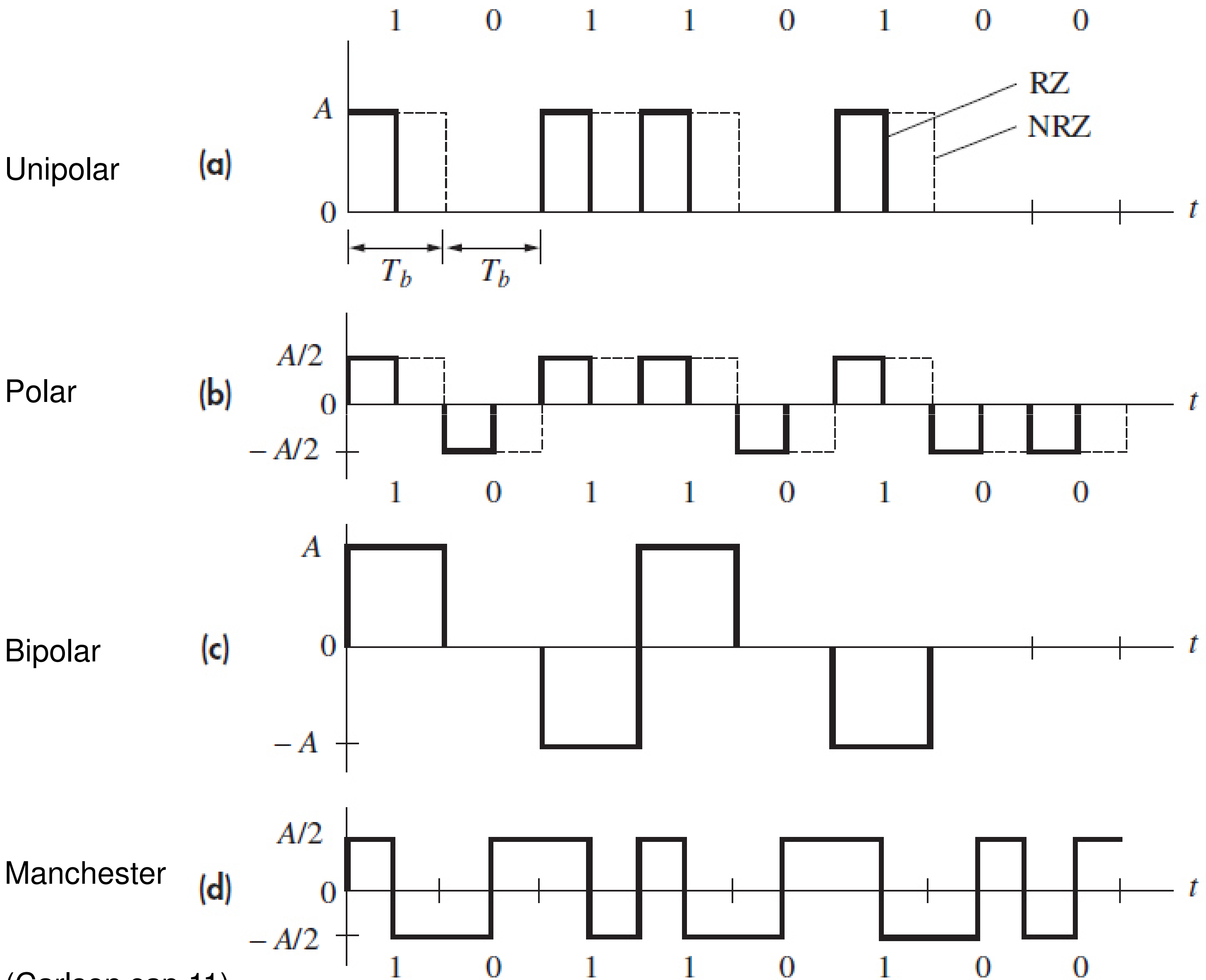
SEÑALES DIGITALES en banda base.

Señales digitales
Distorsión intersimbólica
Ancho de banda ocupado por una señal digital
Señales digitales en presencia de ruido
Transmisión de señales analógicas en forma digital
Modulación de pulsos codificado (PCM)

Señales digitales

Dado un mensaje digital (p.ej. 11010010) existen diversos métodos para transmitirlo como una señal eléctrica (señal digital), algunos de los mas comunes, suponiendo transmisión sincrónica , se indican a continuación:



(Carlson cap.11)

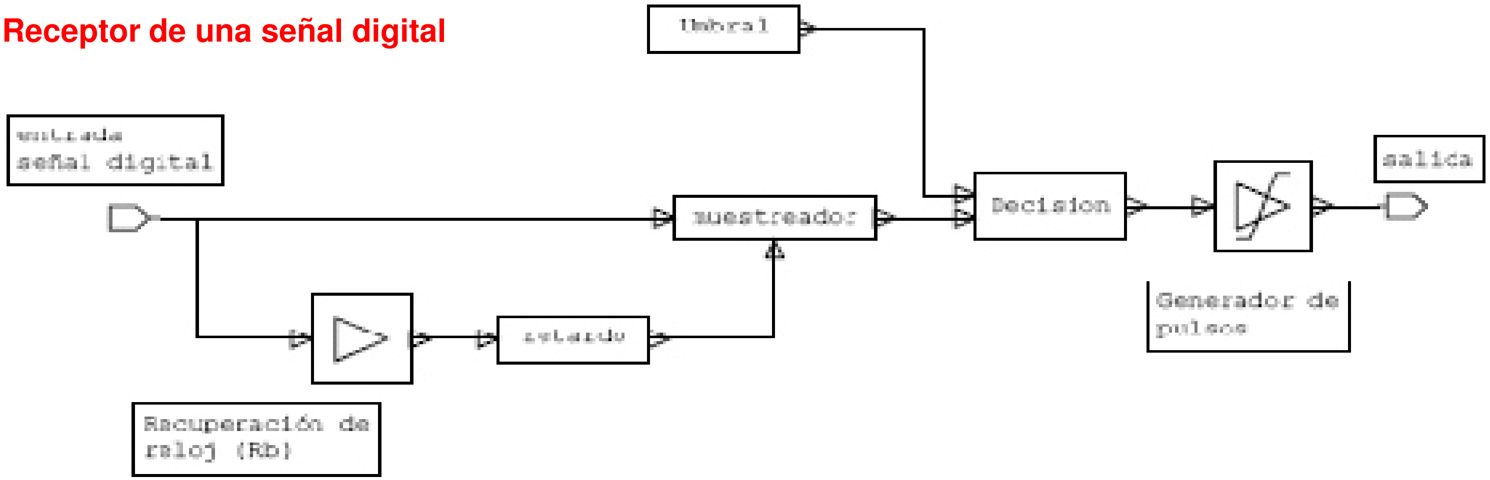
Cada uno de los métodos tiene sus ventajas y desventajas. Es función del sistema de transmisión digital reproducir en el extremo receptor una secuencia idéntica a la transmitida, eventualmente defasada en tiempo. Cada uno de los elementos transmitidos constituye un **bit** y el número de bits transmitidos en un segundo la **velocidad de transmisión**, medida en **baud** o bits por segundo (bps). Como se verá mas adelante, cada elemento de la señal digital puede representar a mas de un bit del mensaje digital. Usual utilizar baud para la velocidad de la señal y bps para el mensaje.

DETECCIÓN O RECUPERACIÓN DE LA SEÑAL DIGITAL

Para la recuperación de la señal digital, se debe definir un método de detección de la información transmitida mediante la señal digital. Un esquema usual es el de muestreo y decisión que en su versión mas simple consiste en:

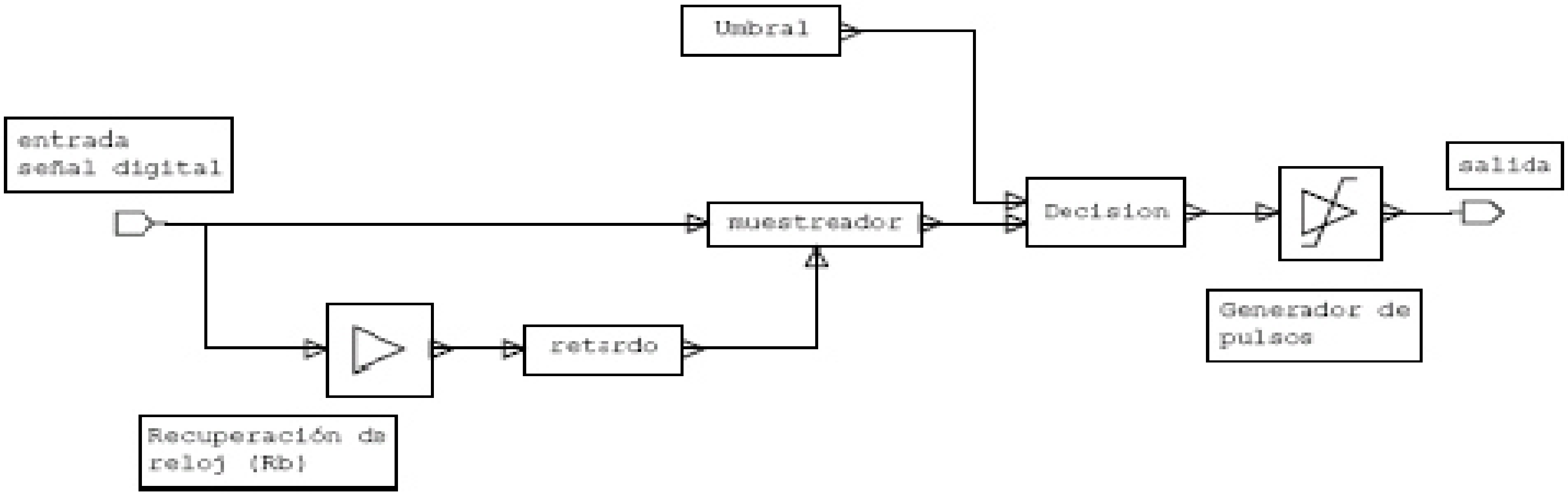
a) Tomar una muestra de la señal digital en un instante apropiado (p.ej. el centro de cada elemento).
b) Comparar su valor con algún umbral conveniente
c) Decidir si la muestra está por encima o por debajo del umbral y, según el resultado, asignar al bit recibido el valor 1 o 0 y, eventualmente, generar una señal eléctrica.

Receptor de una señal digital



Notar lo siguiente:

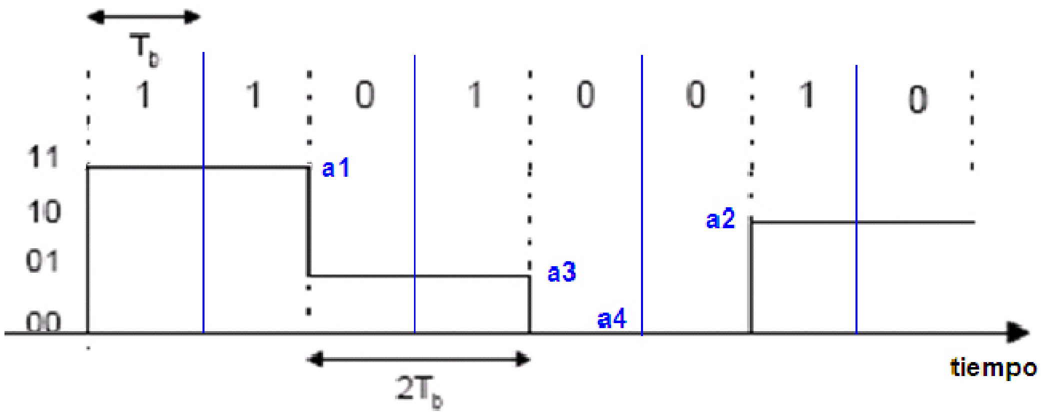
a) En el extremo receptor, hace falta conocer el tiempo de duración de cada bit (T_b) y la velocidad de señalización ($R_b=1/T_b$).
b) Se debe ubicar el centro o la posición mas adecuada para leer la muestra
c) En la señal recibida, el valor de interés de amplitud es únicamente el correspondiente al instante de la muestra.



Transmisión n - aria

- Bit a bit: n=1, transmisión bi-naria (dos amplitudes a_k, k=1, 2)
- De a 2 bit: n=2, transmisión cuater-naria (cuatro amplitudes a_k, k=1, 2, 3, 4)
- etc

Los métodos indicados hasta ahora transmiten bit por bit, es decir, un elemento del mensaje digital se transforma en un elemento de la señal digital, ambos con la misma duración. Es posible generar una señal digital en que, cada elemento represente una determinada secuencia de bits del mensaje digital. En éste caso, la señal digital no será binaria.



