

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES ELÉCTRICAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

ESTA REPRESENTACIÓN RESULTA UTIL PARA ESTUDIAR EL EFECTO DE LOS SISTEMAS LTI EN LAS SEÑALES ELECTRICAS

La Transformada de Fourier (TF)

Teoremas relacionados con la TF: desplazamiento en tiempo y frecuencia, diferenciación e integración, convolución, linealidad, cambio de escala, simetría.

La función Delta de Dirac (DD): muestreo, desplazamiento, representación discreta de señales continuas, TF de una DD en el tiempo y la frecuencia.

Espectro de funciones usuales: signo, escalón, pulso rectangular, pulso triangular, coseno elevado, pulso gaussiano.

Espectro de señales periódicas

La Transformada Discreta de Fourier (TDF)

Señales aleatorias en el dominio de la frecuencia

Señales de Banda Angosta (BA)

Conocemos la representación en el dominio de la frecuencia de señales periódicas, SERIE DE FOURIER.

Estudiaremos la representación en el dominio de la frecuencia de señales aperiódicas (período infinito). Las señales periódicas quedan como un caso particular (período finito). Ver Oppenheim pag. 285

Repasar:

Números y señales complejas

Números complejos: no varían con el tiempo

Señales complejas: varían en el tiempo

La forma algebraica y la forma exponencial. Teorema de Euler

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

2.- Señales eléctricas en dominio de frecuencia

Una forma alternativa de representar las propiedades de una señal eléctrica es en dominio de frecuencia. La herramienta matemática que vincula los dominios de tiempo y frecuencia es la transformada de Fourier. Si para una señal $x(t)$, las integrales existen (como ocurre para toda señal $x(t)$ físicamente posible), se define el par de Transformada de Fourier según:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j\omega t} df$$

$$\text{donde } \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$X(f)$ es la representación de $x(t)$ en dominio de frecuencia, es el “espectro de frecuencias” o simplemente “espectro” de $x(t)$.

Simbólicamente, se indica la relación de transformación como: $x(t) \Leftrightarrow X(f)$, que debe leerse como “La transformación de $x(t)$ es $X(f)$ ”. El par $x(t)$ y $X(f)$ es biunívoco (a un $x(t)$ corresponde un $X(f)$ y viceversa). El símbolo \Leftrightarrow indica transformación). $X(f)$, es normalmente una función compleja en dominio de frecuencia .

$$X(f) = \operatorname{Re} X(f) + j \operatorname{Im} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \operatorname{sen}(\omega t) dt$$

Analizando la expresión de arriba puede deducirse que, suponiendo a $x(t)$ real :

si $x(t)$ es una función par, $\operatorname{Im}[X(f)] = 0$ y $X(f)$ es real

si $x(t)$ es una función impar, $\operatorname{Re}[X(f)] = 0$ y $X(f)$ es imaginario

$\operatorname{Re} X(f) = \operatorname{Re} X(-f)$, la parte real de $X(f)$ es de simetría par

$\operatorname{Im} X(f) = -\operatorname{Im} X(-f)$, la parte imaginaria de $X(f)$ es de simetría impar

También puede ponerse: $X(f) = |X(f)| \cdot e^{\Phi(f)}$, donde:

$$|X(f)| = \sqrt{(\operatorname{Re} X(f))^2 + (\operatorname{Im} X(f))^2}$$

$$\Phi(f) = \arctan \frac{\operatorname{Im} X(f)}{\operatorname{Re} X(f)}$$

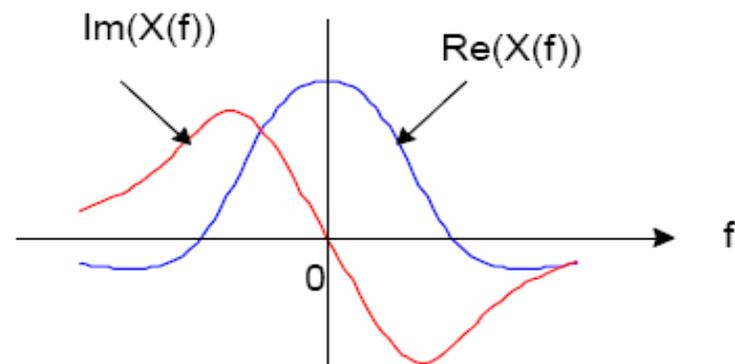
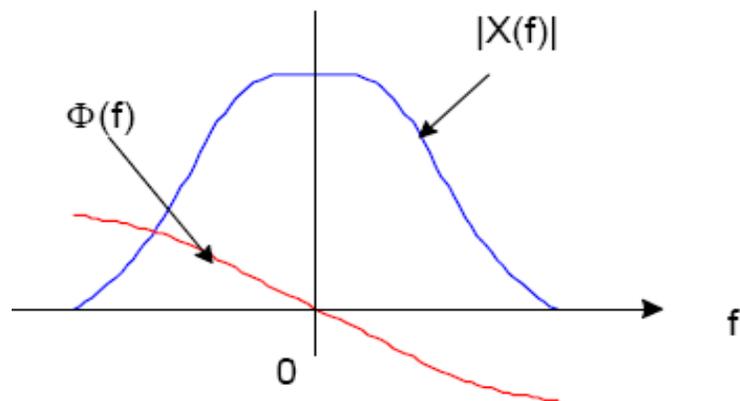
$|X(f)|$ es función par y $\Phi(f)$ (espectro de fase) función impar.

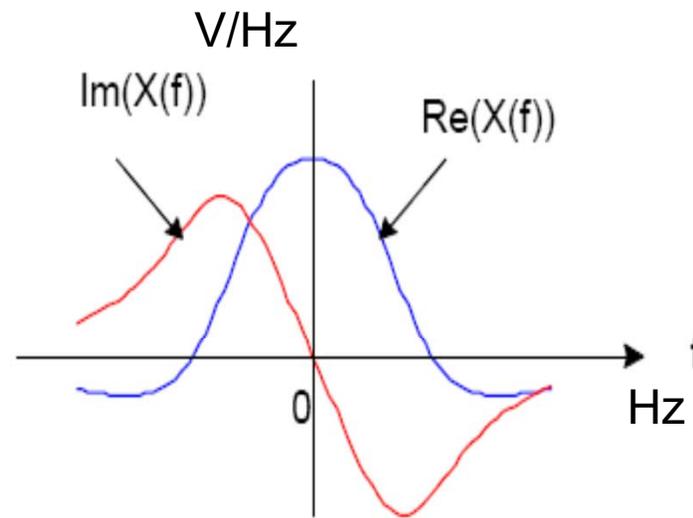
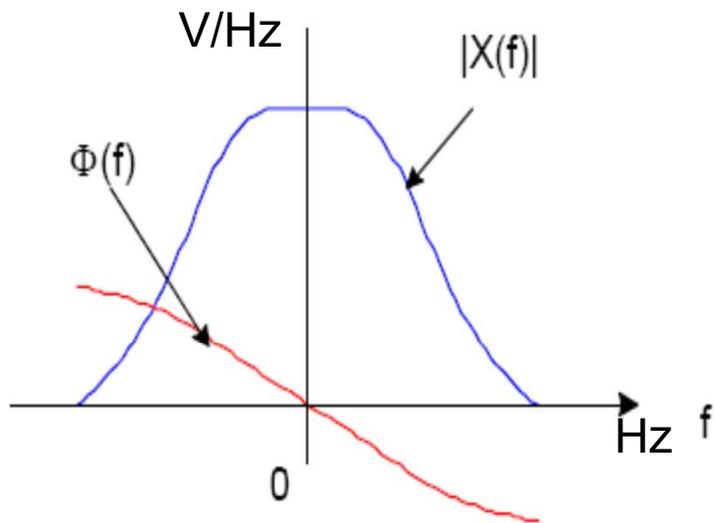
Notar además que, para $x(t)$ real :

$$X(-f) = X^*(f) \quad (X(f) \text{ es función Hermítica})$$

$$x(0) = \text{área de } X(f)$$

$$X(0) = \text{área de } x(t)$$





Si $x(t)$ es una tensión o corriente, la dimensión de $X(f)$ será $[volt.seg]$ o $[amp.seg]$ que equivale a $[volt/Hz]$ o $[amp/Hz]$, es decir que $X(f)$ es un espectro de densidad de tensión o corriente.

