

## SEÑALES ELECTRICAS

### 1.- Señales eléctricas en dominio de tiempo

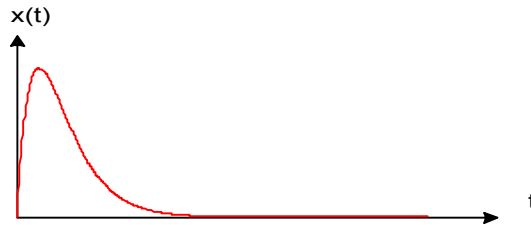
Clasificación de señales eléctricas en dominio de tiempo:

De acuerdo a su duración temporal: Transitorias (Energía finita) o Permanentes (Potencia finita).

De acuerdo a su modelación matemática : Determinísticas o Aleatorias, las primeras pueden ser transitorias, periódicas o cuasi-periódicas (suma de funciones senoidales no relacionadas armónicamente). Están definidas por una relación matemática que permite conocer su valor en cualquier instante de tiempo (suponiendo que el tiempo sea la variable independiente) p. ej.  $x(t) = 10.e^{-at} .sen(\omega t) + 4.cos(\omega t)$ . Las segundas constituyen el grupo de las variables o señales estadísticas o aleatorias y no es posible expresarlas como funciones explícitas de una variable independiente. Pueden definirse algunas propiedades comunes a una familia (ensemble), en dominio de tiempo a través de sus promedios estadísticos.

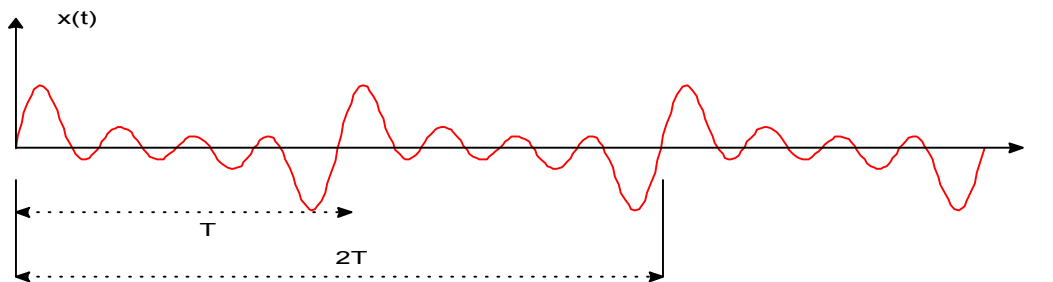
En realidad, todas las señales eléctricas, físicamente posibles, son transitorias. Lo de “permanente” es una aproximación. Se las considera en esta categoría si existen durante un tiempo suficientemente largo (pero finito).

1.1.- Señal transitoria, existe (toma valores significativos) durante un intervalo de tiempo finito:



1.2.- Señal periódica: Caso particular de señal permanente, cumple que, para cualquier valor de  $t$   $x(t) = x(t \pm nT)$ , donde  $T$  es una constante positiva real y  $n$  entero  $\geq 1$

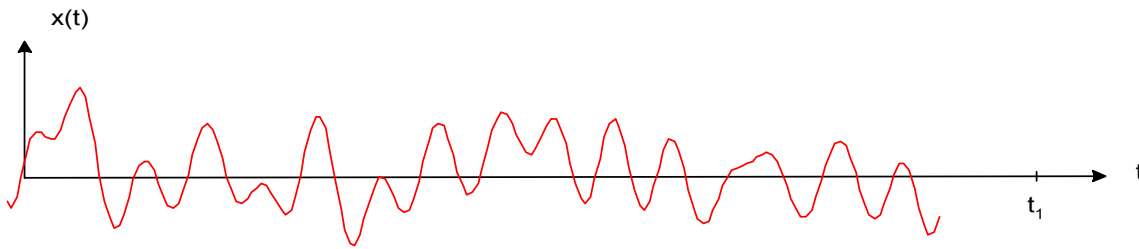
El período fundamental de la señal es  $T$  ( $n=1$ ) y su inversa, la frecuencia fundamental  $f_0 = \frac{1}{T}$



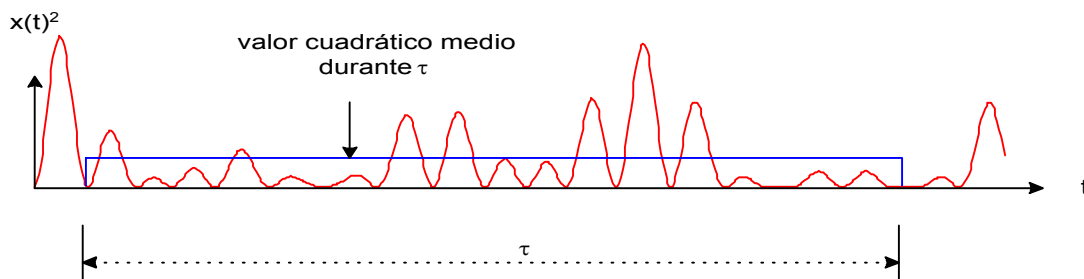
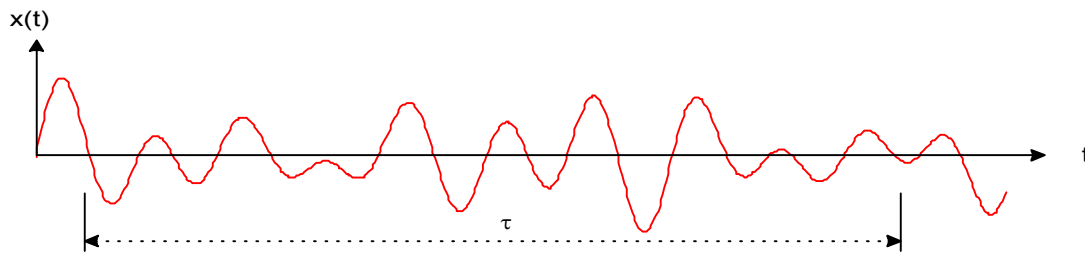
Caso más simple y conocido de señal periódica son las funciones armónicas seno/coseno:

$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t \pm \phi)$  . La amplitud máxima de la señal es  $A$  y su período fundamental  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0}$

1.3.- Señal aleatoria: caso particular de señal permanente, no tiene expresión matemática explícita,  $x(t_1) = ?$



#### 1.4.- Definiciones de promedios temporales:



valor instantáneo de la señal =  $x(t)$

valor medio :

$$x_m = \langle x \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{\tau} x(t) \cdot dt$$

valor cuadrático medio :

$$x_{cm} = \langle x^2 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{\tau} x(t)^2 \cdot dt$$

valor eficaz :

$$x_{ef} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{\tau} x(t)^2 \cdot dt}$$

Operador promedio temporal :  $\langle * \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{\tau} (*).dt$

Notar, en las definiciones anteriores que  $\tau \rightarrow \infty$ . Una aproximación a los valores ideales se obtiene haciendo que el lapso de integración  $\tau$  sea suficientemente grande (cuanto es suficiente, dependerá de las características de la señal). Las definiciones anteriores se modifican a:

valor medio durante  $\tau$  [seg] :

$$x_m = \langle x \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} x(t) \cdot dt$$

valor cuadrático medio durante  $\tau$  [seg] :  $x_{cuad\_med} = \langle x^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} x(t)^2 \cdot dt$

valor eficaz durante  $\tau$  [seg] :

$$x_{ef} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_{\tau} x(t)^2 \cdot dt}$$

Para señales periódicas, si se cumple que  $\tau$  es mucho mayor que el período fundamental  $T$ , es fácil demostrar

que los valores medio, cuadrático medio y eficaz son:

$$x_m = \langle x \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_T x(t) \cdot dt \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_T x(t)^2 \cdot dt \quad x_{ef} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_T x(t)^2 \cdot dt}$$

En aplicaciones eléctricas,  $x(t)$  es generalmente una señal corriente o tensión físicamente posible, es decir que  $x(t)$  debe ser (a) Función real y continua, (b) Limitada en tiempo, (c) Limitada en amplitud.

Para simplificar modelos o manipulaciones matemáticas que se aproximen a la realidad, en algunos casos se utilizan modelos de señales no realizables físicamente (complejas, discontinuas, etc.).

Si  $x(t)$  representa una tensión desarrollada sobre una resistencia de R ohm, la potencia instantánea

disipada en R será:  $p(t) = \frac{x(t)^2}{R}$  mientras, si es una corriente que circula por R ohm  $p(t) = R \cdot x(t)^2$ . La

potencia media disipada en R durante un tiempo  $\tau$  por  $x(t)$  está definida por:

$$P_{m,\tau} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\tau} \int_{\tau} x(t)^2 \cdot dt = \frac{\langle x^2 \rangle}{R} \quad \text{o} \quad P_{m,\tau} = R \cdot \frac{1}{\tau} \int_{\tau} x(t)^2 \cdot dt = R \cdot \langle x^2 \rangle$$

según  $x(t)$  sea una señal de tensión o corriente, mientras que la energía disipada es:

$$E_{\tau} = \frac{1}{R} \cdot \int_{\tau} x(t)^2 \cdot dt = \frac{\langle x^2 \rangle \cdot \tau}{R} \quad \text{o} \quad E_{\tau} = R \cdot \int_{\tau} x(t)^2 \cdot dt = R \cdot \langle x^2 \rangle \cdot \tau$$

De lo anterior resulta que:

- Si  $x(t)$  es una señal transitoria su potencia y valor cuadrático medio tienden a cero y su energía es finita
- Si  $x(t)$  es una señal permanente su potencia y valor cuadrático medio son finitos y su energía tiende a infinito

Si la señal eléctrica  $x(t)$  tiene componentes de corriente alterna y continua, tal que:

$x(t) = x_o + x_{ac}(t)$ , se tiene que :

$$\begin{aligned} x_o &= \langle x \rangle && \text{(valor de la componente continua de } x(t)) \\ x_{ef} &= \sqrt{\langle x^2 \rangle} && \text{(valor eficaz de } x(t) \text{ - RMS)} \\ x_{ef\_ac} &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} && \text{(valor eficaz de la componente alterna de } x_{ac}(t)) \end{aligned}$$

En el caso que  $x(t) = y(t) \pm z(t)$  se tiene que:

$\langle x \rangle = \langle y(t) \pm z(t) \rangle = \langle y \rangle \pm \langle z \rangle$  La componente media o de continua de la suma es la suma de las componentes continuas individuales.

