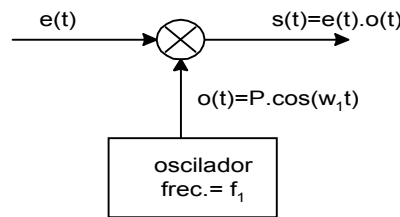


7.- Traslación de frecuencia

Suponer el sistema lineal de la figura cuya salida es el producto de una señal de entrada $e(t)$ con una señal armónica $o(t)$:



La señal de entrada es de banda angosta, centrada en f_2 : $e(t) = A.x(t). \cos(2\pi f_2 t + \phi(t))$ y

$$o(t) = P.\cos(2\pi f_1 t)$$

Si $f_2 > f_1$:

$$\begin{aligned} s(t) &= A.x(t). \cos(2\pi f_2 t + \phi(t)). P \cos(2\pi f_1 t) = \\ &= \frac{A.P.x(t)}{2} \cdot [\cos(2\pi(f_2 - f_1)t + \phi(t)) + \cos(2\pi(f_2 + f_1)t + \phi(t))] \end{aligned}$$

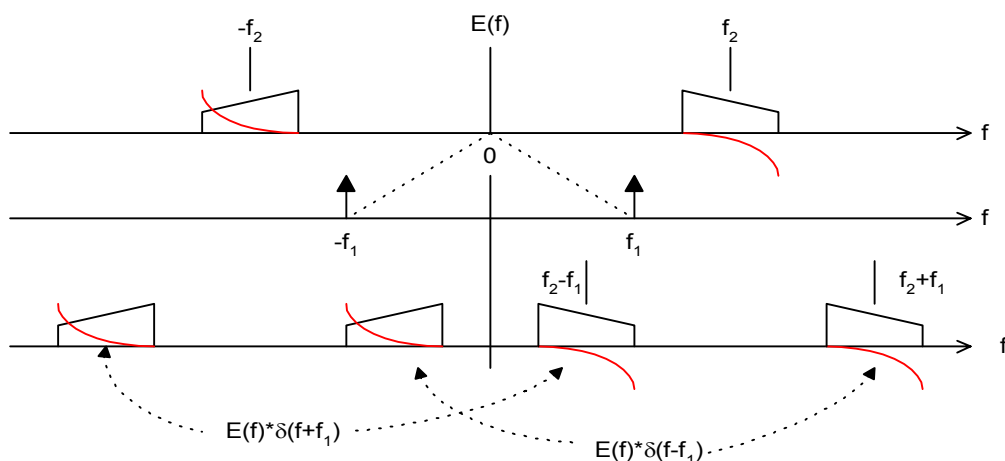
Si $f_2 < f_1$:

$$s(t) = \frac{A.P.x(t)}{2} \cdot [\cos(2\pi(f_1 - f_2)t - \phi(t)) + \cos(2\pi(f_2 + f_1)t + \phi(t))]$$

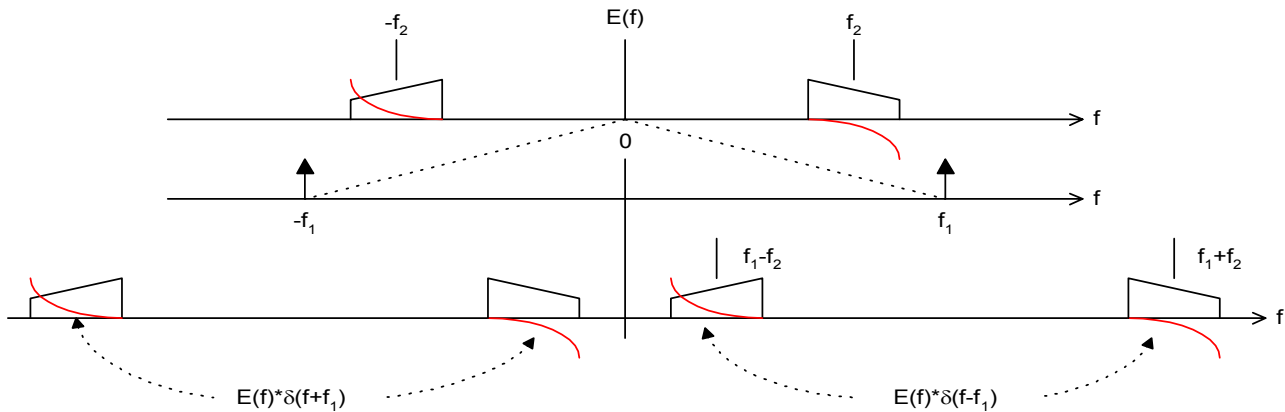
Si f_1 y f_2 son mucho mayores que el ancho de banda W de $e(t)$ y además no se produce traslapamiento de espectros, el multiplicador genera versiones idénticas a $e(t)$ pero centradas en (f_1+f_2) y en (f_2-f_1) si $f_2 > f_1$. Si $f_2 < f_1$, existirá distorsión en la componente de baja frecuencia $(f_1 - f_2)$ por el cambio de signo de $\phi(t)$, salvo que el espectro de $e(t)$ sea simétrico alrededor de f_2 . Si $\phi(t) = cte.$, la distorsión es irrelevante (únicamente un cambio de fase en la frecuencia portadora).

Análisis en dominio de frecuencia

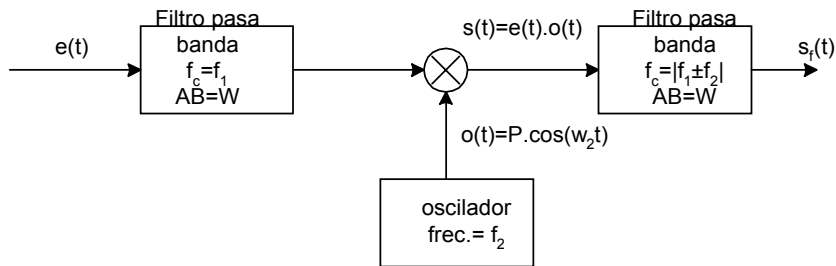
Suponiendo para $E(f)$ un espectro genérico con sus partes real e imaginaria funciones par e impar respectivamente (para que $e(t)$ sea real) se tiene, cuando $f_2 > f_1$:



y en el caso que $f_2 < f_1$:



Se puede seleccionar la componente suma (conversión hacia arriba) o diferencia (conversión hacia abajo) con adecuados filtros pasa-banda:



8.- Modulación

Objeto de la modulación: Necesidad de adaptar una determinada señal (mensaje a transmitir) a las particularidades de un medio de transmisión. Un proceso de modulación implica la modificación de algún parámetro de una señal por otra: $e(t) = f(x(t))$, donde $e(t)$ es la señal modulada y $x(t)$ la señal moduladora. En su forma más general, una señal modulada es de banda angosta y puede ponerse como:

$$e(t) = A \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

Si la señal moduladora actúa sobre $x(t)$, se tiene el caso de modulación lineal (AM, DSB, SSB), si lo hace sobre $\phi(t)$, modulación angular (FM, PM)

En todo lo que sigue, se suponen las siguientes restricciones para $x(t)$:

- Limitada en ancho de banda a $\pm B$ Hz, con $B \ll f_0$
- Sin componente continua: $\langle x(t) \rangle = 0$
- Limitada en amplitud entre $+x_{max}$ y $-x_{min}$

8.1.- Modulación lineal de señales analógicas

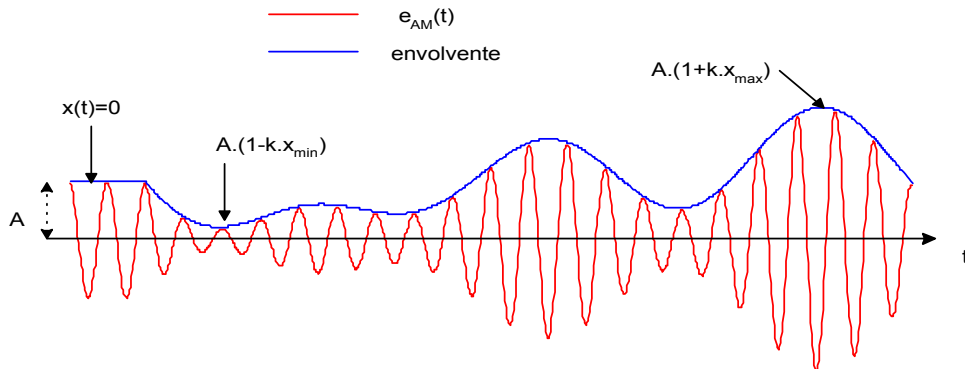
8.1.1.- Modulación de amplitud (AM)

En AM la envolvente de una señal armónica (portadora) es proporcional al mensaje modulador:

$e_{AM}(t) = A \cdot (1 + k \cdot x(t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ donde A y k son constantes reales y positivas. Si $e_{AM}(t)$ es [volt] las dimensiones de A y k son [volt] y [volt]⁻¹ respectivamente.