Se demuestra (Teorema de Parseval) que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 .dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 .df$$

El Teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 .dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 .df$$

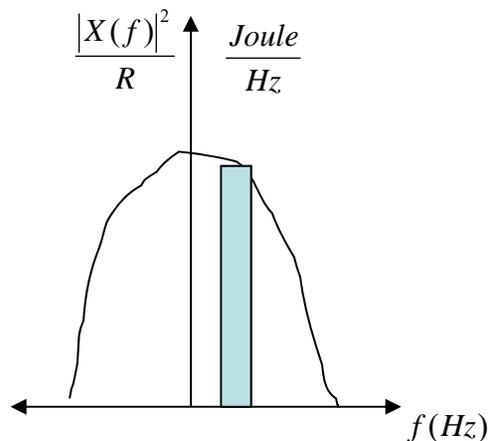
La dimensión de $|X(f)|^2$ es $[V^2 .seg^2]$ o $[V^2 .seg/Hz]$ lo que indica que $|X(f)|^2$ es un espectro proporcional a la densidad de energía de $x(t)$. Si la señal $x(t)$ existe durante un intervalo τ [seg] y su espectro tiene componentes significativas en un ancho de banda W [Hz], la aplicación del T. de Parseval indica que el valor cuadrático

medio de de $x(t)$ está relacionado con $X(f)$ según: $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} |x(t)|^2 .dt = \int_W \frac{|X(f)|^2}{\tau} .df = \int_W V(f)^2 .df$

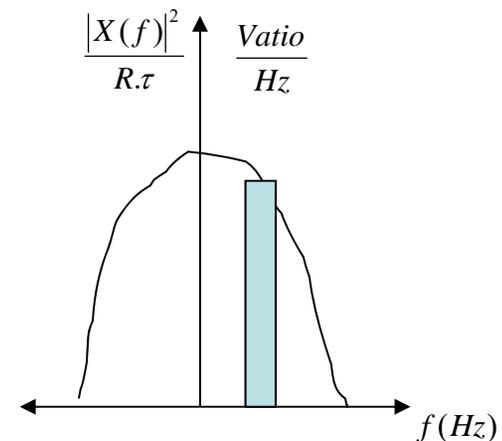
$$\langle x \rangle = \int_W G(f) .df$$

Donde $V(f)^2 = \frac{|X(f)|^2}{\tau}$, de dimensión $[V_{rms}^2 \cdot seg]$ o $[V_{rms}^2 / Hz]$, representa un espectro proporcional a la densidad de potencia media durante el lapso τ de $x(t)$ o de densidad de (valor eficaz)². En el caso de que $x(t)$ sea una tensión desarrollada sobre una resistencia R [ohm], $\frac{|X(f)|^2}{R}$ será un espectro de densidad de energía (dimensión $Watt \cdot seg / Hz$) y $\frac{V(f)^2}{R} = \frac{|X(f)|^2}{R \cdot \tau}$ de densidad de potencia (dimensión $Watt / Hz$). En algunas aplicaciones, se especifica la raíz cuadrada del espectro $V(f)^2$, resultando un espectro de densidad de tensión eficaz (dimensión $Volt_{rms} / \sqrt{Hz}$). El conocimiento de la distribución espectral de energía/potencia es fundamental para dimensionar el ancho de banda necesario que un sistema de transmisión debe tener para transmitir la señal $x(t)$.

Espectro de señal de energía (transitoria)



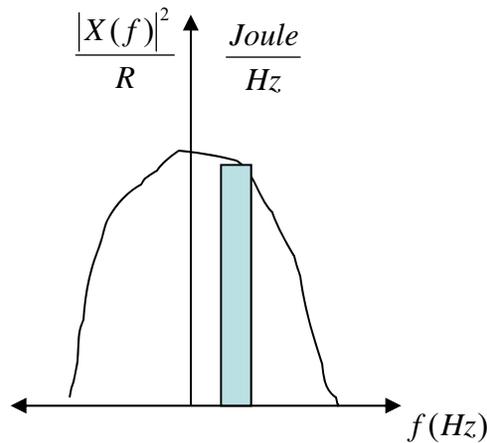
Espectro de señal de potencia (permanente)



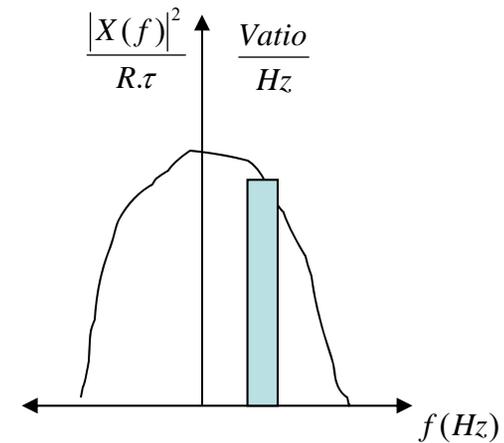
De lo anterior surge (equivalente a lo dicho en 1.4):

- Si $x(t)$ es transitoria, $|X(f)|^2$ es de área finita y $V(f)^2$ tiende a 0
- Si $x(t)$ es un señal permanente, el área de $|X(f)|^2$ tiende a infinito y $V(f)^2$ es de área acotada.

Espectro de señal de energía (transitoria)



Espectro de señal de potencia (permanente)



Señal Transitoria: su $|X(f)|^2$ tiene área finita, su $V(f)$ o $G(f)$ al ser dividida por el tiempo tiende a cero. No tiene sentido definir una $V(f)$ para una señal de energía.

Señal Permanente: su $|X(f)|^2$ tiende a infinito, pero al ser dividida por el tiempo su $V(f)$ o $G(f)$ tiende a un valor finito, es una señal de potencia.

Se debe notar que si bien existe una relación biunívoca entre $x(t)$ y $X(f)$, no existe tal correspondencia entre $x(t)$ y su espectro de densidad de potencia/energía $G(f) = |X(f)|^2$, en otras palabras, varias señales diferentes $x_k(t)$ pueden compartir un mismo $V(f)^2$ o $|X(f)|$.

Problema 7.- Dado un pulso rectangular de amplitud A [volt] y duración T [seg]
 $x(t) = A \cdot \text{rect}(t, T)$, calcular el porcentaje de la energía total del pulso contenida entre $\pm 1/T$ [Hz].

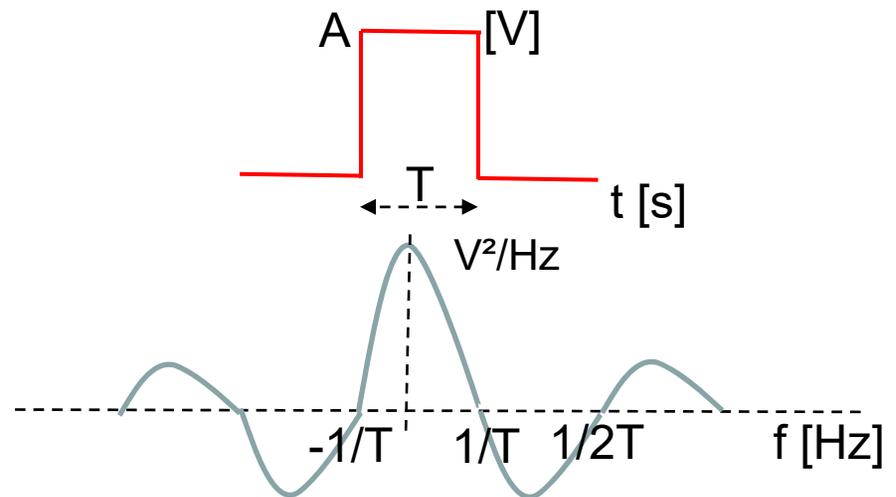
Como la transformada de F. del pulso es: $X(f) = A.T \cdot \frac{\text{sen}(\pi \cdot f \cdot T)}{\pi \cdot f \cdot T}$, su espectro de densidad de

energía será: $|X(f)|^2 = \left(A.T \cdot \frac{\text{sen}(\pi \cdot f \cdot T)}{\pi \cdot f \cdot T} \right)^2 \quad \left[\frac{V^2}{Hz} \right]$

Energía entre $\pm \frac{1}{T}$: $E_1 = \int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} \left(A.T \cdot \frac{\text{sen}(\pi \cdot f \cdot T)}{\pi \cdot f \cdot T} \right)^2 df = 0.9028 A^2 \cdot T \quad \left[\frac{V^2}{Hz} \right]$

Como la energía total del pulso es $A^2 T \quad \left[\frac{V^2}{Hz} \right]$, entre $\pm \frac{1}{T}$ está contenida el 90.3% de la energía total.

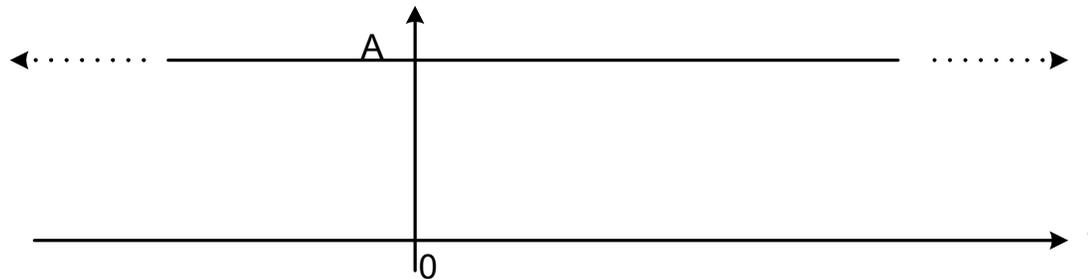
El pulso rectangular es una señal transitoria: su $|X(f)|^2$ tiene área finita, su $G(f)$ al ser dividida por el tiempo tiende a cero, por lo tanto no tiene sentido definir una $G(f)$ para una señal de energía



¿Cómo cambia el espectro con el ancho T del pulso ?

EJEMPLOS

1. Como reconoce que una T. de Fourier dada corresponde, en dominio de tiempo, a (1) a una señal transitoria, (2) a una señal periódica y (3) a una señal aleatoria ?
2. Se tiene una señal definida por $x(t) = \sum_{k=1}^{10} \text{sen}(2\pi f_k t + \varphi_k)$, donde los f_k y φ_k son diferentes. Calcular para $x(t)$: (a) su valor eficaz, (b) el máximo valor posible y el factor de pico y (c) la probabilidad de que, tomada una muestra de $x(t)$, su valor esté entre 11 y 15.
3. Suponiendo ergodicidad, dibuje la función densidad de probabilidad de la señal (continua) indicada en la figura de abajo y confirme la suposición de ergodicidad.



