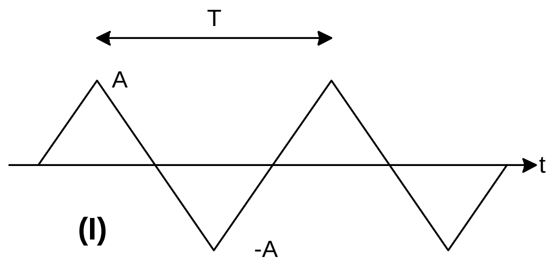
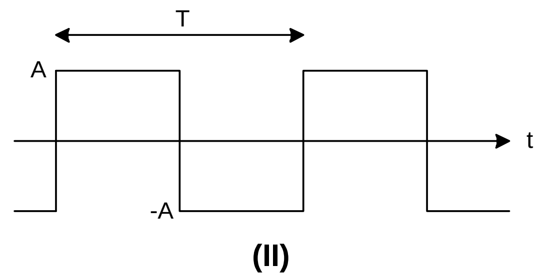
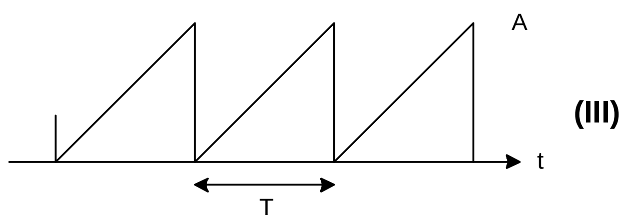
Señales Eléctricas-Ejercicios

Tema: Señales en dominio de tiempo, señales aleatorias, promedios estadísticos

Problema 1.- Calcular los valores medio, eficaz y eficaz de alterna de las formas de onda periódicas de la figura





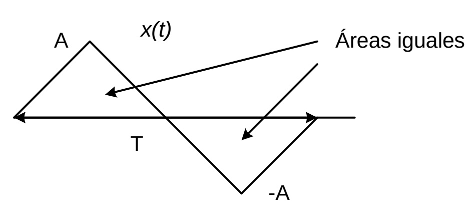


(I) La función es periódica, entonces:

$$x_{med} = \langle x \rangle = \frac{1}{T}.\int_T x(t).dt = \frac{1}{T}.\left(\text{área de 1 período de } x(t)\right) \quad ,$$

$$x_{ef} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}.\int_T x(t)^2.dt} = \sqrt{\frac{1}{T}.\left(\text{área de 1 período de } x(t)^2\right)}$$

$$\text{y} \quad x_{ef\_ac} = \sqrt{x_{ef}^{\ 2} - x_{med}^{\ 2}}$$



Por simetría de la forma de onda, se ve que: y:

$$x_{med} = 0$$

$$x_{ef} = \sqrt{\frac{2}{T}.\int_0^{T/2} A^2.\left(1 - \frac{4}{T}t\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{T}.\frac{A^2 T}{6}} = \frac{A}{\sqrt{3}} \qquad \text{y} \quad x_{ef\_ac} = x_{ef} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

(II).- Función periódica, igual que en (I) : $x_{med} = 0$, $x_{ef} = x_{xef\_ac} = A$

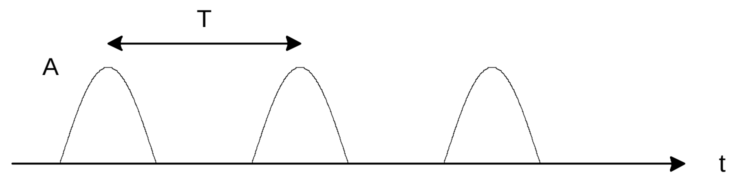
(III).- Función periódica:

$$x_{med} = \frac{1}{T}.\frac{AT}{2} = \frac{A}{2} \qquad , \qquad x_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}.\int_0^T \left(\frac{A.t}{T}\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}.\frac{A^2T}{3}} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

$$x_{ef\_ac} = \sqrt{\frac{A^2}{3} - \frac{A^2}{4}} = \frac{A}{\sqrt{12}}$$

Problema 2.-.- Calcular los valores medio, eficaz y eficaz de alterna de las formas de las señales que se indican:

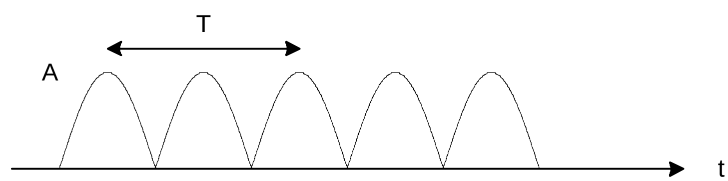
a) Onda senoidal rectificada 1/2 onda.



$$\frac{1}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(2\cdot\frac{\pi}{T}\cdot t\right) dt \to \frac{1}{\pi}\cdot A \qquad \frac{1}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} A^2\cdot\left(sin\left(2\cdot\frac{\pi}{T}\cdot t\right)\right)^2 dt \to \frac{1}{4}\cdot A^2$$

$$\langle x(t)\rangle = \frac{A}{\pi} \qquad x_{ef} = \sqrt{\langle x(t)^2\rangle} = \frac{A}{2} \qquad x_{ef\_AC} = \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2}} = 0.386A$$

b) Onda senoidal rectificada en onda completa.



