9.- Detección de señales moduladas en presencia de ruido

El análisis que sigue supone que:
a) La señal modulada es limitada en ancho de banda a W Hz$^+$ y la frecuencia de portadora f_o es mucho mayor que W.
b) El ancho de banda de pre detección está limitado a W Hz$^+$.
c) La señal moduladora (mensaje a recuperar) es limitada en ancho de banda a B Hz$^+$.
d) El ancho de banda de post detección es B Hz$^+$.
e) La densidad de potencia del ruido de entrada es uniforme, η_0 Watt/Hz$^+$.

9.1.- DSB

Entrada al detector de producto:

Señal de entrada (modulada): $s_e(t) = A.x(t).cos(2\pi f_0 t)$
Ruido (ancho de banda 2B Hz$^+$) : $n_e(t) = a(t).cos(2\pi f_0 t) - b(t).sen(2\pi f_0 t)$

Potencia de señal de entrada: $\langle s_e{}^2 \rangle = \dfrac{A^2.\langle x^2 \rangle}{2}$

Potencia de ruido: $\langle n_e{}^2 \rangle = \dfrac{1}{2}.\langle a^2 \rangle + \dfrac{1}{2}.\langle b^2 \rangle = \eta_o.W = \eta_o.2.B$

(η_0 es la densidad espectral de ruido de entrada Watt/Hz$^+$)

Relación señal-ruido de entrada: $\left(\dfrac{S}{N}\right)_E = \dfrac{A^2.\langle x^2 \rangle}{2.\langle n_e{}^2 \rangle}$

Salida del detector de producto, después del filtrado pasa bajos:

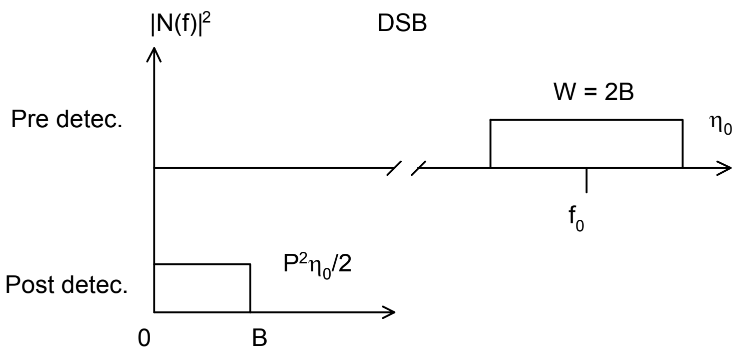
Señal detectada: $s_d(t) = \dfrac{A.P}{2}.x(t)$

Ruido detectado suponiendo coherencia del OL c/señal: $n_d(t) = \dfrac{P}{2}.a(t)$

Potencia de señal detectada: $\langle s_d{}^2 \rangle = \dfrac{A^2.P^2}{4}.\langle x^2 \rangle$

Potencia de ruido detectado: $\langle n_d{}^2 \rangle = \dfrac{P^2}{4}.\langle a^2 \rangle = \dfrac{P^2}{4}.\langle n_e{}^2 \rangle$

Relación señal-ruido de salida: $\left(\dfrac{S}{N}\right)_S = \dfrac{\langle s_d{}^2 \rangle}{\langle n_d{}^2 \rangle} = \dfrac{A^2.\langle x^2 \rangle}{\langle n_e{}^2 \rangle} = 2.\left(\dfrac{S}{N}\right)_E$



9.2.- SSB

Entrada al detector de producto:

Señal de entrada (modulada): $s_e(t) = A.x(t).\cos(2\pi f_0 t) + A.\hat{x}(t).\sin(2\pi f_0 t)$
donde $\hat{x}(t)$ es la Transformada de Hilbert de *x(t)*.

Ruido (ancho de banda B Hz[+]) : $n_e(t) = a(t).\cos\left(2\pi\left(f_0 \pm \frac{B}{2}\right)t\right) - b(t).\sin\left(2\pi\left(f_0 \pm \frac{B}{2}\right)t\right)$

El espectro de ruido de entrada está centrado en $\left(f_0 + \frac{B}{2}\right)$ si se transmite USB o en $\left(f_0 - \frac{B}{2}\right)$ si se transmite LSB.