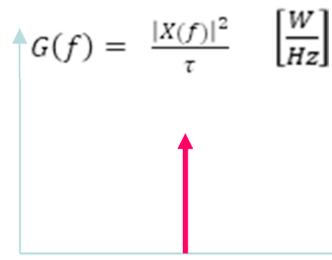
Soluciones

Problema 1: a) Señal transitoria: espectro continuo, ancho de banda acotado (finito) $|X(f)|^2 \left[\frac{\text{Joule}}{\text{Hz}} \right]$

b) Señal periódica: espectro discreto $G(f) = \frac{|X(f)|^2}{\tau} \left[\frac{W}{\text{Hz}} \right]$

c) Señal aleatoria: espectro continuo, ancho de banda no acotado $G(f) = \frac{|X(f)|^2}{\tau} \left[\frac{W}{\text{Hz}} \right]$

Problema 2: (a) Valor eficaz $V_{\text{pico}}/\sqrt{2}$
 (b) Valor máximo 10 V
 (c) 0



Problema 3:

$\langle x \rangle = A$ promedio temporal

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(f) \cdot d(f) = A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) \cdot d(f) = A \cdot 1 = A \text{ promedio estadístico}$$

2.1.- Teoremas relacionados con la Transformada de Fourier

Definidas las transformaciones: $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ $y(t) \Leftrightarrow Y(f)$

2.1.1.- Desplazamiento en tiempo: $x(t-t_0) \Leftrightarrow X(f).e^{-j2\pi ft_0}$

2.1.2.- Desplazamiento en frecuencia : $x(t).e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f-f_0)$.

2.1.3.- Diferenciación e integración :
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow j2\pi f.X(f) \\ \int_{-\infty}^t x(t).dt \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f}.X(f) + \frac{1}{2}.X(0).\delta(f) \end{array} \right.$$

2.1.4.- Convolución :
$$\left\{ \begin{array}{l} x(t).y(t) \Leftrightarrow X(f)*Y(f) \\ x(t)*y(t) \Leftrightarrow X(f).Y(f) \end{array} \right.$$

$$2.1.4.- \text{ Convolución : } \begin{cases} x(t).y(t) \Leftrightarrow X(f) * Y(f) \\ x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(f).Y(f) \end{cases}$$

Donde el producto de convolución (*) está definido por: $c(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(z).y(t-z).dz$

El producto de convolución es útil para calcular la respuesta de los sistemas LTI.

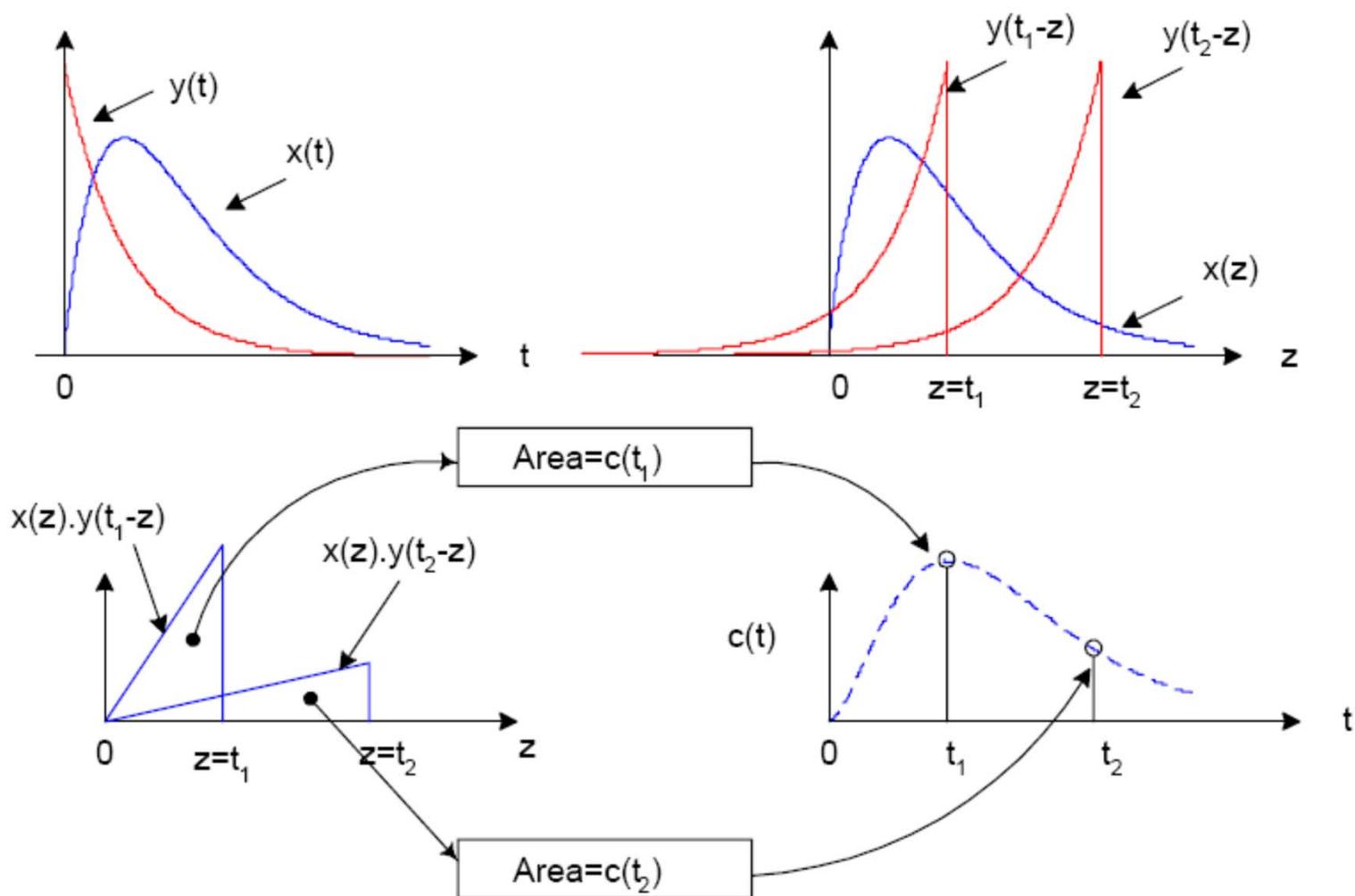
Conocida la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema LTI

en el dominio del tiempo la respuesta $r(t)$ a cualquier otra entrada será el producto de convolución de la señal entrada $e(t)$ por la respuesta al impulso $h(t)$, esto es $r(t) = e(t) * h(t)$.

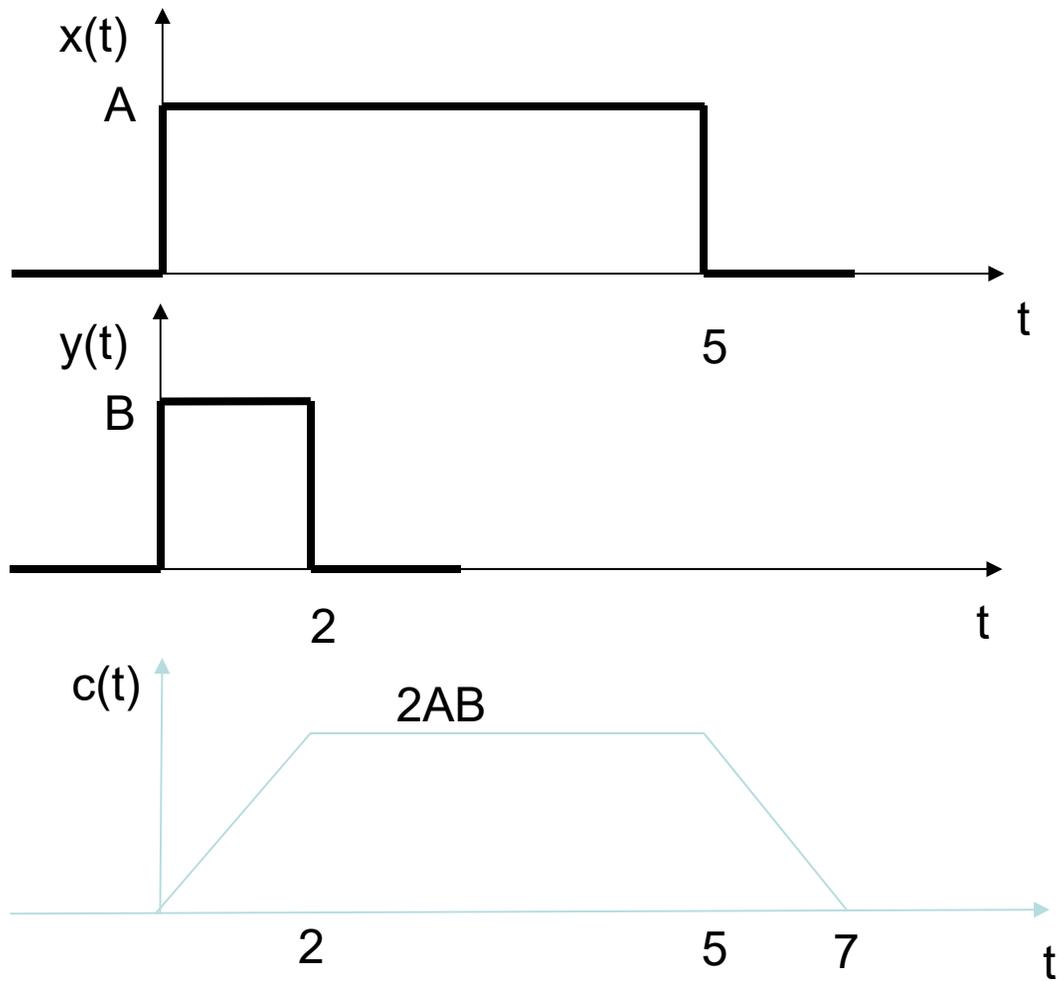
En el dominio de la frecuencia la respuesta será $R(f) = E(f) \cdot H(f)$ que es más fácil de calcular.

