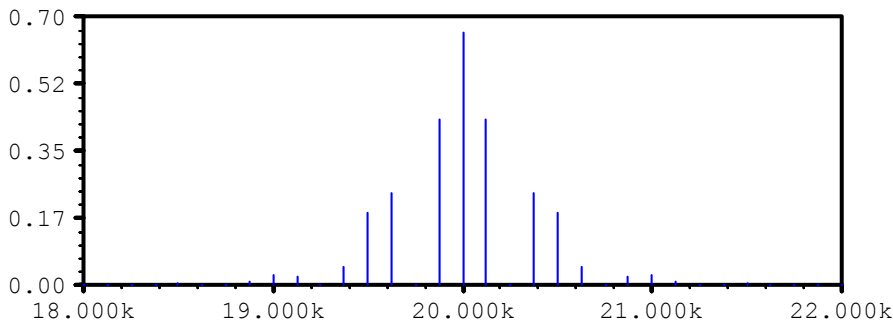
El ancho de banda ocupado tiende a $2 \cdot \Delta f$. Si Δf está en el orden de R_b se tiene un sistema FSK de banda angosta (NFSK). En el caso anterior si Δf se reduce a 0.5 kHz , el espectro resultante es:



El ancho de banda resultante (componentes significativas) es, aproximadamente, 2kHz. En éste caso $\Delta f = 0.5 \text{ kHz} = R_b/2$, es decir que la diferencia entre las frecuencias de 1 y 0 lógicos es R_b Hz., en la literatura se lo conoce como FFSK (Fast FSK). Otro caso de utilización extensa es MSK (Minimum Shift Keying), donde $\Delta f = R_b/4$. En el ejemplo tendría que ser $\Delta f = 0.25 \text{ kHz}$ y el espectro resultante es:

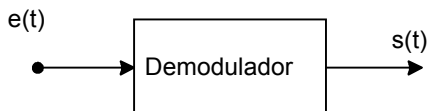


Notar la reducción del ancho de banda ocupado. Si, previo a la modulación, se filtra la señal $x(t)$ con un filtro Gaussiano se tiene un sistema GMSK (Gaussian MSK), que es el mas común de los métodos empleados en NFSK.



8.6.- Detección de señales moduladas en ángulo

Demodulador (detector) ideal de modulación angular:



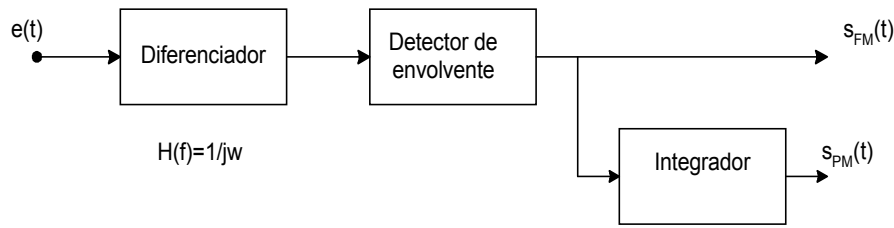
$$e(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi(t)),$$

Si el demodulador es para PM : $s(t) = K_d \cdot \phi(t)$

Si el demodulador es para FM : $s(t) = K_d \cdot \frac{d\phi(t)}{dt}$

En un detector de PM, la salida $s(t)$ es proporcional al ángulo de fase de $e(t)$, mientras que en un detector de FM, $s(t)$ es proporcional a la derivada del ángulo de fase de $e(t)$.