$\langle x^2 \rangle = \langle (y(t) \pm z(t))^2 \rangle = \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle \pm 2 \langle y \cdot z \rangle$ , para el caso particular que  $\langle y \cdot z \rangle = 0$  se tiene que:

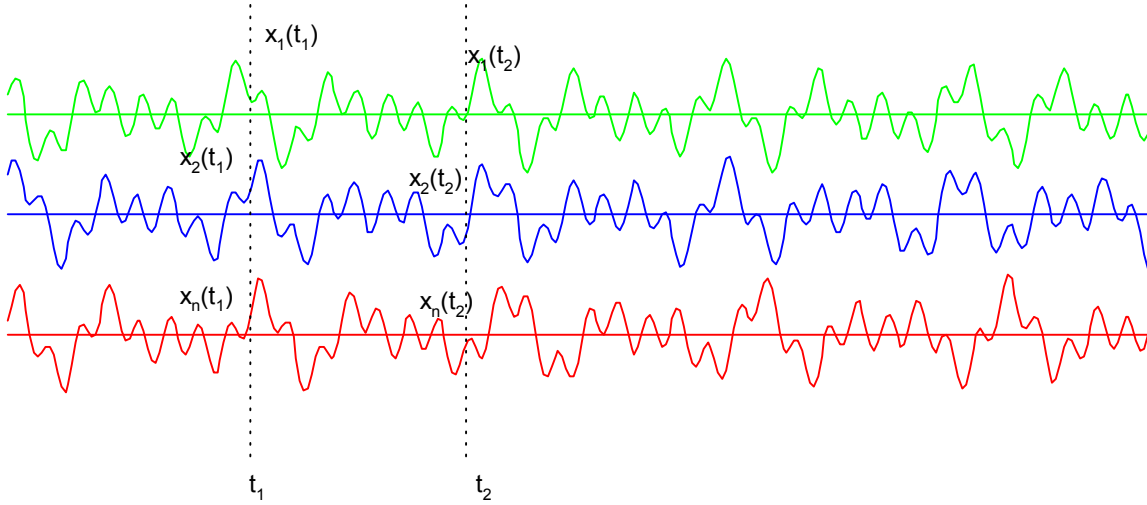
$\langle x^2 \rangle = \langle (y(t) \pm z(t))^2 \rangle = \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle$ , en este caso se dice que  $x(t)$  e  $y(t)$  son incoherentes y la potencia de la suma (o resta) es la suma de las potencias individuales. Se puede tomar como definición de incoherencia de dos señales cuando se cumple que:  $\langle y \cdot z \rangle = 0$ . P.ej. dos señales armónicas de distinta frecuencia.

También si  $\langle y \cdot z \rangle = 0$  y  $x(t) = y(t) \cdot z(t)$ , se tendrá :  $\langle x \rangle = \langle y \cdot z \rangle = \langle y \rangle \cdot \langle z \rangle$  y

$$\langle x^2 \rangle = \langle (y(t) \cdot z(t))^2 \rangle = \langle y^2 \rangle \cdot \langle z^2 \rangle$$

### 1.5.- Promedios Estadísticos

Suponer un conjunto arbitrariamente grande de señales (en el gráfico se dibujan únicamente tres funciones miembro del conjunto) que son generadas por un determinado proceso aleatorio (p.ej. ruido térmico) :



Todas se parecen y tienen el mismo valor eficaz, pero no son idénticas. Si en un instante  $t_1$  se toma una muestra de las  $n$  señales, se obtiene un conjunto de  $n$  valores:  $x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_n(t_1)$  cuyo valor medio es:

$$\overline{x(t_1)} = \frac{x_1(t_1) + x_2(t_1) + x_3(t_1) + \dots + x_n(t_1)}{n}$$

Si el experimento se repite en otro instante  $t_2$ , se tiene que el valor

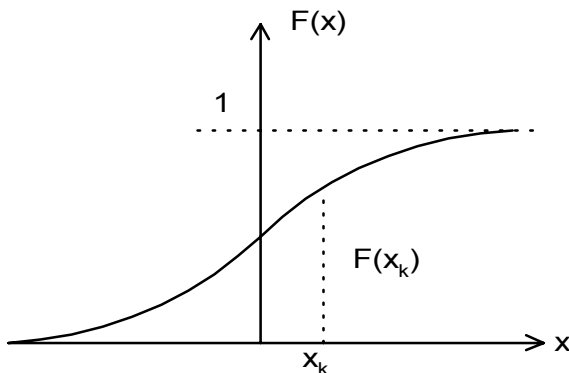
medio de los  $n$  valores obtenidos será: 
$$\overline{x(t_2)} = \frac{x_1(t_2) + x_2(t_2) + x_3(t_2) + \dots + x_n(t_2)}{n}$$

Se define el mecanismo o proceso que ha generado las  $n$  señales como estacionario si se cumple que  $\overline{x(t_1)} = \overline{x(t_2)} = \bar{x}$  = valor medio estadístico del conjunto de señales  $x(t)$ , cualquiera sea  $t_1$  y  $t_2$ .

Tomando el conjunto de los valores muestreados en  $t_1$  por ejemplo, admitiendo el rango de variación de los  $x(t)$  entre  $+\infty$  y  $-\infty$  y que el número de muestras ( $n$ )  $\rightarrow \infty$ , se puede definir una curva a partir de:

(a) Si existen  $k$  muestras que no superan un valor  $x_k$ , se define la cantidad  $(k/n)$  como la probabilidad de que la variable estadística  $x$  no supere el valor  $x_k$ :  $P(x < x_k) = k/n$

(b) Representando  $P(x < x_k)$  para todos los valores posibles de  $x$ , se obtiene una curva  $F(x_k) = P(x < x_k)$  como la de la figura:



$F(x)$  es siempre creciente (pendiente positiva), tiende a 1 cuando  $x \rightarrow +\infty$  (todas las muestras son menores que  $\infty \therefore k=n$ ) y a 0 cuando  $x \rightarrow -\infty$  (todas las muestras son mayores que  $-\infty \therefore k=0$ ).

Se define a  $F(x)$  como la función de probabilidad acumulativa del proceso o mecanismo aleatorio que da origen a las  $n$  señales del ejemplo.

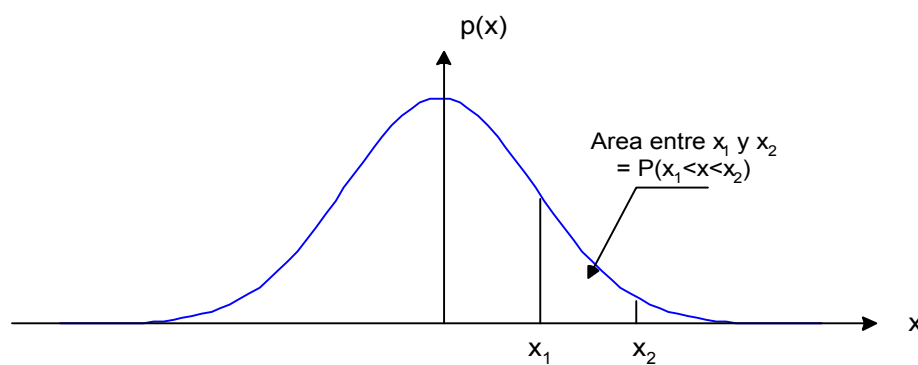
De uso mas común en aplicaciones de ingeniería es la derivada de  $F(x)$ :

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad dF(x) = p(x).dx \quad F(x) = \int_{-\infty}^x p(z).dz$$

De lo anterior, resulta que la probabilidad de que la variable  $x$  sea menor que un cierto valor  $x_k$  es:

$$F(x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} p(x).dx \quad \text{y si } x_k \rightarrow +\infty \quad F(+\infty) = 1, \quad \text{entonces: } \int_{-\infty}^{\infty} p(x).dx = 1$$

La función  $p(x)$  es una densidad de probabilidad (es usual abreviarla pdf = probability density function), el área de  $p(x)$  entre dos valores  $x_1$  y  $x_2$  da la probabilidad de que  $x$  esté entre  $x_1$  y  $x_2$ .



$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x).dx$$

El valor medio estadístico, definido antes, está relacionado con la densidad de probabilidad  $p(x)$  por:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x.p(x).dx \quad (\text{o 1}^{\text{er}} \text{ momento estadístico})$$

Esta relación permite calcularlo sin necesidad de efectuar el experimento de toma de muestras realizado antes.

En general se define el  $n$  momento estadístico como:  $\bar{x}^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n.p(x).dx$

Y, a partir de ellos, dos promedios importantes en el análisis de probabilidades :

Variancia:  $\sigma^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$  y Desviación Standard =  $\sigma$

### 1.5.1.- Procesos ergódicos

Tomando una cualquiera de las señales miembro del experimento de muestreo de 1.2.1, y se mide durante un tiempo  $\tau$  suficientemente largo, sus promedios temporales  $\langle x \rangle$  y  $\langle x^2 \rangle$ :

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t).dt$$

$$\langle x(t)^2 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t)^2 .dt$$

Si el proceso que genera las señales del experimento es, además de estacionario, ergódico, los promedios temporales definidos arriba son iguales a los promedios estadísticos, es decir:

$$\langle x \rangle = \bar{x} \quad \langle x^2 \rangle = \overline{x^2}$$

Si se cumple la condición de ergodicidad, se tiene que para señales de tensión o corriente:

Valor medio estadístico = valor de componente continua

2º momento estadístico = valor cuadrático medio

Desviación standard = valor eficaz

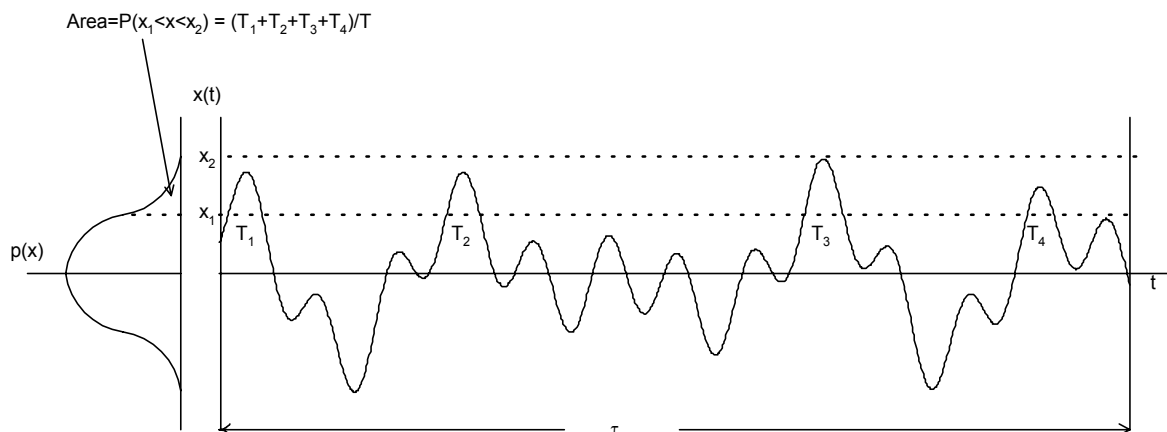
Variación = valor eficaz de componente alterna

### 1.5.2.- Uso de la función de densidad de probabilidad

Si  $x(t)$  es una señal aleatoria, miembro de un conjunto caracterizado por una función de densidad de probabilidad conocida  $p(x)$ , no puede expresarse explícitamente en dominio de tiempo, sin embargo es posible fijar algunas de sus características: por lo indicado en el punto anterior, su componente de continua, su valor eficaz y su potencia. Además de algunas propiedades de su comportamiento en tiempo. Conociendo que el área de  $p(x)$  entre dos valores determinados,  $x_1$  y  $x_2$  por ejemplo, indica la probabilidad de existencia de  $x(t)$  entre esos valores. Pueden hacerse dos interpretaciones:

(1) Si la señal es observada durante un tiempo  $\tau$  suficientemente largo,  $P(x_1 < x < x_2)$  representa la fracción del tiempo  $\tau$  que la señal se encuentra entre los valores  $x_1$  y  $x_2$ .