Para que la modulación sea sin distorsión, debe cumplirse que: $1 + k \cdot x(t) \geq 0$, es decir que la amplitud de la señal portadora siempre debe ser positiva. En el pico positivo de la señal moduladora:

$e_{AM}(t)_{\max} = A.(1+k.x_{\max})$, mientras que en el pico negativo: $e_{AM}(t)_{\min} = A.(1-k.x_{\min})$. Cuando $x(t)=0$, la amplitud de $e_{AM}(t)$ es A .



La máxima amplitud de modulación posible ocurre cuando $e_{AM}(t)_{\min} = 0$, es decir si $k = \frac{1}{x_{\min}}$, en este caso,

$e_{AM}(t)_{\max} = (1+k.x_{\max}) = \left(1 + \frac{x_{\max}}{x_{\min}}\right)$. La constante k puede variar entre 0 y $\frac{1}{x_{\min}}$, normalmente se define el índice de modulación como $m = k.x_{\min}$, un número adimensional que puede variar entre 0 y 1 y:

$$e_{AM}(t) = A \cdot \left(1 + m \cdot \frac{x(t)}{x_{\min}}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

Análisis espectral de AM

$e_{AM}(t) = g(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$, donde $g(t) = A.(1+k.x(t))$ y su espectro: $G(f) = A.\delta(f) + k.A.X(f)$

$$E(f) = G(f) * \frac{1}{2} \delta(f \pm f_0) = \frac{1}{2} G(f \pm f_0)$$

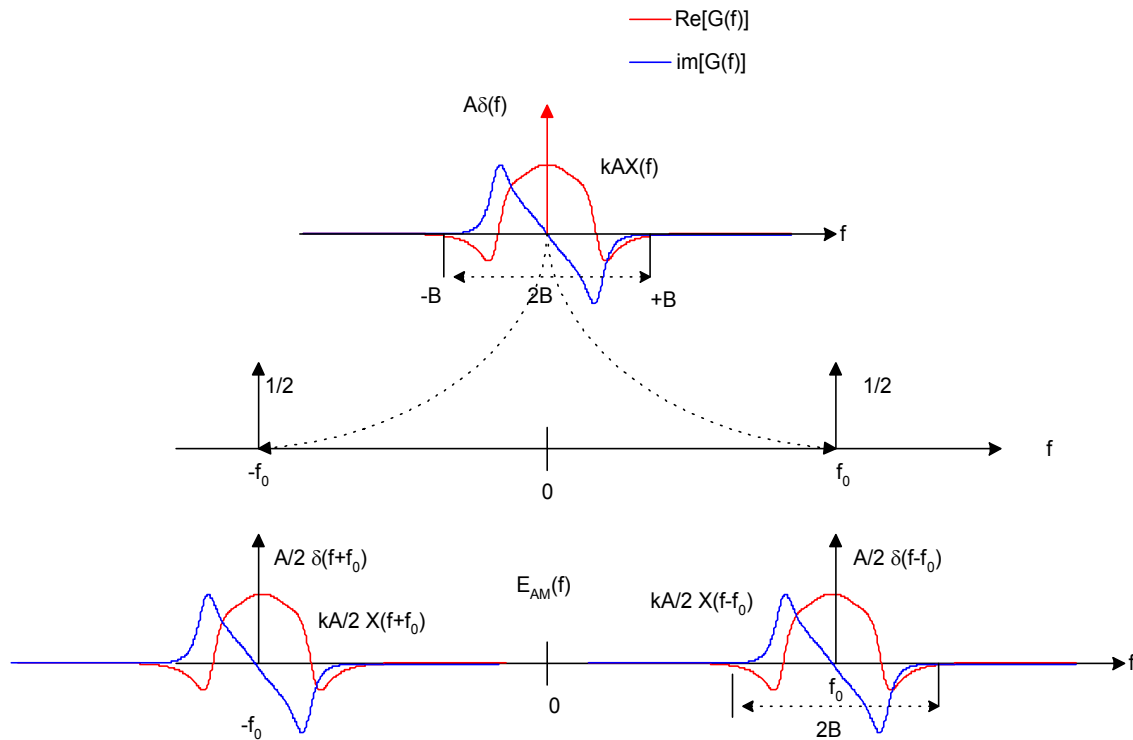
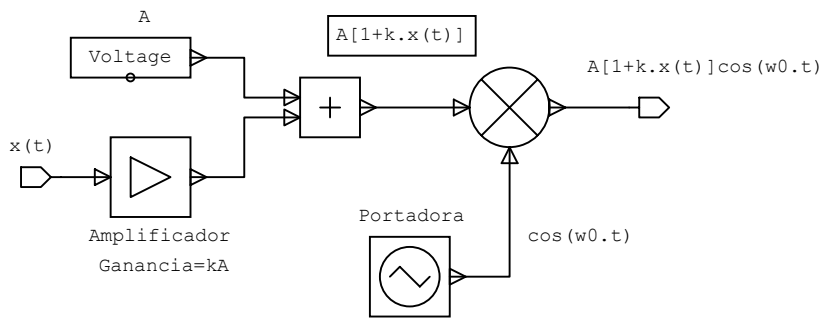


Diagrama en bloques de un modulador AM.



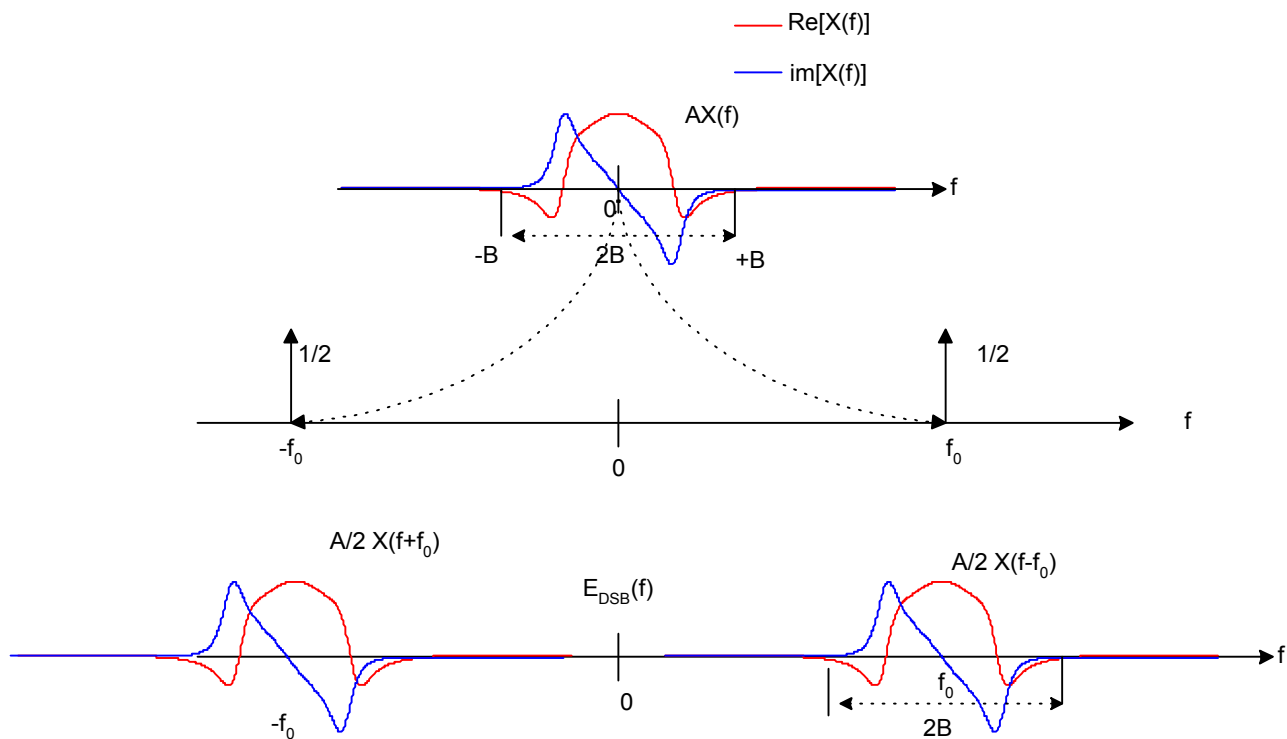
Demodulación

La recuperación de la señal modulada puede hacerse con un simple detector de envolvente.