Potencia de señal de entrada: $\langle s_e^2 \rangle = \frac{A^2.\langle x^2 \rangle}{2} + \frac{A^2.\langle \hat{x}^2 \rangle}{2} = A^2.\langle x^2 \rangle$

$\hat{x}(t)$ es generada a partir de *x(t)* preservando la amplitud de sus componentes armónicas y retrasándolas 90º , por lo tanto al ser $|X(f)| = |\hat{X}(f)|$, resulta que $\langle x^2 \rangle = \langle \hat{x}^2 \rangle$

Potencia de ruido de entrada: $\langle n_e^2 \rangle = \frac{1}{2}.\langle a^2 \rangle + \frac{1}{2}.\langle b^2 \rangle = \eta_o.W = \eta_o.B$

Relación señal-ruido de entrada: $\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{A^2.\langle x^2 \rangle}{\langle n_e^2 \rangle}$

Salida del detector de producto, después del filtrado pasa bajos:

Señal detectada: $s_d(t) = \frac{A.P}{2}.x(t)$

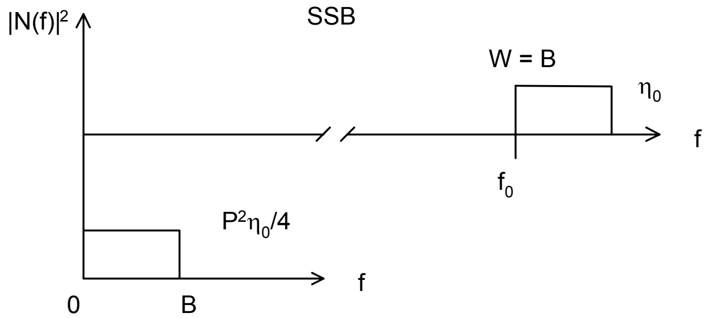
Ruido detectado suponiendo coherencia del OL c/señal:

$$n_d(t) = \frac{P}{2}.a(t).\cos 2\pi\left(\pm\frac{B}{2}\right)t - \frac{P}{2}.b(t).\sin 2\pi\left(\pm\frac{B}{2}\right)t$$

Potencia de señal detectada: $\langle s_d^2 \rangle = \frac{A^2.P^2}{4}.\langle x^2 \rangle$

Potencia de ruido detectado: $\langle n_d^2 \rangle = \frac{P^2}{4}.\langle a^2 \rangle.\frac{1}{2} + \frac{P^2}{4}.\langle b^2 \rangle.\frac{1}{2} = \frac{P^2}{8}.\left(\langle a^2 \rangle + \langle b^2 \rangle\right) = \frac{P^2}{4}.\langle n_e^2 \rangle$

Relación señal-ruido de salida: $\left(\frac{S}{N}\right)_S = \frac{\langle s_d^2 \rangle}{\langle n_d^2 \rangle} = \frac{A^2.\langle x^2 \rangle}{\langle n_e^2 \rangle} = \left(\frac{S}{N}\right)_E$



9.3.- FM

Entrada al detector de frecuencia modulada:

Señal de entrada (modulada): $s_e(t) = A.cos(2\pi f_0 t+\phi(t))$
Ruido (ancho de banda W Hz$^+$) : $n_e(t)= a(t).cos(2\pi f_0 t) - b(t).sen(2\pi f_0 t)$

Potencia de señal de entrada: $\langle s_e^2 \rangle = \dfrac{A^2}{2}$

Potencia de ruido: $\langle n_e^2 \rangle = \dfrac{1}{2}.\langle a^2 \rangle + \dfrac{1}{2}.\langle b^2 \rangle = \eta_o.W$

Relación señal-ruido de entrada: $\left(\dfrac{S}{N}\right)_E = \dfrac{A^2}{2.\langle n_e^2 \rangle} = \dfrac{A^2}{2.\eta_0.W}$

Salida del detector de frecuencia modulada, después del filtrado pasa bajos:

Señal detectada: $s_d(t) = K_d.\dfrac{d\phi(t)}{dt} = K_d.\omega_i = K_{dHz}.f_i$

($K_{dHz} = 2\pi.K_d$)
Potencia de señal detectada: $\langle s_d^2 \rangle = K_{dHz}^2.\langle f_i^2 \rangle = K_{dHz}^2.f_{ef}^2$

donde f_{ef} es la desviación eficaz de frecuencia.