(2) Si en un instante arbitrario, se toma una muestra de  $x(t)$ , la probabilidad de ocurrencia de que esté entre  $x_1$  y  $x_2$  será igual a  $P(x_1 < x < x_2)$ .



Lo anterior permite determinar criterios prácticos para definir, por ejemplo, el valor de pico de una señal que deba ser transmitida a través de un dispositivo activo con distorsión tolerable. (P.ej, definir como valor de pico aquel valor que no es superado el 90 % del tiempo).

### 1.5.3.- La función de distribución normal o gaussiana

Está definida por: 
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

donde  $\sigma$  y  $x_0$  son la desviación standard y el valor medio, respectivamente, de la variable  $x$ .

La pdf normal es importante en aplicaciones de ingeniería, porque es la que caracteriza a fenómenos aleatorios generados por la acción de un número grande ( $\rightarrow \infty$ ) de agentes con contribuciones infinitesimales de cada uno

de ellos tomados individualmente (Teorema del límite central). Por ejemplo: el movimiento browniano de electrones en el interior de un conductor, que produce el ruido térmico o el fenómeno de propagación por caminos múltiples, causante de desvanecimientos en enlaces de radio.

La probabilidad de que la variable  $x$  supere un determinado valor  $x_k$  es:

$$P(x > x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x_k}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \quad \text{suponiendo } x_0 = 0$$

llamando  $z = u/\sigma$  queda:

$$P(x > x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\left(\frac{x_k}{\sigma}\right)}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = Q\left(\frac{x_k}{\sigma}\right)$$

La función  $Q(x)$  es de uso común en estadística y está tabulada en tablas matemáticas y calculadoras de mano. Otras de uso común son la función error ( $erf$ ) y error complementaria ( $erfc$ ), definidas como:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz \quad erfc(x) = 1 - erf(x)$$

La relación que existe entre  $Q$ ,  $erf$  y  $erfc$  es:  $Q(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

Tabla de la función  $Q(x)$ :

P.ej. :  $Q(2.60) = 4.66 \times 10^{-3}$  ,  $Q(3.74) = 9.2 \times 10^{-5}$  , etc.

	0	1	2	3	4	5	6
0	5,00E-01	1,59E-01	2,28E-02	1,35E-03	3,17E-05	2,87E-07	9,87E-10
0,02	4,92E-01	1,54E-01	2,17E-02	1,26E-03	2,91E-05	2,58E-07	8,72E-10
0,04	4,84E-01	1,49E-01	2,07E-02	1,18E-03	2,67E-05	2,33E-07	7,71E-10
0,06	4,76E-01	1,45E-01	1,97E-02	1,11E-03	2,45E-05	2,10E-07	6,81E-10
0,08	4,68E-01	1,40E-01	1,88E-02	1,04E-03	2,25E-05	1,89E-07	6,01E-10
0,1	4,60E-01	1,36E-01	1,79E-02	9,68E-04	2,07E-05	1,70E-07	5,30E-10
0,12	4,52E-01	1,31E-01	1,70E-02	9,04E-04	1,89E-05	1,53E-07	4,68E-10
0,14	4,44E-01	1,27E-01	1,62E-02	8,45E-04	1,74E-05	1,37E-07	4,13E-10
0,16	4,36E-01	1,23E-01	1,54E-02	7,89E-04	1,59E-05	1,23E-07	3,64E-10
0,18	4,29E-01	1,19E-01	1,46E-02	7,36E-04	1,46E-05	1,11E-07	3,21E-10
0,2	4,21E-01	1,15E-01	1,39E-02	6,87E-04	1,33E-05	9,96E-08	2,82E-10
0,22	4,13E-01	1,11E-01	1,32E-02	6,41E-04	1,22E-05	8,95E-08	2,49E-10
0,24	4,05E-01	1,07E-01	1,25E-02	5,98E-04	1,12E-05	8,03E-08	2,19E-10
0,26	3,97E-01	1,04E-01	1,19E-02	5,57E-04	1,02E-05	7,20E-08	1,92E-10
0,28	3,90E-01	1,00E-01	1,13E-02	5,19E-04	9,34E-06	6,46E-08	1,69E-10
0,3	3,82E-01	9,68E-02	1,07E-02	4,83E-04	8,54E-06	5,79E-08	1,49E-10
0,32	3,74E-01	9,34E-02	1,02E-02	4,50E-04	7,80E-06	5,19E-08	1,31E-10
0,34	3,67E-01	9,01E-02	9,64E-03	4,19E-04	7,12E-06	4,65E-08	1,15E-10
0,36	3,59E-01	8,69E-02	9,14E-03	3,90E-04	6,50E-06	4,16E-08	1,01E-10
0,38	3,52E-01	8,38E-02	8,66E-03	3,62E-04	5,93E-06	3,72E-08	8,85E-11
0,4	3,45E-01	8,08E-02	8,20E-03	3,37E-04	5,41E-06	3,33E-08	7,77E-11
0,42	3,37E-01	7,78E-02	7,76E-03	3,13E-04	4,94E-06	2,98E-08	6,81E-11
0,44	3,30E-01	7,49E-02	7,34E-03	2,91E-04	4,50E-06	2,66E-08	5,97E-11
0,46	3,23E-01	7,21E-02	6,95E-03	2,70E-04	4,10E-06	2,38E-08	5,24E-11
0,48	3,16E-01	6,94E-02	6,57E-03	2,51E-04	3,73E-06	2,13E-08	4,59E-11
0,5	3,09E-01	6,68E-02	6,21E-03	2,33E-04	3,40E-06	1,90E-08	4,02E-11
0,52	3,02E-01	6,43E-02	5,87E-03	2,16E-04	3,09E-06	1,69E-08	3,52E-11
0,54	2,95E-01	6,18E-02	5,54E-03	2,00E-04	2,81E-06	1,51E-08	3,08E-11
0,56	2,88E-01	5,94E-02	5,23E-03	1,85E-04	2,56E-06	1,35E-08	2,69E-11
0,58	2,81E-01	5,71E-02	4,94E-03	1,72E-04	2,32E-06	1,20E-08	2,35E-11
0,6	2,74E-01	5,48E-02	4,66E-03	1,59E-04	2,11E-06	1,07E-08	2,06E-11
0,62	2,68E-01	5,26E-02	4,40E-03	1,47E-04	1,92E-06	9,55E-09	1,80E-11
0,64	2,61E-01	5,05E-02	4,15E-03	1,36E-04	1,74E-06	8,50E-09	1,57E-11
0,66	2,55E-01	4,85E-02	3,91E-03	1,26E-04	1,58E-06	7,57E-09	1,37E-11
0,68	2,48E-01	4,65E-02	3,68E-03	1,17E-04	1,43E-06	6,73E-09	1,19E-11
0,7	2,42E-01	4,46E-02	3,47E-03	1,08E-04	1,30E-06	5,99E-09	1,04E-11
0,72	2,36E-01	4,27E-02	3,26E-03	9,96E-05	1,18E-06	5,33E-09	9,09E-12
0,74	2,30E-01	4,09E-02	3,07E-03	9,20E-05	1,07E-06	4,73E-09	7,92E-12
0,76	2,24E-01	3,92E-02	2,89E-03	8,50E-05	9,68E-07	4,21E-09	6,90E-12
0,78	2,18E-01	3,75E-02	2,72E-03	7,84E-05	8,76E-07	3,74E-09	6,01E-12
0,8	2,12E-01	3,59E-02	2,56E-03	7,23E-05	7,93E-07	3,32E-09	5,23E-12
0,82	2,06E-01	3,44E-02	2,40E-03	6,67E-05	7,18E-07	2,94E-09	4,55E-12
0,84	2,00E-01	3,29E-02	2,26E-03	6,15E-05	6,49E-07	2,61E-09	3,96E-12
0,86	1,95E-01	3,14E-02	2,12E-03	5,67E-05	5,87E-07	2,31E-09	3,44E-12
0,88	1,89E-01	3,01E-02	1,99E-03	5,22E-05	5,30E-07	2,05E-09	2,99E-12
0,9	1,84E-01	2,87E-02	1,87E-03	4,81E-05	4,79E-07	1,82E-09	2,60E-12
0,92	1,79E-01	2,74E-02	1,75E-03	4,43E-05	4,33E-07	1,61E-09	2,26E-12
0,94	1,74E-01	2,62E-02	1,64E-03	4,07E-05	3,91E-07	1,43E-09	1,96E-12
0,96	1,69E-01	2,50E-02	1,54E-03	3,75E-05	3,52E-07	1,26E-09	1,70E-12
0,98	1,64E-01	2,39E-02	1,44E-03	3,45E-05	3,18E-07	1,12E-09	1,48E-12



para  $x > 7$ ,  $Q(x)$  puede aproximarse por :  $Q(x) \approx \frac{1}{(\sqrt{2\pi}) \cdot x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

## 2.- Señales eléctricas en dominio de frecuencia

Una forma alternativa de representar las propiedades de una señal eléctrica es en dominio de frecuencia. La herramienta matemática que vincula los dominios de tiempo y frecuencia es la transformada de Fourier. Si para una señal  $x(t)$ , las integrales existen (como ocurre para toda señal  $x(t)$  físicamente posible), se define el par de Transformada de Fourier según:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j\omega t} df$$

$$\text{donde } \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$X(f)$  es la representación de  $x(t)$  en dominio de frecuencia, es el “espectro de frecuencias” o simplemente “espectro” de  $x(t)$ .