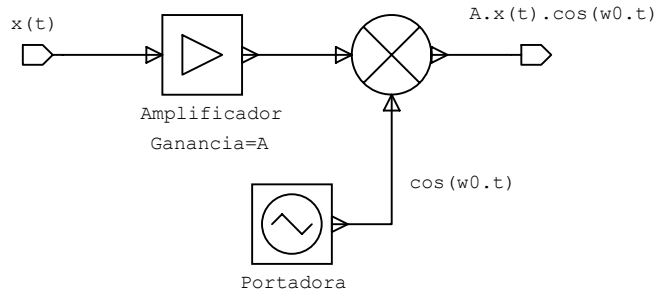
Ventajas AM : Fácil generación y detección, Desventajas AM: Generación de potencia inútil en la portadora

8.1.2.- Doble banda lateral sin portadora (DSB)

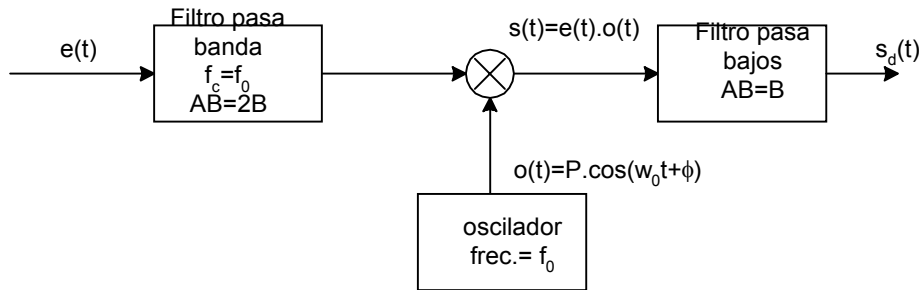
En DSB, la amplitud de la señal modulada es proporcional al mensaje modulador: $e_{DSB}(t) = A.x(t).cos(2\pi f_0 t)$



Generación de DBL:



Demodulación: Unica forma, detector de producto:



$$s(t) = A.x(t).cos(2\pi f_0 t).P.cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$s(t) = A.P.x(t).cos(2\pi f_0 t).(\cos \phi .cos(2\pi f_0 t) + \sin \phi .sin(2\pi f_0 t))$$

$$s(t) = A.P.x(t).(\cos \phi .cos^2(2\pi f_0 t) + \sin \phi .sin(2\pi f_0 t).cos(2\pi f_0 t))$$

El filtro pasa bajos elimina las componentes de frecuencia superiores a B Hz:

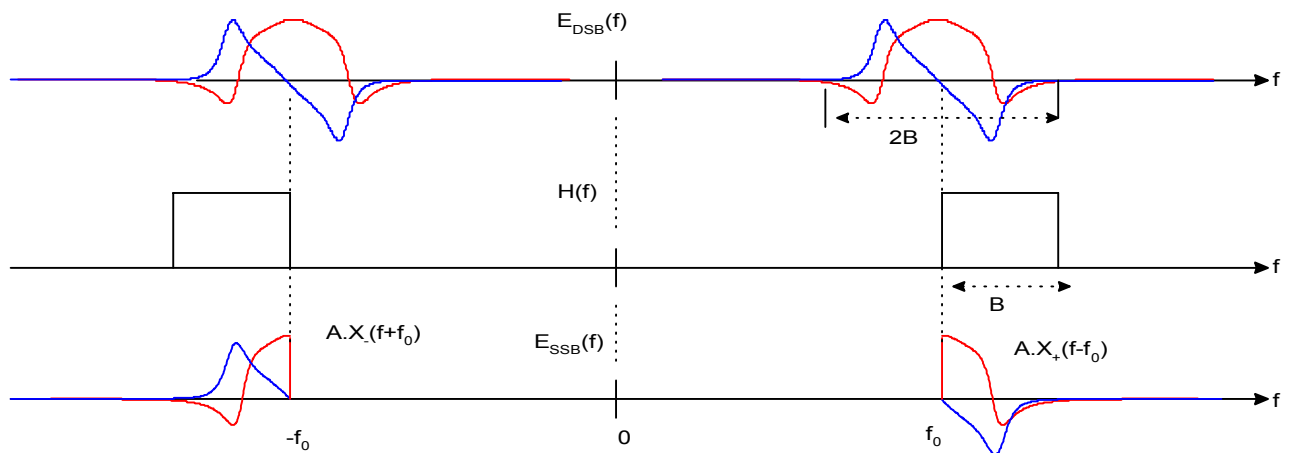
$$s_d(t) = \frac{A.P}{2}.x(t).cos \phi$$

La salida detectada es máxima si $\phi = 0$ o π (con cambio de signo), eventualmente puede hacerse nula si $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$

Ventajas DSB : Eficiencia en el uso de potencia de transmisión. Desventaja: Demodulación no simple.

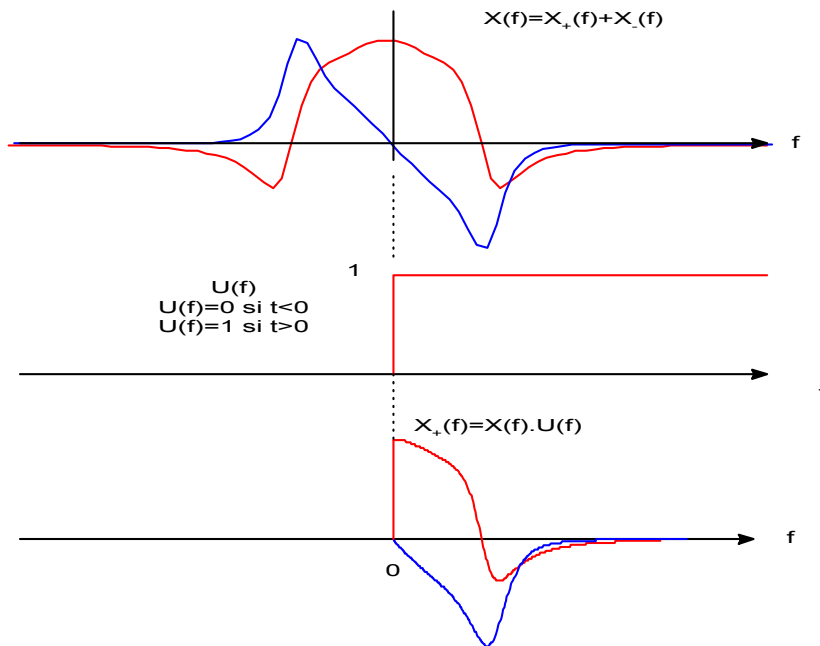
8.1.3.- Banda lateral única (SSB)

En banda lateral única, se elimina una de las bandas laterales de una señal DSB (información redundante). Espectro para el caso de banda lateral superior:



El espectro de la señal moduladora $X(f)$ puede ponerse como la suma de dos componentes, una de frecuencias

positivas $X_+(f)$ y una de frecuencias negativas $X_-(f)$: $X(f) = X_+(f) + X_-(f)$ donde $X_+(f)$ y $X_-(f)$ pueden generarse como: $X_+(f) = X(f) \cdot U(f)$ y $X_-(f) = X(f) \cdot U(-f)$, $U(f)$ es la función escalón ya definida.



Las correspondientes señales en dominio de tiempo son:

$$x_+(t) = x(t) * \left[\frac{1}{2} \delta(t) + j \frac{1}{2\pi t} \right] = \frac{1}{2} x(t) + j \frac{1}{2} \left(x(t) * \frac{1}{\pi t} \right) \quad \text{y}$$

$$x_-(t) = x(t) * \left[\frac{1}{2} \delta(t) - j \frac{1}{2\pi t} \right] = \frac{1}{2} x(t) - j \frac{1}{2} \left(x(t) * \frac{1}{\pi t} \right)$$

El producto de convolución de $x(t)$ con $(1/\pi t)$ es conocido como la transformada de Hilbert de $x(t)$:

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(z)}{t-z} dz, \quad \text{el espectro de } \hat{x}(t) \text{ será: } \hat{X}(f) \leftrightarrow \hat{X}(f) = X(f) \cdot H(f), \quad \text{donde}$$

$$H(f) \leftrightarrow \frac{1}{\pi t} = -j \cdot \text{sgn}(f), \quad \text{es decir que: } |H(f)| = 1 \text{ para todo } f \text{ (pasa todo) y } \arg(H(f)) = \pm \frac{\pi}{2} \text{ para } \mp f$$

La transformada de Hilbert de una señal real es también real, el módulo del espectro de $\hat{x}(t)$ es idéntico al de $x(t)$ y su fase, el espectro de fase de $x(t)$ retardado 90 grados.