Para determinar el comportamiento del detector de FM en presencia de ruido, se analiza el efecto del ruido presente a la entrada (densidad espectral uniforme y ancho de banda W) en una portadora sin modular a frecuencia f_o y el resultado obtenido se extrapola para el caso que la portadora sea modulada (o sea que es una aproximación al problema real).
Se tiene a la entrada del detector de FM :

$s_e(t) = \left(A + a(t)\right).\cos(2\pi f_0 t) - b(t).\sin(2\pi f_0 t)$, Si $A >> a(t), b(t)$ se puede simplificar a:
$s_e(t) \approx A.\cos(2\pi f_0 t) - b(t).\sin(2\pi f_0 t) = A.\cos\left(2\pi f_0 t + \vartheta(t)\right)$, donde:

$$\vartheta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{b(t)}{A}\right) \approx \frac{b(t)}{A}$$

El detector de FM responde a la modulación en ángulo que la banda de ruido impone a la portadora no modulada, su salida será:

$$n_d(t) = K_d.\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \frac{K_d}{A}.\frac{db(t)}{dt} \qquad \therefore \quad \left|N_d(f)\right| = \frac{K_d}{A}.2.\pi.f.\left|B(f)\right|$$

como la densidad espectral del ruido de entrada $n_e(t)$ es uniforme, también lo será la de $a(t)$ y $b(t)$. Como $\langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle = \langle n_e^2 \rangle = \eta_0.W$, la densidad de potencia de $a(t)$ y $b(t)$ debe ser $\eta_{0bb} = 2.\eta_0$ para que se cumpla la ec. anterior (recordar que el ancho de banda de $a(t)$ y $b(t)$ es $W/2$). Entonces:

$$\left|N_d(f)\right| = \frac{K_d}{A}.2.\pi.f.\sqrt{2.\eta_0} = \frac{K_{dHz}}{A}.f.\sqrt{2.\eta_0}$$,entre *0* y *W/2* Hz+.

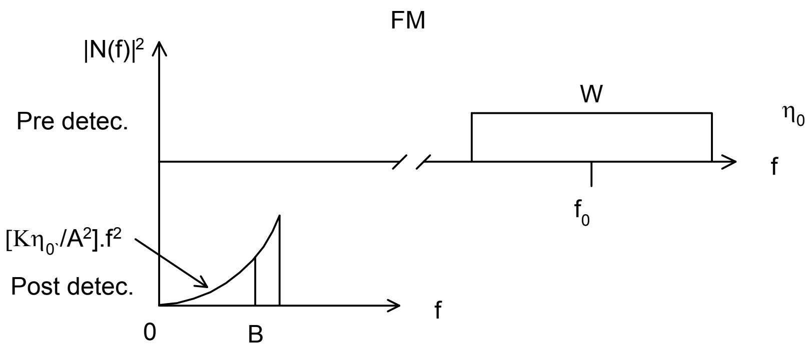
La potencia de ruido detectada en un ancho de banda *B* (*B*<*W*) es :

$$\langle n_d{}^2 \rangle = \frac{K_{dHz}{}^2}{A^2}.2.\eta_0.\int_0^B f^2.df = \frac{K_{dHz}{}^2.2\eta_0.B^3}{3.A^2}$$

La relación señal-ruido de salida será:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = \frac{\langle s_d^2 \rangle}{\langle n_d^2 \rangle} = \frac{3.A^2.f_{ef}{}^2}{2\eta_0 B^3} = \left(\frac{S}{N}\right)_E.\frac{3.W.f_{ef}{}^2}{B^3}$$ o como es común en la literatura:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_S = \left(\frac{S}{N}\right)_E.3\left(\frac{f_{ef}}{B}\right)^2\frac{W}{B}$$ Esta ecuación vale cuando *A>>a(t),b(t)* , es decir cuando la relación señal-ruido de entrada o pre detección es alta (mayor que 10...15 dB).