Diagrama realizable bloques de un detector de ángulo generalizado:



Si la entrada es: $e(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi(t))$, a la salida del diferenciador se tiene:

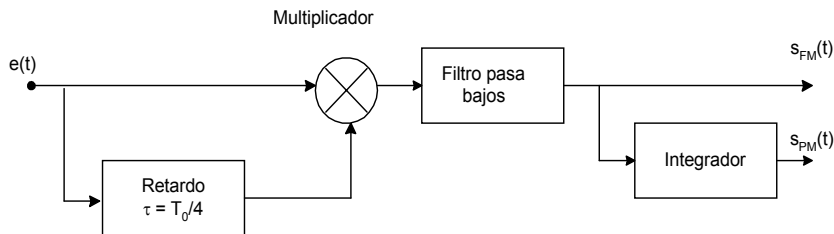
$$\frac{de(t)}{dt} = A \cdot \left(\omega_0 + \frac{d\phi(t)}{dt} \right) \cdot \text{sen}(\omega_0 t + \phi(t)), \text{ que es una señal modulada en amplitud y fase, el detector de AM}$$

recupera la parte variacional de la envolvente, y se tiene para la salida de FM: $s_{FM}(t) = A \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} = K_d \cdot x(t)$

y para la salida de PM, después del integrador: $s_{PM}(t) = A \cdot \int \frac{d\phi(t)}{dt} \cdot dt = A \cdot \phi(t) = K_d \cdot x(t)$

La implementación circuital es diversa, se analizan dos de los mas comunes:

a) El detector en cuadratura:



Se multiplica la señal de entrada con ella misma, pero con un retardado constante de $\frac{1}{4}$ de periodo de la portadora

Se tiene, para detección FM:

$$\text{Entrada: } e(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi(t))$$

Salida del bloque de retardo:

$$\begin{aligned} e(t - \tau) &= A \cdot \cos(\omega_0 \cdot (t - \tau) + \phi(t - \tau)) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t - \omega_0 \cdot \tau + \phi(t - \tau)) = \\ &= A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t - \frac{\pi}{2} + \phi(t - \tau)) = -A \cdot \text{sen}(\omega_0 \cdot t + \phi(t - \tau)) \end{aligned}$$

A la salida del multiplicador y eliminadas las componentes de alta frecuencia por el filtro pasa bajos:

$$s(t) = e(t) \cdot e(t - \tau) = \frac{A^2}{2} \cdot \text{sen}(\phi(t) - \phi(t - \tau)), \text{ como } \tau \text{ es pequeño frente a las variaciones de } \phi(t) \text{ se tendrá:}$$

$$s(t) \approx \frac{A^2}{2} \cdot (\phi(t) - \phi(t - \tau))$$

$$\text{Como: } \phi(t) - \phi(t - \tau) \approx \tau \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

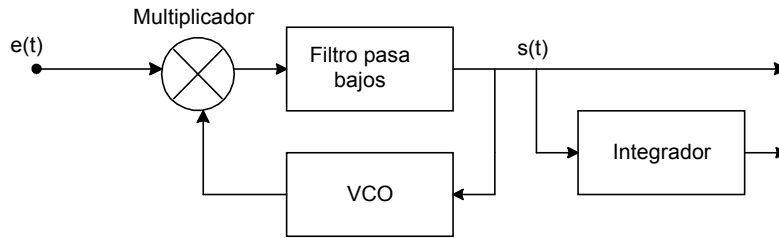
$$s(t) = \frac{A^2}{2} \cdot \tau \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} = \left(\frac{A^2}{2} \cdot \tau \cdot k_\omega \right) \cdot x(t) = K_d \cdot x(t)$$

Para detección PM:

$$s(t) \approx -\frac{A^2}{2} \cdot \int (\phi(t) - \phi(t - \tau)) \cdot dt = -\frac{A^2}{2} \cdot \tau \cdot \phi(t) = \left(-\frac{A^2}{2} \cdot \tau \cdot k_p \right) \cdot x(t) = K_d \cdot x(t)$$

(Por simplicidad, en las ecuaciones anteriores no se han incluido constantes para compatibilizar dimensiones).

b) El lazo enclavado en fase (PLL) :



Señal de entrada : $e(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi(t))$