$$\text{De lo anterior, } x_+(t) \text{ y } x_-(t) \text{ pueden ponerse como: } \quad x_+(t) = \frac{1}{2} x(t) + j \frac{1}{2} \hat{x}(t) \quad x_-(t) = \frac{1}{2} x(t) - j \frac{1}{2} \hat{x}(t)$$

$$\text{y } E_{SSB}(f) = A \cdot (X_+(f - f_0) + X_-(f + f_0)) \quad ; \quad e_{SSB}(t) = A \cdot (x_+(t) \cdot e^{j\omega_0 t} + x_-(t) \cdot e^{-j\omega_0 t})$$

$$e_{SSB}(t) = A \cdot \left(\left[\frac{1}{2} x(t) + j \frac{1}{2} \hat{x}(t) \right] \cdot (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) + \left[\frac{1}{2} x(t) - j \frac{1}{2} \hat{x}(t) \right] \cdot (\cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t) \right)$$

$$e_{SSB}(t) = A \cdot (x(t) \cdot \cos \omega_0 t - \hat{x}(t) \cdot \sin \omega_0 t) \quad \text{en éste caso, BLS.}$$

Si se hubiera tomado $X_-(f) = X(f) \cdot U(-f)$ y procediendo en forma análoga se llega a:

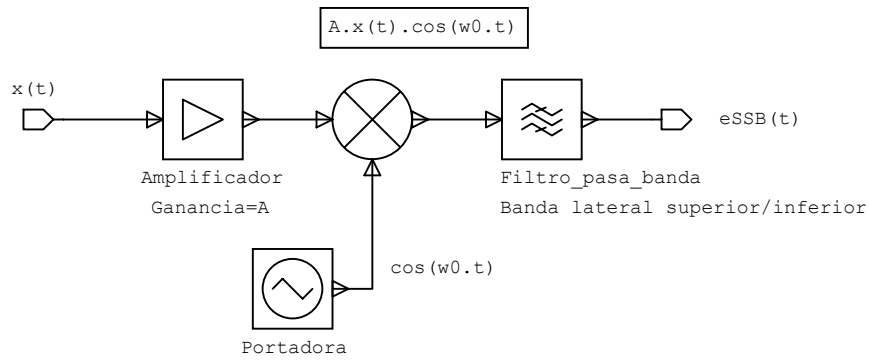
$$e_{SSB}(t) = A \cdot (x(t) \cdot \cos \omega_0 t + \hat{x}(t) \cdot \sin \omega_0 t) \quad \text{para tener BLI}$$

También puede ponerse:

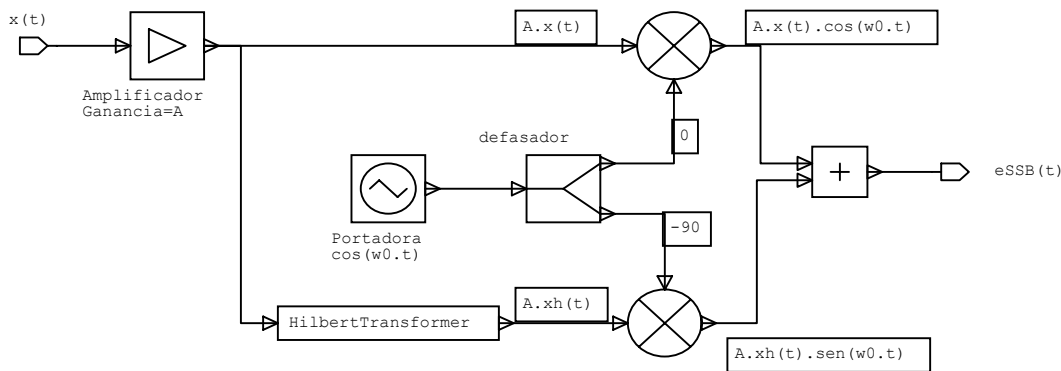
$$e_{SSB}(t) = A \cdot \sqrt{x(t)^2 + \hat{x}(t)^2} \cdot \cos(\omega_0 t \pm \phi(t)) \quad , \quad \text{donde } \phi(t) = \arctan\left(\frac{\hat{x}(t)}{x(t)}\right)$$

Generación de SSB:

a) Método de filtro (mas común):



b) Método de fase (menos común):



Demodulación de SSB

Igual que DSB, se utiliza un detector de producto:

$$s(t) = A.(x(t).cos(2\pi f_0 t) \pm \hat{x}(t).sin(2\pi f_0 t)).P.cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$s_d(t) = \frac{A.P}{2} . (x(t).cos \phi \pm \hat{x}(t).sin \phi) , s_d(t) \text{ será idéntica a } x(t) \text{ únicamente si } \phi=0 , \text{ si no existirá distorsión de}$$

fase, notar que el valor cuadrático medio de $s_d(t)$ es, para cualquier valor de ϕ , proporcional al de $x(t)$ y que para cualquier valor de ϕ , existirá salida en el detector:

$$\langle s_d(t)^2 \rangle = \frac{(A.P)^2}{4} . (\langle x(t)^2 \rangle . \cos^2 \phi + \langle \hat{x}(t)^2 \rangle . \sin^2 \phi) , \text{ como } \langle x(t)^2 \rangle = \langle \hat{x}(t)^2 \rangle :$$

$$\langle s_d(t)^2 \rangle = \frac{(A.P)^2}{4} . \langle x(t)^2 \rangle$$

El espectro de la señal detectada será:

$$S(f) = \frac{A.P}{2} . (X(f).cos \phi \pm \hat{X}(f).sin \phi) = \frac{A.P}{2} . X(f) . (\cos \phi \pm H(f).sin \phi)$$

$$|S(f)| = \frac{A.P}{2} . |X(f)| . |\cos \phi \pm H(f).sin \phi| , \text{ como } H(f) = \pm j , |\cos \phi \pm H(f).sin \phi| = |\cos \phi \pm j.sin \phi| = 1$$

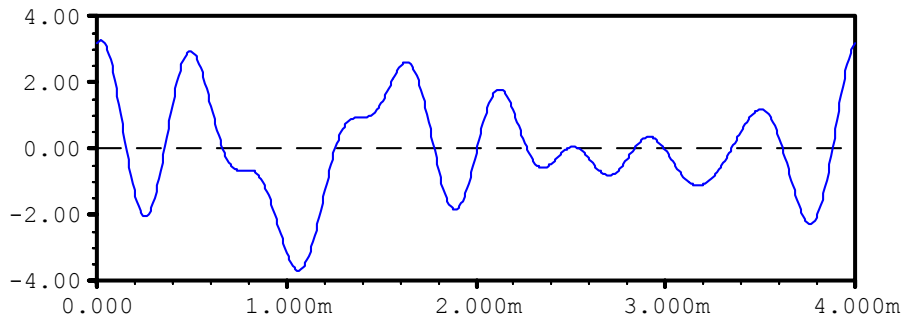
$$|S(f)| = \frac{A.P}{2} . |X(f)| \text{ Se preserva el módulo del espectro de la señal moduladora.}$$

Ventajas SSB: Menor ocupación de ancho de banda. Eficiencia en transmisión. Demodulación simple para señales que soportan distorsión de fase (p.ej. voz). Desventajas: Demodulación no simple si la señal moduladora debe reconstruirse sin distorsión (p.ej. video).

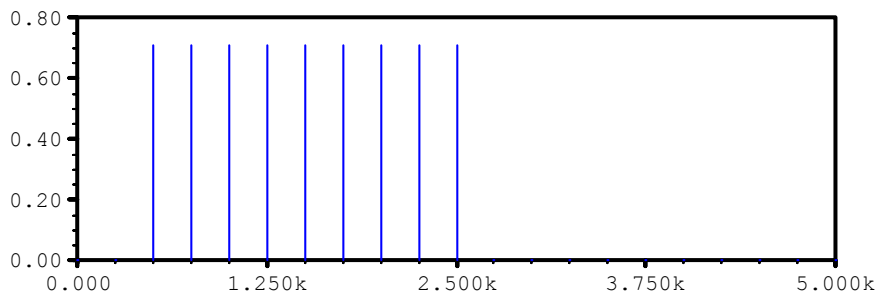
8.1.4.- Ejemplos de formas de onda y espectros de señales analógicas moduladas linealmente

En todos los ejemplos, se ha utilizado para $x(t)$ una señal determinística periódica ($f_0=500\text{Hz}$) que simula una aleatoria, formada por la suma de 9 tonos senoidales : $x(t) = \sum_{n=1}^9 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$, con $f_1 = 500 \text{ Hz}$, $f_2 = 750 \text{ Hz}$, $f_3 = 1000 \text{ Hz}$, ... , $f_9 = 2500 \text{ Hz}$ y φ_n arbitrarios generados aleatoriamente.