Señal cuaternaria unipolar NRZ

En la figura de arriba, se codifican los bits del mensaje de a dos y se asigna a cada elemento de la señal digital un valor de amplitud diferente para cada una de las cuatro secuencias posibles (00, 01, 10, 11). En general, si se codifican n elementos del mensaje digital, harán falta 2^n niveles de la señal digital. Cada uno de estos niveles puede durar hasta nT_b segundos sin que se produzca distorsión intersimbólica, es decir que la velocidad de transmisión se puede reducir a $R_{bt} = \dfrac{1}{nT_b}$ [*baud*].

Ventaja: transmisión en menor ancho de banda Desventaja: a mayor *n* aumenta la dificultad de detección. Se pueden confundir los símbolos o distorsión intersimbólica.

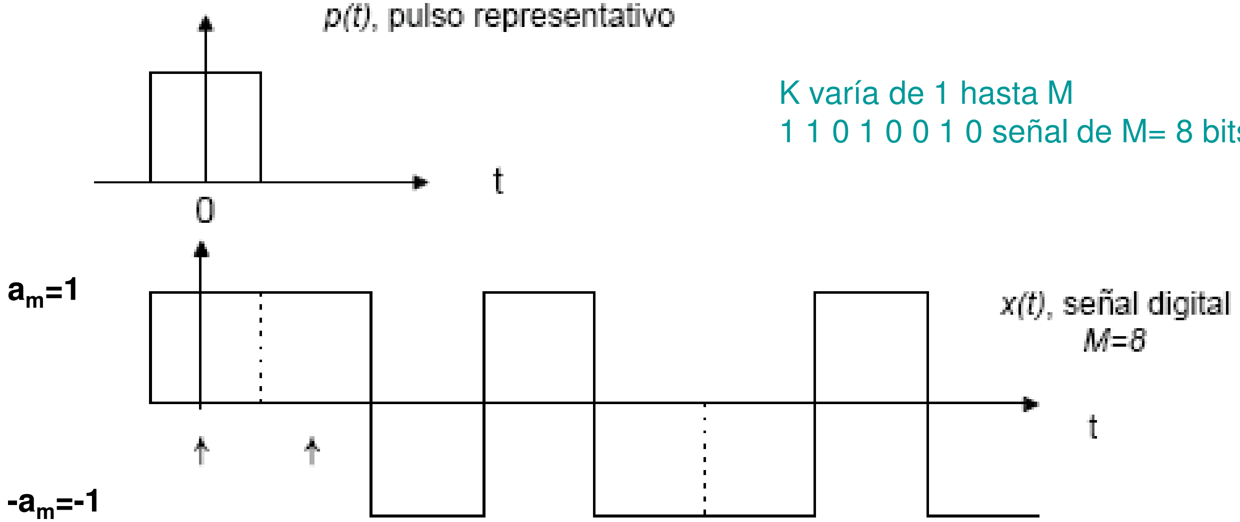
Distorsión intersimbólica

Existe distorsión intersimbólica cuando parte de la señal correspondiente a un determinado bit se difunde a bits adyacentes, eventualmente capaz de generar errores.

Si se adopta, para la señal digital, un pulso *p(t)* para representar cada elemento del mensaje digital, una señal de *M* bits de duración puede ponerse como:

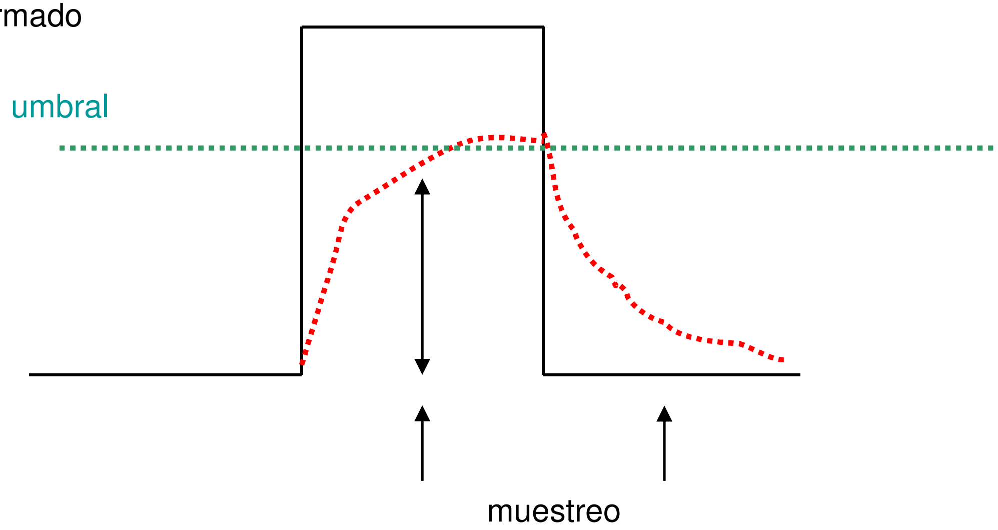
$$x(t) = \sum_k a_k \, . \, p(t - k.T_b) = p(t) * \sum_k a_k \, . \, \delta(t - k.T_b)$$

K varía de 1 hasta M
1 1 0 1 0 0 1 0 señal de M= 8 bits

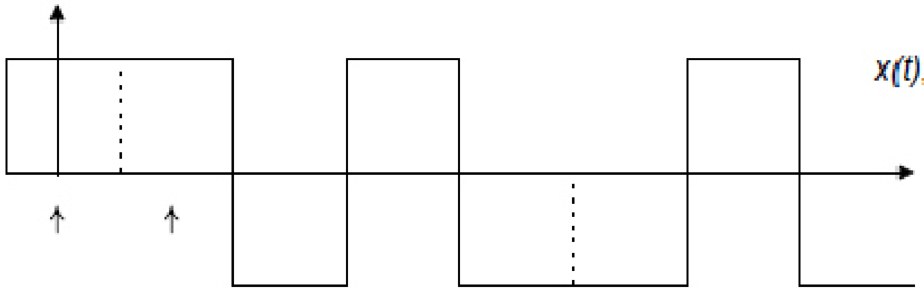


donde k varía de 1 a M y cada valor a_k puede tomar únicamente el valor $+1$ o -1 (se supone transmisión bipolar, si fuera unipolar, sería 1 o 0). En el ejemplo de arriba, $M=8$ y el mensaje es 1 1 0 1 0 0 1 0, es decir que $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=-1$ $a_4=1$, $a_5=-1$, $a_6=-1$, $a_7=1$ y $a_8=-1$.

Al pasar el pulso por un RC es deformado



Confunde el “1” con el “0” lógico



Si se toman muestras de $x(t)$ en el centro de cada bit, es decir en $t=0, T_b, 2T_b \ldots$, se tiene que, una muestra genérica en algún instante mT_b, donde m es entero y $1 \le m \le M$ vale:

$$x(mT_b) = \sum_k a_k . p(m.T_b - k.T_b) = \sum_k a_k . p((m-k).T_b) = \underbrace{a_m . p(0)}_{\neq \text{ cero}} + \sum_{\text{para todo } k, \text{ excepto } k=m} a_k . p((m-k).T_b)$$

=0 para todo k excepto k=m.Si es ≠ 0 hay distorsiòn intersimbólica

Notar que $(m-k)$ es siempre un número entero, positivo o negativo. Para tener distorsión intersimbólica nula, el segundo término tiene que ser igual a 0. Ello se consigue si: (a) $p(t)$ es limitado en tiempo a no mas de T_b seg. de duración y $p(0)$ tiene valor no nulo (el caso de la figura) y (b) $p(0)$ es no nulo y $p(t)$ es nulo a múltiplos + o - de T_b

Si m=5 y k=7 , m-k=-2 . Si a_7. p(-2) ≠ 0 hay distorsión por solapamiento del bit 5 con el bit 7 y asi sucesivamente

Conclusión:
cada bit transmitido dura Tb segundos, los bit aparecen a la frecuencia Rb=1/Tb baud,
Para recuperar el mensaje digital debo tomar muestras a la misma frecuencia con un retardo de Tb/2 segundos (en la mitad de cada bit). Por lo tanto debo recuperar las señal de “clock” del mensaje digital.

Ancho de banda ocupado por la señal digital

Con lo estudiado se puede deducir el ancho de banda para el peor caso. Mensaje 101010 etc

Si la señal *x(t)* es transmitida a través de un filtro pasa bajos con función de transferencia *H(f)*. El espectro de la salida (respuesta) será: $R(f)=X(f).H(f)$

Si:

$$x(t)=p(t)*\sum_k a_k.\delta(t-k.T_b)=p(t)*i(t)$$

Se tiene que: $X(f)=P(f).I(f)$ y $R(f)=P(f).I(f).H(f)$

Donde *P(f)* y *H(f)* son funciones conocidas e *I(f)* dependerá de los coeficientes a_k del mensaje digital. Si se define un filtro pasa bajos ideal cuya característica de transferencia sea:

$$H(f)=\frac{1}{P(f)}.rect(f,R_b)$$

Filtro con espectro rectangular

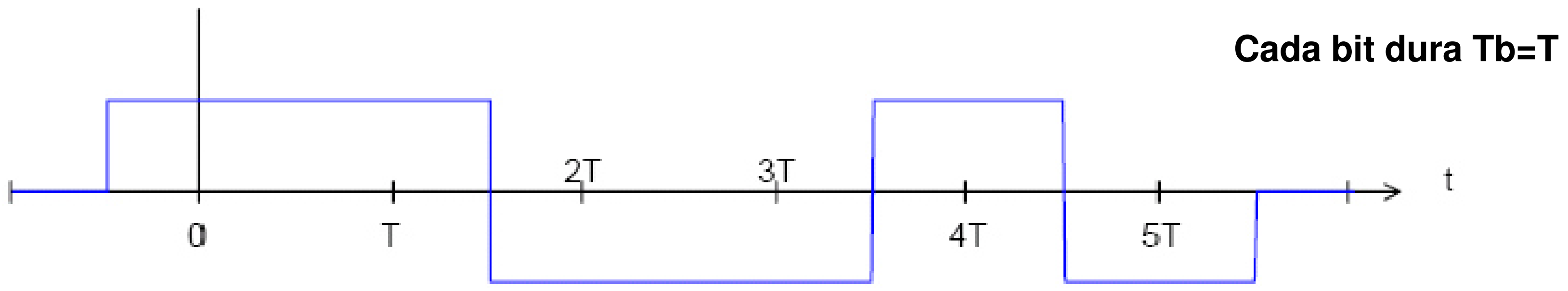
Rb/2 expresado en Hz

es decir transmisión limitada en ancho de banda entre *-Rb/2* y *Rb/2*, el espectro de la respuesta será: $R(f)=I(f).rect(f,R_b)$, y en dominio de tiempo, a través de su transformada inversa:

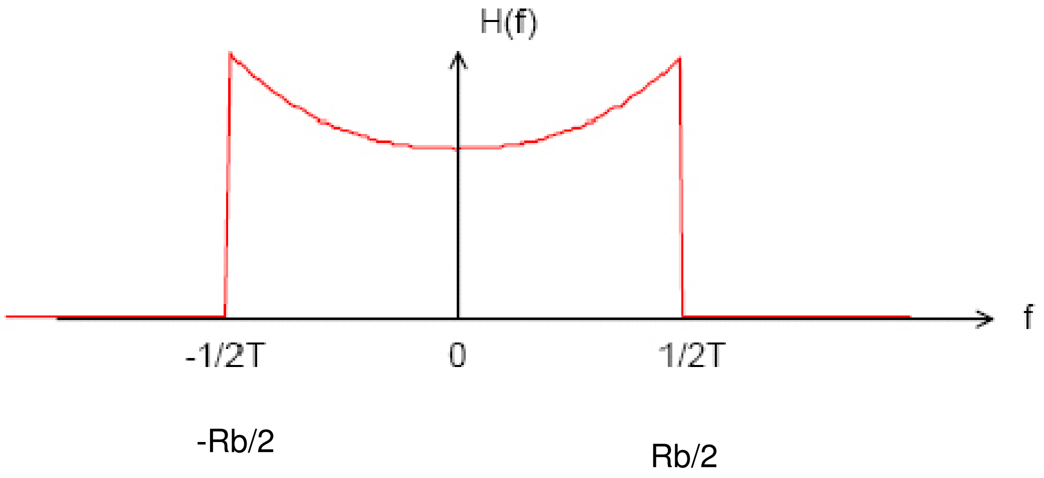
$$r(t)=i(t)*\frac{sen(\pi.R_b.t)}{\pi.R_b.t}=\sum_k a_k.\delta(t-k.T_b)*\frac{sen(\pi.R_b.t)}{\pi.R_b.t}$$

como $R_b=1/T_b$, se ve que *r(t)* toma en los instantes *mTb* el valor correspondiente al término a_m únicamente, siendo la distorsión intersimbólica nula.