9.4.- PM

Entrada al detector de fase:

Señal de entrada (modulada): $s_e(t) = A.cos(2\pi f_0 t+\phi(t))$
Ruido (ancho de banda W Hz+) : $n_e(t)= a(t).cos(2\pi f_0 t) - b(t).sen(2\pi f_0 t)$

Potencia de señal de entrada: $\langle s_e{}^2 \rangle = \frac{A^2}{2}$

Potencia de ruido: $\langle n_e{}^2 \rangle = \frac{1}{2}.\langle a^2 \rangle + \frac{1}{2}.\langle b^2 \rangle = \eta_o.W$

Relación señal-ruido de entrada: $\left(\frac{S}{N}\right)_E = \frac{A^2}{2.\langle n_e{}^2 \rangle} = \frac{A^2}{2.\eta_0.W}$

Salida del detector de fase, después del filtrado pasa bajos:

Señal detectada: $s_d(t) = K_d.\phi(t)$

Potencia de señal detectada: $\langle s_d^{\,2}\rangle = K_d^{\,2}.\langle\phi^2\rangle = K_d^{\,2}.\phi_{ef}^{\;2}$

Haciendo el mismo análisis que para FM, se tiene a la entrada del detector de PM :

$s_e(t)=\big(A+a(t)\big).\cos(2\pi f_0 t)-b(t).\sin(2\pi f_0 t)$, Si *A>>a(t)* se puede simplificar a:

$s_e(t)=A.\cos(2\pi f_0 t)-b(t).\sin(2\pi f_0 t)\approx A.\cos\big(2\pi f_0 t+\vartheta(t)\big)$, donde:

$$\vartheta(t)=\tan^{-1}\left(\frac{b(t)}{A}\right)\approx\frac{b(t)}{A}$$

El detector de PM responde a la modulación en ángulo que la banda de ruido impone a la portadora no modulada, su salida será:

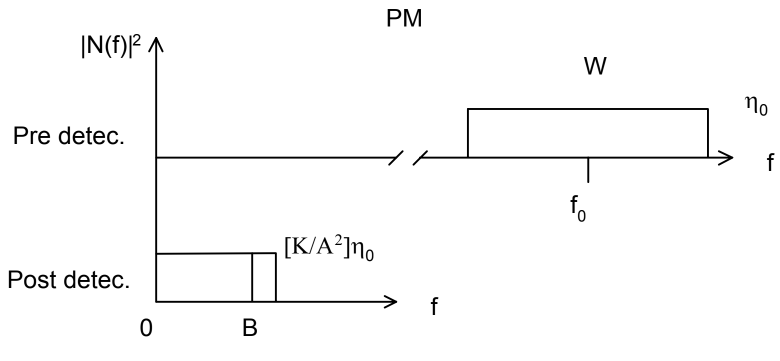
$$n_d(t)=K_d.\vartheta(t)=\frac{K_d}{A}.b(t) \qquad \therefore \quad \left|N_d(f)\right|=\frac{K_d}{A}.\left|B(f)\right|$$

como la densidad espectral del ruido de entrada $n_e(t)$ es uniforme, también lo será la de *a(t)* y *b(t)* , como $\langle a^2\rangle=\langle b^2\rangle=\langle n_e^{\,2}\rangle=\eta_0.W$, la densidad de potencia de *a(t)* y *b(t)* debe ser $\eta_{0bb}=2.\eta_0$ para que se cumpla la ec. anterior (recordar que el ancho de banda de *a(t)* y *b(t)* es *W/2*). Entonces: $\left|N_d(f)\right|=\frac{K_d}{A}.\sqrt{2.\eta_0}$ entre *0* y *W/2* Hz$^+$. La potencia de ruido detectada en un ancho de banda *B* (*B<W*) es :

$$\langle n_d^{\,2}\rangle=\frac{K_d^{\,2}}{A^2}.2\eta_0.B$$

La relación señal-ruido de salida será: $\left(\frac{S}{N}\right)_S=\frac{A^2.\phi_{ef}^{\;2}}{2\eta_0 B}=\left(\frac{S}{N}\right)_E.\phi_{ef}^{\;2}.\frac{W}{B}$