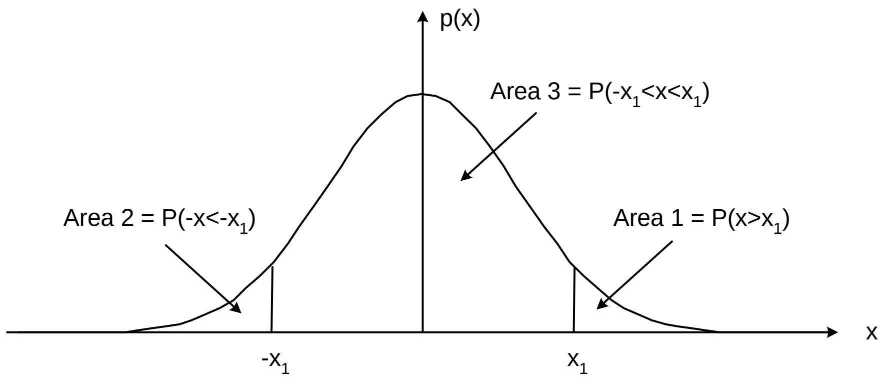
$$\frac{2}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} A\cdot sin\left(2\cdot\frac{\pi}{T}\cdot t\right) dt \to \frac{2}{\pi}\cdot A \qquad \frac{2}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} A^2\cdot\left(sin\left(2\cdot\frac{\pi}{T}\cdot t\right)\right)^2 dt \to \frac{1}{2}\cdot A^2$$

$$\langle x(t)\rangle = \frac{2A}{\pi} \qquad x_{ef} = \sqrt{\langle x(t)^2\rangle} = \frac{A}{\sqrt{2}} \qquad x_{ef\_AC} = \sqrt{\frac{A^2}{2} - \frac{4A^2}{\pi^2}} = 0.308A$$

Problema 3.- Se mide, con instrumentos adecuados, que el valor eficaz de una señal aleatoria, estacionaria y ergódica, es de 50 µV y su valor medio 0 V. Si se sabe que su función densidad de probabilidad es Gaussiana y se la observa durante un período de tiempo suficientemente largo, entre que límites (simétricos respecto a 0 V) de tensión estima Ud. que estará la señal durante el 99% del tiempo y (b) Idem que antes, pero durante 99,99% del tiempo.

$$P(x<|x_1|)=P(-x_1<x<x_1)=1-\left(Area1\right)-\left(Area\,2\right)=\left(Area\,3\right)$$

$Area1=Area\,2=Q\left(x_1\right)$, donde $x_1=\dfrac{V_1}{\sigma}$



(a) $P(-x_1<x<x_1)=0,99=1-2Q(x_1)\quad\therefore\; Q(x_1)=\dfrac{1-0,99}{2}=5.10^{-3}$

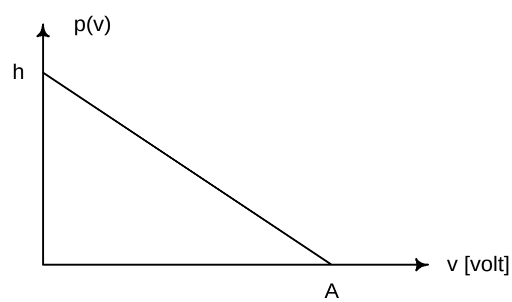
De la tabla o gráfico de Q(x) resulta que:

$x_1\approx 2,58\qquad\therefore\qquad V_1=2,58\sigma=2,58.V_{rms}=2,58.50=129\,\mu V$

(b) $P(-x_1<x<x_1)=0,9999=1-2Q(x_1)\quad\therefore\; Q(x_1)=\dfrac{1-0,9999}{2}=5.10^{-5}$

$x_1\approx 2,58\qquad\therefore\qquad V_1=3,89\sigma=3,89.V_{rms}=3,89.50=195\,\mu V$

Problema 4.- La función densidad de probabilidad de una señal aleatoria estacionaria y ergódica es la de la figura, (a) Calcular el valor de *h* , (b) La tensión que se mediría con un voltímetro de CC si *A=5* volt y (c) El porcentaje de tiempo que la señal estará por encima y por debajo del valor de CC.