Interpretación gráfica del producto de convolución:

Dadas dos funciones $x(t)$ e $y(t)$, se muestra el producto de convolución $x(t)*y(t)$ para dos instantes t_1 y t_2 :



Ejemplo:
Graficar el producto de convolución de las señales



2.1.5.- Linealidad : $a.x(t)+b.y(t)=a.X(f)+b.Y(f)$

2.1.6.- Cambio de escala: $x(a.t) \Leftrightarrow \frac{1}{a}.X\left(\frac{f}{a}\right)$

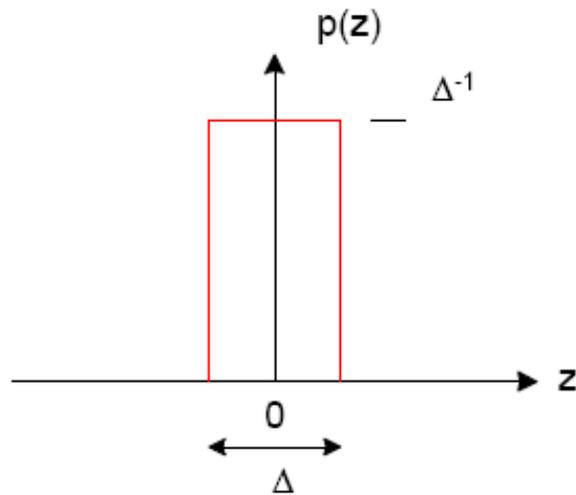
2.1.7.- Simetría: $\begin{cases} X(t) \Leftrightarrow x(-f) \\ X(-t) \Leftrightarrow x(f) \end{cases}$

Traer ejemplos

2.2.- Delta de Dirac

$$\text{Función ideal definida por: } \begin{cases} \delta(z) = 0, & \text{para } z \neq 0 \\ \delta(z) = \infty, & \text{para } z = 0 \\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(z).dz = 1, & \text{para cualquier } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Una función generadora simple y útil en muchas aplicaciones del Delta de Dirac, es un pulso rectangular de amplitud $\frac{1}{\Delta}$, ancho Δ y centrado en 0:



Se ve que $\delta(z) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} p(z)$

Propiedades del delta de Dirac de utilidad en el análisis de señales:

2.2.1.- Muestreo: $\int_{-\infty}^{\infty} x(z) \cdot \delta(z - z_0) \cdot dz = x(z_0)$

2.2.2.- Desplazamiento: $x(z) * \delta(z - z_0) = x(z - z_0)$

Ejemplos:

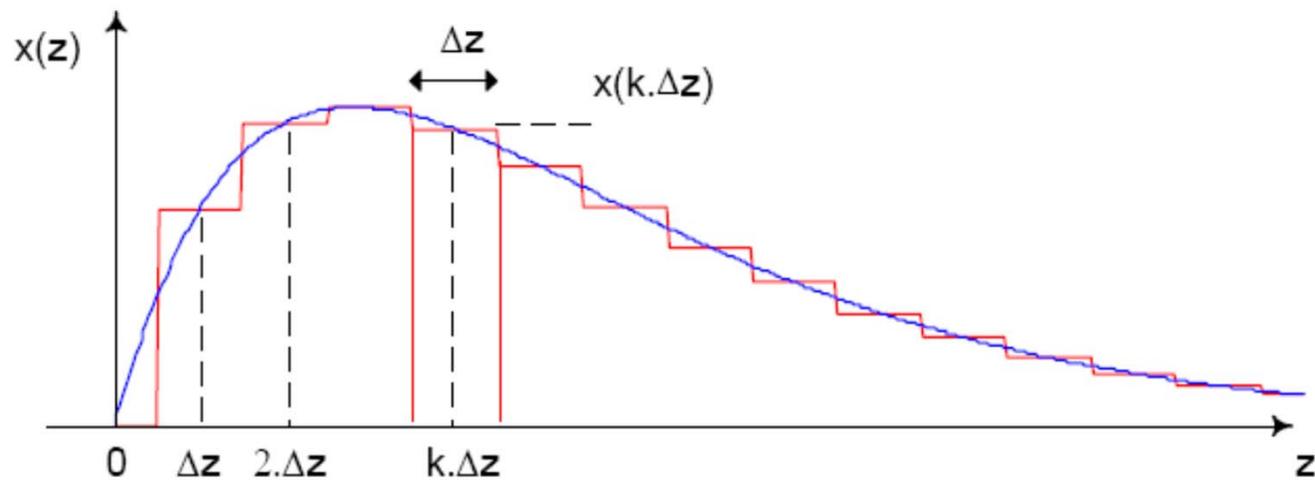
1. Completar $t^2 \cdot \delta(t - 3) = ?$

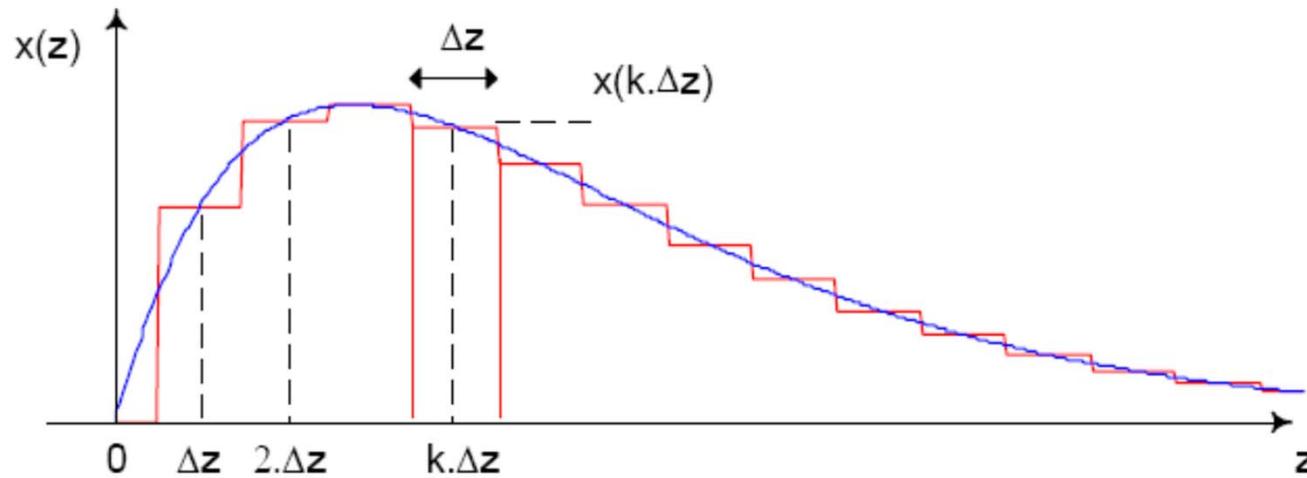
2. Calcular $t^2 * \delta(t - t_0) = ?$

Veremos que la función delta de Dirac puede ser útil para representar una señal continua en forma discreta

2.2.3.- Representación discreta de señales continuas

Es evidente que una señal continua $x(z)$ puede aproximarse tomando una serie de valores (muestras) de $x(z)$ a intervalos Δz y manteniéndolos durante ese lapso :





También es evidente que la aproximación será mejor cuando $\Delta z \rightarrow 0$

La versión muestreada de $x(z)$ puede ponerse como: $x_m(z) = \sum_k x(k.\Delta z).p(z - k.\Delta z)$, donde $p(z)$ es un pulso

amplitud constante = 1, duración Δz y centrado en $z=0$. Multiplicando el segundo miembro de $x_m(z)$ por $\frac{\Delta z}{\Delta z}$

$$\text{queda: } x_m(z) = \sum_k x(k.\Delta z).p(z - k.\Delta z).\frac{\Delta z}{\Delta z} = \sum_k x(k.\Delta z).\frac{p(z - k.\Delta z)}{\Delta z}.\Delta z$$

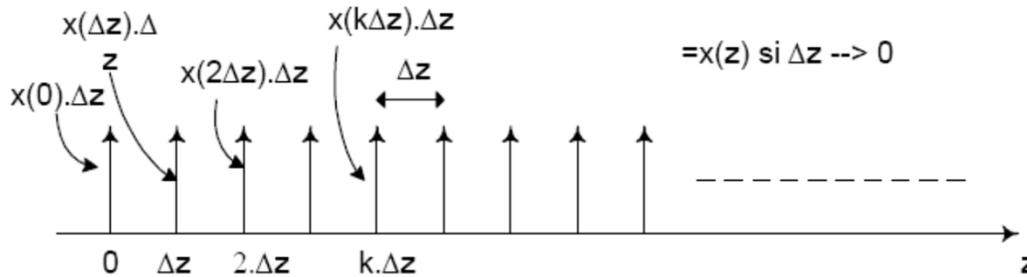
cuando $\Delta z \rightarrow 0$

$$\frac{p(z - k.\Delta z)}{\Delta z} \rightarrow \delta(z - k.\Delta z)$$

$$\text{y la expresión para } x_m(z): \quad x_m(z) = x(z) = \sum_k [x(k.\Delta z).\Delta z] \delta(z - k.\Delta z)$$

y la expresión para $x_m(z)$:
$$x_m(z) = x(z) = \sum_k [x(k.\Delta z).\Delta z] \delta(z - k.\Delta z)$$

(Se podría haber llegado al mismo resultado utilizando la propiedad de desplazamiento del impulso para el caso particular que $z_0 = 0$: $x(z) = x(z) * \delta(z)$ y realizando el producto de convolución en forma discreta).