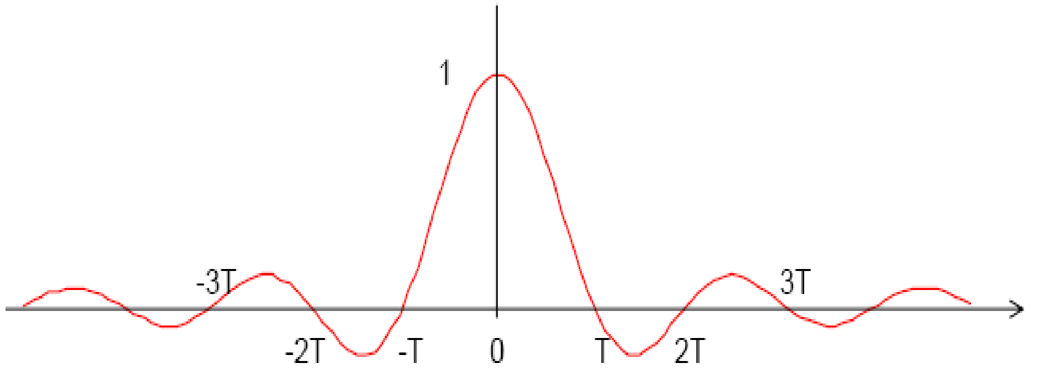
Suponer un mensaje digital 1 1 0 0 1, codificado en forma bipolar NRZ y $p(t)=rect(t,T_b)$:



La función de transferencia del filtro será :

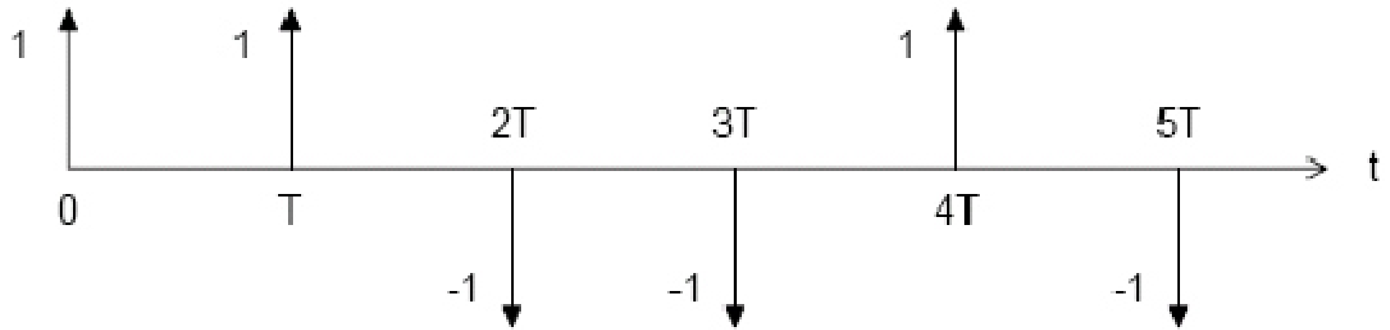


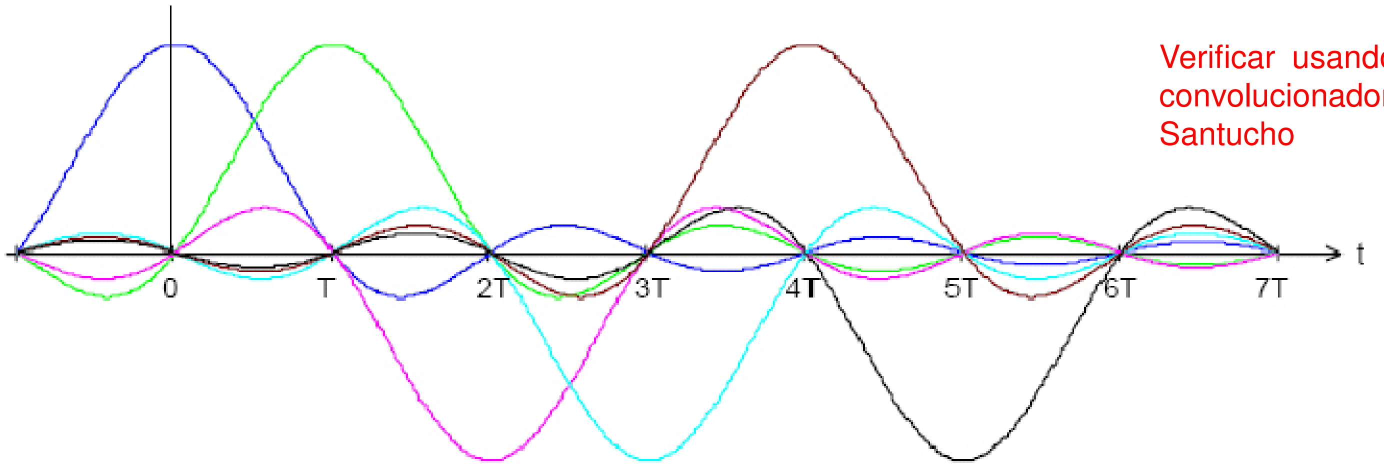
La respuesta, en dominio de tiempo será : $r(t) = \sum_k a_k.\delta(t - k.T_b) * \frac{sen(\pi.R_b.t)}{\pi.R_b.t}$, que es la convolución de:



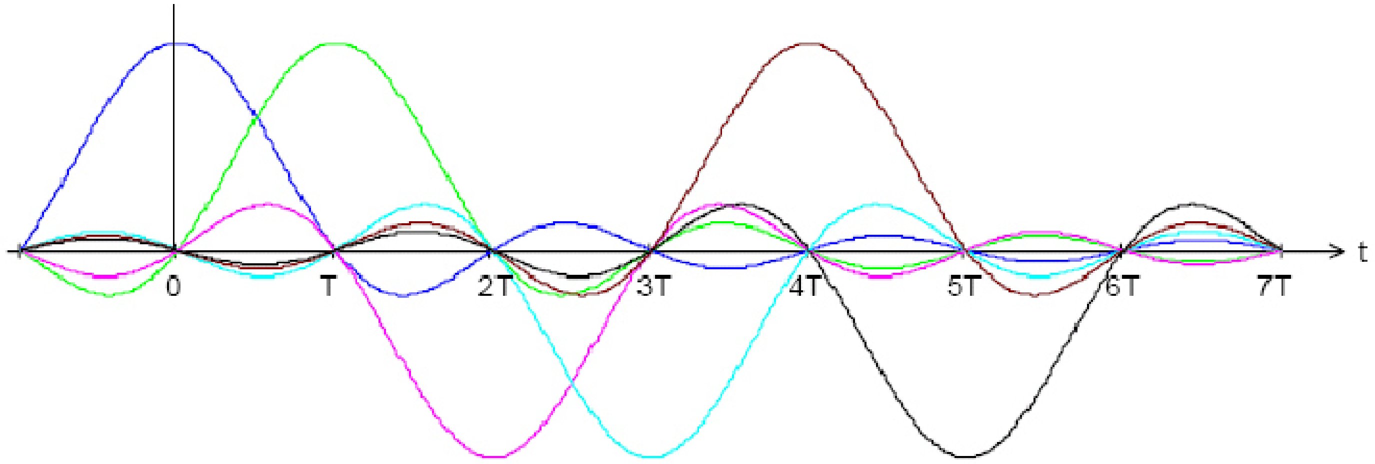
Ojo cada bit dura Tb=T

Mensaje digital 1 1 0 0 1 0





Verificar usando el convolucionador de Santucho que da como resultado a la forma de onda *sen(x)/x* trasladada a las posiciones de los impulsos y multiplicada por el área de cada uno de ellos.:

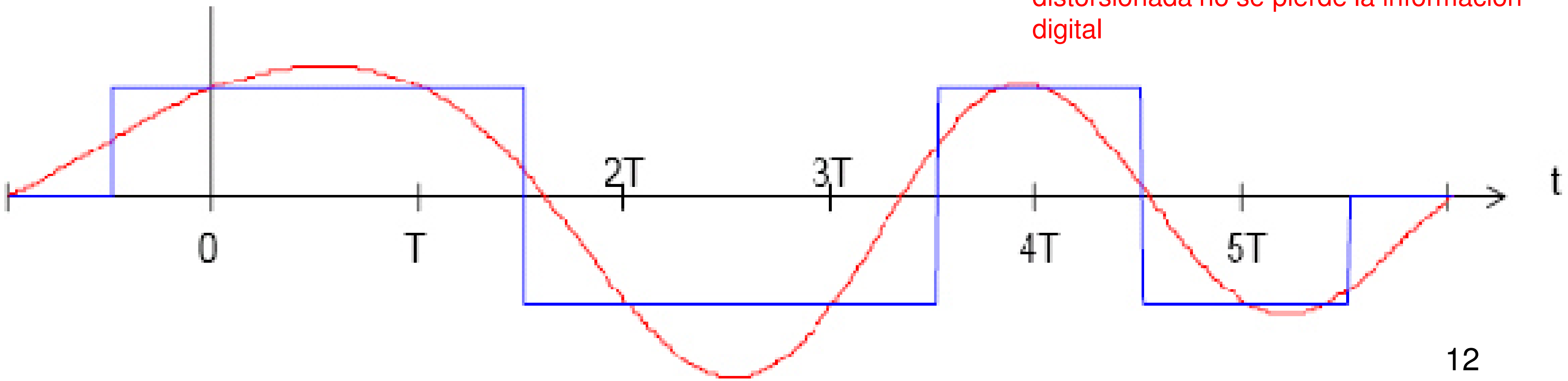


Notar que, en los instantes de muestreo, la única contribución a la señal de salida es la correspondiente al dígito generado en ese instante, las contribuciones de todos los demás es cero. Obviamente la respuesta que es la suma de las señales individuales, está distorsionada pero mantiene los valores originales en los instantes de muestreo.

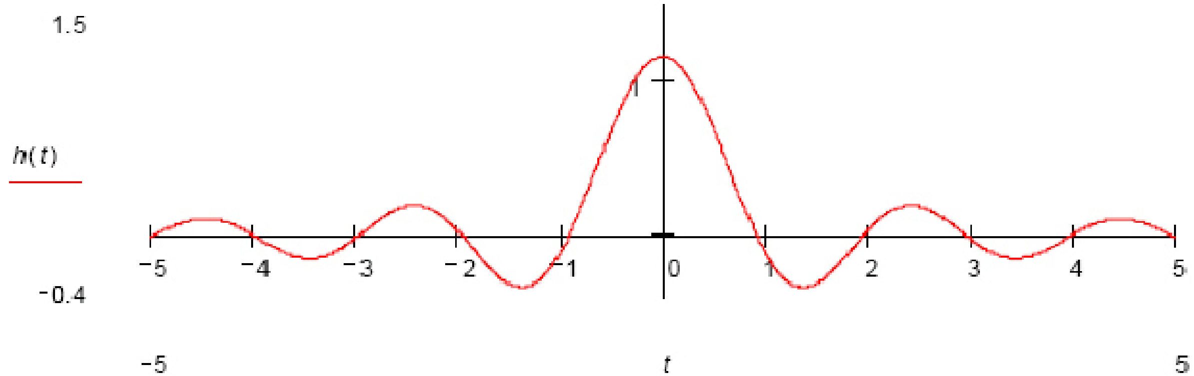
$$r(t) = \sum_k a_k.\delta(t - k.T_b) * \frac{sen(\pi.R_b.t)}{\pi.R_b.t}$$

Mensaje digital 1 1 0 0 1 0

Notar que a pesar que la señal está muy distorsionada no se pierde la información digital