Simbólicamente, se indica la relación de transformación como:  $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ , que debe leerse como “La transformación de  $x(t)$  es  $X(f)$ ”. El par  $x(t)$  y  $X(f)$  es biunívoco (a un  $x(t)$  corresponde un  $X(f)$  y viceversa). El símbolo  $\Leftrightarrow$  indica transformación).  $X(f)$ , es normalmente una función compleja en dominio de frecuencia.

$$X(f) = \text{Re } X(f) + j \text{Im } X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \text{sen}(\omega t) dt$$

Analizando la expresión de arriba puede deducirse que, suponiendo a  $x(t)$  real :

si  $x(t)$  es una función par,  $\text{Im}[X(f)] = 0$  y  $X(f)$  es real

si  $x(t)$  es una función impar,  $\text{Re}[X(f)] = 0$  y  $X(f)$  es imaginario

$\text{Re } X(f) = \text{Re } X(-f)$ , la parte real de  $X(f)$  es de simetría par

$\text{Im } X(f) = -\text{Im } X(-f)$ , la parte imaginaria de  $X(f)$  es de simetría impar

También puede ponerse:  $X(f) = |X(f)| \cdot e^{j\Phi(f)}$ , donde:

$$|X(f)| = \sqrt{(\text{Re } X(f))^2 + (\text{Im } X(f))^2}$$

$$\Phi(f) = \arctan \frac{\text{Im } X(f)}{\text{Re } X(f)}$$

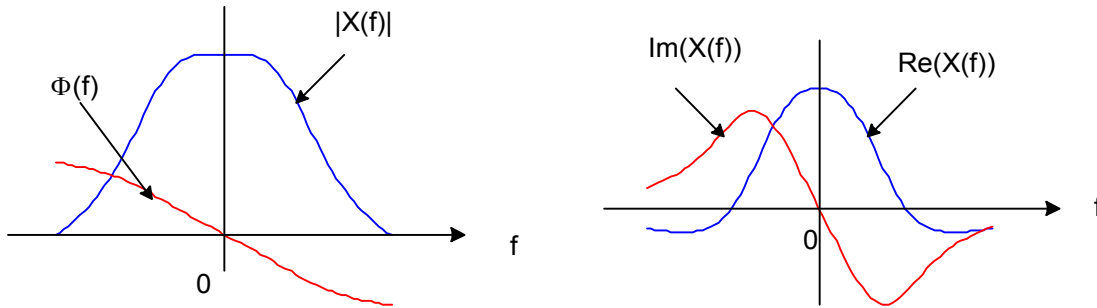
$|X(f)|$  es función par y  $\Phi(f)$  (espectro de fase) función impar.

Notar además que, para  $x(t)$  real :

$$X(-f) = X^*(f) \quad (X(f) \text{ es función Hermítica})$$

$$x(0) = \text{área de } X(f)$$

$$X(0) = \text{área de } x(t)$$



Si  $x(t)$  es una tensión o corriente, la dimensión de  $X(f)$  será  $[volt.seg]$  o  $[amp.seg]$  que equivale a  $[volt/Hz]$  o  $[amp/Hz]$ , es decir que  $X(f)$  es un espectro de densidad de tensión o corriente.

Se demuestra (Teorema de Parseval) que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 .dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 .df$$

La dimensión de  $|X(f)|^2$  es  $[V^2.seg^2]$  o  $[V^2.seg/Hz]$  lo que indica que  $|X(f)|^2$  es un espectro proporcional a la densidad de energía de  $x(t)$ . Si la señal  $x(t)$  existe durante un intervalo  $\tau$  [seg] y su espectro tiene componentes significativas en un ancho de banda  $W$  [Hz], la aplicación del T. de Parseval indica que el valor cuadrático

medio de  $x(t)$  está relacionado con  $X(f)$  según:  $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} |x(t)|^2 .dt = \int_W \frac{|X(f)|^2}{\tau} .df = \int_W V(f)^2 .df$

Donde  $V(f)^2 = \frac{|X(f)|^2}{\tau}$ , de dimensión  $[V_{rms}^2.seg]$  o  $[V_{rms}^2/Hz]$ , representa un espectro proporcional a la densidad de potencia media durante el lapso  $\tau$  de  $x(t)$  o de densidad de (valor eficaz)<sup>2</sup>. En el caso de que  $x(t)$  sea una tensión desarrollada sobre una resistencia  $R$  [ohm],  $\frac{|X(f)|^2}{R}$  será un espectro de densidad de energía

(dimensión  $Watt.seg/Hz$ ) y  $\frac{V(f)^2}{R} = \frac{|X(f)|^2}{R\tau}$  de densidad de potencia (dimensión  $Watt/Hz$ ). En algunas aplicaciones, se especifica la raíz cuadrada del espectro  $V(f)^2$ , resultando un espectro de densidad de tensión eficaz (dimensión  $Volt_{rms} / \sqrt{Hz}$ ). El conocimiento de la distribución espectral de energía/potencia es fundamental para dimensionar el ancho de banda necesario que un sistema de transmisión debe tener para transmitir la señal  $x(t)$ .

De lo anterior surge (equivalente a lo dicho en 1.4):

- Si  $x(t)$  es transitoria,  $|X(f)|^2$  es de área finita y  $V(f)^2$  tiende a 0
- Si  $x(t)$  es un señal permanente, el área de  $|X(f)|^2$  tiende a infinito y  $V(f)^2$  es de área acotada.

Se debe notar que si bien existe una relación biunívoca entre  $x(t)$  y  $X(f)$ , no existe tal correspondencia entre  $x(t)$  y su espectro de densidad de potencia/energía  $G(f) = |X(f)|^2$ , en otras palabras, varias señales diferentes  $x_k(t)$  pueden compartir un mismo  $V(f)^2$  o  $|X(f)|$ .

## 2.1.- Teoremas relacionados con la Transformada de Fourier

Definidas las transformaciones:  $x(t) \Leftrightarrow X(f)$      $y(t) \Leftrightarrow Y(f)$

2.1.1.- Desplazamiento en tiempo:  $x(t - t_0) \Leftrightarrow X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$

2.1.2.- Desplazamiento en frecuencia:  $x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f - f_0)$ .

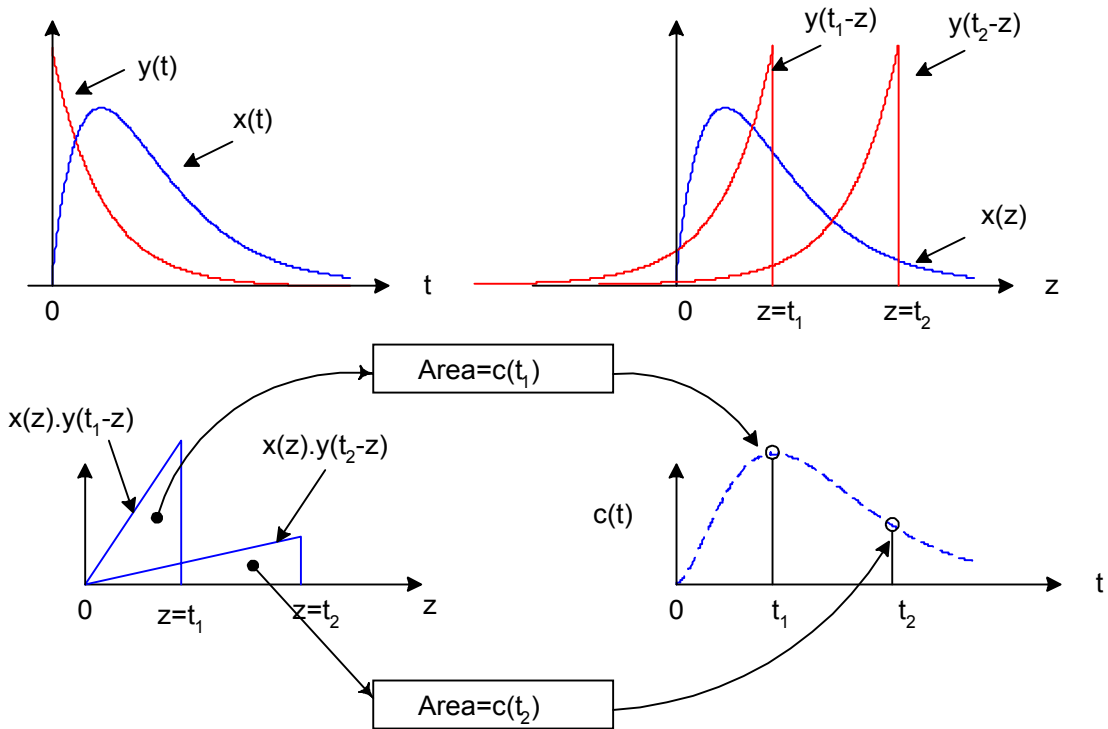
2.1.3.- Diferenciación e integración: 
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow j2\pi f \cdot X(f) \\ \int_{-\infty}^t x(t) \cdot dt \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} \cdot X(f) + \frac{1}{2} \cdot X(0) \delta(f) \end{array} \right.$$

2.1.4.- Convolución: 
$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) \cdot y(t) \Leftrightarrow X(f) * Y(f) \\ x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(f) \cdot Y(f) \end{array} \right.$$

Donde el producto de convolución (\*) está definido por:  $c(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(z) \cdot y(t - z) \cdot dz$

Interpretación gráfica del producto de convolución:

Dadas dos funciones  $x(t)$  e  $y(t)$ , se muestra el producto de convolución  $x(t) * y(t)$  para dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ :



2.1.5.- Linealidad:  $a \cdot x(t) + b \cdot y(t) = a \cdot X(f) + b \cdot Y(f)$

2.1.6.- Cambio de escala:  $x(a \cdot t) \Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$

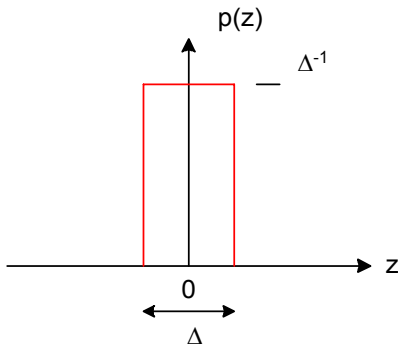
2.1.7.- Simetría: 
$$\left\{ \begin{array}{l} X(f) \Leftrightarrow x(-t) \\ X(-f) \Leftrightarrow x(t) \end{array} \right.$$

2.2.- Delta de Dirac

Función ideal definida por:

$$\begin{cases} \delta(z)=0, & \text{para } z \neq 0 \\ \delta(z)=\infty, & \text{para } z = 0 \\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(z).dz = 1, & \text{para cualquier } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Una función generadora simple y útil en muchas aplicaciones del Delta de Dirac, es un pulso rectangular de amplitud  $\frac{1}{\Delta}$ , ancho  $\Delta$  y centrado en 0:



Se ve que  $\delta(z) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} p(z)$

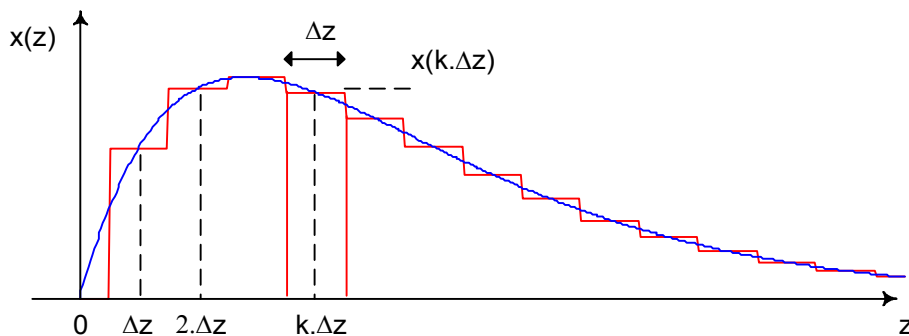
Propiedades del delta de Dirac de utilidad en el análisis de señales:

2.2.1.- Muestreo:  $\int_{-\infty}^{\infty} x(z).\delta(z - z_0).dz = x(z_0)$

2.2.2.- Desplazamiento:  $x(z) * \delta(z - z_0) = x(z - z_0)$

2.2.3.- Representación discreta de señales continuas

Es evidente que una señal continua  $x(z)$  puede aproximarse tomando una serie de valores (muestras) de  $x(z)$  a intervalos  $\Delta z$  y manteniéndolos durante ese lapso :



También es evidente que la aproximación será mejor cuando  $\Delta z \rightarrow 0$

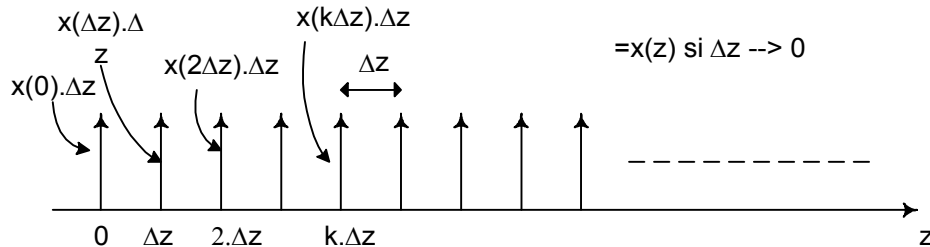
La versión muestreada de  $x(z)$  puede ponerse como:  $x_m(z) \approx \sum_k x(k.\Delta z).p(z - k.\Delta z)$ , donde  $p(z)$  es un pulso

amplitud constante =1, duración  $\Delta z$  y centrado en  $z=0$ . Multiplicando el segundo miembro de  $x_m(z)$  por  $\frac{\Delta z}{\Delta z}$

queda:  $x_m(z) = \sum_k x(k.\Delta z) \cdot p(z - k.\Delta z) \cdot \frac{\Delta z}{\Delta z} = \sum_k x(k.\Delta z) \cdot \frac{p(z - k.\Delta z)}{\Delta z} \cdot \Delta z$ , cuando  $\Delta z \rightarrow 0$ ,

$$\frac{p(z - k.\Delta z)}{\Delta z} \rightarrow \delta(z - k.\Delta z) \text{ y la expresión para } x_m(z): \quad x_m(z) = x(z) = \sum_k [x(k.\Delta z) \cdot \Delta z] \delta(z - k.\Delta z)$$

(Se podría haber llegado al mismo resultado utilizando la propiedad de desplazamiento del impulso para el caso particular que  $z_0 = 0$ :  $x(z) = x(z) * \delta(z)$  y realizando el producto de convolución en forma discreta).



2.2.4.- Transformada de Fourier de un delta de Dirac en tiempo:

$$X_\delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (\text{aplicando T. de muestreo})$$

2.2.5.- Transformada de Fourier de un delta de Dirac en frecuencia:

$$x_\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) \cdot e^{-j\omega t} df = 1 \quad (\text{aplicando T. de muestreo})$$

### 2.3.- Espectro de funciones usuales

#### 2.3.1.- Función signo (señal permanente)

Si  $x(t) = \text{sgn}(t)$ , entonces  $x(t) = 1$  para  $t > 0$ ,  $x(t) = -1$  para  $t < 0$  y  $x(t) = 0$  para  $t = 0$

La función signo no tiene formalmente T. de Fourier, puede definirse una por medio de un proceso límite:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} (e^{-a.t}) \quad , \text{ para } t > 0$$

$$\text{sgn}(t) = 0 \quad , \text{ para } t = 0$$

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} (-e^{a.t}) \quad , \text{ para } t < 0$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) \cdot e^{-j2\pi f.t} .dt = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ -\int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot e^{-j2\pi f.t} .dt + \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi f.t} .dt \right] = \frac{1}{j\pi f}$$

#### 2.3.2.- Escalón unitario (señal permanente)

Si  $x(t) = u(t)$ , entonces  $x(t) = 1$  para  $t > 0$ ,  $x(t) = 0.5$  para  $t = 0$  y  $x(t) = 0$  para  $t < 0$

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \text{sgn}(t) \quad \text{y, utilizando el resultado de (2.3.1):} \quad X(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

#### 2.3.3.- Pulso rectangular

El pulso rectangular, abreviado  $rect(t, \tau)$ , está definido por un valor unitario durante  $-\tau/2$  y  $\tau/2$  y 0 para el resto del tiempo:

$$rect(t, \tau) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right), \text{ su transformada de Fourier es :}$$

$$X(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi ft} dt = \tau \cdot \frac{sen(\pi \cdot f \cdot \tau)}{\pi \cdot f \cdot \tau} = \tau \cdot sinc(f \cdot \tau)$$

donde la función  $sinc(x)$  se define como  $sen(\pi \cdot x)/\pi \cdot x$

Propiedad útil de la función  $sinc$ : 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(\pi x)}{(\pi x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{sen(\pi x)}{(\pi x)}\right)^2 dx = 1$$

Utilizando las funciones definidas se ve que función ideal  $\delta(t)$  puede aproximarse también por:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot rect(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot sinc\left(\frac{t}{\Delta t}\right)$$

### 2.3.4.- Pulso triangular

La Transformada de Fourier de un pulso triangular de amplitud unitaria y  $2\tau$  seg. de duración, simétrico respecto a 0 es:

$$X(f) = \int_{-\tau}^0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt$$

$$X(f) = \tau \cdot \left(\frac{sen(\pi \cdot f \cdot \tau)}{\pi \cdot f \cdot \tau}\right)^2$$

### 2.3.5.- Pulso coseno elevado

El pulso coseno elevado, de amplitud unitaria y  $2\tau$  seg. de duración, simétrico respecto de 0, está definido por:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{\tau}\right)\right) \cdot rect(t, 2\tau)$$

Su transformada es :

$$X(f) = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{\tau}\right)\right) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt = \frac{\tau}{1 - 4 \cdot f^2 \cdot \tau^2} \cdot \frac{sen(2\pi \cdot f \cdot \tau)}{2\pi \cdot f \cdot \tau}$$

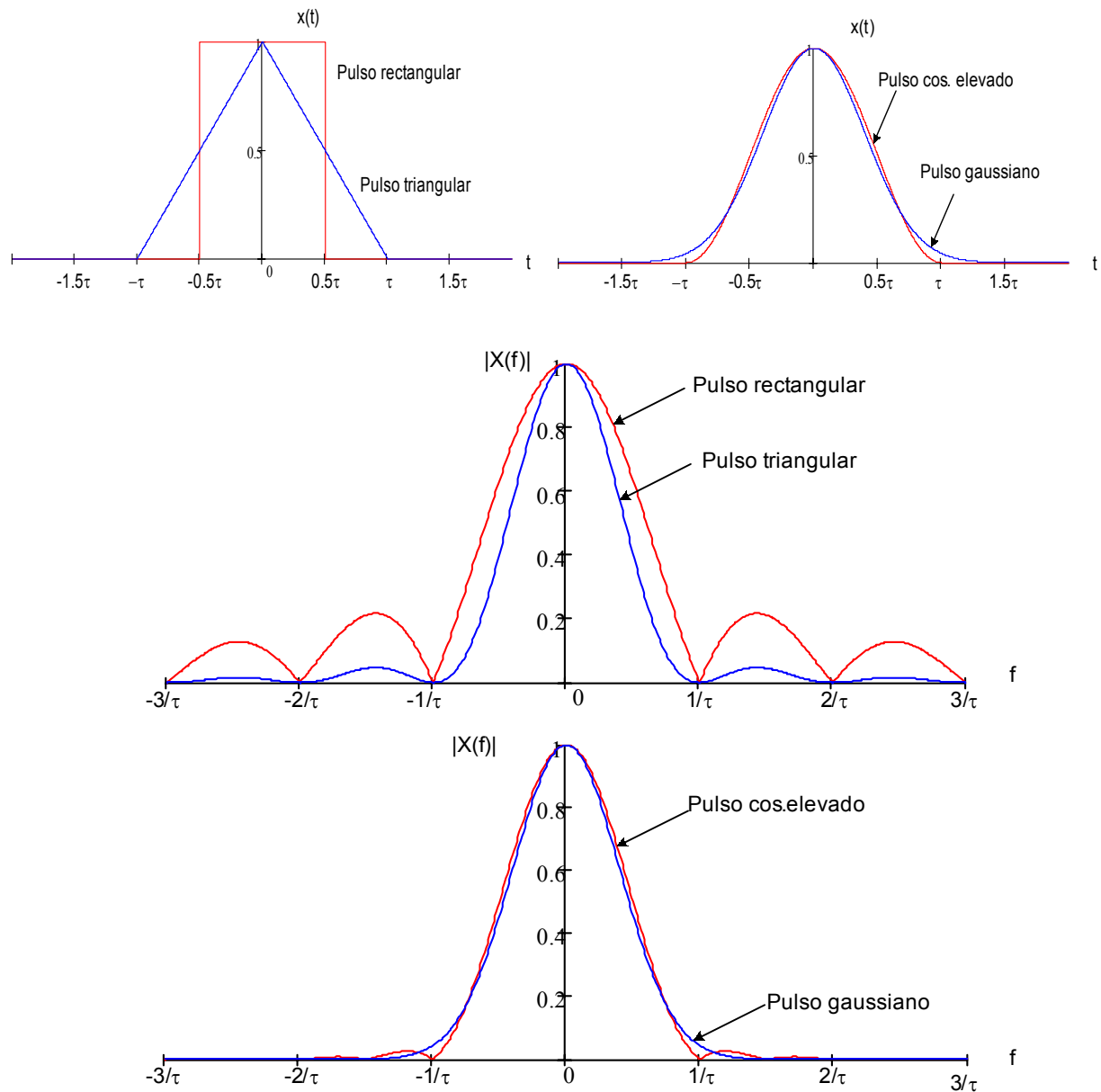
### 2.3.6.- Pulso Gaussiano

Pulso con forma de campana de Gauss:  $x(t) = e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$ , con  $\tau > 0$ .

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt = \sqrt{\pi} \cdot \tau \cdot e^{-(\pi \cdot f \cdot \tau)^2}, \text{ El espectro de frecuencias también tiene forma Gaussiana.}$$

Analizando las expresiones de  $X(f)$  obtenidas para las señales 2.3.1 a 2.3.6, se comprueba el resultado conocido sobre comportamiento espectral de señales eléctricas, que dice que si el pulso (o señal) presenta discontinuidad en la derivada  $m$ , el módulo de su espectro de frecuencias disminuye a frecuencias altas en forma inversamente proporcional a  $f^{(m+1)}$ . O, en términos cualitativos, señales con pendientes abruptas en tiempo, tienden a ocupar anchos de banda mayores..