2.2.4.- Transformada de Fourier de un delta de Dirac en tiempo:

$$X_{\delta}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t).e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (\text{aplicando T. de muestreo})$$

El espectro de un impulso centrado en el origen es constante de amplitud 1

2.2.5.- Transformada de Fourier de un delta de Dirac en frecuencia:

$$x_{\delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f).e^{-j\omega t} df = 1 \quad (\text{aplicando T. de muestreo})$$

La anti transformada de un impulso centrado en el origen es una señal continua (dc) de amplitud 1

- Ejercicios:
- 1) calcular la $X(f)$ de un impulso en el origen
 - 2) calcular la $X(f)$ módulo de un impulso fuera del origen
 - 3) Idem a los anteriores pero con impulsos en la frecuencia

2.3.- Espectro de funciones usuales

2.3.1.- Función signo (señal permanente)

Si $x(t) = \text{sgn}(t)$, entonces $x(t) = 1$ para $t > 0$, $x(t) = -1$ para $t < 0$ y $x(t) = 0$ para $t = 0$

La función signo no tiene formalmente T. de Fourier, puede definirse una por medio de un proceso límite:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} (e^{-a.t}) \quad , \text{para } t > 0$$

$$\text{sgn}(t) = 0 \quad , \text{para } t = 0$$

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} (-e^{a.t}) \quad , \text{para } t < 0$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) \cdot e^{-j2\pi f.t} \cdot dt = \lim_{a \rightarrow 0} \left[- \int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot e^{-j2\pi f.t} \cdot dt + \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi f.t} \cdot dt \right] = \frac{1}{j\pi f}$$

Hacer la integral de $\text{sgn}(t)$, dibujar el espectro y la fase de $X(f)$

2.3.2.- Escalón unitario (señal permanente)

Si $x(t) = u(t)$, entonces $x(t) = 1$ para $t > 0$, $x(t) = 0.5$ para $t = 0$ y $x(t) = 0$ para $t < 0$

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \text{sgn}(t) \quad \text{y, utilizando el resultado de (2.3.1):} \quad X(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

2.3.3.- Pulso rectangular

El pulso rectangular, abreviado $rect(t, \tau)$, está definido por un valor unitario durante $-\tau/2$ y $\tau/2$ y 0 para el resto del tiempo:

$$rect(t, \tau) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right), \text{ su transformada de Fourier es :}$$

Función par tiene espectro real

$$X(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi ft} dt = \tau \cdot \frac{\text{sen}(\pi \cdot f \cdot \tau)}{\pi \cdot f \cdot \tau} = \tau \cdot \text{sinc}(f \cdot \tau)$$

donde la función $\text{sinc}(x)$ se define como $\text{sen}(\pi \cdot x) / \pi \cdot x$

$$\text{Propiedad útil de la función } \text{sinc}: \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\pi x)}{(\pi x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\text{sen}(\pi x)}{(\pi x)} \right)^2 dx = 1$$

Utilizando las funciones definidas se ve que función ideal $\delta(t)$ puede aproximarse también por:

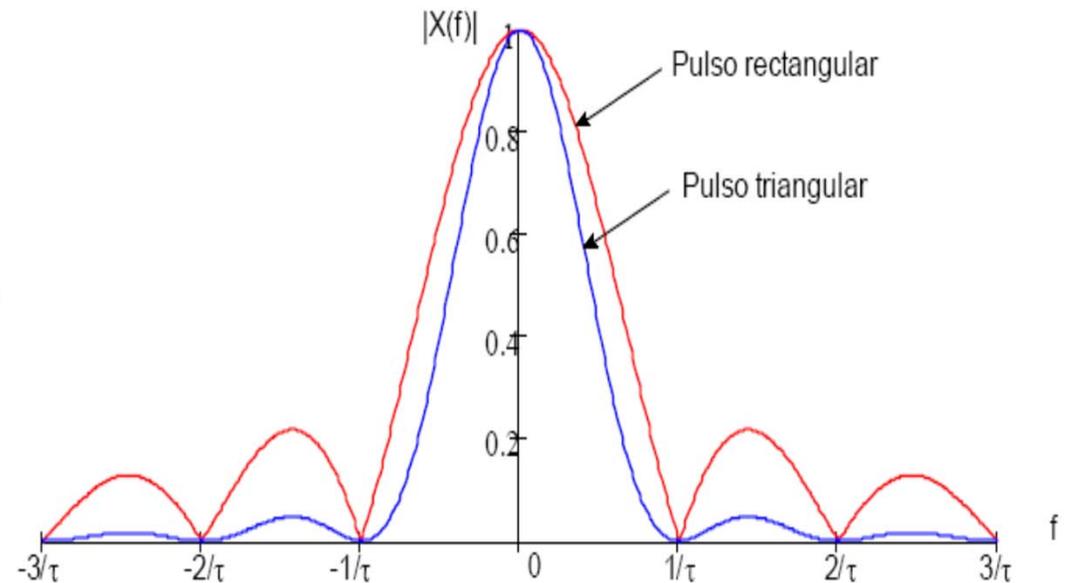
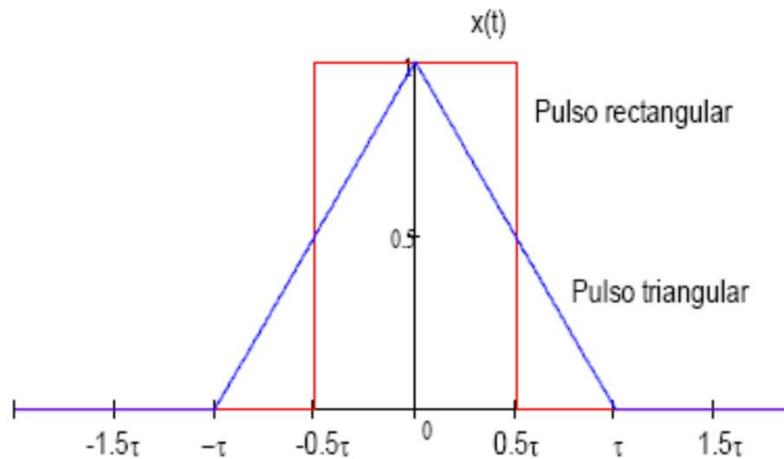
$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot rect(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)$$

2.3.4.- Pulso triangular

La Transformada de Fourier de un pulso triangular de amplitud unitaria y 2τ seg. de duración, simétrico respecto a 0 es:

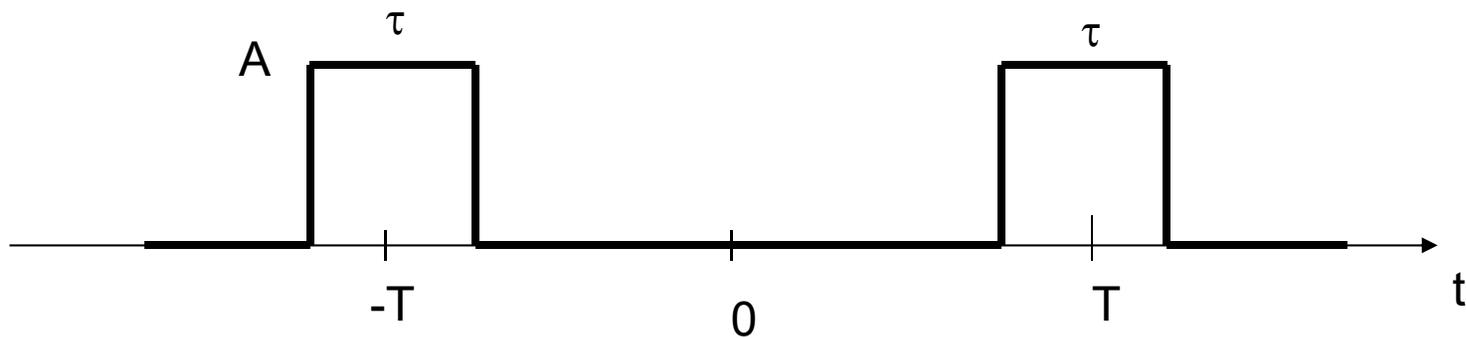
$$X(f) = \int_{-\tau}^0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt$$

$$X(f) = \tau \cdot \left(\frac{\text{sen}(\pi \cdot f \cdot \tau)}{\pi \cdot f \cdot \tau} \right)^2$$



Notar que los pulsos tienen igual área
Dibujar los espectros utilizando MathCad

Ejemplo: dibujar el espectro suponiendo que los pulsos rectangulares duran muy poco respecto de T. Expresar matemáticamente el espectro.