Igual que para FM, ésta ecuación vale cuando la relación señal-ruido de entrada o pre detección es alta (mayor que 10...15 dB).



9.5.- Sistemas digitales

Normalmente, en sistemas digitales se vincula la probabilidad de error con la relación Energía (promedio en el caso de QAM) por bit transmitido (E_b) vs. Densidad de potencia de ruido (η_0).
Existe un vínculo entre (E_b/η_0) y la relación señal ruido de entrada que, para el caso de sistemas de amplitud constante (PSK, FSK, etc.), puede deducirse de lo siguiente: Como la energía por bit transmitido es

$E_b = \left\langle s_e{}^2 \right\rangle . T_{bt}$, donde T_b es la duración de cada bit transmitido, $<s_e^2>$ es la potencia media transmitida durante ése tiempo y $\eta_0 = \dfrac{\left\langle n_e{}^2 \right\rangle}{W}$ se tiene que: $\dfrac{E_b}{\eta_0} = \dfrac{\left\langle s_e{}^2 \right\rangle . T_{bt} . W}{\left\langle n_e{}^2 \right\rangle} = \dfrac{\left\langle s_e{}^2 \right\rangle}{\left\langle n_e{}^2 \right\rangle} . \dfrac{W}{R_{bt}}$, donde $\dfrac{\left\langle s_e{}^2 \right\rangle}{\left\langle n_e{}^2 \right\rangle}$ es la relación señal ruido de entrada y R_{bt} la velocidad de transmisión de la señal modulada. Notar que en los sistemas de modulación digital lineales (N_PSK, N_QAM), siempre el mínimo ancho de banda necesario para transmisión sin distorsión es $W = R_{bt}$, por consiguiente: $\dfrac{\left\langle s_e{}^2 \right\rangle}{\left\langle n_e{}^2 \right\rangle} = \dfrac{E_b}{\eta_0}$. El cálculo de la probabilidad de error en un sistema digital modulado depende de una serie de factores difíciles de evaluar (filtros utilizados, forma de onda de la señal modulada, demodulación, estrategia de muestreo y decisión, etc.). Bajo suposiciones ideales, pueden lograrse resultados de relativa utilidad práctica y deben tomarse con prudencia como guía para comparar sistemas o hacer estimaciones preliminares. Normalmente, en las especificaciones de los fabricantes de equipos para transmisión digital, se incluye la información necesaria a los efectos del diseño.

Resultados teóricos para algunos métodos de modulación digital

a) Detección coherente

2PSK, QPSK, MSK: $P_e = Q\left(\sqrt{\dfrac{2.E_b}{\eta_0}}\right)$ FSK, ASK : $P_e = Q\left(\sqrt{\dfrac{E_b}{\eta_0}}\right)$

N_QAM : $P_e = 1 - \left(1 - P_{\sqrt{N}}\right)^2$ donde:

$k = \log_2 N = 2, 4, 8, ..., (par), ...$ y $P_{\sqrt{N}} = 2.\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{N}}\right).Q\left(\sqrt{\dfrac{3k}{2.(N-1)} . \dfrac{2.E_b}{\eta_0}}\right)$

b) Detección no coherente

FSK, ASK: $P_e = \dfrac{1}{2}.\exp\left(-\dfrac{E_b}{2.\eta_0}\right)$ DPSK: $P_e = \dfrac{1}{2}.\exp\left(-\dfrac{E_b}{\eta_0}\right)$