Formas de onda y espectros de los cuatro pulsos analizados (Notar que los tres pulsos tienen igual área):



2.4.- Espectro de señales periódicas

El caso mas simple de funciones periódicas son las trigonométricas seno y coseno, para ellas, la T. de Fourier es casi directa. Aplicando el teorema de desplazamiento en frecuencia:

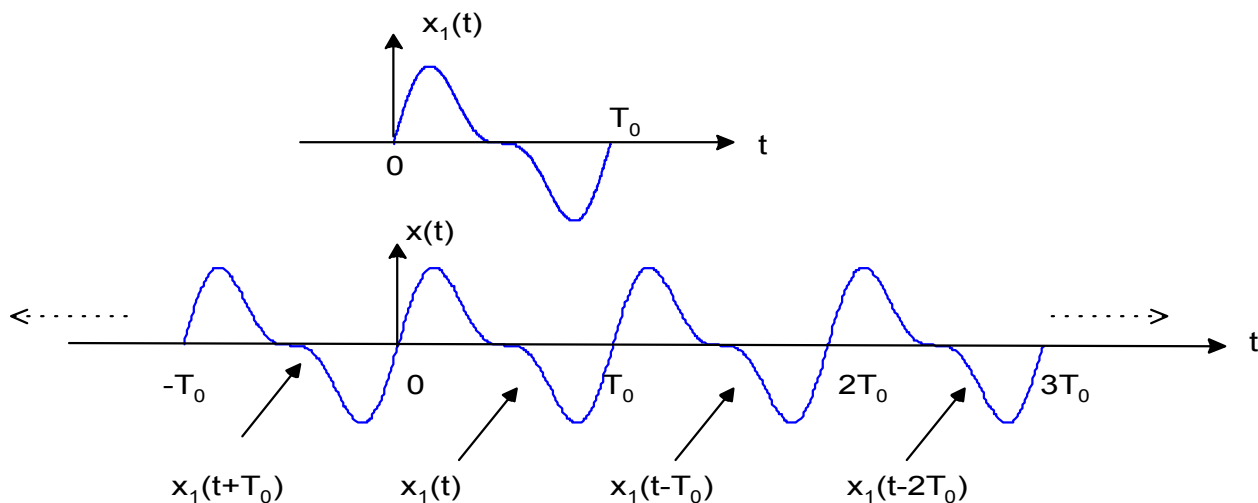
$$x(t) = \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) = \frac{1}{2} e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} + \frac{1}{2} e^{-j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f + f_0)$$

$$y(t) = \text{sen}(2\pi \cdot f_0 \cdot t) = \frac{1}{j \cdot 2} e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} - \frac{1}{j \cdot 2} e^{-j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} \Leftrightarrow \frac{1}{j \cdot 2} \cdot \delta(f - f_0) - \frac{1}{j \cdot 2} \cdot \delta(f + f_0)$$

$$z(t) = \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi) = \frac{1}{2} e^{j(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi)} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi)} \Leftrightarrow \frac{e^{j\phi}}{2} \cdot \delta(f - f_0) + \frac{e^{-j\phi}}{2} \cdot \delta(f + f_0)$$

En general, una función periódica puede escribirse como:  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - nT_0)$ , donde  $T_0$  es el período

fundamental y  $x_1(t)$  es una función transitoria de duración  $T_0$  que representa un ciclo de  $x(t)$  con  $T_0$ . de Fourier  $X_1(f)$ .



La inversa del período  $T_0$  es la frecuencia fundamental de  $x(t)$ :  $f_0=1/T_0$ . Aplicando el teorema de desplazamiento en tiempo, puede definirse la transformada  $X(f)$  en función de  $X_1(f)$  según:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - nT_0) = x_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \Leftrightarrow X_1(f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j.2\pi.f.n.T_0}$$

como  $\sum_{-N}^N e^{-j.2\pi.n.f.T_0} = \frac{\text{sen}(\pi.f.T_0.(2.N+1))}{\text{sen}(\pi.f.T_0)}$ , cuando  $N \rightarrow \infty$ , es posible demostrar que :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j.2\pi.f.n.T_0} = \frac{1}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

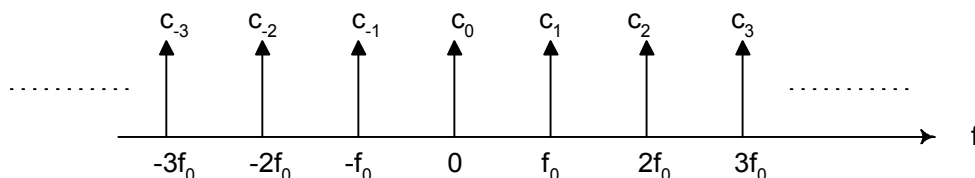
Queda entonces :

$$X(f) = X_1(f) \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{X_1(nf_0)}{T_0}\right) \delta(f - nf_0)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \delta(f - nf_0)$$

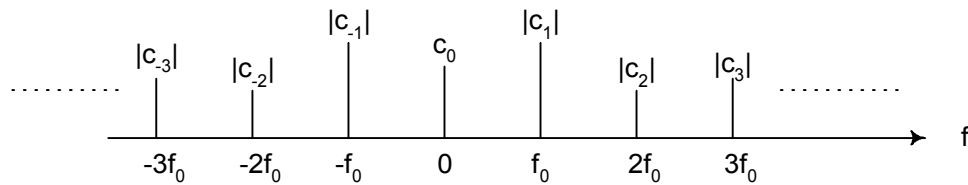
donde se ha definido  $f_0$  y  $c_n$  como :  $f_0 = \frac{1}{T_0}$  y  $c_n = \frac{X_1(nf_0)}{T_0} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_a^{a+T_0} x_1(t) \cdot e^{-j2\pi nf_0 t} \cdot dt$

Espectro de una señal periódica:



Es usual representar a cada impulso con altura proporcional al módulo de su área. No confundir con el espectro de líneas, en el que se representa las componentes como líneas cuya altura es proporcional a los  $|c_n|$  :





En general,  $c_n$  es un número complejo que comparte las características enunciadas al principio para  $X(f)$ : Si  $x_1(t)$  es función par,  $c_n$  es real. Si  $x_1(t)$  es impar,  $c_n$  es imaginario y siempre  $c_{-n} = c_n^*$ . Notar que la dimensión de  $c_n$  es la misma que la de  $x(t)$ .

Si existe  $X(f)$ , se puede determinar  $x(t)$  en términos de los coeficientes  $c_n$  y  $f_0$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \delta(f - nf_0) \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot \delta(f - nf_0) \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt$$

Aplicando el teorema de muestreo a la integral del último término:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j2\pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \cdot e^{j(2\pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t + \phi_n)} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot |c_n| \cdot \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n)$$

Que son algunas de las formas habituales de representar señales periódicas por medio de los coeficientes de Fourier.

El valor cuadrático medio de la señal  $x(t)$  es:  $\langle x(t)^2 \rangle = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

Como el espectro de  $x(t)$  existe en múltiplos de  $f_0$ , es físicamente razonable definir el espectro de densidad de potencia de  $x(t)$  como:

$$G(f) = \frac{1}{R} \cdot |X(f)|^2 = \frac{1}{R} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \cdot \delta(f - n \cdot f_0) \quad \text{donde se supone que } x(t) \text{ es una tensión}$$

aplicada sobre una resistencia  $R$  [ohm]. La igualdad entre los dos últimos términos de la ecuación de arriba debe tomarse como simbólica, pues no es matemáticamente correcta (el cuadrado de la función  $\delta$  no está definido (sería un impulso de área infinita), se ha tomado que  $|A \cdot \delta(t)|^2 = |A|^2 \cdot \delta(t)$  para que la integral entre  $\pm\infty$  de  $G(f)$  sea igual al valor cuadrático medio de  $x(t)$ .

Un caso particular de señal periódica, de utilidad en algunas aplicaciones, es el tren de impulsos de Dirac (función *comb*). Se tiene que :

$$x_1(t) = \delta(t) \quad , \quad X_1(f) = 1 \quad \therefore \quad c_n = \frac{1}{T_0} \cdot X_1(n \cdot f_0) = \frac{1}{T_0}$$

$$X(f) = \frac{1}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n \cdot f_0)$$

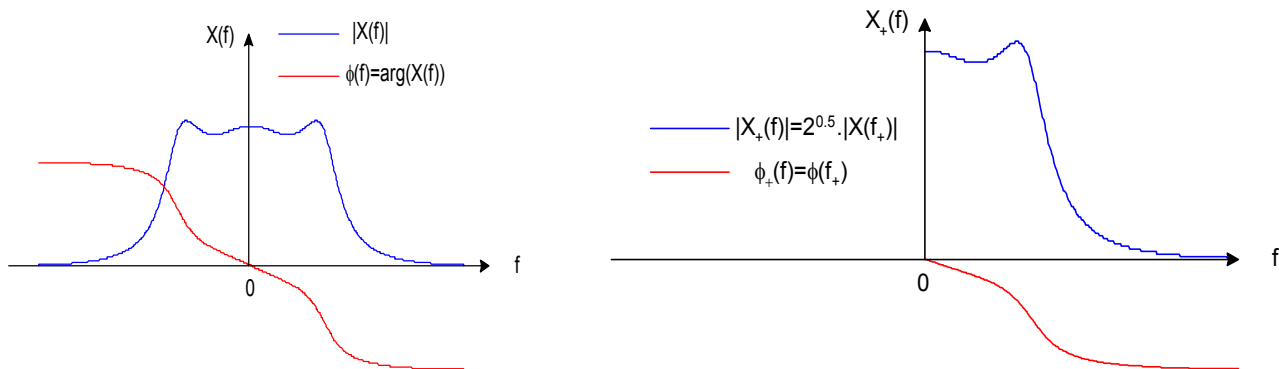
La Transformada de Fourier de un tren periódico de impulsos en tiempo de área 1 y período  $T_0$ , es también un tren periódico de impulsos en frecuencia, de área y período  $\frac{1}{T_0}$ .

En general, cualquier señal realizable puede expresarse como  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j2\pi \cdot f_n \cdot t}$  con una elección adecuada de los  $c_n$  y  $f_n$ . Las señales periódicas son un caso particular en que los  $f_n$  están relacionados armónicamente. En la expresión general, para que  $x(t)$  sea real, debe cumplirse que:  $f_n = f_{-n}$  y  $c_n = c_{-n}^*$ , en tal caso:

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot |c_n| \cos(2\pi \cdot f_n \cdot t + \phi_n)$$

A efectos prácticos, la expresión de arriba permite simular con buena precisión cualquier señal, determinística o aleatoria realizable físicamente.