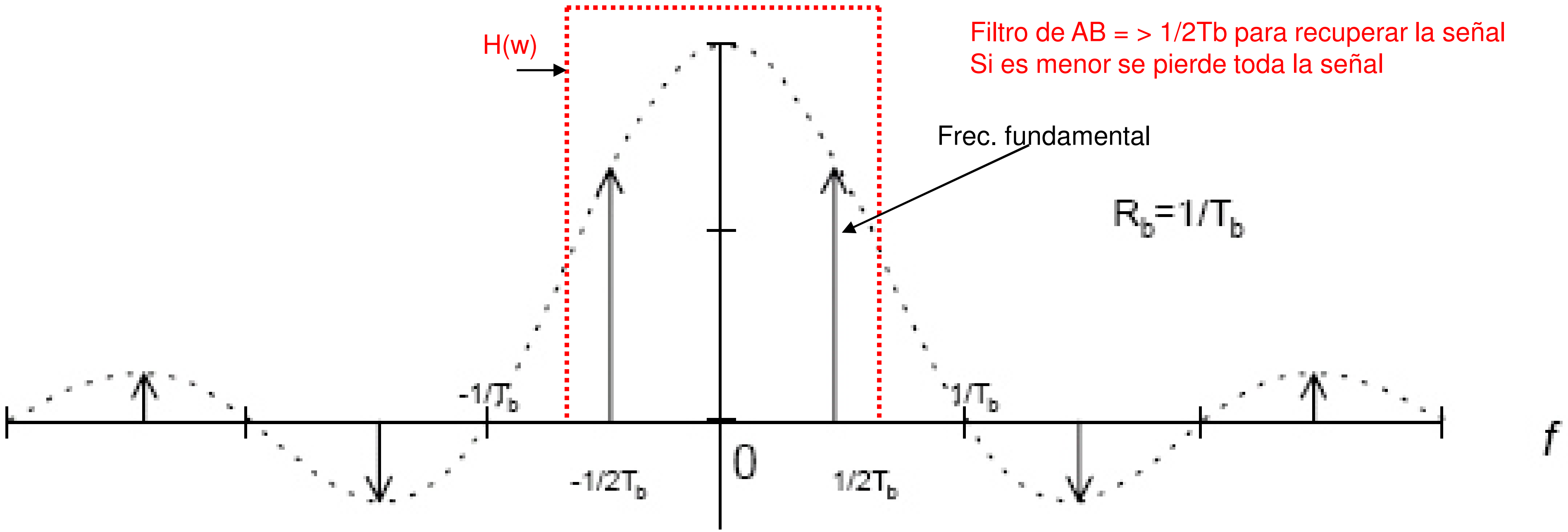
La respuesta al impulso (normalizada para $T_b=1$) del filtro $H(f)$ es: $h(t)=\int_{-0.5}^{0.5} \frac{\pi f}{\sin(\pi f)}.e^{j2\pi f t}.df$



La respuesta al impulso $h(t)$ se anula a múltiplos de T_b. Puede demostrarse que, en general, no existe distorsión intersimbólica si una señal digital se transmite a través de filtros que cumplen con esta característica.

Lo anterior indica que una señal digital de R_b baud puede ser transmitida, sin perder información, en un ancho de banda de $R_b/2$ Hz$^+$ (ancho de banda de Nyquist) utilizando un filtro adecuado. Además, el ancho de banda $R_b/2$ Hz es el valor mínimo (teórico) adecuado para la transmisión sin distorsión. Esto surge de la siguiente consideración:

Suponer una secuencia ... 1 0 1 0 1 0 ... , que puede considerarse, desde el punto de vista de ocupación de ancho de banda, como el caso mas desfavorable de un sistema de transmisión digital. Suponiendo, como antes, transmisión bipolar NRZ y $p(t)=rect(t,T_b)$, su espectro será :



Si se filtra la señal con un filtro rectangular ideal que tenga transmisión constante entre $-\frac{R_b}{2}-\Delta f$ y $\frac{R_b}{2}+\Delta f$ [Hz] con $\Delta f \to 0$, el resultado será de dos impulsos en $\pm R_b/2$, que en dominio de tiempo representa una señal armónica de frecuencia $R_b/2$ Hz, es decir que mantiene la información digital ... 1 0 1 0 1 0 ... mientras que si se reduce el ancho de banda del filtro a $-\frac{R_b}{2}+\Delta f$ y $\frac{R_b}{2}-\Delta f$ [Hz], no existe salida. Esto sugiere que el ancho de banda $R_b/2$ es el mínimo admisible.

En la práctica, se toma el ancho de banda necesario para transmitir una señal digital de R_b bps entre $0,5R_b$ y R_b [Hz], usualmente $0,75.R_b$.

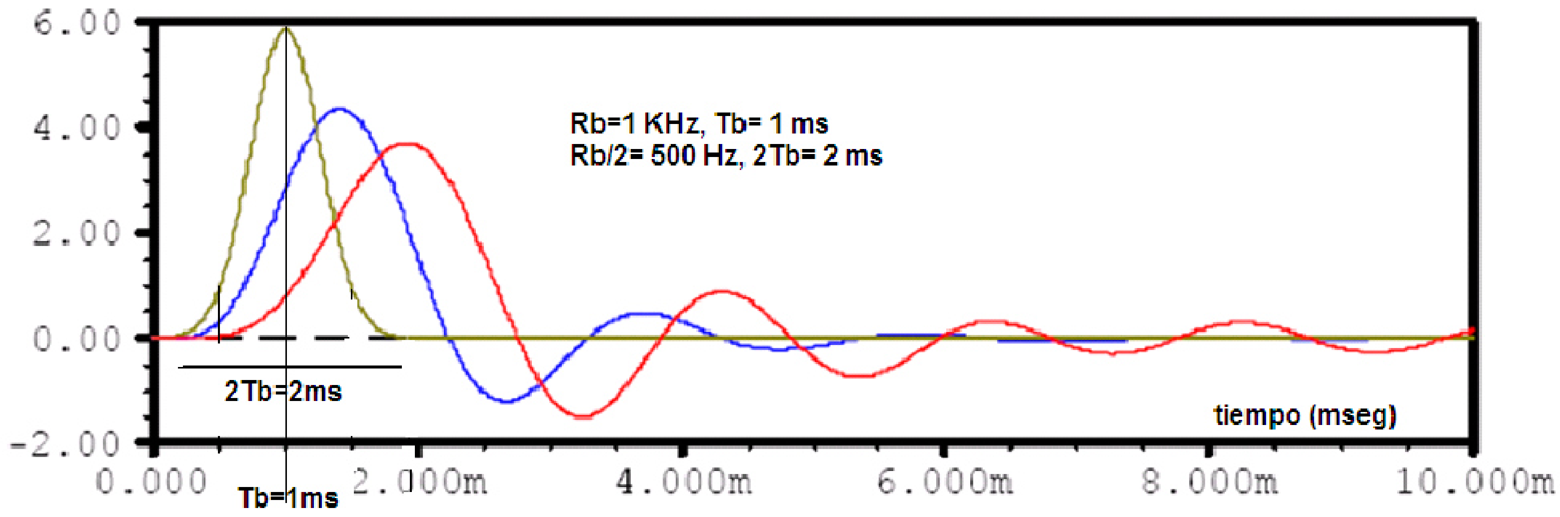
Conclusiòn:
No se pierde información si la señal digital de frecuencia Rb (baud) es transmitida
 por un canal con ancho de banda = Rb/2 Hz

Ejemplo:

Los datos de una señal digital binaria en banda de base, salen de una terminal digital a una velocidad de 1.95Mbps.
Que ancho de banda recomendaría para su transmisión?. Cuando dura cada bit ?.
Cuanto vale la señal de salida si pasa por un filtro pasa bajos de ancho de banda 970 KHz ?
Cuanto vale la señal de salida si pasa por un filtro pasa bajos de ancho de banda 980 KHz ?

Solución: Rb/2= 1.95/2= 975 KHz   Si el filtro es de 970 no sale nada. Si es de 980 recupero la señal

Respuesta al impulso (aplicado en *t=0*) de algunos filtros reales:



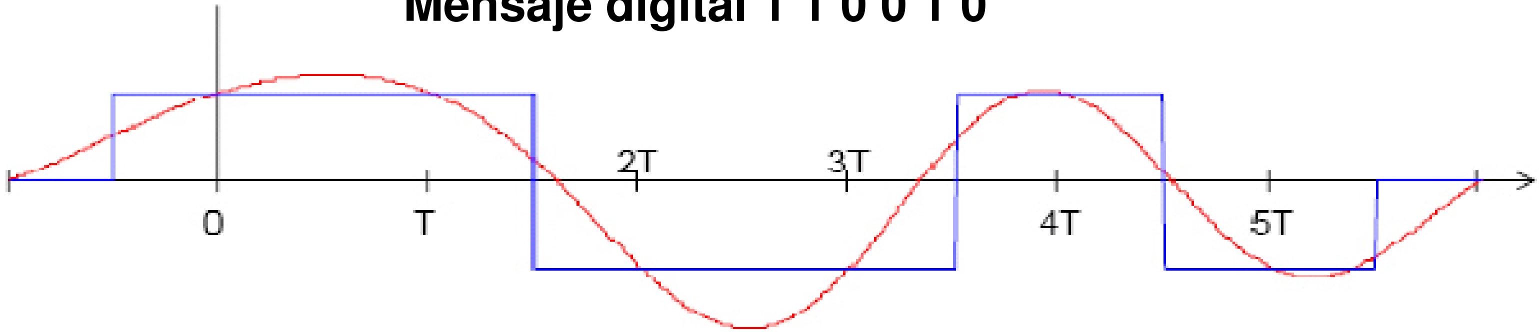
Por orden a partir de t=0: Gaussiano, Butterworth(orden 6), Chebychev (Orden 6, ripple 1dB), todos con

frecuencia de corte de –3dB de 500 Hz . Notar que, para una señal de $Rb=1$ [kbaud], salvo el Gaussiano, introducirían distorsión intersimbólica, mayor en el Chebychev que en el Butterworth.

El filtro Butterworth es el recomendado en señales digitales, tiene menos cola que el Chebychev

RESUMEN: $x(mT_b)=\sum_k a_k.p(mT_b-k.T_b)=\sum_k a_k.p((m-k).T_b)=a_m.p(0)+\sum_{\text{para todo } k, \text{ excepto } k=m} a_k.p((m-k).T_b)$

Mensaje digital 1 1 0 0 1 0

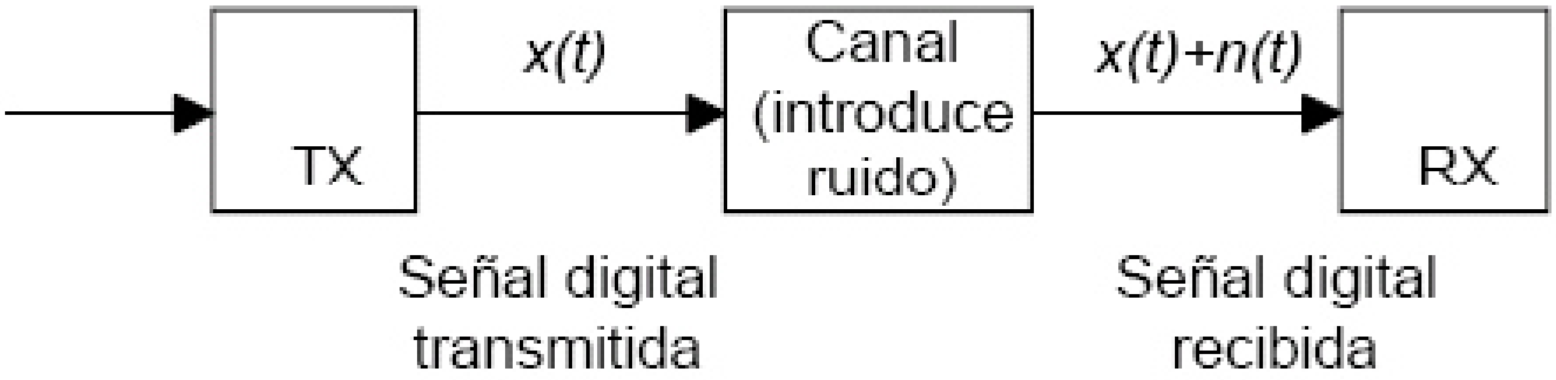


Distorsión intersimbólica
Para tener distorsión intersimbólica nula el segundo tèrmino debe ser = 0.
Esto se consigue si:
a) p(t) dura no mas de Tb segundos y
b) p(0)≠0 y p(t) = 0 a múltiplos enteros (+) o (–) de Tb.

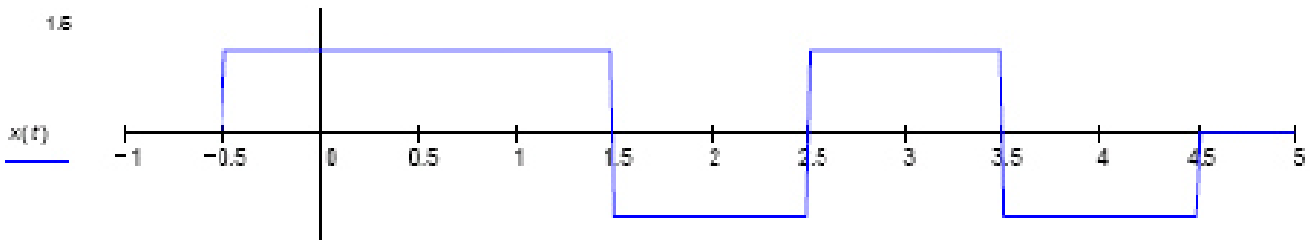
Ancho de Banda de la señal digital
Una señal digital de Rb baud puede ser transmitida, sin perder información, en un ancho de banda De Rb/2 Hz (ancho de banda de Nyquist) <u>utilizando un filtro adecuado.</u> Además, el ancho de banda Rb/2 Hz es el valor mínimo (teórico) adecuado para la transmisión sin distorsión.