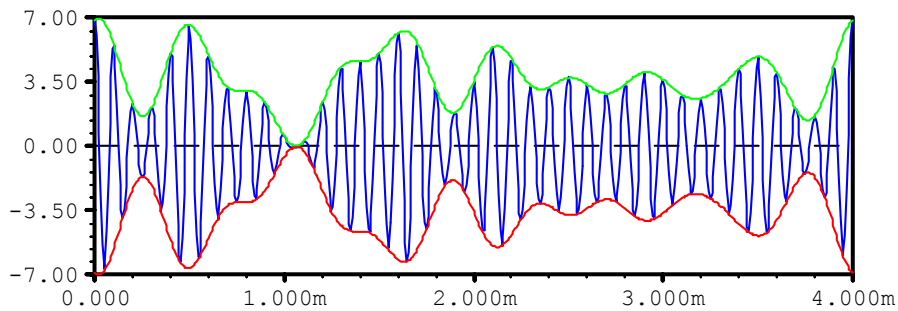
Señal moduladora $x(t)$:

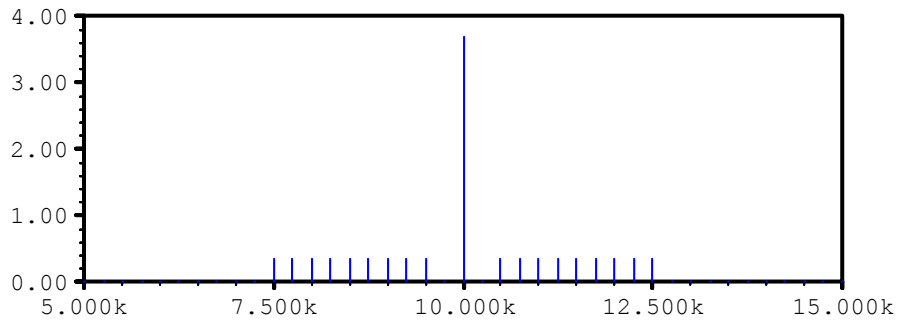


$x_{max}=3.28 \text{ v}$ y $x_{min}=-3.68 \text{ v}$. Su espectro de líneas es:

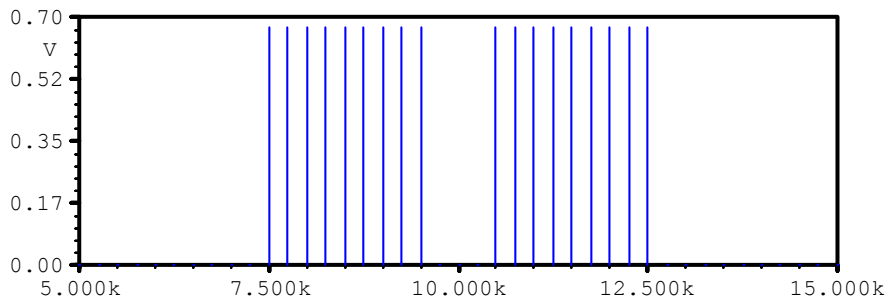
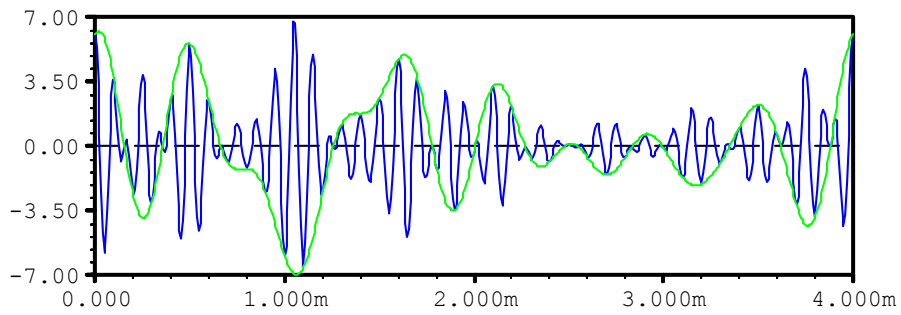


Forma de onda y espectro de una señal de AM modulada por $x(t)$, frecuencia portadora = 10kHz , $m=1$

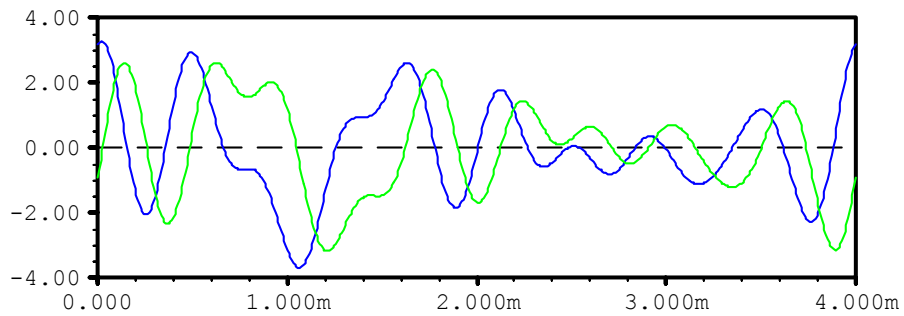


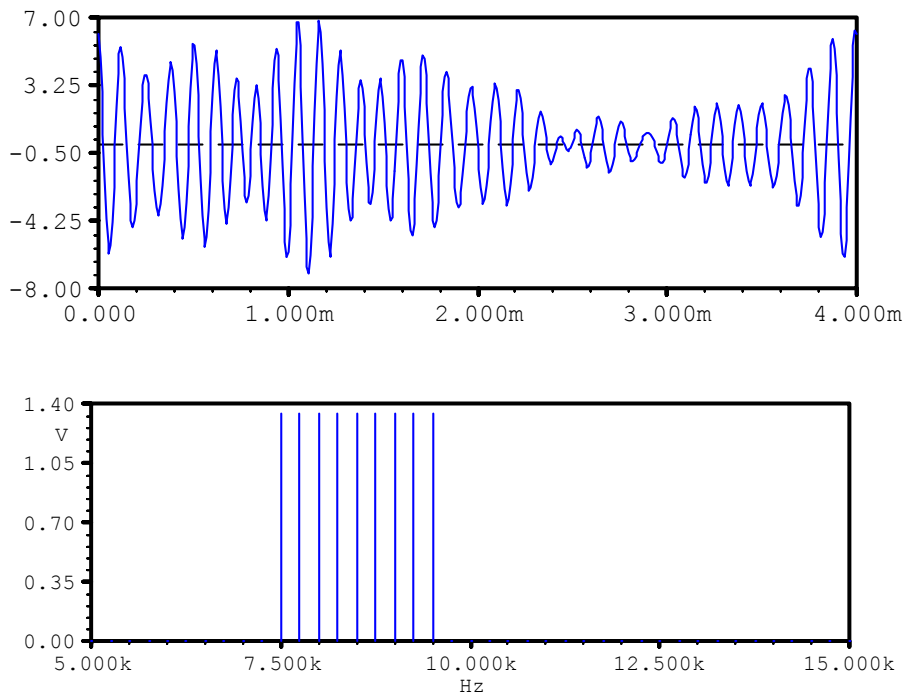


La misma señal $x(t)$ modula una portadora de 10 kHz en DBL, con la misma amplitud de pico que la anterior (aprox. 7 v)



Idem pero en SSB, banda lateral inferior
 $x(t)$ y $\hat{x}(t)$, notar que son parecidas, pero no idénticas





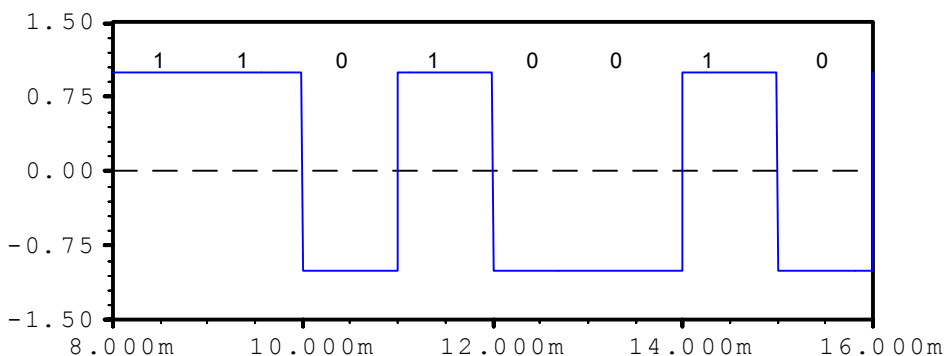
8.2.- Modulación lineal de señales digitales