2.3.5.- Pulso coseno elevado

El pulso coseno elevado, de amplitud unitaria y 2τ seg. de duración, simétrico respecto de 0, está definido por:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{\tau}\right) \right) \cdot \text{rect}(t, 2\tau)$$

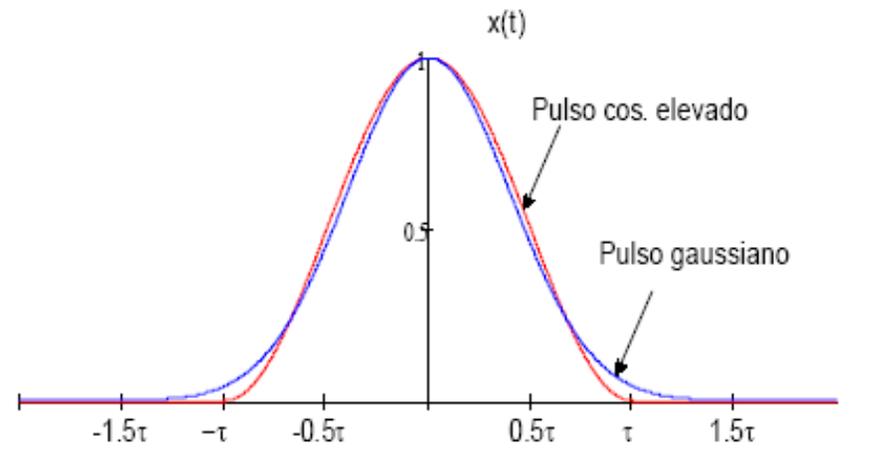
Su transformada es :

$$X(f) = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{\tau}\right) \right) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt = \frac{\tau}{1 - 4 \cdot f^2 \cdot \tau^2} \cdot \frac{\text{sen}(2\pi \cdot f \cdot \tau)}{2\pi \cdot f \cdot \tau}$$

2.3.6.- Pulso Gaussiano

Pulso con forma de campana de Gauss: $x(t) = e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$, con $\tau > 0$.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt = \sqrt{\pi} \cdot \tau \cdot e^{-(\pi \cdot f \cdot \tau)^2}, \text{ El espectro de frecuencias también tiene forma Gaussiana.}$$



Analizando las expresiones de $X(f)$ obtenidas para las señales 2.3.1 a 2.3.6, se comprueba el resultado conocido sobre comportamiento espectral de señales eléctricas, que dice que si el pulso (o señal) presenta discontinuidad en la derivada m , el módulo de su espectro de frecuencias disminuye a frecuencias altas en forma inversamente proporcional a $f^{(m+1)}$. O, en términos cualitativos, señales con pendientes abruptas en tiempo, tienden a ocupar anchos de banda mayores..

2.4.- Espectro de señales periódicas

El caso mas simple de funciones periódicas son las trigonométricas seno y coseno, para ellas, la T. de Fourier es casi directa. Aplicando el teorema de desplazamiento en frecuencia:

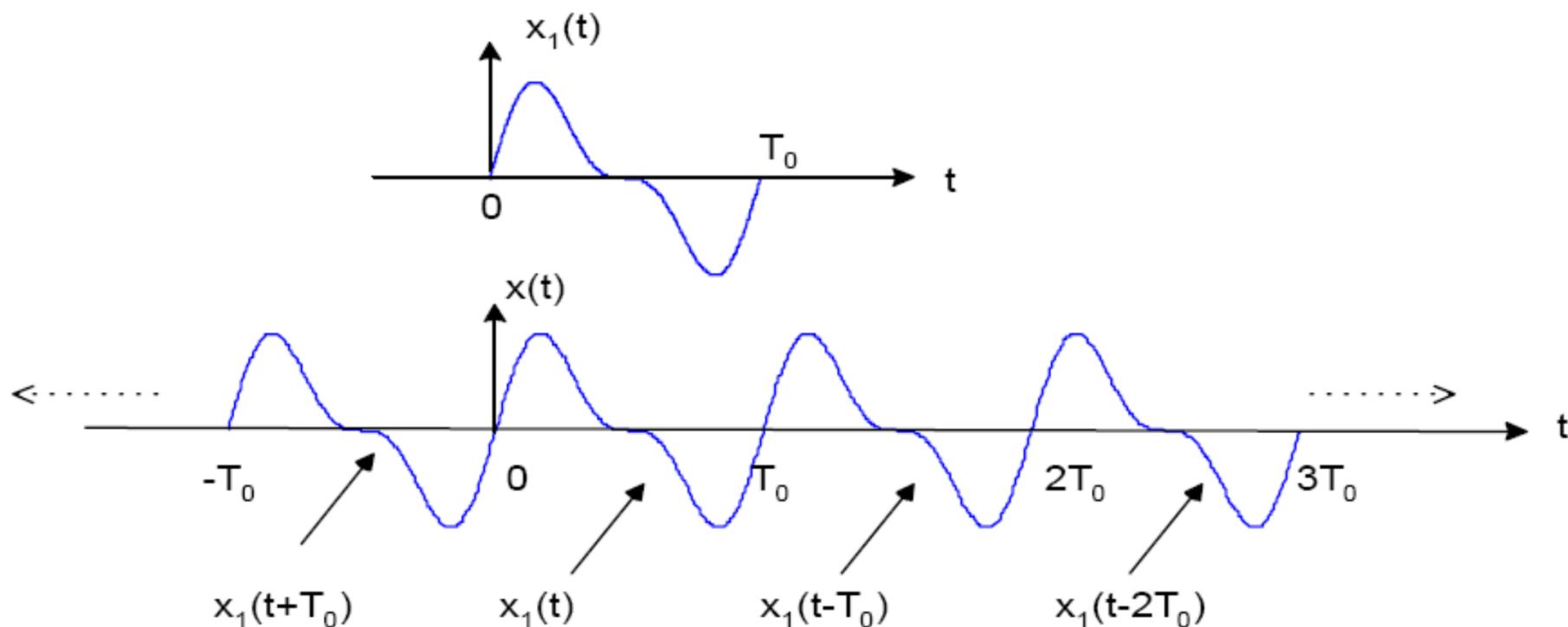
$$x(t) = \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) = \frac{1}{2} e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} + \frac{1}{2} e^{-j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f + f_0)$$

$$y(t) = \text{sen}(2\pi \cdot f_0 \cdot t) = \frac{1}{j \cdot 2} e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} - \frac{1}{j \cdot 2} e^{-j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} \Leftrightarrow \frac{1}{j \cdot 2} \cdot \delta(f - f_0) - \frac{1}{j \cdot 2} \cdot \delta(f + f_0)$$

$$z(t) = \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi) = \frac{1}{2} e^{j \cdot (2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi)} + \frac{1}{2} e^{-j \cdot (2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi)} \Leftrightarrow \frac{e^{j \cdot \phi}}{2} \cdot \delta(f - f_0) + \frac{e^{-j \cdot \phi}}{2} \cdot \delta(f + f_0)$$

En general, una función periódica puede escribirse como: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - nT_0)$, donde T_0 es el período

fundamental y $x_1(t)$ es una función transitoria de duración T_0 que representa un ciclo de $x(t)$ con T. de Fourier $X_1(f)$.



La inversa del período T_0 es la frecuencia fundamental de $x(t)$: $f_0 = 1/T_0$. Aplicando el teorema de desplazamiento en tiempo, puede definirse la transformada $X(f)$ en función de $X_1(f)$ según:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - nT_0) = x_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \Leftrightarrow X(f) = X_1(f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f n T_0}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - nT_0) = x_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \Leftrightarrow X_1(f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi \cdot f \cdot nT_0}$$

como $\sum_{-N}^N e^{-j2\pi \cdot n \cdot f \cdot T_0} = \frac{\text{sen}(\pi \cdot f \cdot T_0 \cdot (2N+1))}{\text{sen}(\pi \cdot f \cdot T_0)}$, cuando $N \rightarrow \infty$, es posible demostrar que :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi \cdot f \cdot nT_0} = \frac{1}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

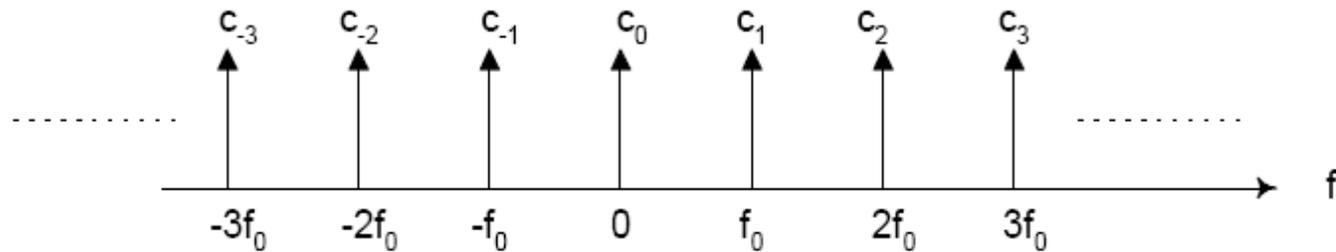
Queda entonces :

$$X(f) = X_1(f) \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{X_1(nf_0)}{T_0} \right) \delta(f - nf_0)$$

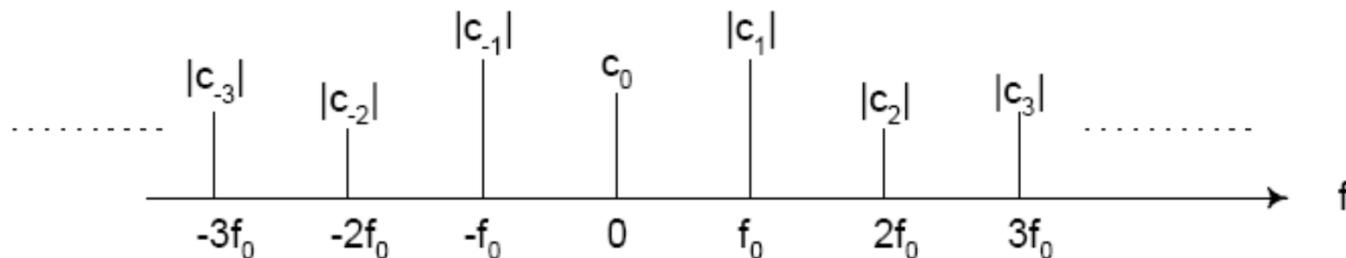
$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \delta(f - nf_0)$$

donde se ha definido f_0 y c_n como : $f_0 = \frac{1}{T_0}$ y $c_n = \frac{X_1(nf_0)}{T_0} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_a^{a+T_0} x_1(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} \cdot dt$

Espectro de una señal periódica:



Es usual representar a cada impulso con altura proporcional al módulo de su área. No confundir con el espectro de líneas, en el que se representa las componentes como líneas cuya altura es proporcional a los $|c_n|$:



En general, c_n es un número complejo que comparte las características enunciadas al principio para $X(f)$: Si $x_1(t)$ es función par, c_n es real. Si $x_1(t)$ es impar, c_n es imaginario y siempre $c_{-n} = c_n^*$. Notar que la dimensión de c_n es la misma que la de $x(t)$.