Ojo las unidades. Si Rb=64 Kbps el ancho de banda mínimo es Rb/2 = 32 KHz

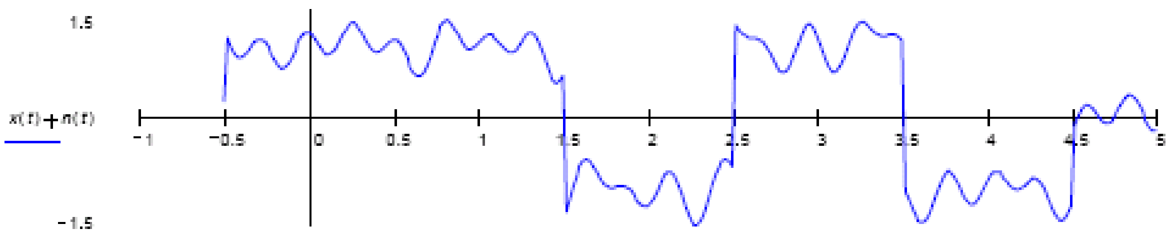
Señales digitales en presencia de ruido



Señal original:



Señal recibida (señal original + ruido):



La señal digital *x(t)* después de ser transmitida por el canal, es recibida sumada a una señal de ruido *n(t)*.

Suposiciones simplificatorias:

a) El número de unos y ceros transmitidos durante un tiempo largo ($>>T_b$) es igual (igual probabilidad de ocurrencia).
b) La señal de ruido introducida $n(t)$ es gaussiana con componente media (continua) nula
c) Método de detección: una muestra por bit, posterior decisión según la muestra tomada esté por encima o debajo del umbral.

Si en un mensaje digital suficientemente largo de N bits, N_e de ellos se reciben con error, se define la probabilidad de error según $P_e = N_e/N$.

Un bit está en error si se transmite un 1 y se recibe un 0 o, se transmite un 0 y se recibe un 1.

$$P_e = P_1 . P_{e1} + P_0 . P_{e0}$$

en la ecuación anterior:
P_1 = Probabilidad de transmisión de un 1
P_{e1} = Probabilidad que, habiéndose transmitido un 1, el receptor recibe un 0.

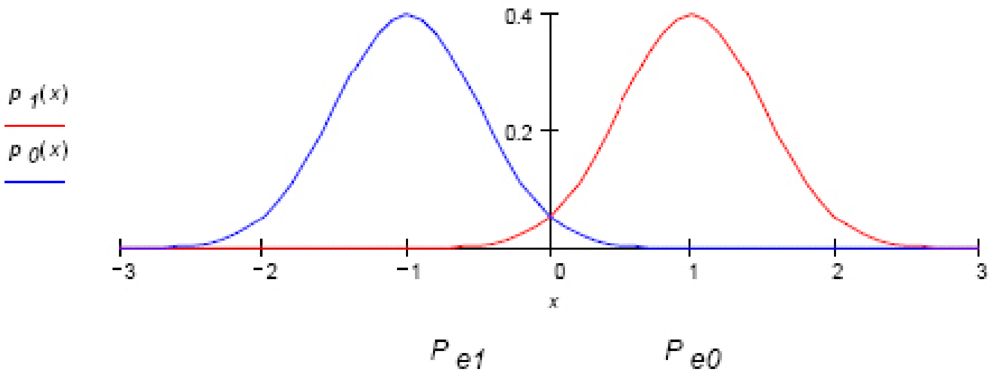
P_0 = Probabilidad de transmisión de un 0
P_{e0} = Probabilidad que, habiéndose transmitido un 0, el receptor recibe un 1

Si $P_1 = P_0 = 0.5$, la ecuación de arriba queda:

$$P_e = \frac{1}{2}.(P_{e1} + P_{e0})$$

Igual probabilidad de ocurrencia

Si se supone transmisión bipolar NRZ, donde un 1 se transmite como una tensión $+A$ volt y un 0 como $-A$ volt y el umbral de decisión del detector es 0 volt, como la función de densidad de probabilidad de $n(t)$ es gaussiana, se tiene que:



Un 1 transmitido ($x(t)=A$) estará en error si en el instante de muestreo $x(t)+n(t) < 0$ y un 0 transmitido ($x(t)=-A$) estará en error si en el instante de muestreo $x(t)+n(t) > 0$. En términos estadísticos: $P_{e1} = P(n < -A)$ y $P_{e0} = P(n > A)$

Por simetría de la curva gaussiana, estos valores son iguales: $P_{e1} = P_{e0} = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$

$P_e = 1/2\ \{Q(A/\sigma) + Q(A/\sigma)\} = Q(A/\sigma)$

Es decir que: $P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$

La distribución Gausiana es común en muchas señales, aunque también puede ser uniforme o de otro tipo

<u>La función de distribución normal o gaussiana</u>

Está definida por: $$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

donde σ y x_0 son la desviacion standard y el valor medio, respectivamente, de la variable x.

La pdf normal es importante en aplicaciones de ingeniería, porque es la que caracteriza a fenómenos aleatorios generados por la acción de un número grande ($\rightarrow \infty$) de agentes con contribuciones infinitesimales de cada uno

de ellos tomados individualmente (Teorema del límite central). Por ejemplo: el movimiento browniano de electrones en el interior de un conductor, que produce el ruido térmico o el fenómeno de propagacion por caminos múltiples, causante de desvanecimientos en enlaces de radio.

La probabilidad de que la variable x supere un determinado valor x_k es:

$$P(x > x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma} \cdot \int_{x_k}^{\infty} e^{\frac{u^2}{2\sigma^2}} .du \quad \text{suponiendo } x_0 = 0$$

La función $Q(x)$ es de uso común en estadística y está tabulada en tablas matemáticas y calculadoras de mano.

llamando $z = u/\sigma$ queda:

$$P(x > x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\left(\frac{x_k}{\sigma}\right)}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} .dz = Q\left(\frac{x_k}{\sigma}\right)$$

P.ej. : $Q(2.60) = 4.66x10^{-3}$, $Q(3.74) = 9.2x10^{-5}$, etc.

Como ejemplo, si $A=5$ volt y el valor eficaz de la señal de ruido es de 2 volt, entonces

$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{5}{2}\right) = Q(2.5) = 6.10^{-3}$$

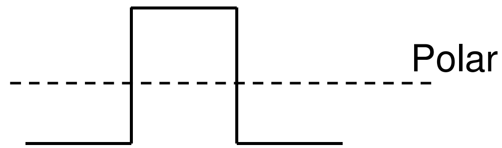
Cada 1000 bits que se transmitan, 6 se recibirán con error, un valor demasiado alto para la mayoría de las aplicaciones. Normalmente, son necesarias tasas de error inferiores a 10^{-4}.

Tasa o probabilidad de error calculada mediante la energía por bit

Es común en sistemas de comunicaciones digitales especificar la tasa o probabilidad de error en términos de la **energía promedio por bit transmitido E_b** vs. la **densidad espectral de ruido n_0**. E_b, para transmisión binaria,

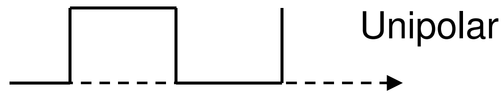
está definido como $E_b = \dfrac{Energ.\,por\,"1"\,transmitido + Energ.\,por\,"0"\,transmitido}{2}$. En el caso visto, se tiene que:

Energía prom. por bit transmitido : $E_b = A^2.T_b$ y $A = \sqrt{\dfrac{E_b}{T_b}}$



Polar

$$E_b = \frac{A^2.T_b}{2} \qquad A = \sqrt{\frac{2.E_b}{T_b}}$$

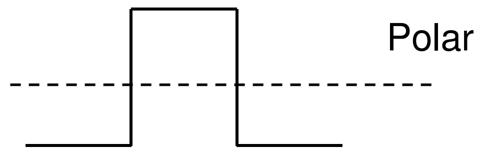


Unipolar

El valor eficaz de la señal de ruido, suponiendo que se utiliza el mínimo ancho de banda (teórico) para la transmisión de la señal digital, es $\sigma = \sqrt{n_0.B} = \sqrt{n_0.\dfrac{R_b}{2}} = \sqrt{n_0.\dfrac{1}{2.T_b}}$

donde n_0 es la densidad de potencia (frecuencias positivas) de la señal de ruido y T_b la duración de cada bit. La probabilidad de error queda:

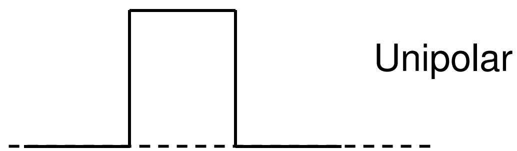
$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2.E_b}{n_0}}\right)$$



Polar

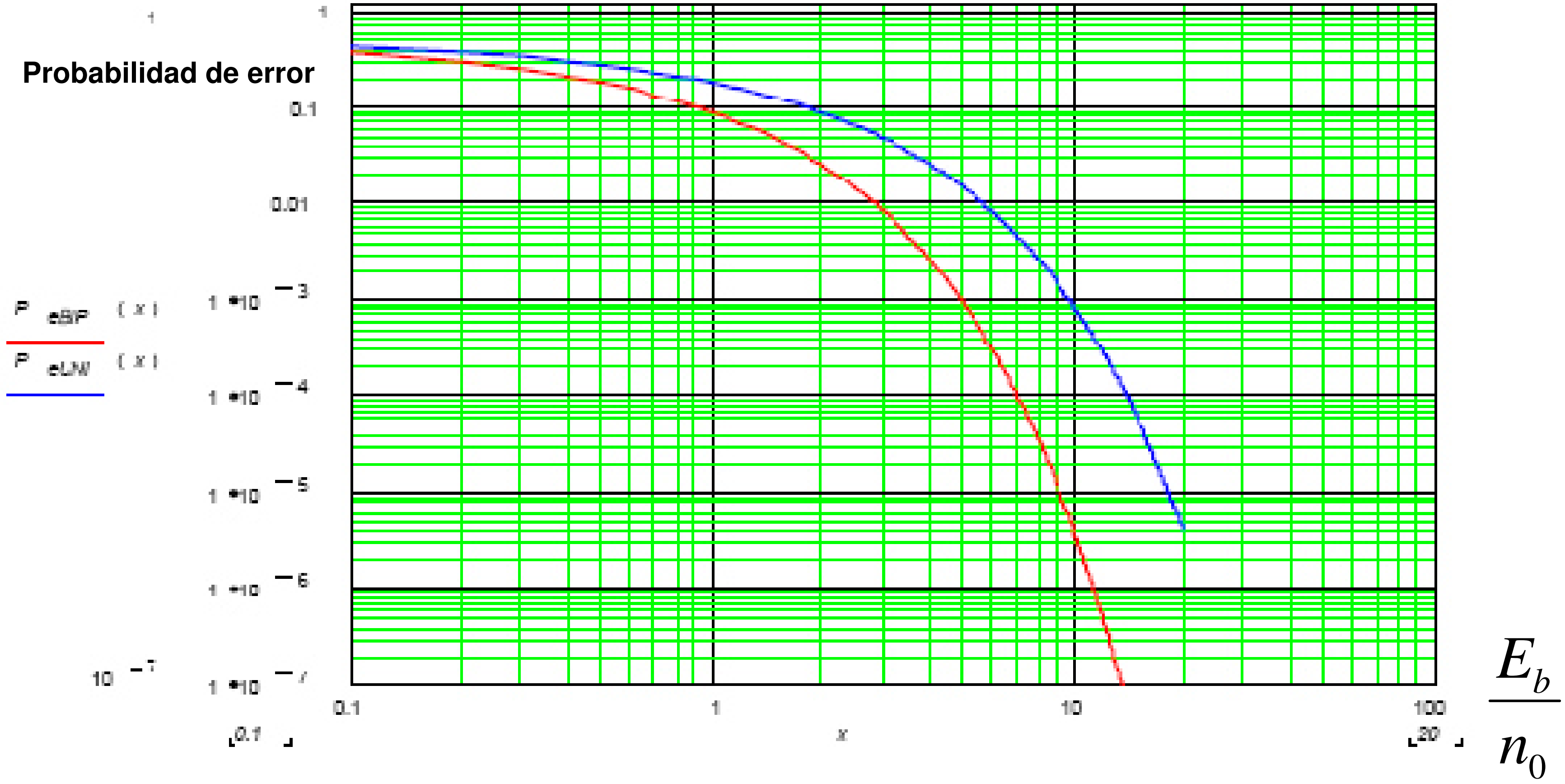
Si la transmisión hubiera sido unipolar NRZ: 1 transmitido representado por una tensión +A volt y 0 transmitido por 0 volt, es fácil demostrar que (suponiendo umbral de decisión en A/2):

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2.\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{n_0}}\right)$$



Unipolar

Notar la mejor perfomance del método bipolar NRZ. A igualdad de energía por bit transmitido y densidad de ruido, tendrá una menor tasa de error.