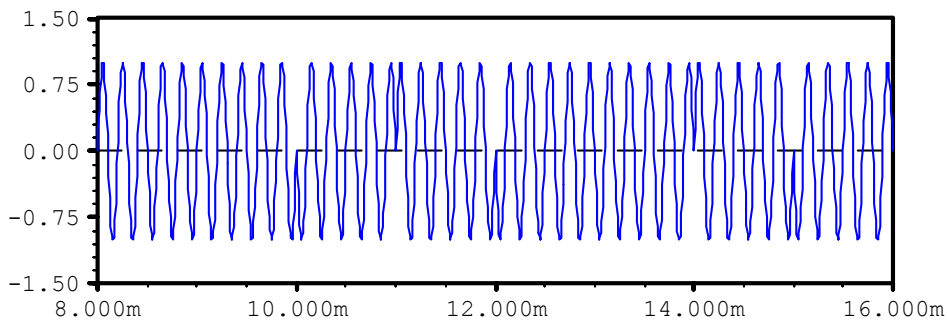
Si $x(t)$ es una señal digital bipolar NRZ de R_b bps, idealmente puede tomar únicamente valores 1 o -1, para mantener coherencia con las limitaciones impuestas, también se supone que su ancho de banda está limitado ($R_b/2 \dots R_b$). Si: $e(t) = A.x(t). \cos(2.\pi.f_0.t)$

entonces, si $x(t) = 1$ (1 transmitido): $e_1(t) = + A.\cos(2.\pi.f_0.t)$
 si $x(t) = -1$ (0 transmitido): $e_0(t) = - A.\cos(2.\pi.f_0.t)$

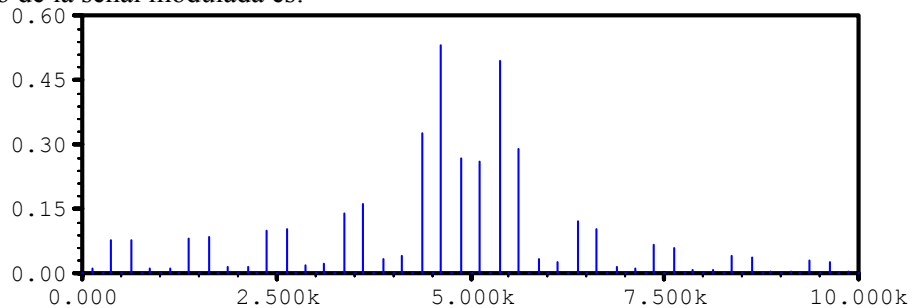
Como ya se vió, El espectro de $e(t)$, ($E(f)$) será idéntico al de $x(t)$, ($X(f)$), trasladado a $\pm f_0$. Si el ancho de banda (teórico) de $x(t)$ es $R_b/2$ Hz, el de $e(t)$ será R_b Hz.

Para ilustrar lo anterior, si $x(t)$ es una secuencia repetitiva 11010010 de 1kbps, $f_0 = 5kHz$ $A=1$, $e(t)$ será:

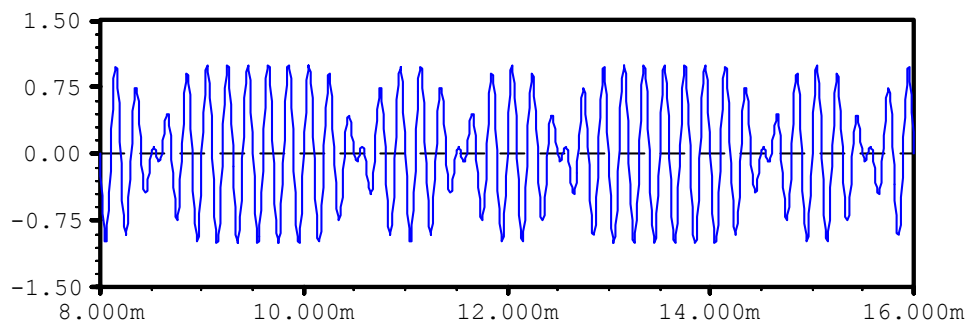
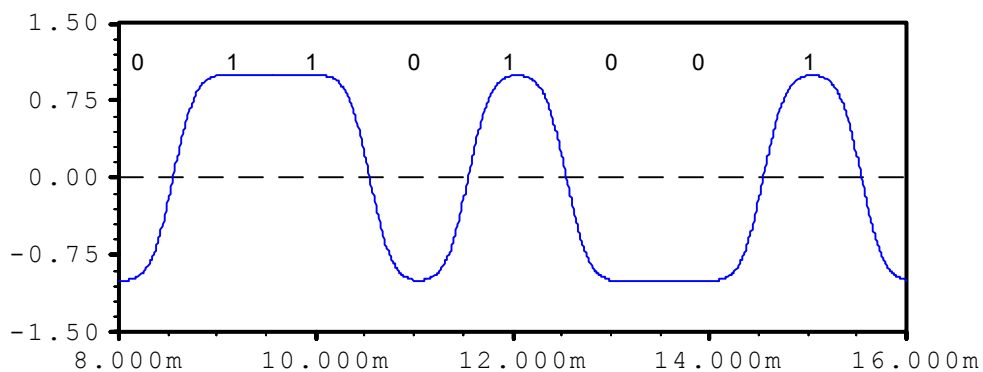




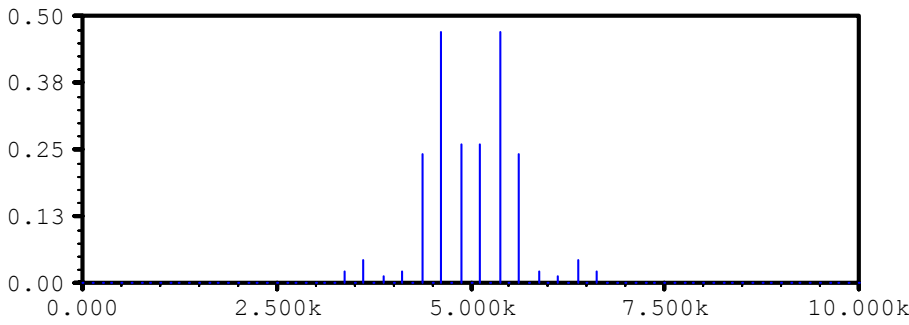
El espectro de la señal modulada es:



Si, antes de modular la señal digital es procesada por un filtro pasa bajos (Gaussiano con frec. de corte de 3dB = 0.75kHz) se tiene:



Su espectro :



En ambos casos el ancho de banda ocupado por componentes significativas es, aproximadamente, 1.2kHz. Notar la reducción de las componentes espurias debido al filtrado de $x(t)$, que reduce la amplitud de la señal moduladora cuando ocurren cambios de fase.

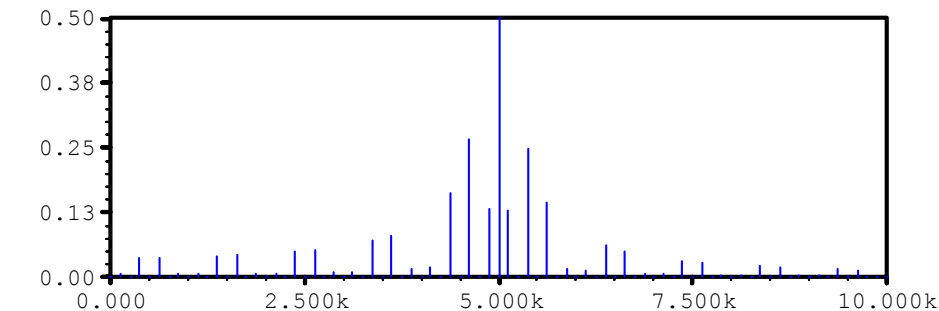
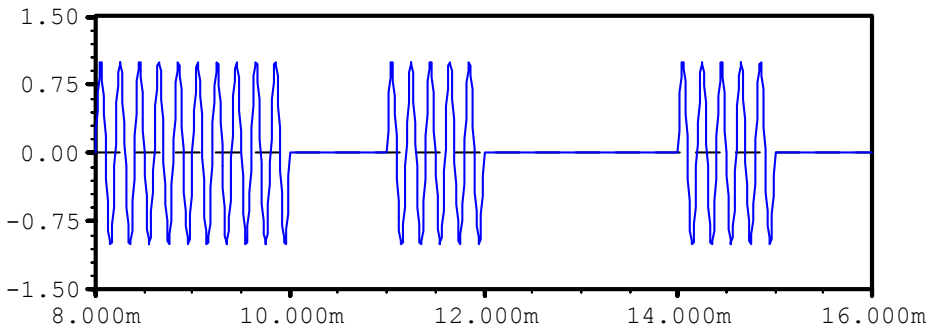
Un sistema de éste tipo puede verse como un método de modulación lineal o también como de modulación de fase:

$$e_1(t) = +A \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t - 0) \quad \text{y} \quad e_0(t) = -A \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t - \pi)$$

es decir que $e(t)$ puede ponerse como: $e(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t - \phi(t))$, donde $\phi(t) = 0$ si $x(t) = +1$ (1 lógico) y $\phi(t) = \pi$ si $x(t) = -1$ (0 lógico), el sistema se denomina “modulación 2-PSK o BPSK” (2 niveles de Phase Shift Keying): Cuando el mensaje digital es 1 se transmite la portadora con un determinado ángulo de fase (en éste caso 0) si es 0, el ángulo de fase toma otro valor (en éste caso $-\pi$).