Si existe $X(f)$, se puede determinar $x(t)$ en términos de los coeficientes c_n y f_0

Error: en la integral que sigue es df no dt

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot df = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \delta(f - nf_0) \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot \delta(f - nf_0) \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot df$$

Aplicando el teorema de muestreo a la integral del último término:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j2\pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \cdot e^{j(2\pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t + \phi_n)} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot |c_n| \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n)$$

Que son algunas de las formas habituales de representar señales periódicas por medio de los coeficientes de Fourier.

El valor cuadrático medio de la señal $x(t)$ es: $\langle x(t)^2 \rangle = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

Como el espectro de $x(t)$ existe en múltiplos de f_0 , es físicamente razonable definir el espectro de densidad de potencia de $x(t)$ como:

$$G(f) = \frac{1}{R} \cdot |X(f)|^2 = \frac{1}{R} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \cdot \delta(f - n \cdot f_0) \quad \text{donde se supone que } x(t) \text{ es una tensión}$$

aplicada sobre una resistencia R [ohm]. La igualdad entre los dos últimos términos de la ecuación de arriba debe tomarse como simbólica, pues no es matemáticamente correcta (el cuadrado de la función δ no está definido (sería un impulso de área infinita), se ha tomado que $|A \cdot \delta(t)|^2 = |A|^2 \cdot \delta(t)$ para que la integral entre $\pm\infty$ de $G(f)$ sea igual al valor cuadrático medio de $x(t)$.

Ejemplo

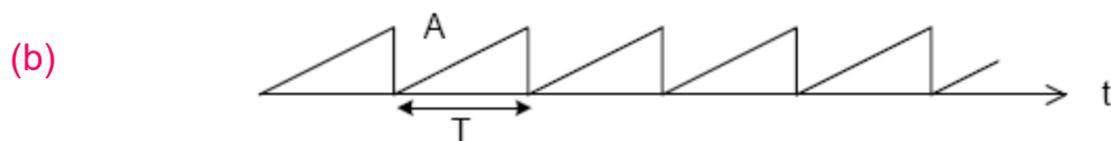
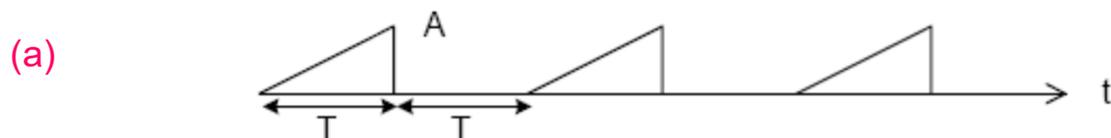
Un caso particular de señal periódica, de utilidad en algunas aplicaciones, es el tren de impulsos de Dirac (función *comb*). Se tiene que :

$$x_1(t) = \delta(t) \quad , \quad X_1(f) = 1 \quad \therefore \quad c_n = \frac{1}{T_0} X_1(n.f_0) = \frac{1}{T_0}$$

$$X(f) = \frac{1}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n.f_0)$$

La Transformada de Fourier de un tren periódico de impulsos en tiempo de área 1 y periodo T_0 , es también un tren periódico de impulsos en frecuencia, de área y periodo $\frac{1}{T_0}$.

Problema 6.- Calcular el módulo de los coeficientes de Fourier c_n de las señales periódicas de la figura y la amplitud de la 10ª y 11ª armónica en ambos casos:



(solución de a)

(a) La señal periódica es una rampa entre 0 y T de pendiente A/T , el período fundamental es $2T$:

$x_1(t) = \frac{A}{T} \cdot t$ entre 0 y T , y $x_1(t) = 0$ entre T y $2T$. La T. de Fourier de un período será:

$$X_1(f) = \frac{A}{T} \int_0^T t \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{T(2\pi f)^2} \left[(1 + j2\pi fT) e^{-j2\pi fT} - 1 \right]$$

Los coeficientes de la señal periódica serán:

$$c_n = \frac{1}{2T} \cdot X_1\left(\frac{n}{2T}\right) = \frac{A}{2(\pi n)^2} \left[(1 + j\pi n) e^{-j\pi n} - 1 \right]$$

Si n es par: $c_n = \frac{jA}{2\pi n}$ mientras que, si n es impar: $c_n = \frac{-A(1 + jn\pi)}{2(\pi n)^2}$

Los coeficientes 10 y 11 valen: $|c_{10}| = 0.016A$ $|c_{11}| = 0.014A$ y la amplitud de las armónicas 10 y 11 serán: $A_{10} = 0.032A$ $A_{11} = 0.028A$

Usando MathCad:

$$x(t) := \frac{A}{T} \cdot t$$

$$c(n) := \frac{1}{2T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \exp\left(-2i \cdot \pi \cdot \frac{n}{2T} \cdot t\right) dt \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{2} \cdot i \cdot \frac{(\exp(-i \cdot \pi \cdot n) \cdot n \cdot \pi \cdot A - i \cdot A \cdot \exp(-i \cdot \pi \cdot n) + i \cdot A)}{\pi^2 \cdot n^2}$$

$$c(10) \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{20} \cdot i \cdot \frac{A}{\pi} \qquad c(11) \text{ simplify } \rightarrow \frac{-1}{242} \cdot i \cdot A \cdot \frac{(11 \cdot \pi - 2 \cdot i)}{\pi^2}$$

Solucion de (b)

(b) La señal periódica es una rampa entre 0 y T de pendiente A/T , el período fundamental es T :

$x_1(t) = \frac{A}{T} \cdot t$ entre 0 y T ,. La T. de Fourier de un período será :

$$X_1(f) = \frac{A}{T} \int_0^T t \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{T(2\pi f)^2} \left[(1 + j2\pi fT) e^{-j2\pi fT} - 1 \right]$$

En éste caso, los coeficientes de la señal periódica serán:

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot X_1\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{A}{(2\pi n)^2} \left[(1 + j2\pi n) e^{-j2\pi n} - 1 \right] = \frac{jA}{2\pi n}$$

Los coeficientes 10 y 11 valen: $|c_{10}| = 0.016A$ $|c_{11}| = 0.014A$ y la amplitud de las

armónicas 10 y 11 serán: $A_{10} = 0.032A$ $A_{11} = 0.028A$

(Igual que en (a).)

MathCad:

$$x(t) := \frac{A}{T} \cdot t$$

$$c(n) := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \exp\left(-2i \cdot \pi \cdot \frac{n}{T} \cdot t\right) dt \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot i \cdot \frac{(2 \cdot \exp(-2 \cdot i \cdot \pi \cdot n) \cdot n \cdot \pi \cdot A - i \cdot A \cdot \exp(-2 \cdot i \cdot \pi \cdot n) + i \cdot A)}{\pi^2 \cdot n^2}$$

$$c(10) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{20} \cdot i \cdot \frac{A}{\pi}$$

$$c(11) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{22} \cdot i \cdot \frac{A}{\pi}$$

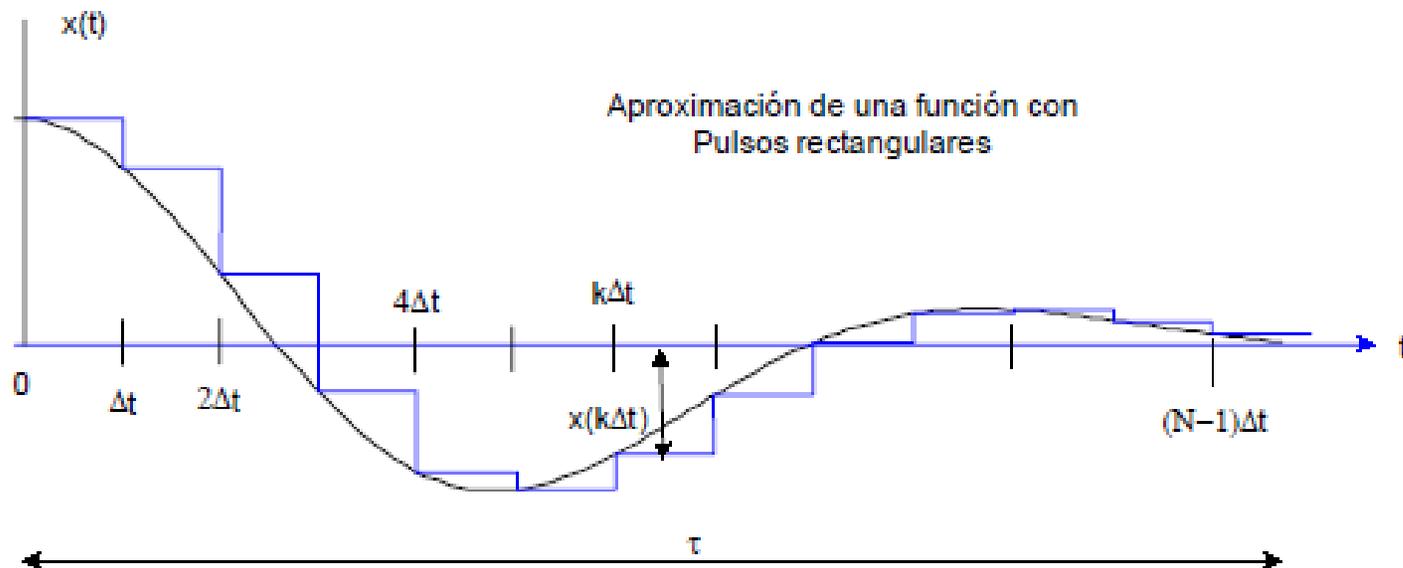
2.5.- La Transformada de Fourier discreta (DFT)

La Transformada de Fourier de una determinada señal, puede calcularse a pesar de no conocerse su expresión matemática $x(t)$, si se dispone de un número adecuado de muestras de la señal a lo largo del tiempo.