a) $p(x)=h-\dfrac{h}{A}.x$ para *x* entre 0 y A, *p(x)=0* fuera del rango

$$Area\,de\;p(x)=1=\int_0^A\left(h-\frac{h}{A}.x\right)dx=\frac{A.h}{2}\quad\therefore\quad h=\frac{2}{A}\quad \text{y}\quad p(x)=\frac{2}{A}.\left(1-\frac{x}{A}\right)$$ (para x entre 0 y A)

b) $\overline{x}=\int_{-\infty}^{\infty}x.p(x).dx=\int_0^A\frac{2x}{A}.\left(1-\frac{x}{A}\right).dx=A.\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{A}{3}$ = 1,67 volt

c) $P\left(x>\frac{A}{3}\right)=\int_{\frac{A}{3}}^{A}p(x).dx=\int_{\frac{A}{3}}^{A}\left(\frac{2}{A}.\left(1-\frac{x}{A}\right)\right).dx=\frac{4}{9}=0,44$

$$P\left(x<\frac{A}{3}\right)=1-P\left(x<\frac{A}{3}\right)=1-0,44=0,56$$

44% del tiempo la señal estará por encima de su valor medio y 56% por debajo.

Problema 5.- Calcular el valor eficaz de una señal de banda angosta definda por:
$e(t)=a(t).\cos\left(2\pi f_0 t\right)$, donde *a(t)* es una señal permanente y ancho de banda mucho menor que f_0

$$\left\langle e^2\right\rangle=\frac{1}{\tau}.\int_\tau e(t)^2\,dt=\frac{1}{\tau}.\int_\tau a(t)^2.\cos^2\left(2\pi f_0 t\right)dt=\frac{1}{\tau}.\int_\tau a(t)^2.\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(4\pi f_0 t\right)\right)dt=$$

$=\frac{1}{\tau}.\int_\tau a(t)^2.\frac{1}{2}dt+\frac{1}{\tau}.\int_\tau\cos\left(4\pi f_0 t\right)dt$, El segundo término será 0 si τ es suficientemente grande

Queda: $\left\langle e^2\right\rangle=\frac{1}{2}.\frac{1}{\tau}.\int_\tau a(t)^2\,dt=\frac{\left\langle a^2\right\rangle}{2}$ y $e_{RMS}=\frac{1}{\sqrt{2}}.a_{RMS}$

Tema: Transformada de Fourier, espectros de frecuencia

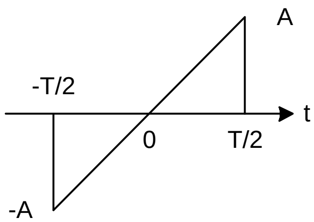
Problema 1.- Dados los pulsos que se describen abajo, determinar las siguientes características de sus espectros en dominio de frecuencia :

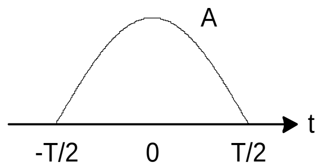
- Valor de X(0)
- Características matemáticas del espectro (real, imaginario o complejo)

a) $x(t) = \frac{2.A}{T}.t$ cuando $\frac{-T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$, $x(t) = 0$ para cualquier otro t

b) $x(t) = A.\cos(\pi.\frac{t}{T})$ cuando $\frac{-T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$, $x(t) = 0$ para cualquier otro t

Gráficos de los pulsos:





Pulso (a) : Area = 0 $\therefore\ X(0)=0$, Función impar $\therefore\ X(f)= j.\mathrm{Im}\left(X(f)\right)$, Función discontinua $\therefore\ \left|X(f)\right|_{f\to alta} \to \frac{k}{f}$

Pulso (b): Area = $2\frac{AT}{\pi}$ $\therefore\ X(0)=\frac{2AT}{\pi}$, Función par $\therefore\ X(f)=\mathrm{Re}\left(X(f)\right)$, Función continua y su primera derivada discontinua $\therefore\ \left|X(f)\right|_{f\to alta} \to \frac{k}{f^2}$

Problema 2.- Comprobar los resultados obtenidos en el problema anterior, calculando el espectro de frecuencia para cada uno de los pulsos.