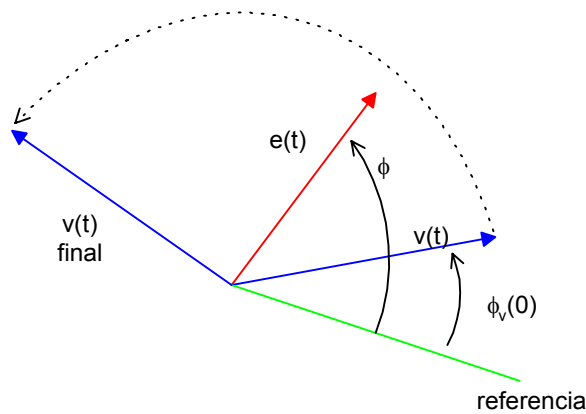
Señal de salida del VCO : $v(t) = V \cdot \cos(2\omega_0 t + \phi_v(t))$

Se supone que la frecuencia instantánea del VCO es $\omega_1 = \omega_0 + \frac{d\phi_v(t)}{dt} = \omega_0 + K_v \cdot s(t)$ es decir que es igual a ω_0 cuando $s(t) = 0$, aumenta si $s(t) > 0$ y disminuye si $s(t) < 0$.

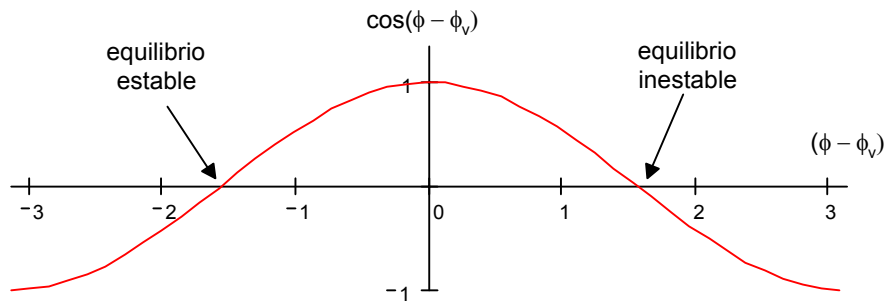
Salida de baja frecuencia del multiplicador (después del filtro pasa bajos):

$$s(t) = \frac{A \cdot V}{2} \cdot \cos(\phi(t) - \phi_v(t))$$

Representando $e(t)$ y $v(t)$ en un diagrama fasorial referido a ω_0 y, suponiendo inicialmente, que $\phi(t) = cte. = \phi$ y $\phi_v(t)$ tiene un valor arbitrario cualquiera $\phi_v(0)$ entre $\pm \pi$



Se ve del diagrama que, como $s(t)$ es > 0 , la frecuencia instantánea de $v(t)$ aumenta y su fasor representativo gira en el sentido de las agujas del reloj (más rápido) hasta llegar a una posición de equilibrio estable cuando $\phi - \phi_v(t) = -\pi/2$, que hace $s(t) = 0$.



Si $\phi - \phi_v(t) = \pi/2$, también se lograría una situación de equilibrio, pero inestable, pues cualquier variación pequeña en la fase de $e(t)$ o $v(t)$ llevará el sistema a la posición estable.

Alcanzado el punto de equilibrio estable, un análisis similar muestra que si ocurren variaciones en la fase de

$e(t)$, se repetirán en $v(t)$ es decir que $\phi_v(t) \approx \phi(t) + \frac{\pi}{2}$ y : $\frac{d\phi(t)}{dt} \approx \frac{d\phi_v(t)}{dt} = K_v \cdot s(t)$, lo que lleva a:

$$s(t) \approx \frac{1}{K_v} \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} = K_d \cdot x(t)$$

Para detección de PM, se puede agregar un integrador a la salida de FM:

$$s_{PM}(t) = \frac{1}{K_v} \cdot \int \frac{d\phi(t)}{dt} \cdot dt = \frac{1}{K_v} \cdot \phi(t) = K_d \cdot x(t)$$