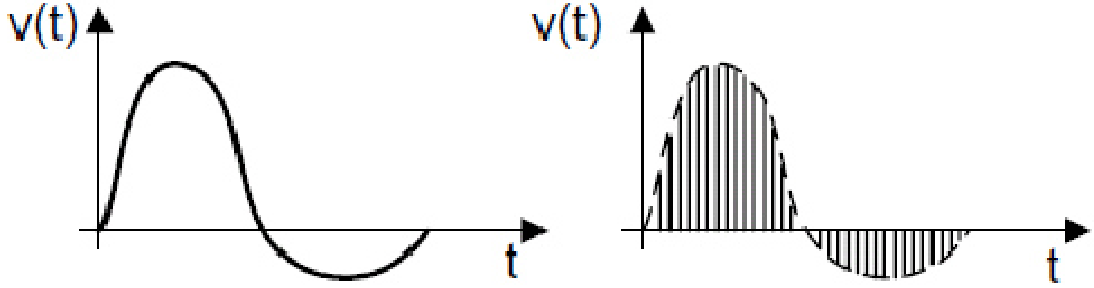
En el gráfico se muestra, para señales bipolar NRZ y unipolar NRZ, la probabilidad de error vs. un parámetro x definido por:

$$x = \frac{E_b}{n_0}$$

Eb es energía promedio por bit

Transmisión digital de señales analógicas

Se transmite la señal a intervalos regulares de tiempo



Tipos de modulación:

Cuantificada: la información se aproxima por un número finito de valores, PCM

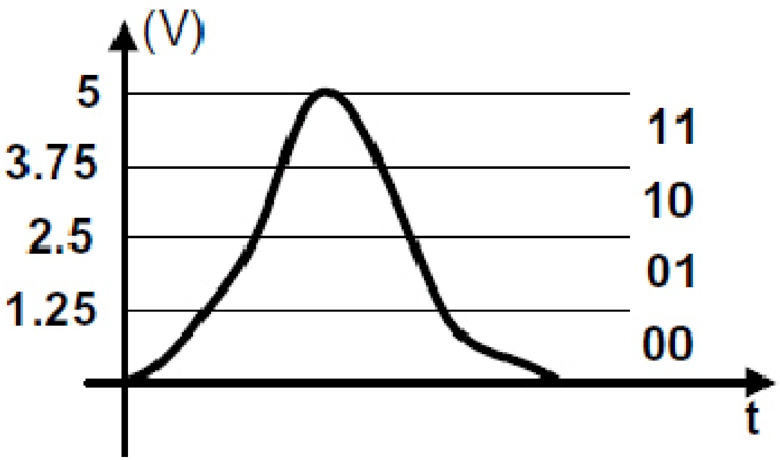
No cuantificada: los parámetros que varían del impulso lo hacen de forma continua en función de la información: PAM, PWM, PPM

VENTAJA: MAYOR INMUNIDAD AL RUIDO QUE LA TRANSMISIÓN ANALÓGICA
PERMITEN TRANSMISIONES A MAYOR DISTANCIA
Circuitería digital de escaso coste
Pulsos digitales pueden ser almacenados
Pueden aplicarse circuitos de detección y corrección de errores

MODULACIÓN POR CODIFICACIÓN DE IMPULSOS (PCM)

Convertidor A/D

N: número de niveles
n: número de bits



Resolución $\boxed{\dfrac{V_{max}}{2^n}}$

Mínimo incremento de la variable analógica necesario ara modificar el bit menos significativo

Modulación de Pulsos Codificados (PCM)

La transmisión de una señal PAM es analógica pues se debe preservar a lo largo del canal de comunicación las amplitudes de los pulsos de muestra. Un sistema PCM codifica cada muestra en una serie de unos y ceros que se transmiten en el intervalo entre ellas. Para poder codificar cada muestra con un valor binario se debe:

a) disponer un T_p suficientemente pequeño para que la muestra represente el valor instantáneo de la señal *x(t)* en el momento de la muestra y

b) asimilar la muestra obtenida al valor mas próximo de un conjunto de valores fijos, que dependerá del número de dígitos disponibles para la codificación. Esto introduce un error (error de cuantificación) que será inversamente proporcional al número de bits disponibles, además impone otra limitación a la señal x(t): debe ser acotada en sus valores de tensión.

Ventajas:

- Permite efectuar numerosas transmisiones sin pérdidas por degradación
- Se presta para ser empleada en sistemas de multiplexado en el tiempo

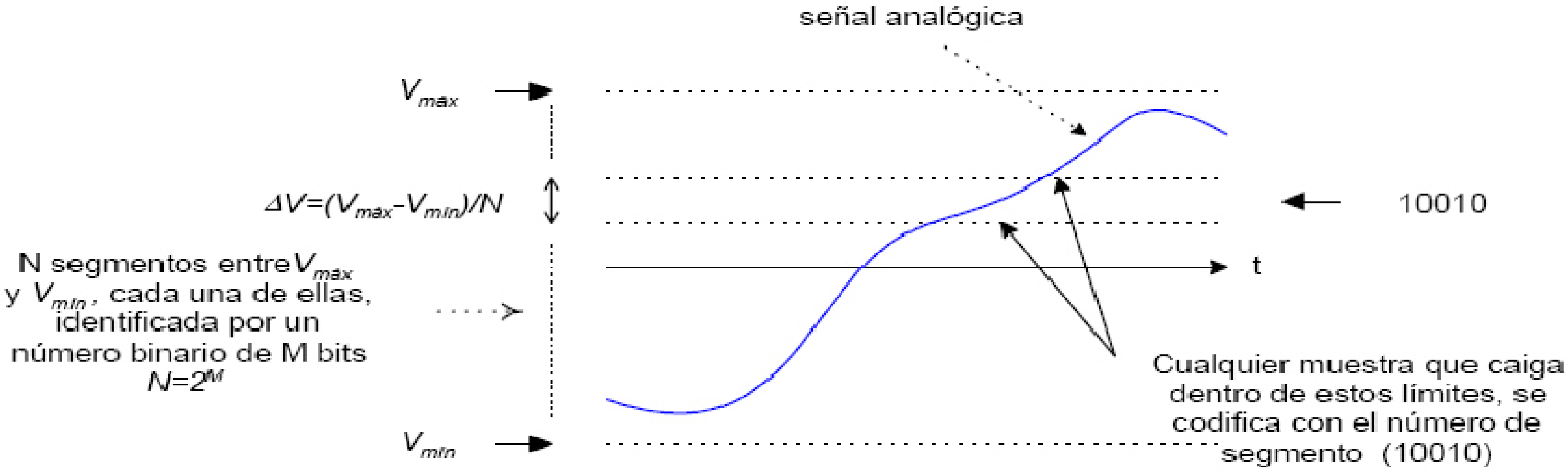
Inconvenientes:

- Introduce un error ya que no se transmite el valor exacto, sino el discreto más próximo

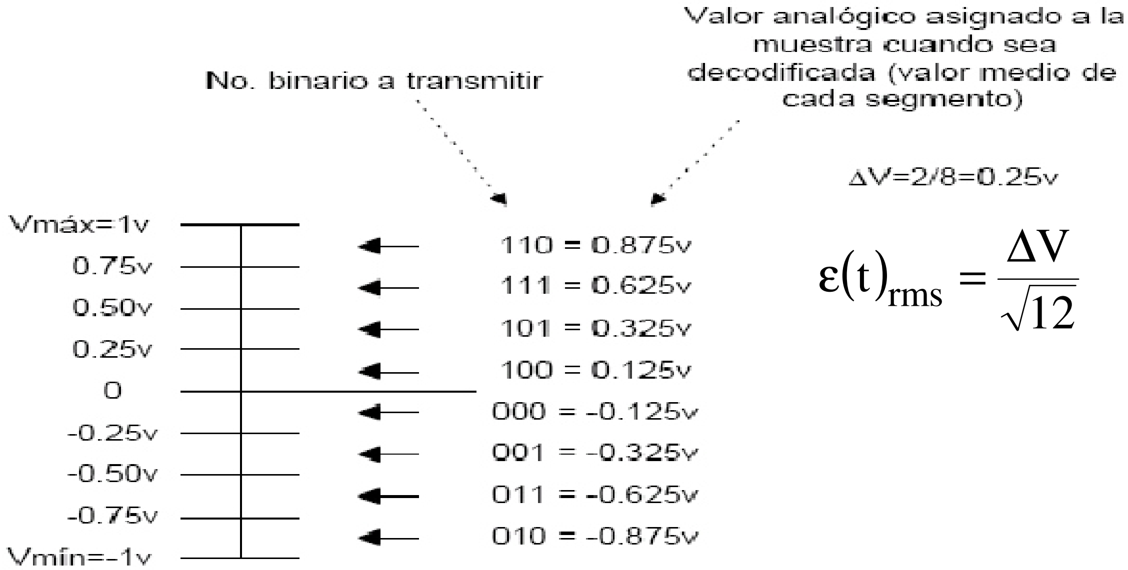
Error de cuantificación

Si se supone que $x(t)$ está limitada en ancho de banda a +/-B Hz y en tensión a $+V_{máx}$ y $-V_{mín}$ volts. Se dispone para la codificación de las muestras de M bits.

Con M bits pueden codificarse $N = 2^M$ valores diferentes, esto significa que el intervalo entre $+V_{máx}$ y $-V_{mín}$ puede dividirse en N segmentos. El mecanismo de cuantización decide que, si una muestra está dentro de alguno de estos segmentos, se asigna a la muestra el valor binario correspondiente. (caso mas simple de cuantificación lineal).