Se utiliza MathCad

a)

$$x(t) := \frac{2A}{T}\cdot x$$

$$X(f) := \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cdot exp(-2i\cdot\pi\cdot f\cdot t)\, dt \ \Bigg|\begin{matrix} complex \\ simplify \end{matrix} \to i\cdot A\cdot\frac{\left(-sin(f\cdot\pi\cdot T) + cos(f\cdot\pi\cdot T)\cdot f\cdot\pi\cdot T\right)}{\pi^2\cdot f^2\cdot T}$$

$$\lim_{f\to 0} X(f) \to 0$$

b)

$$x(t) := A\cdot cos\left(\pi\cdot\frac{t}{T}\right)$$

$$X(f) := \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cdot exp(-2\mathrm{i}\cdot\pi\cdot f\cdot t)\, dt \text{ simplify } \rightarrow \frac{-2}{\pi}\cdot T\cdot\frac{cos(f\cdot\pi\cdot T)}{\left(4\cdot f^{2}\cdot T^{2}-1\right)}\cdot A$$

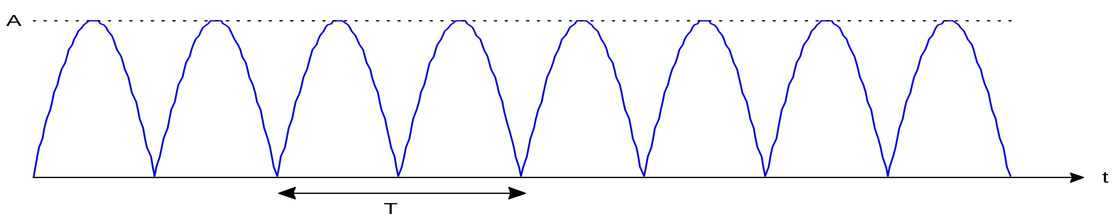
$$X(0) \rightarrow \frac{2}{\pi}\cdot T\cdot A$$

Problema 3.- Calcular la Transformada de Fourier de una señal definida por $x(t)=A.\cos(2\pi f_0 t+\phi)$.

$$x(t)=A.\cos(2\pi f_0 t+\phi)=\frac{A}{2}.e^{j(2\pi f_0 t+\phi)}+\frac{A}{2}.e^{-j(2\pi f_0 t+\phi)}=\frac{A.e^{j\phi}}{2}.e^{j2\pi f_0 t}+\frac{A.e^{-j\phi}}{2}.e^{-j2\pi f_0 t}$$

$X(f)=\frac{A.e^{j\phi}}{2}.\delta(f-f_0)+\frac{A.e^{-j\phi}}{2}.\delta(f+f_0)$ El área de los impulsos es compleja, $\frac{A.e^{j\phi}}{2}$ en $f = f_0$ y $\frac{A.e^{-j\phi}}{2}$ en $f = -f_0$

Problema 4.- Determinar el espectro de frecuencias de una señal senoidal rectificada en onda completa:



C

alcular los valores de amplitud de: (a) componente continua, (b) 1ª y 2ª armónica.

$$x(t) := A\cdot cos\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t}{T}\right)$$

$$c(n) := \frac{2}{T}\cdot\int_{\frac{-T}{4}}^{\frac{T}{4}} x(t)\cdot exp\left(-2\mathrm{i}\pi\cdot\frac{2n}{T}\cdot t\right) dt \text{ simplify } \rightarrow \frac{-2}{\pi}\cdot\frac{cos(\pi\cdot n)}{\left(4\cdot n^{2}-1\right)}\cdot A$$

$$c(0) \rightarrow 2\cdot\frac{A}{\pi} \qquad c(1) \rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{A}{\pi} \qquad c(2) \rightarrow \frac{-2}{15}\cdot\frac{A}{\pi}$$

Problema 5.- Calcular la Transformada de Fourier y el espectro de densidad de potencia de *e(t)* cuando:

(a) $e(t) = A.cos(2.\pi.f_1t + \phi_1) + B.sen(2.\pi.f_2t + \phi_2)$
(b) $e(t) = A.cos(2.\pi.f_1t + \phi_1) + B.cos(2.\pi.f_2t + \phi_2)$

(a)

$$e(t)=\frac{A}{2}.e^{j(2\pi f_1 t+\Phi_1)}+\frac{A}{2}.e^{-j(2\pi f_1 t+\Phi_1)}+\frac{B}{j2}.e^{j(2\pi f_2 t+\Phi_2)}-\frac{B}{j2}.e^{-j(2\pi f_2 t+\Phi_2)}$$

$$=\left(\frac{A}{2}.e^{j\Phi_1}\right)e^{j2\pi f_1 t}+\left(\frac{A}{2}.e^{-j\Phi_1}\right)e^{-j2\pi f_1 t}+\left(\frac{B}{j2}.e^{j\Phi_2}\right)e^{j2\pi f_2 t}-\left(\frac{B}{j2}.e^{-j\Phi_2}\right)e^{-j2\pi f_2 t}$$

Aplicando el teorema de traslación en frecuencia:

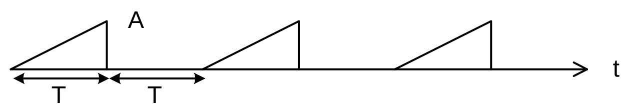
$$E(f)=\left(\frac{A}{2}.e^{j\Phi_1}\right)\delta(f-f_1)+\left(\frac{A}{2}.e^{-j\Phi_1}\right)\delta(f+f_1)+\left(\frac{B}{j2}.e^{j\Phi 2}\right)\delta(f-f_2)-\left(\frac{B}{j2}.e^{-j\Phi_2}\right)\delta(f+f_2)$$

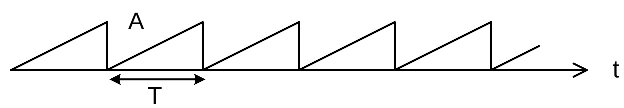
El espectro de densidad de potencia será:

$$G(f)=\frac{A^2}{4}\delta(f\pm f_1)+\frac{B^2}{4}\delta(f\pm f_2)$$

(b)
El problema (b) es similar, cambiará *E(f)*, pero no *G(f)*.

Problema 6.- Calcular el módulo de los coeficientes de Fourier c_n de las señales periódicas de la figura y la amplitud de la 10ª y 11ª armónica en ambos casos:





(a) La señal periódica es una rampa entre *0* y *T* de pendiente *A/T*, el período fundamental es *2T*:

$x_1(t)=\frac{A}{T}.t$ entre 0 y T, y $x_1(t)=0$ entre T y 2T . La T. de Fourier de un período será:

$$X_1(f)=\frac{A}{T}\int_0^T t.e^{-j2\pi ft}dt=\frac{A}{T(2\pi f)^2}\left[\left(1+j2\pi fT\right)e^{-j2\pi fT}-1\right]$$

Los coeficientes de la señal periódica serán:

$$c_n = \frac{1}{2T}.X_1\left(\frac{n}{2T}\right) = \frac{A}{2(\pi n)^2}\left[(1+j\pi n)e^{-j\pi n} - 1\right]$$

Si n es par: $c_n = \frac{jA}{2\pi n}$ mientras que, si n es impar: $c_n = \frac{-A(1+jn\pi)}{2(\pi n)^2}$

Los coeficientes 10 y 11 valen: $|c_{10}| = 0.016A$ $|c_{11}| = 0.014A$ y la amplitud de las armónicas 10 y 11 serán: $A_{10} = 0.032A$ $A_{11} = 0.028A$

Usando MathCad:

$$x(t) := \frac{A}{T}\cdot t$$

$$c(n) := \frac{1}{2T}\cdot\int_0^T x(t)\cdot exp\left(-2i\cdot\pi\cdot\frac{n}{2T}\cdot t\right) dt \;\; simplify \;\; \rightarrow \frac{1}{2}\cdot i\cdot\frac{(exp(-i\cdot\pi\cdot n)\cdot n\cdot\pi\cdot A - i\cdot A\cdot exp(-i\cdot\pi\cdot n) + i\cdot A)}{\pi^2\cdot n^2}$$

$$c(10) \;\; simplify \;\; \rightarrow \frac{1}{20}\cdot i\cdot\frac{A}{\pi} \qquad c(11) \;\; simplify \;\; \rightarrow \frac{-1}{242}\cdot i\cdot A\cdot\frac{(11\cdot\pi - 2\cdot i)}{\pi^2}$$

(b) La señal periódica es una rampa entre *0* y *T* de pendiente *A/T*, el período fundamental es *T*:

$x_1(t) = \frac{A}{T}.t$ entre 0 y T, . La T. de Fourier de un período será :

$$X_1(f) = \frac{A}{T}\int_0^T t.e^{-j2\pi ft}dt = \frac{A}{T(2\pi f)^2}\left[(1+j2\pi fT)e^{-j2\pi fT} - 1\right]$$

En éste caso, los coeficientes de la señal periódica serán:

$$c_n = \frac{1}{T}.X_1\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{A}{(2\pi n)^2}\left[(1+j2\pi n)e^{-j2\pi n} - 1\right] = \frac{jA}{2\pi n}$$

Los coeficientes 10 y 11 valen: $|c_{10}| = 0.016A$ $|c_{11}| = 0.014A$ y la amplitud de las armónicas 10 y 11 serán: $A_{10} = 0.032A$ $A_{11} = 0.028A$

(Igual que en (a).)

MathCad:

$$x(t) := \frac{A}{T}\cdot t$$

$$c(n) := \frac{1}{T}\cdot\int_0^T x(t)\cdot exp\left(-2i\cdot\pi\cdot\frac{n}{T}\cdot t\right) dt \ simplify \ \rightarrow \frac{1}{4}\cdot i\cdot\frac{\left(2\cdot exp(-2\cdot i\cdot\pi\cdot n)\cdot n\cdot\pi\cdot A - i\cdot A\cdot exp(-2\cdot i\cdot\pi\cdot n) + i\cdot A\right)}{\pi^2\cdot n^2}$$

$$c(10) \ simplify \ \rightarrow \frac{1}{20}\cdot i\cdot\frac{A}{\pi} \qquad c(11) \ simplify \ \rightarrow \frac{1}{22}\cdot i\cdot\frac{A}{\pi}$$

Problema 7.- Dado un pulso rectangular de amplitud A [volt] y duración T [seg] $x(t) = A.rect\left(t,T\right)$, calcular el porcentaje de la energía total del pulso contenida entre *±1/T [Hz]*.