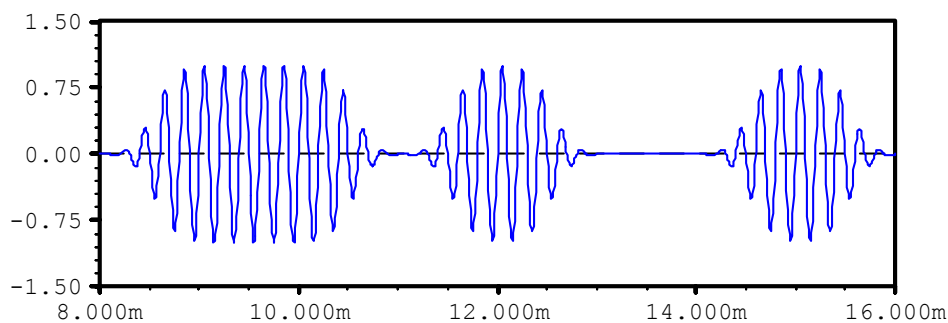
Si se agregara una componente continua a $x(t)$ tal que: $y(t) = \frac{1}{2} \cdot (1 + x(t))$ donde $x(t)$ es el mensaje digital ± 1 ,

se ve que $y(t)$ tomará los valores 1 o 0 cuando $x(t)$ sea +1 o -1 (1 o 0 lógicos). La señal modulada $e(t) = A \cdot y(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$ será:

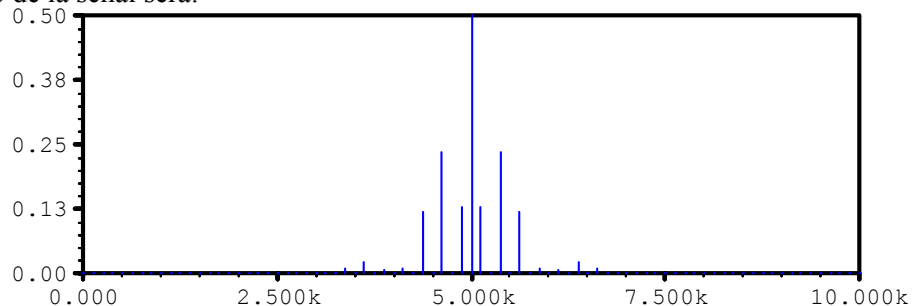


Notar la presencia de portadora en 5 kHz

Agregando un filtro idéntico al ya utilizado antes de la modulación:



El espectro de la señal será:



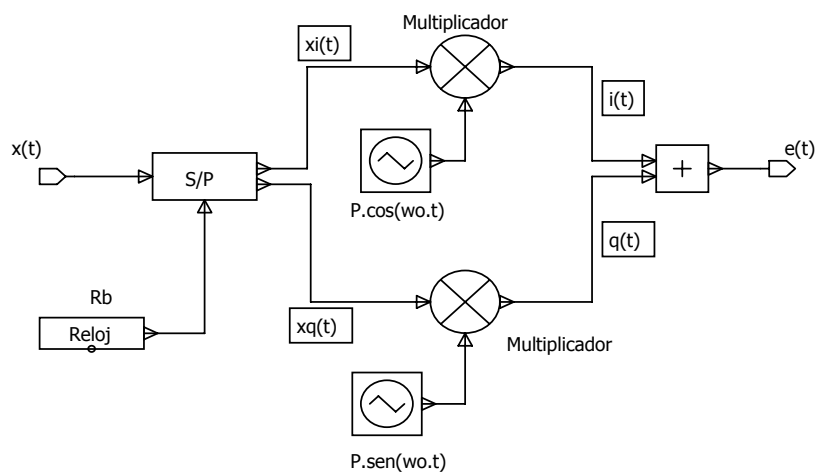
Igual que antes, se reducen las espurias. El ancho de banda es idéntico a BPSK. El método se denomina “modulación ASK” (Amplitude Shift Keying). Existe portadora cuando el mensaje digital es 1 y no existe cuando es 0.

8.2.1.- Modulación de fase (lineal) de varios niveles

El sistema BPSK es simple y relativamente sencillo de implementar. El ancho de banda ocupado por la señal modulada es R_b Hz (teórico), es posible disminuir el ancho de banda ocupado por la señal modulada codificando los bits del mensaje digital en grupos, asignando un determinado valor de fase a cada grupo. El esquema básico utilizado es el de modulación en cuadratura.

8.2.1.1.- QPSK

Considerar el siguiente esquema:

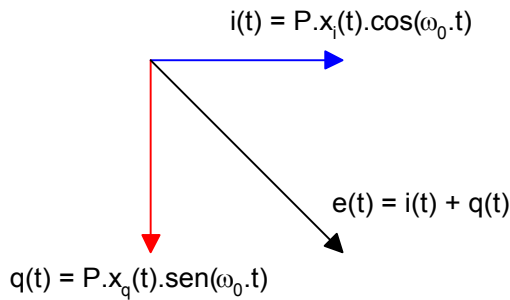


La señal digital $x(t)$ de R_b bps es procesada por el conversor serie-paralelo de tal manera que los dígitos impares son derivados a la salida $x_i(t)$ y los pares a $x_q(t)$ apareciendo simultáneamente en ellas, por consiguiente, la

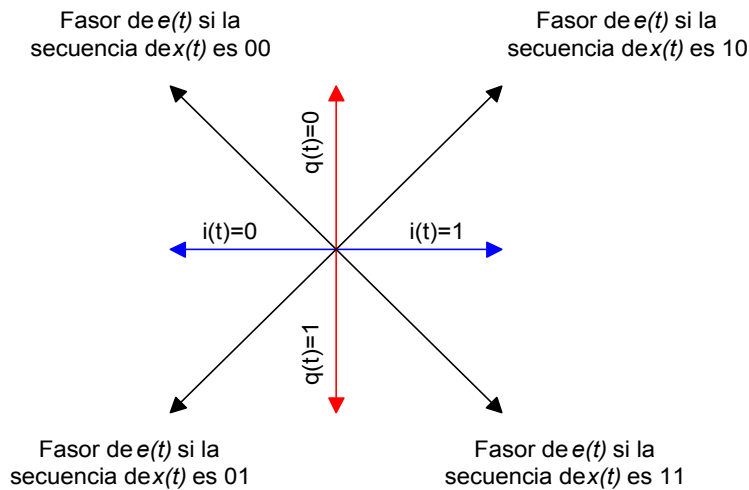
velocidad de $x_i(t)$ y $x_q(t)$ es $R_b/2$ bps.

Las salida de los multiplicadores es: $i(t) = P \cdot x_i(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$ y $q(t) = P \cdot x_q(t) \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$, y la salida del sumador se tendrá: $e(t) = P \cdot (x_i(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) + x_q(t) \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t))$

El diagrama fasorial de $e(t)$ es:

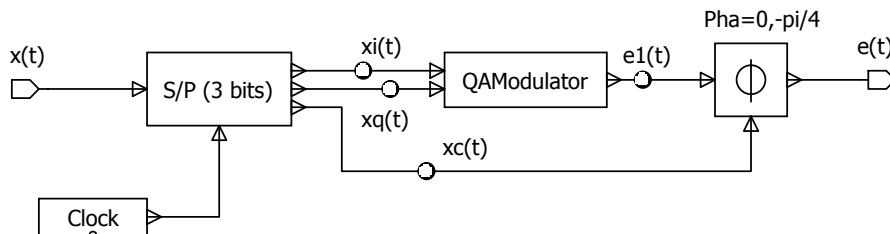


Como los posibles valores de las amplitudes de $i(t)$ y $q(t)$ son $\pm P$ y las posibles combinaciones de dígitos, tomados de a dos, son 00,01,10 y 11, según sea la secuencia, el diagrama fasorial de $e(t)$ es:



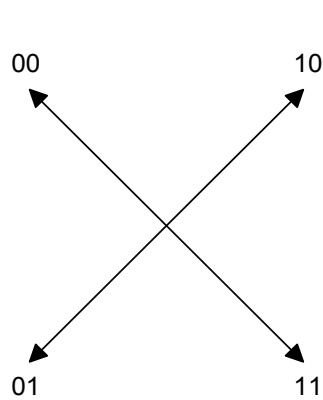
El ancho de banda ocupado por $e(t)$ es $R_b/2$ Hz, el doble del ancho de banda de $x_i(t)$ y $x_q(t)$ y la mitad del que tendría si se utilizara BPSK.