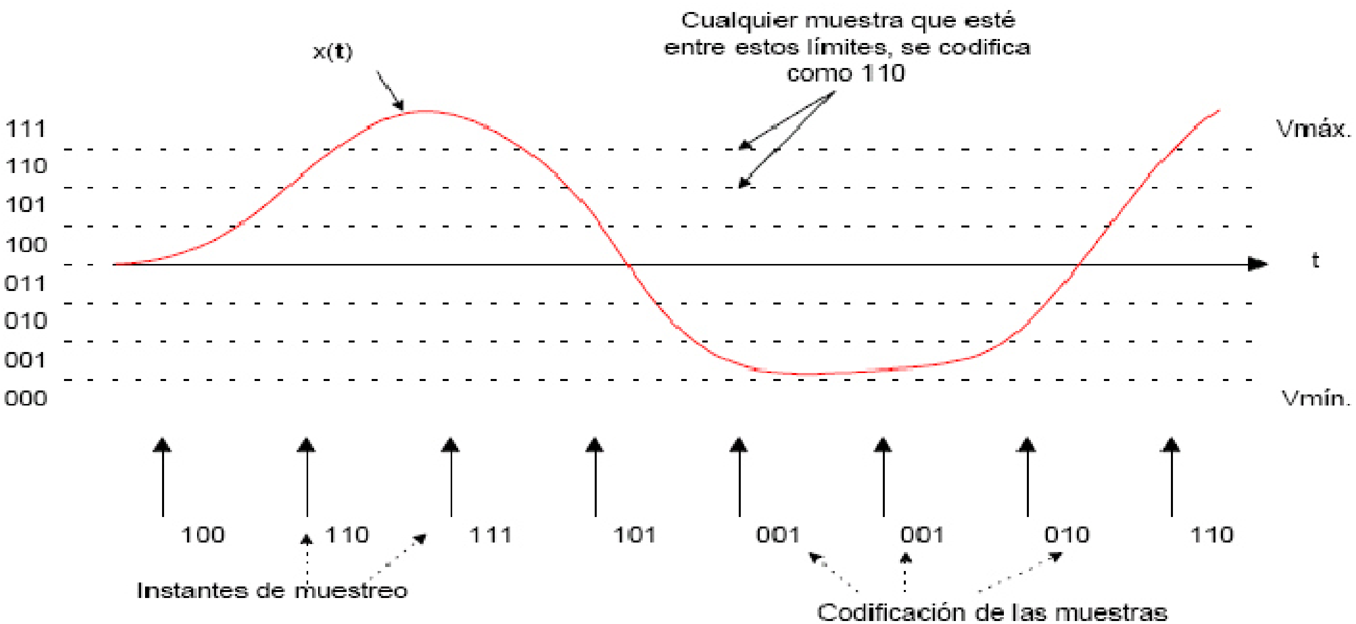
Ejemplo para $M=3$, $N=2^{3}=8$

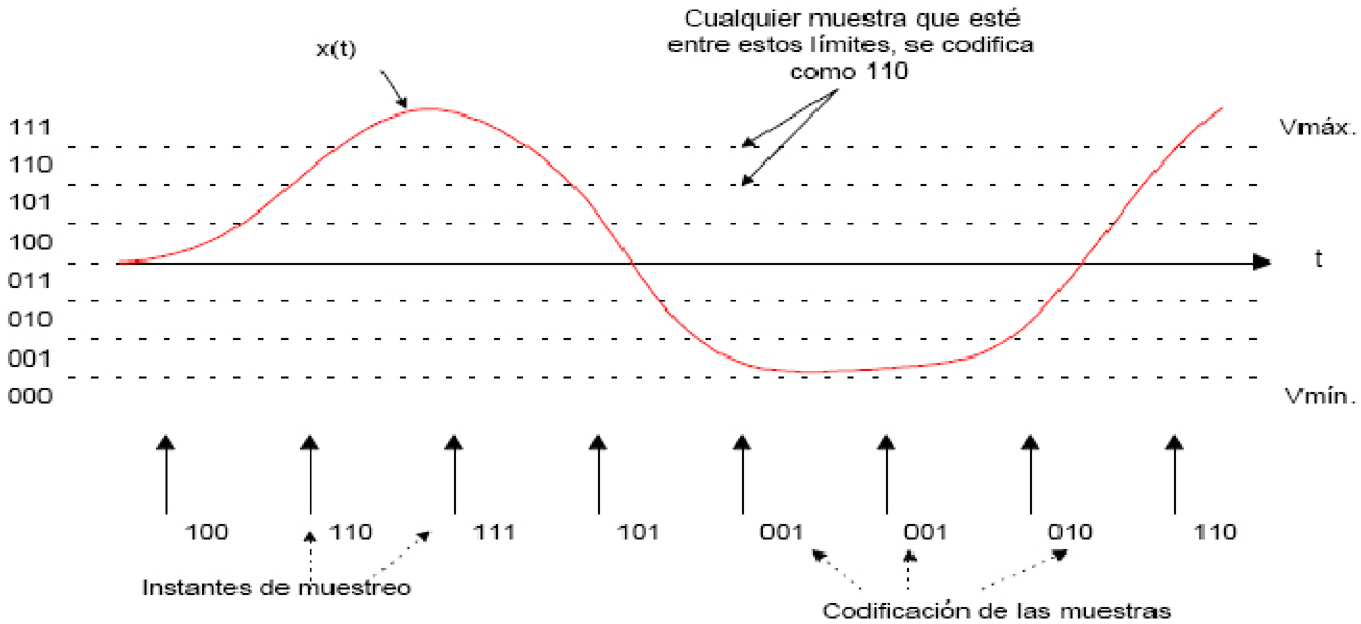


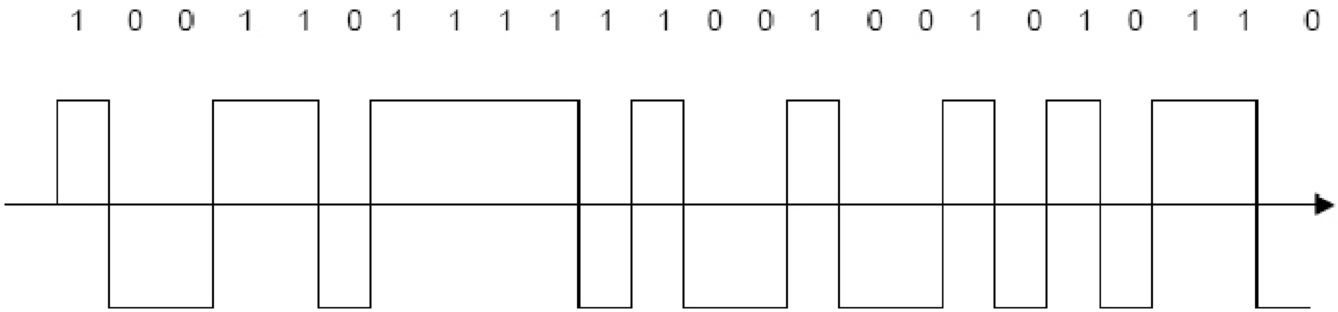
$\Delta V=2/8=0.25v$

$$\varepsilon(t)_{rms} = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}}$$

Si una muestra determinada vale p.ej. 0.24v será codificada y reconstruida como de 0.125v, lo mismo que una de 0.05v , etc.







Señal digital a transmitir
(bipolar NRZ)

Ejemplo:

Una fuente de información produce un mensaje digital binario de 256 kbps, como para su transmisión se dispone de un canal de 50 kHz de ancho de banda, se decide transformarlo en una señal digital de niveles múltiples. Determine:

a) El número de niveles necesario y la cantidad de bits que deberán agruparse en cada símbolo de la señal a transmitir.

b) Cual sería el sistema de modulación más ventajoso para la transmisión?. Justifique su elección.

Solución:

Rb=256 Kbaud

a) Ancho de banda mìnimo necesario =Rb/2 =256/2=128 KHz. Tomo por exceso 150>128 KHz y para obtener una relación de enteros

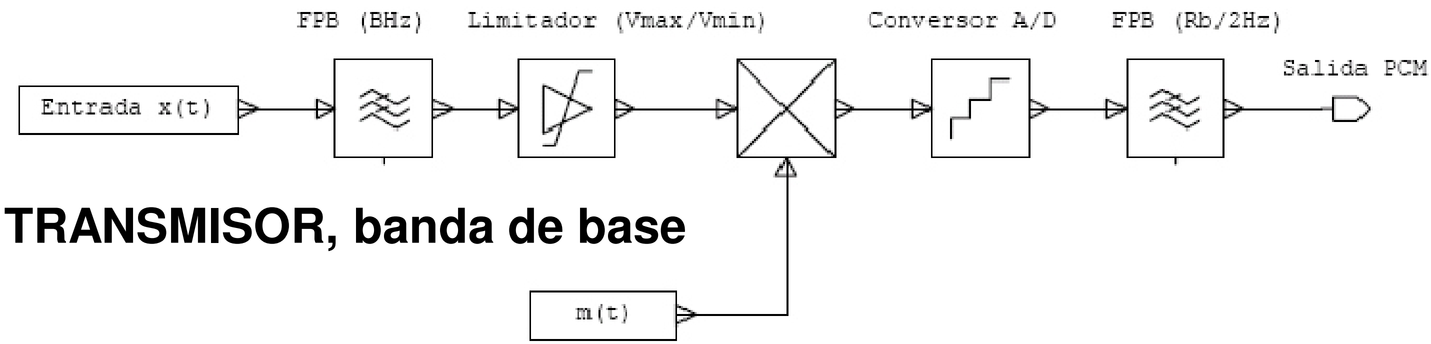
m= 150/50= 3 bit , grupos de 3 bits, niveles=2^3 = 8 niveles.

Agrupando de a 3 bit el Ancho banda queda reducido a = 128/3 = 42 KHz que pasa por el canal de 50 KHz

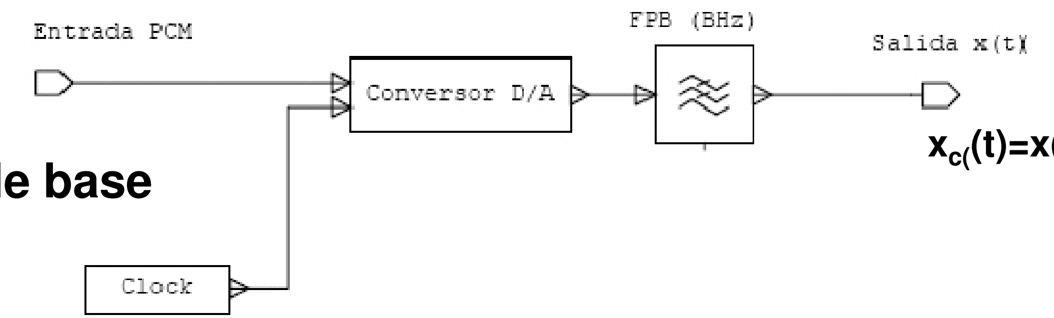
b) Como m=3 conviene un sistema ASK o FSK, cuando m>8 conviene un sistema QASK o QFSK.

DETECCIÓN y ERROR DE CUANTIZACIÓN

En el extremo receptor, un conversor D/A transforma el grupo de bits correspondiente a cada muestra en un pulso de amplitud correspondiente al valor binario de la muestra y se regenera, aproximadamente, la señal PAM original. Un posterior filtrado recupera la señal original $x(t)$. La diferencia entre las muestras originales y las reconstruidas puede tomarse, a los efectos del análisis del error de cuantificación, como una señal de ruido que altera el mensaje original. Las muestras decodificadas se consideran muestras exactas de una señal $x_c(t) = x(t) + \varepsilon(t)$, donde $\varepsilon(t)$ es el llamado ruido de cuantificación y $x_c(t)$ es una señal que únicamente toma los valores discretos del cuantizador.