Como la transformada de F. del pulso es: $X(f) = A.T.\frac{sen(\pi.f.T)}{\pi.f.T}$,su espectro de densidad de energía será: $\left|X(f)\right|^2 = \left(A.T.\frac{sen(\pi.f.T)}{\pi.f.T}\right)^2 \quad \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$

Energía entre $\pm\frac{1}{T}$: $E_1 = \int_{\frac{-1}{T}}^{\frac{1}{T}}\left(A.T.\frac{sen(\pi.f.T)}{\pi.f.T}\right)^2 df = 0.9028A^2.T \quad \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$

Como la energía total del pulso es $A^2T \quad \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$, entre $\pm\frac{1}{T}$ está contenida el 90.3% de la energía total.

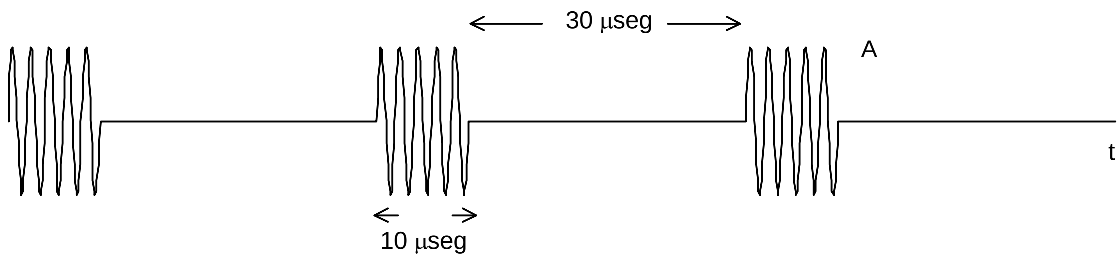
Problema 8.- Repetir el cálculo del problema anterior, pero para un pulso coseno elvado $x(t) = \frac{A}{2}.\left(1+\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right)$ que existe entre $\pm T$. (El resultado en éste caso puede ser aproximado).

Como la transformada de F. del pulso es: $X(f) = \frac{A}{2}.\frac{sen(2.\pi.f.T)}{\pi.f\left(1-\left(2.f.T\right)^2\right)}$,su espectro de densidad de energía será: $\left|X(f)\right|^2 = \left(\frac{A}{2}.\frac{sen(2.\pi.f.T)}{\pi.f\left(1-\left(2.f.T\right)^2\right)}\right)^2 \quad \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$

Energía entre $\pm\frac{1}{T}$: $E_1 = \int_{\frac{-1}{T}}^{\frac{1}{T}}\left(\frac{A}{2}.\frac{sen(2.\pi.f.T)}{\pi.f\left(1-\left(2.f.T\right)^2\right)}\right)^2 df = 0.3748A^2.T \quad \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$

Como la energía total del pulso es $0.3750.A^2T \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$, entre $\pm\frac{1}{T}$ está contenida prácticamente el 100% de la energía total. A éste resultado puede llegarse, sin cálculo matemático, graficando el espectro de densidad de energía.

Problema 9.- Una señal periódica está formada por la repetición, cada 40 μseg, de un pulso armónico (seno o coseno) de 10 μseg de duración y cuya frecuencia es de 100MHz (el dibujo de abajo es indicativo, no a escala).



Dibujar, esquemáticamente, el módulo del espectro de frecuencia de la señal y determinar el ancho de banda ocupado.

La señal representativa de un ciclo de la función periódica puede ser modelada como:
$x_1(t) = a(t).b(t) = A.\cos(2\pi f_0 t).rect(t,T_1)$, donde $f_0 = 100$ *MHz* y $T_1 = 10$ *μseg*