Suponer una señal $x(t)$ que existe durante un lapso de T seg. y es 0 para el resto del tiempo. Si se toman N muestras de la señal a intervalos razonablemente cortos, p. ej. a $t = 0, 1\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, k\Delta t, \dots, (N-1)\Delta t$ y se mantiene después de cada muestra el valor $x(k\Delta t)$ durante Δt seg. puede aproximarse la integral para calcular $X(f)$ según:

$$X(f) = \int_T x(t).e^{-j2\pi.f.t}.dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} x(k.\Delta t).e^{-j2\pi.f.k.\Delta t} .\Delta t = X_d(f) . \text{ Si } \Delta t \text{ es suficientemente pequeño}$$

entonces $X_d(f) = X(f)$



$\Delta t = \frac{\tau}{N}$, suponiendo intervalo uniforme entre muestras. La expresión para $X(f)$ queda:

$$X_d(f) = \frac{\tau}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot k \cdot \frac{\tau}{N}} \quad \text{donde } x_k = x(k \cdot \Delta t)$$

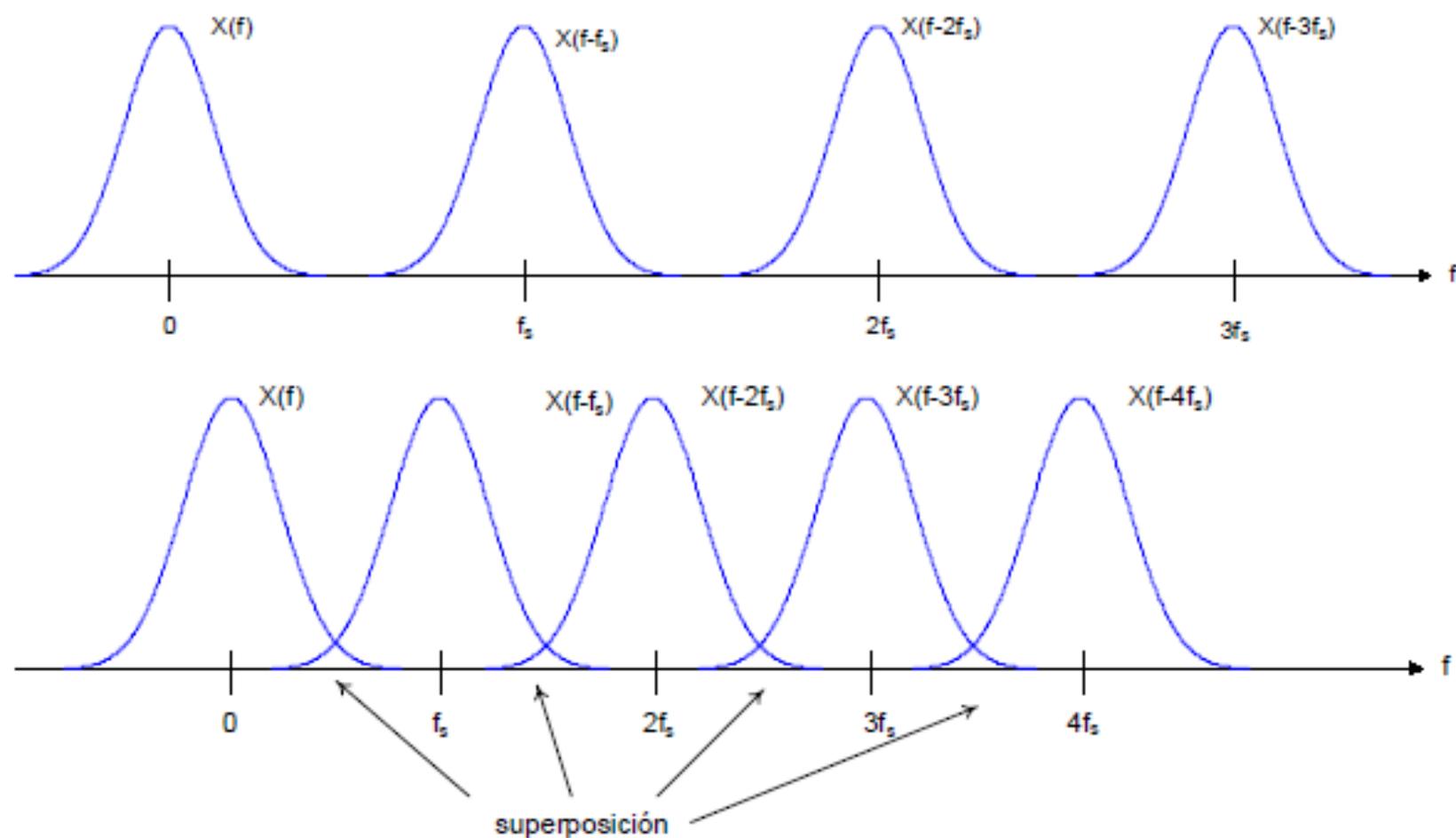
llamando $f_0 = \frac{1}{\tau}$, queda:
$$X_d(f) = \frac{1}{N \cdot f_0} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \frac{f}{f_0} k}$$

El espectro de la transformada discreta $X_d(f)$ es continuo, y analizando la ecuación de arriba, se ve que:

$$X_d(f + N \cdot f_0) = \frac{1}{N \cdot f_0} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \frac{(f + N \cdot f_0)}{f_0} k} = \frac{1}{N \cdot f_0} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \frac{f}{f_0} k} \cdot e^{-j2\pi k} = X_d(f)$$

como k es siempre un número entero, el término $e^{-j2\pi k}$ es igual a 1 por lo que resulta que $X_d(f)$ es periódica en f y su periodo vale Nf_0 : $N \cdot f_0 = \frac{N}{\tau} = \frac{1}{\Delta t} = f_s$ donde f_s es la frecuencia a que se toman las muestras de $x(t)$ (frecuencia de muestreo).

El espectro de $X_d(f)$ es el de $X(f)$ repetido a múltiplos de f_s ("aliasing"). Es evidente que, una mala elección de f_s puede introducir errores en el cálculo por efecto del traslapamiento de espectros.



A los efectos del cálculo de la DFT, se debe utilizar la frecuencia de muestreo mas alta posible, como guía aproximada, debe ser mayor que 5...20 veces del ancho de banda (significativo) esperable de $x(t)$. En el límite, cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $f_s \rightarrow \infty$, se tendrá la solución exacta $X_d(f) = X(f)$.

Existen algoritmos de cálculo que aceleran el procesamiento de la suma (FFT, Fast Fourier Transform), y normalmente, calculan $X_d(f)$ en múltiplos de f_0 :

$$X_d(nf_0) = \frac{1}{N \cdot f_0} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k} = X_n$$

resultando un espectro discreto con puntos (líneas) en múltiplos de f_0 (En la terminología de la DFT o FFT, f_0 determina la resolución del espectro o el espacio entre líneas). Si la señal analizada fuera periódica, la toma de muestra debería hacerse durante un período ($T=\tau$) y los coeficientes de la serie de Fourier resultante serían:

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot X_d(nf_0) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k}$$

La variable f no aparece explícitamente en las funciones de X_n o c_n sino que está implícita en el orden n de la armónica de f_0 .

Los paquetes de software que realizan la FFT, tienen las siguientes características: (a) el número de muestras es una potencia de 2 ($N=256, 1024, 65536$, etc.) y (b) La resolución del espectro es $1/\tau$ y la máxima armónica calculada es $n_{max}=N/2$, lo que da un ancho de espectro $F_{max} = N \cdot f_0/2 = f_s/2$.

Ejemplos:

1. Se tiene una señal cuyo ancho de banda estimado es de 15 kHz. Si quisiera determinar su Transformada de Fourier discreta, cual sería la frecuencia de muestreo y el tiempo de toma de muestras que utilizaría para tener una representación completa del espectro con una resolución de 100Hz ?.
2. Se quiere determinar, mediante una DFT, el espectro de una señal de video cuyo ancho de banda se estima en no mayor de 5 MHz. Si la resolución del espectro debe ser de 1 kHz defina la frecuencia de muestreo que utilizaría y el número de muestras necesarias para tener un resultado confiable.
3. Analizar el espectro de una senoidal calculado con la fft.
4. Si tuviera que determinar el espectro de una señal aleatoria de banda de base mediante la Transformada Discreta de Fourier utilizando un sistema de muestreo uniforme ideal. (a) ¿ Que información mínima necesitaría saber de la señal ?, (b) Cual sería la frecuencia de muestreo que utilizaría? y (c) Cuanto tiempo tardaría para tomar las muestras?