El método QPSK, también llamado 4PSK, puede ampliarse codificando simultáneamente más de dos bits de la señal digital original. Considerar, p.ej. el siguiente esquema:

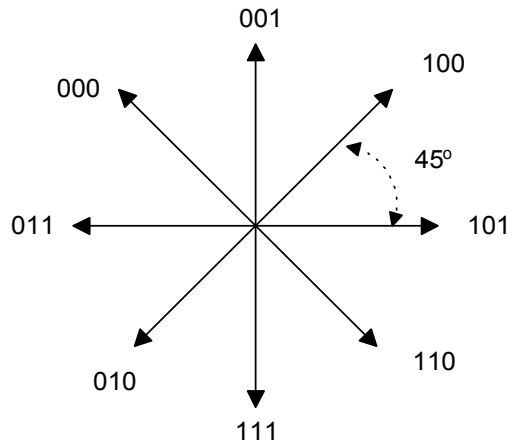


El conversor serie-paralelo, deriva grupos de tres bits de la señal $x(t)$ a $x_i(t)$, $x_q(t)$ y $x_c(t)$. Si la velocidad de $x(t)$ es R_b bps, la de cada una de las señales de salida del conversor será $R_b/3$ bps. x_i y x_q se modulan en forma

convencional como QPSK, mientras que x_c inserta en la salida de $e_j(t)$ un desfase de 0 o -45° según x_c sea 0 (lógico) o 1 (lógico)



Plano de fases para $e_1(t)$



Plano de fases para $e(t)$

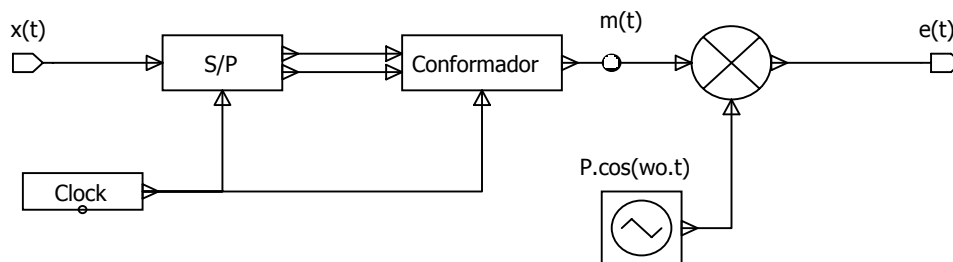
El ancho de banda -teórico- ocupado por $e(t)$ será $R_b/3$ Hz, el esquema se denomina 8PSK (el diagrama en bloques es indicativo del procedimiento, no corresponde a una implementación práctica, no sería conveniente el "llaveo" de un impreciso defasador).

En general, si se codifican b bits simultáneamente, la velocidad de las señales de banda de base, después del proceso de conversión serie-paralelo, será R_b/b bps y su ancho de banda $R_b/2b$ Hz. La señal modulada ocupará un espacio (componentes significativas) de R_b/b Hz.

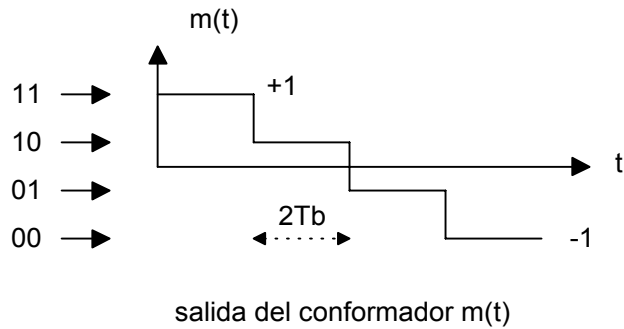
No es usual utilizar esquemas NPSK con N mayor que 8, es preferible por razones de inmunidad al ruido, modular en fase y amplitud utilizando sistemas QAM.

8.2.1.2.- QAM

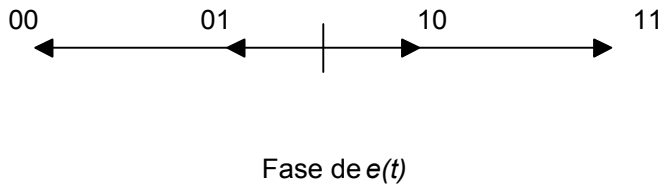
En sistemas QAM (**Q**uadrature **A**mplitude **M**odulation) la información de la señal modulada es transportada por la amplitud de la señal y también por su fase. Un esquema simple (posible, pero no usual en la práctica) de un sistema modulado en amplitud y fase sería:



El conformador genera una señal bipolar de cuatro niveles equidistantes entre +1 y -1 según la secuencia de entrada sea 00, 01, 10, 11 y donde, cada nivel permanece durante $2T_b$ seg.:



El diagrama de fases de la señal de salida del multiplicador será:



es decir que la salida será para cada una de las secuencias posibles:

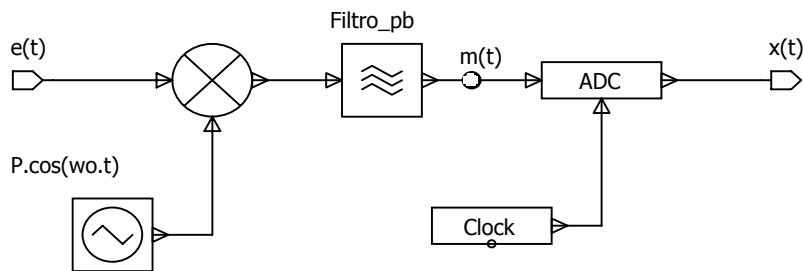
$$11 \rightarrow e(t) = P \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$$10 \rightarrow e(t) = P \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$$01 \rightarrow e(t) = P \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t - \pi)$$

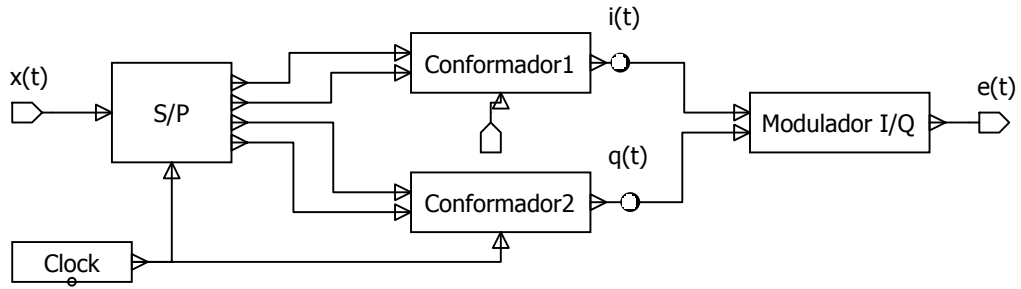
$$00 \rightarrow e(t) = P \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t - \pi)$$

Para recuperar la señal original es necesario determinar amplitud y fase de $e(t)$. El sistema detector podría ser:



La señal digital cuaternaria bipolar NRZ, $m(t)$, es recuperada a la salida del filtro pasa bajos, el conversor analógico digital (ADC) reconstruye la secuencia digital binaria bipolar original a partir de sus valores.

El esquema anterior no es utilizado como tal, sino que constituye la base de sistemas mas elaborados de niveles múltiples. Como ejemplo se muestra el diagrama en bloques de un sistema 16QAM:



El conversor serie-paralelo agrupa los bits de entrada en secuencias de 4 bits, los dos primeros pasan al conformador1 y los otros dos al conformador2, las señales generadas $i(t)$ y $q(t)$ son idénticas a la vista mas arriba, con la diferencia que cada nivel de la señal cuaternaria se mantiene durante $4T_b$ seg.

El sistema receptor debe recuperar las señales $i(t)$ y $q(t)$ mediante un detector de cuadratura y un posterior procesamiento analógico digital reconstruir la señal digital original.

El ancho de banda ocupado por una señal 16QAM sería $R_b/4$ Hz, similar al de un esquema 16PSK, en general, un sistema NQAM ocupa el mismo ancho de banda que un NPSK. Con el esquema indicado pueden generarse señales 4QAM (similar a 4PSK), 16QAM, 64QAM, 256QAM, etc. según se codifiquen los bits de a 2, 4, 6, 8, ..., mitad para canal I y mitad para canal Q - . Con esquemas diferentes (DSP) puede generarse p.ej. 32QAM, codificando grupos de 5 bits.