Su T. de Fourier será: $X_1(f) = A(f) * B(f)$
como:

$$a(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0)$$

$$b(t) = rect(t,T_1) \leftrightarrow T_1 \frac{sen(\pi f T_1)}{(\pi f T_1)}$$

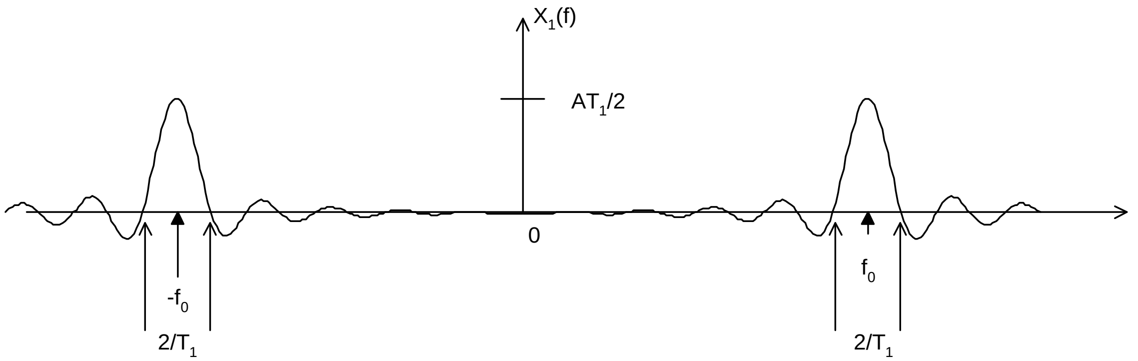
Se tendrá, aplicando la propiedad de desplazamiento de los impulsos en frecuencia:

$$X_1(f) = \frac{AT_1}{2}.\frac{sen\left(\pi\left(f - f_0\right)T_1\right)}{\pi\left(f - f_0\right)T_1} + \frac{AT_1}{2}.\frac{sen\left(\pi\left(f + f_0\right)T_1\right)}{\pi\left(f + f_0\right)T_1}$$

Para éste caso particular, la expresión de arriba puede simplificarse, considerando que $f_0.T_1 = 10^3$ (un número entero par) y se puede llegar a:

$$X_1(f) = \frac{A}{\pi}.\frac{f}{\left(f^2 - f_0^2\right)} sen\left(\pi f T_1\right)$$

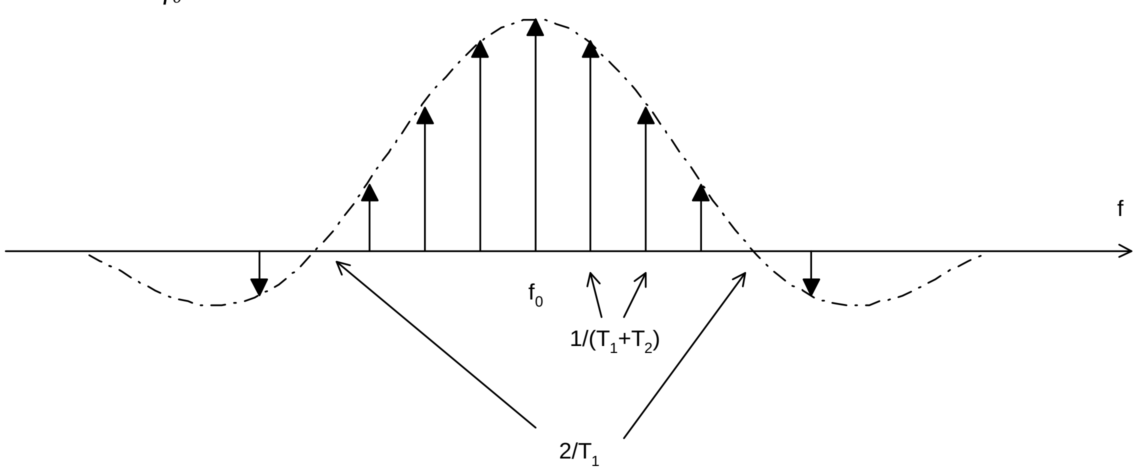
Esquemáticamente, el gráfico de $X_1(f)$ se muestra abajo (no a escala). Las funciones *sen(x)/x* están centradas en *100MHz* y su ancho entre los dos primeros ceros es de $2/T_1 = 0.2MHz$



El espectro de la señal periódica será:

$$X(f) = X_1(f).\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{n}{T_0})$$

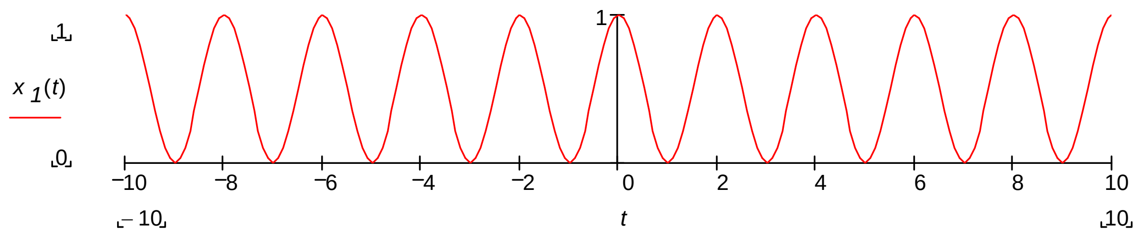
donde $T_0 = T_1 + T_2 = 40\ \mu seg$. La frecuencia fundamental de la señal periódica es de *1/40 = 0.025 MHz = 25 kHz* y por consiguiente sus armónicas estarán en sus múltiplos. Por la forma de $X_1(f)$ que se anula para todo *f*, salvo en el entorno de $\pm f_0$ se ve que las componentes significativas de *x(t)* estarán ubicadas en ± *100 kHz* alrededor de $\pm f_0$