TRANSMISOR, banda de base

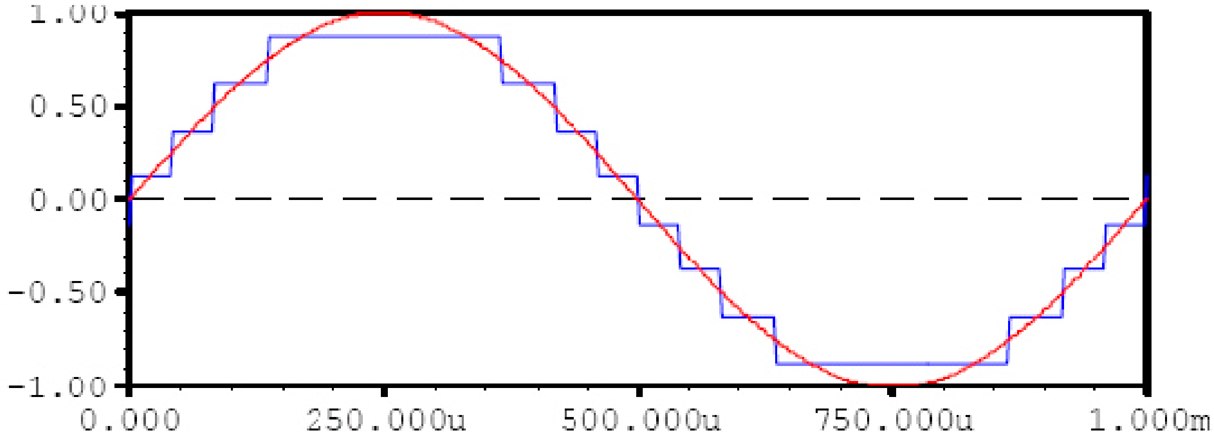


$x_{c(}(t)=x(t) + \varepsilon(t)$

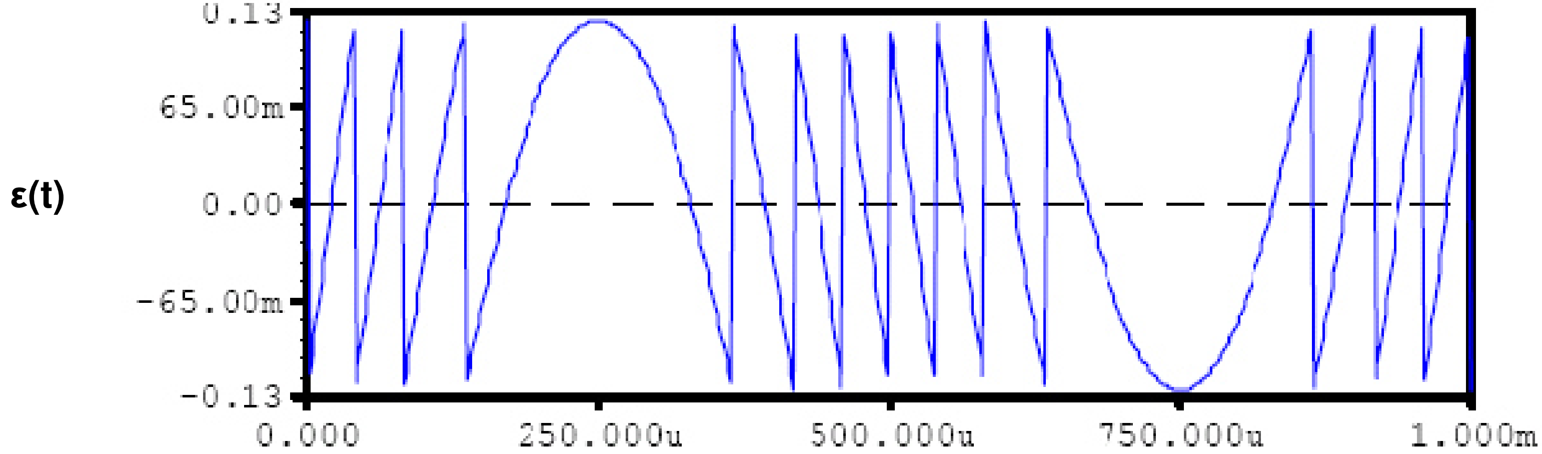
RECEPTOR banda de base

Ejemplo

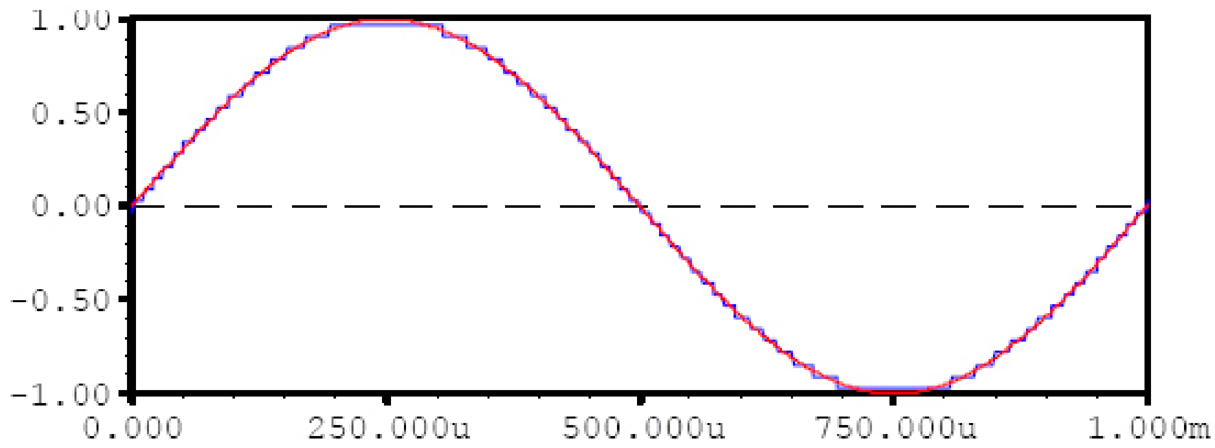
Gráfico para $x(t)=sen(2\pi 1000Hz.t)$ y $x_c(t)$, cuantificación a 8 niveles (M=3)



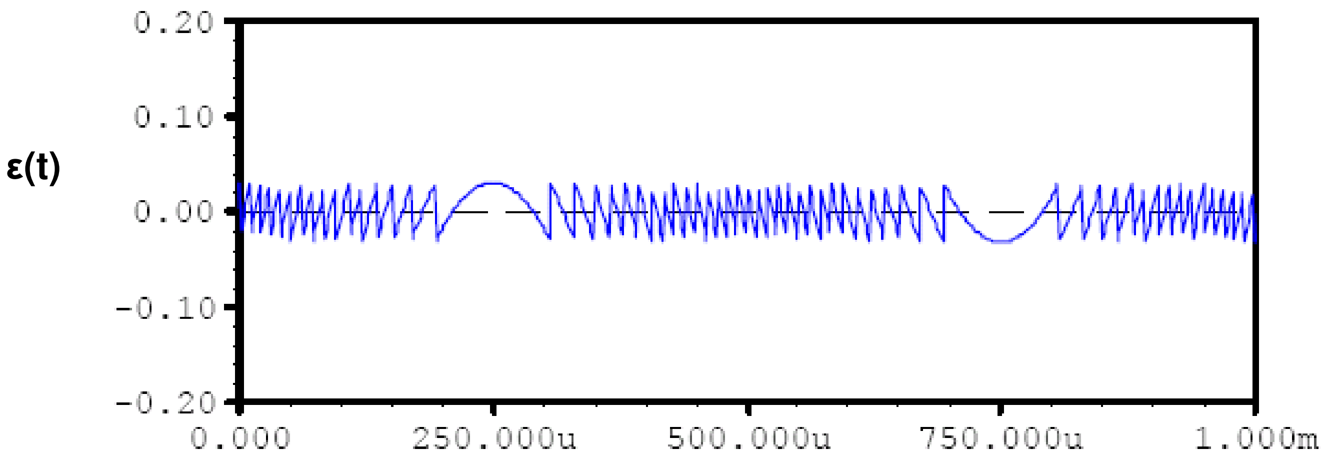
Error de cuantificación:



Idem que antes con 32 niveles de cuantificación (M=5)



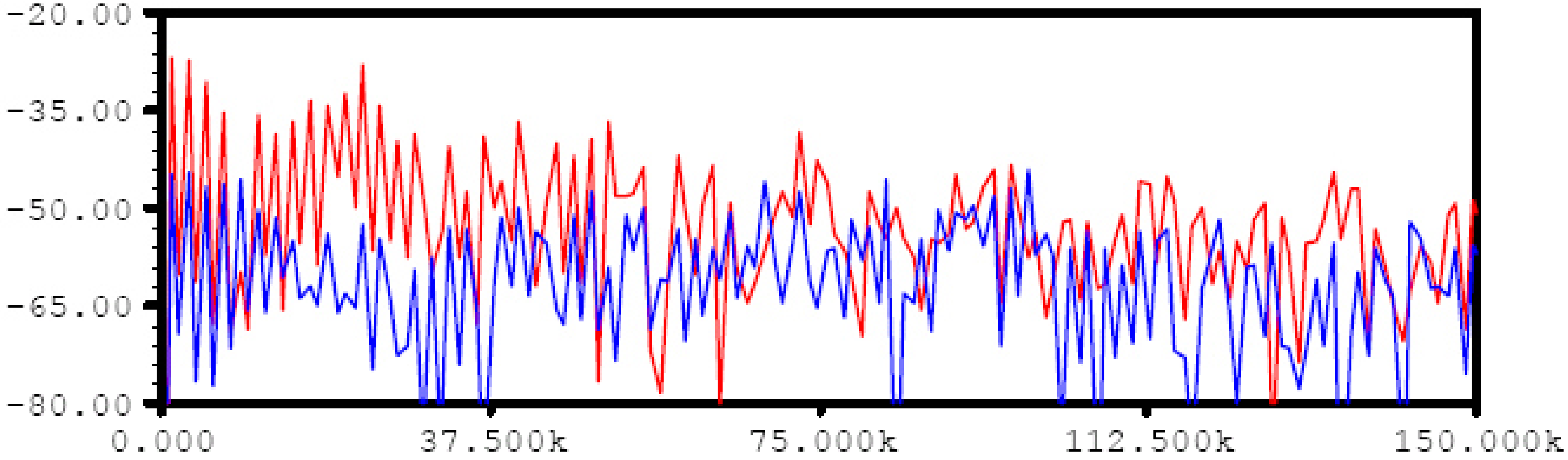
Error de cuantificación, notar disminución de amplitud con respecto a M=3



Características del ruido (error) de cuantificación:

a) El espectro es mucho mayor que B Hz

Espectros del ruido de cuantificación con 8 y 32 niveles (escala vert. En dB):



b) En la recuperación de la señal, no es eliminable totalmente por filtrado pasa bajos. Sobre todo cuando la frecuencia de muestreo es próxima a la mínima. Si $f_s \approx 2.B$, la potencia total del ruido de cuantificación pasa por el filtro pasa bajos aunque el ancho de banda de éste sea mucho menor (folding) .

c) Suponiendo cuantización uniforme (pasos de Δ volt), el valor cuadrático medio vale $\varepsilon_{RMS}{}^2 = \dfrac{\Delta^2}{12}$ y el valor eficaz: $\varepsilon_{RMS} = 0,2887.\Delta$

d) Con cuantificación uniforme, la distorsión por cuantificación puede ser severa en períodos cuando la señal es de baja amplitud (solución: cuantificación no uniforme, valores de Δ proporcionales a la amplitud de la señal p.ej.).

Ejemplo 1:

Una señal de audio *x(t)*, limitada en ancho de banda a 3600 Hz se debe transmitir, previa codificación en PCM, por un canal digital (binario) cuya velocidad de transmisión es de 40 kbps.

Calcular:

(a) La frecuencia (mínima) a que se debe tomar las muestras de *x(t)*,

(b) El número (máximo) de bits con que se puede codificar cada muestra

(c), El valor eficaz del ruido de cuantificación suponiendo cuantización uniforme, suponiendo que *x(t)* varía entre ±3volts.

Solución:

Fs=3600 . 2= 7200 Hz, AB=40 Kbaud= 40 KHz, Rb=2. 40 = 80 Kbaud, m=Rb/Fs=80.10^3 /7,2. 10^3 = 10 ,aprox. 2^{10}= 1024 niveles

Codifico de a 10 bits

Delta=6V/1024= 6 mV, ruido o error cuantificacion= 6/raiz de 12 = 3 mV valor rms de ruido.

Ejemplo 2:

Una señal de aleatoria con función de densidad de probabilidad constante entre ±10 volt y limitada en ancho de banda a 12 kHz debe codificarse para ser transmitida por un sistema PCM (supóngalo de cuantificación uniforme). Determinar:

(a)La mínima frecuencia de muestreo,

(b)El número de bits necesarios para codificar en forma binaria cada muestra, si se busca que la relación entre la potencia media de señal y la potencia media de ruido de cuantificación sea mejor que 30 dB

(c)La mínima velocidad de transmisión en baud.

Solución: fs= 2.12 KHz=24 KHz, calculo delta = 0,5, 64 niveles, m=6

Rb= fs. m = 24000 . 6= 144 Kbps, min veloc= Rb/2 = 72 Kbps. ABanda canal= 72 KHz

Ejemplo 3: solucion, fs=20KHz, Rb=256Kbps, m=Rb/fs=13 bit, N=2^{13}, deltaV=100V/N=12 mV, ε=3,5 mV

Una tensión analógica definida por $v(t)=\sum_{n=1}^{n=10} 5.sen\left(2\pi n f_0 t+\varphi_n\right)$ [volt] , donde $f_0=1$ [kHz] y los φ_n pueden tener cualquier valor entre -π y +π, debe ser transmitida por un sistema de PCM que transmite a 256 kbps. Si se debe diseñar el sistema para minimizar el error de cuantificación, determine (a) El número de muestras por segundo que deben tomarse, (b) El máximo error de cuantificación que tendrá cada muestra para la frecuencia de muestro calculada.

Ejemplo 4: solucion, B=15KHz, fs=44KHz, m=16 bit, N=2^{16}, deltaV=10V/N=150 uV, ε=45 uV

1. Los parámetros básicos de un sistema PCM de grabación de discos compactos de dos canales (estereofónico) son, para cada uno de ellos: Señal analógica de entrada, limitada a 15 kHz de ancho de banda, toma de muestras a 44 kHz y 16 bits disponibles para codificar cada muestra.. Suponiendo que la señal analógica de ambos canales no tiene componente continua y que el muestreo es ideal, calcular: (a) El número de niveles de la señal cuantificada, (b) La velocidad de transmisión por canal de la señal digital resultante y (c) El valor eficaz del ruido de cuantificación, suponiendo cuantización uniforme y que la amplitud de pico de la señal analógica es ± 5 volt.

2. Con los datos básicos del problema anterior, calcular la capacidad en bits que debe tener un disco compacto para almacenar una señal de una hora de duración.

Ejemplo 5: solucion, Tb=1/ Rb=1/m . Rb=1/44.10^3. 16=1,42 10^{-6} seg, en 1 hora= 2,5 Gbits

1. Determinar los siguientes parámetros de un sistema PCM para que sea capaz de transmitir una señal analógica de 5 [kHz] de ancho de banda y excursión de tensión entre $\pm V_p$ [volts] bajo la condición de que el error de cuantificación máximo admisible es el 0.05% de V_p : (a) frecuencia de muestreo, (b) N° de bits y (c) velocidad (mínima) de transmisión de la señal digital.

Ejemplo 5: solucion, fs=10KHz, A=2. Vp, ε=5. 10^{-4}. Vp (V), deltaV=17 . 10^{-4}.Vp (V), N=4000, m=12, Rb=120Kbps