El espectro de dos lados de una señal es utilizado en cálculos matemáticos, la representación usual mediante instrumentos de medición (anализador de espectros) es únicamente del lado de frecuencias positivas. En éste caso tiene significado físico, la representación de módulo-fase de  $X(f)$ :



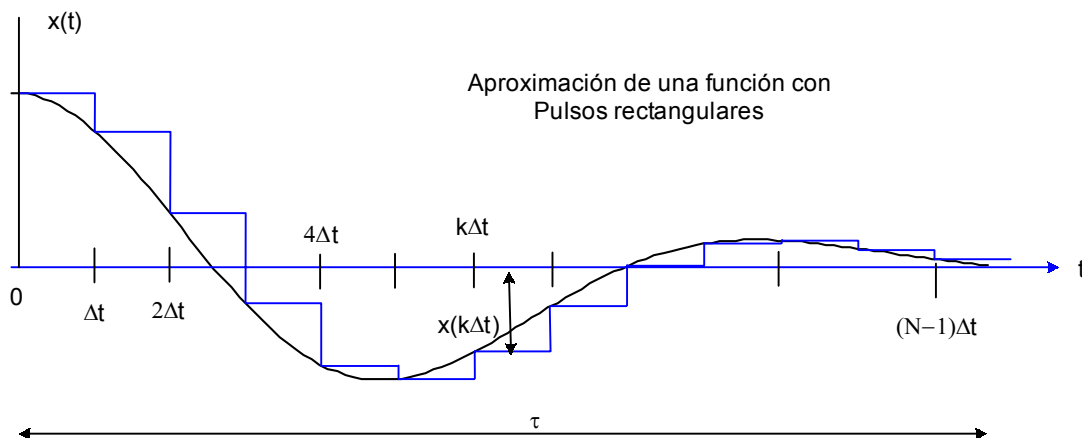
## 2.5.- La Transformada de Fourier discreta (DFT)

La Transformada de Fourier de una determinada señal, puede calcularse a pesar de no conocerse su expresión matemática  $x(t)$ , si se dispone de un número adecuado de muestras de la señal a lo largo del tiempo. Suponer una señal  $x(t)$  que existe durante un lapso de  $T$  seg. y es 0 para el resto del tiempo. Si se toman  $N$  muestras de la señal a intervalos razonablemente cortos, p. ej. a  $t = 0, 1\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, k\Delta t, \dots, (N-1)\Delta t$  y se mantiene después de cada muestra el valor  $x(k\Delta t)$  durante  $\Delta t$  seg. puede aproximarse la integral para calcular  $X(f)$  según:

$$X(f) = \int_T x(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} x(k \cdot \Delta t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot k \cdot \Delta t} \cdot \Delta t = X_d(f)$$

Si  $\Delta t$  es suficientemente pequeño

entonces  $X_d(f) = X(f)$



$\Delta t = \frac{\tau}{N}$ , suponiendo intervalo uniforme entre muestras. La expresión para  $X(f)$  queda:

$$X_d(f) = \frac{\tau}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot k \cdot \frac{\tau}{N}} \quad \text{donde } x_k = x(k \cdot \Delta t)$$

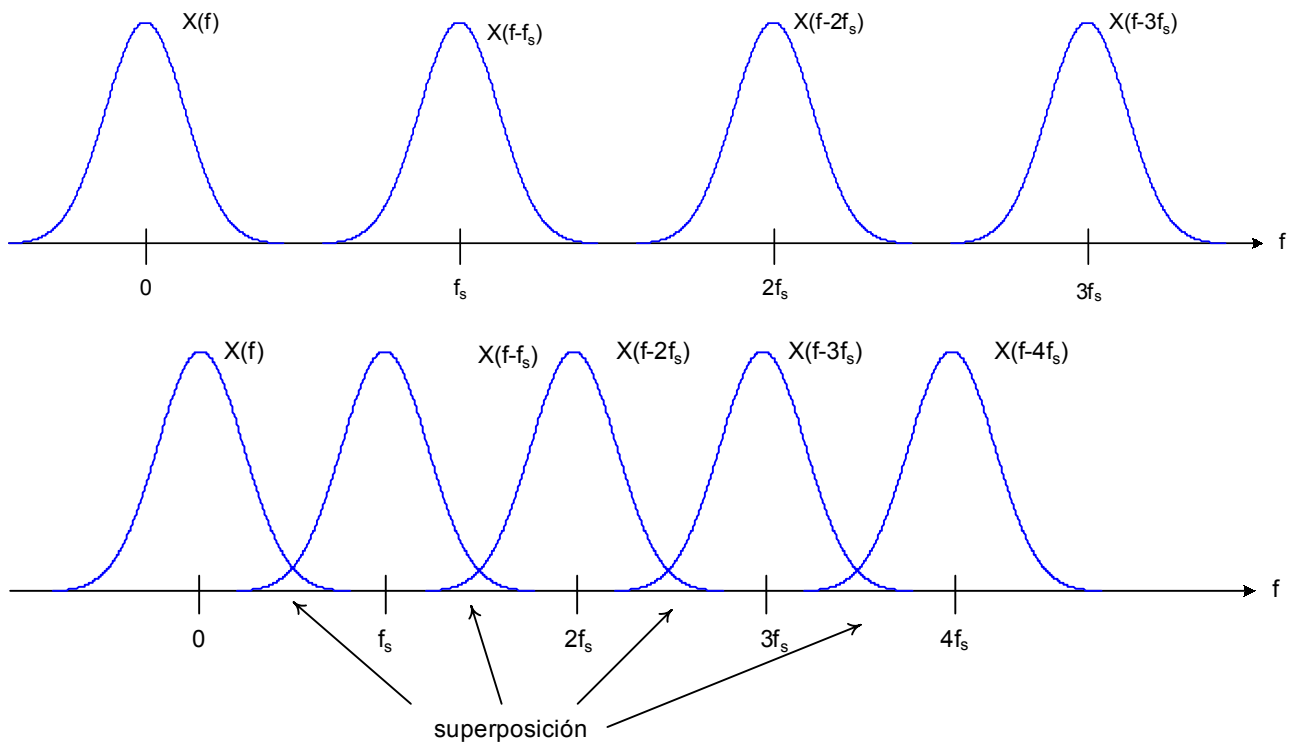
llamando  $f_0 = \frac{1}{\tau}$ , queda: 
$$X_d(f) = \frac{1}{N \cdot f_0} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot f}{f_0} \cdot k}$$

El espectro de la transformada discreta  $X_d(f)$  es continuo, y analizando la ecuación de arriba, se ve que:

$$X_d(f + N \cdot f_0) = \frac{1}{N \cdot f_0} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot (f + N \cdot f_0)}{f_0} \cdot k} = \frac{1}{N \cdot f_0} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot f}{f_0} \cdot k} \cdot e^{-j2\pi \cdot k} = X_d(f)$$

como  $k$  es siempre un número entero, el término  $e^{-j2\pi k}$  es igual a 1 por lo que resulta que  $X_d(f)$  es periódica en  $f$  y su período vale  $N \cdot f_0$ :  $N \cdot f_0 = \frac{N}{\tau} = \frac{1}{\Delta t} = f_s$  donde  $f_s$  es la frecuencia a que se toman las muestras de  $x(t)$  (frecuencia de muestreo).

El espectro de  $X_d(f)$  es el de  $X(f)$  repetido a múltiplos de  $f_s$  ("aliasing"). Es evidente que, una mala elección de  $f_s$  puede introducir errores en el cálculo por efecto del traslapamiento de espectros.



A los efectos del cálculo de la DFT, se debe utilizar la frecuencia de muestreo mas alta posible, como guía aproximada, debe ser mayor que 5...20 veces del ancho de banda (significativo) esperable de  $x(t)$ . En el límite, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $f_s \rightarrow \infty$ , se tendrá la solución exacta  $X_d(f) = X(f)$ .

Existen algoritmos de cálculo que aceleran el procesamiento de la suma (FFT, Fast Fourier Transform), y normalmente, calculan  $X_d(f)$  en múltiplos de  $f_0$  :

$$X_d(nf_0) = \frac{1}{N \cdot f_0} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k} = X_n$$

resultando un espectro discreto con puntos (líneas) en múltiplos de  $f_0$  (En la terminología de la DFT o FFT,  $f_0$  determina la resolución del espectro o el espacio entre líneas). Si la señal analizada fuera periódica, la toma de muestra debería hacerse durante un período ( $T=\tau$ ) y los coeficientes de la serie de Fourier resultante serían:

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot X_d(nf_0) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k}$$

La variable  $f$  no aparece explícitamente en las funciones de  $X_n$  o  $c_n$  sino que está implícita en el orden  $n$  de la armónica de  $f_0$ .

Los paquetes de software que realizan la FFT, tienen las siguientes características: (a) el número de muestras es una potencia de 2 ( $N=256, 1024, 65536$ , etc.) y (b) La resolución del espectro es  $1/\tau$  y la máxima armónica calculada es  $n_{max}=N/2$ , lo que da un ancho de espectro  $F_{max} = N \cdot f_0/2 = f_s/2$ .

## 2.6.- Señales aleatorias en dominio de frecuencia

Las señales aleatorias se definen en dominio de frecuencia por medio de su espectro de densidad de potencia (o energía). Es posible calcular (aproximadamente) la T. de F. de una función miembro mediante la DFT. Lo que es común a todas las funciones miembro del conjunto es su espectro de densidad de potencia. Con señales determinísticas, existe una relación bi-unívoca entre  $x(t)$  y  $X(f)$ , esto no ocurre con señales aleatorias. Una señal  $x(t)$  puede tener su espectro de densidad de potencia  $G(f)$ , pero éste puede corresponder también a otras señales  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , etc. Notar que lo mismo sucede para señales determinísticas, al perder  $G(f)$  la información de fase de  $X(f)$ . Lo anterior sugiere que  $G(f)$  caracteriza, en dominio de frecuencia, a un conjunto de señales y no a una en particular. Esta particularidad es extrapolable a los promedios estadísticos.

Si  $x(t)$  es una señal aleatoria cuyo espectro de densidad de potencia es  $G(f)$ , puede demostrarse que:

$G(f) \Leftrightarrow R(z)$ , donde  $R(z)$  es la función de autocorrelación definida por:  $R(z) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_{\tau} x(t) \cdot x(t-z) \cdot dt$ , con

$\tau \rightarrow \infty$  o suficientemente grande respecto a las variaciones de  $x(t)$ . En el caso de señales periódicas, es suficiente tomar  $\tau$  igual al período fundamental de la señal. Notar que: (a)  $R(z)$  es una función par:  $R(-z) = R(z)$  y (b) según sea su definición,  $R(0)$  representa (es proporcional) la potencia o energía de  $x(t)$ .

Demostración de que  $G(f) \Leftrightarrow R(z)$ :

$R(z) = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} x(t) \cdot x(t+z) \cdot dt = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} x(t) \cdot \left( \int X(f) e^{j2\pi f(t+z)} df \right) dt$ , para señales realizables físicamente, es válido intercambiar  $X(f)$  y  $x(t)$  lo que lleva a:

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{\tau} \int_{\tau} X(f) \cdot \left( \int x(t) e^{j2\pi f(t+z)} dt \right) df \int = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} X(f) \left( \int x(t) e^{j2\pi f t} dt \right) e^{j2\pi f z} df \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{\tau} X(f) \cdot X(-f) \cdot e^{j2\pi f z} df = \int \frac{|X(f)|^2}{\tau} e^{j2\pi f z} df = \int G(f) \cdot e^{j2\pi f z} df \end{aligned}$$

En el caso de señales transitorias, la función de autorrelación está definida como  $R(z) = \int_{\tau} x(t) \cdot x(t-z) \cdot dt$  y su

T. de Fourier es el espectro de densidad de energía de  $x(t)$ .

En aplicaciones técnicas, es usual representar el la raíz cuadrada de  $G(f)$  como un espectro de densidad de valor eficaz en un ancho de banda  $B$ . Considerando que la potencia de una señal de tensión (o corriente multiplicando

$V(f)$  por  $R$ ) sobre  $R$  ohm vale:  $P = \frac{1}{R} \int_B V(f)^2 df = \int_B G(f) df$ , resulta que  $V(f) = \sqrt{R \cdot G(f)}$ , función real,

par y de dimensión  $\left[ \frac{\text{Volt}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right]$  o  $\left[ \frac{\text{Amp}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right]$  que puede representar, lo mismo que  $G(f)$ , a un conjunto infinito de señales.

Notar que (para señales de buen comportamiento)  $V(f) = \frac{|X(f)|}{\sqrt{\tau}}$ , donde  $X(f)$  es la T. de Fourier de la señal y  $\tau$  el tiempo de observación. Además, que únicamente el cuadrado de  $V(f)$  tiene significado físico.

### 3.- Señales de banda angosta

Se considera una señal como de “banda angosta” si los valores significativos de su espectro existen en un intervalo de frecuencias (ancho de banda ocupado) mucho menor (menor que 10 ... 15%) de la frecuencia central.

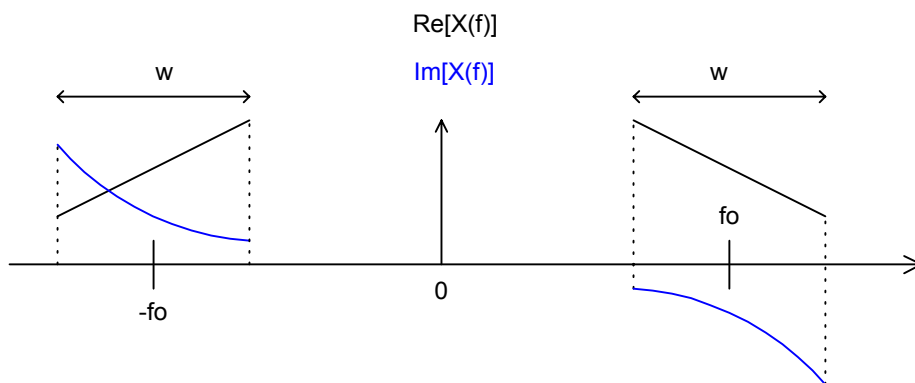
Si  $x(t)$  es una función real de banda angosta (puede ser una señal que transporte información o simplemente ruido), centrada en una frecuencia  $f_0$  y con ancho de banda  $W$ , su transformada  $X(f)$  debe ser una función Hermítica ( $X(-f) = X^*(f)$ ) y tiene que cumplirse que  $Re[X(f)]$  es una función par y que  $Im[X(f)]$  es impar. Su espectro puede escribirse como:

$$X(f) = X_1(f - f_0) + X_2(f + f_0)$$

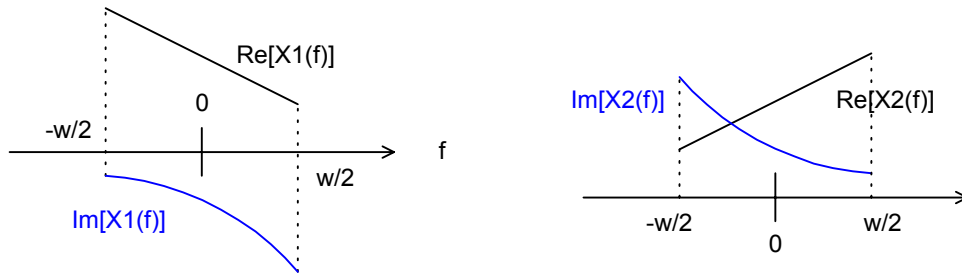
donde  $X_1(f)$  y  $X_2(f)$  son espectros de banda de base, centrados en  $f=0$  y ancho de banda  $\pm W/2$   
Aplicando el teorema de desplazamiento en frecuencia (2.2):

$$X(f) = X_1(f) * \delta(f - f_0) + X_2(f) * \delta(f + f_0) \Leftrightarrow x_1(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} + x_2(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

Suponiendo un espectro cualquiera para  $X(f)$  que cumpla las condiciones necesarias para  $x(t)$  real:



Espectros de  $X_1(f)$  y  $X_2(f)$ :



Por la simetría de los espectros en banda de base, las transformadas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , en general, serán funciones complejas y se ve que:

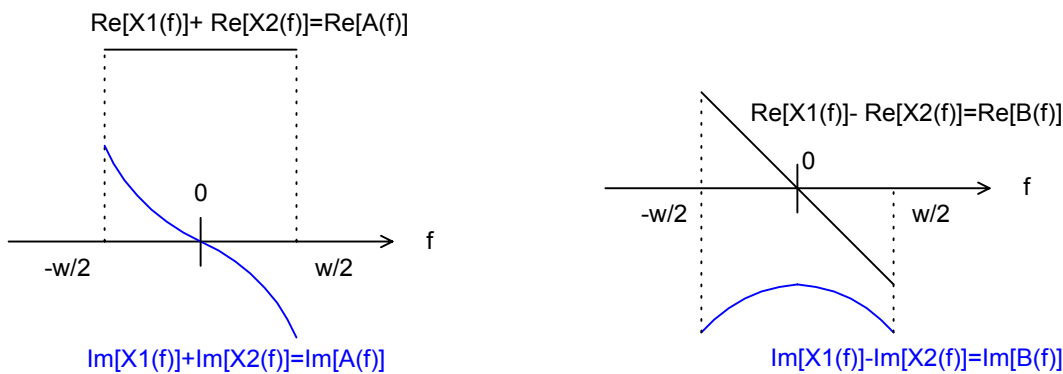
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[X_2(f)] &= \operatorname{Re}[X_1(-f)] \\ \operatorname{Im}[X_2(f)] &= -\operatorname{Im}[X_1(-f)] \quad \therefore X_2(f) = X_1^*(-f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{1\text{real}}(t) + j \cdot x_{1\text{imag}}(t) \\ x_2(t) &= x_1^*(t) = x_{1\text{real}}(t) - j \cdot x_{1\text{imag}}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} + x_2(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} = (x_1(t) + x_2(t)) \cdot \cos 2\pi f_0 t + j \cdot (x_1(t) - x_2(t)) \cdot \sin 2\pi f_0 t \\ x(t) &= 2 \cdot x_{1\text{real}}(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t - 2 \cdot x_{1\text{imag}}(t) \cdot \sin 2\pi f_0 t = a(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t - b(t) \cdot \sin 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

donde  $a(t)$  y  $b(t)$  son señales reales de banda de base y sus espectros  $A(f)$  y  $B(f)$  centrados en 0 y de  $\pm \left(\frac{W}{2}\right)$  Hz de ancho de banda:  $a(t) = 2 \cdot x_{1\text{real}}(t)$  y  $b(t) = 2 \cdot x_{1\text{imag}}(t)$

Espectros  $A(f)$  y  $B(f)$ :



El valor cuadrático medio de  $x(t)$ , en términos de sus componentes de banda de base es:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \langle (a(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + b(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t))^2 \rangle = \\ &= \langle a(t)^2 \cdot \cos^2(2\pi f_0 t) + b(t)^2 \cdot \sin^2(2\pi f_0 t) + 2 \cdot a(t) \cdot b(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \langle a^2 \rangle + \frac{1}{2} \cdot \langle b^2 \rangle \end{aligned}$$

Una forma alternativa y usual de representar a  $x(t)$  y que surge de las ecuaciones de arriba es :

$$x(t) = \operatorname{Re} \left[ r(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \right] = |r(t)| \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi(t))$$

donde:

$$r(t) = \left( \sqrt{a(t)^2 + b(t)^2} \right) \cdot e^{j\phi(t)} \quad y \quad \phi(t) = \arctan \frac{b(t)}{a(t)}$$

Un modelo determinístico útil para algunas aplicaciones es una suma (grande) de componentes armónicas de frecuencias y fases aleatorias como:

$$x(t) = \sum_{n=1}^N 2 \cdot |c_n| \cdot \cos(2\pi \cdot f_n \cdot t + \phi_n)$$

donde las frecuencias componentes  $f_n$ , con coeficientes  $c_n$  diferentes de 0 están distribuidas entre  $f_{max}$  y  $f_{min}$ . Definiendo  $f_0 = (f_{max} + f_{min})/2$  y  $f_{bn} = (f_n - f_0)$ , la ecuación anterior puede ponerse como:

$$x(t) = \sum_{n=1}^N 2 \cdot |c_n| \cdot \cos(2\pi \cdot (f_{bn} + f_0) \cdot t + \phi_n) = \sum_{n=1}^N 2 \cdot |c_n| \cdot \cos[(2\pi \cdot f_{bn} \cdot t + \phi_n) + 2\pi \cdot f_0 \cdot t]$$

$$x(t) = \left[ \sum_{n=1}^N 2 \cdot |c_n| \cdot \cos(2\pi \cdot f_{bn} \cdot t + \phi_n) \right] \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) - \left[ \sum_{n=1}^N 2 \cdot |c_n| \cdot \operatorname{sen}(2\pi \cdot f_{bn} \cdot t + \phi_n) \right] \cdot \operatorname{sen}(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$$x(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) - b(t) \cdot \operatorname{sen}(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$$

$$\text{donde:} \quad a(t) = \sum_{n=1}^N 2 \cdot |c_n| \cdot \cos(2\pi \cdot f_{bn} \cdot t + \phi_n)$$

$$b(t) = \sum_{n=1}^N 2 \cdot |c_n| \cdot \operatorname{sen}(2\pi \cdot f_{bn} \cdot t + \phi_n)$$

El ancho de banda ocupado por  $x(t)$  es  $W = f_{max} - f_{min}$  Hz<sup>+</sup> (es decir considerando frecuencias positivas únicamente) y centrado en  $f_0$ , mientras que  $a(t)$  y  $b(t)$  son señales de baja frecuencia (banda de base), con espectro ubicado entre 0 y  $W/2$  Hz<sup>+</sup>. De las ecuaciones de arriba, se ve que si en  $x(t)$ ,  $a(t)$  y  $b(t)$  no existen componentes armónicas de exactamente la misma frecuencia, la potencia de  $x(t)$  es :

$$\langle x(t)^2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot \langle a(t)^2 \rangle + \frac{1}{2} \cdot \langle b(t)^2 \rangle,$$

$$\text{y que, además:} \quad \langle x(t)^2 \rangle = \sum_{n=1}^N 2 \cdot |c_n|^2 = \langle a(t)^2 \rangle = \langle b(t)^2 \rangle$$