Teniendo en cuenta el resultado del problema 1, el ancho de banda necesario para transmitir el 90% de la potencia de la señal será de *200kHz* (considerando frecuencias positivas)..

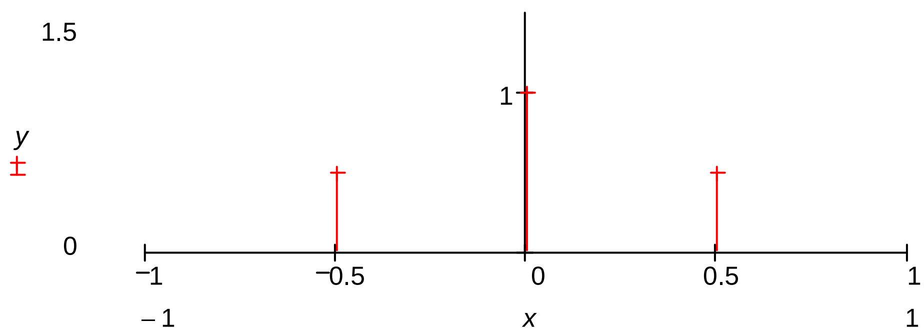
Problema 10.- Dada la señal $x_1(t) = 0.5.(1+\cos(\pi.t/T))$, graficar (esquemáticamente) la señal y su espectro. Idem para $x_2(t) = x_1(t).rect(t,10T)$.

(a) $x_1(t) = 0.5.(1+\cos(\pi.t/T))$

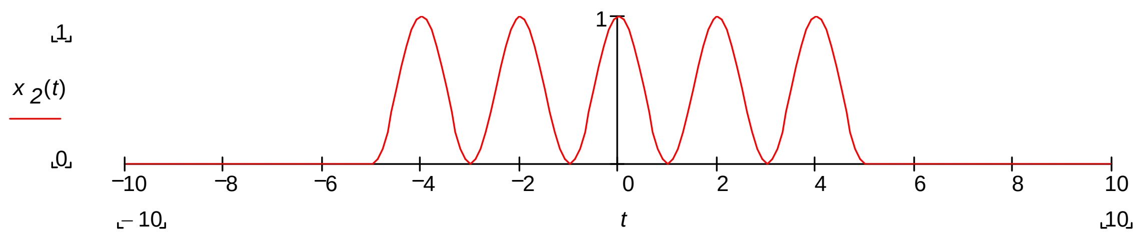


La señal es periódica con período *2T*. El eje de abscisas de los gráficos en dominio. de tiempo está normalizado tal que *1(uno)* = *T*. En los de dominio. de frecuencia, *1(uno)=1/T*
La T. de F. es inmediata:

$$x_1(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{1}{2T}t\right) \qquad X_1(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}\delta(f\pm\frac{1}{2T})$$



(b) $x_2(t) = x_1(t).rect(t,10T)$

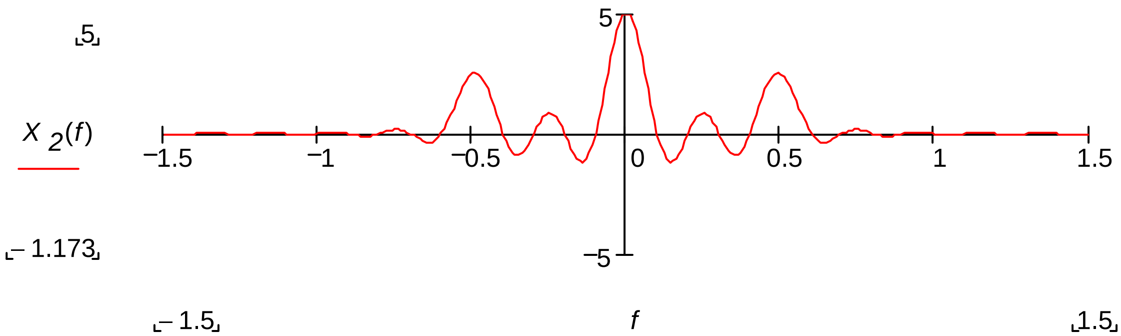


$$x_2(t)=x_1(t).rect(t,10T) \qquad X_2(f)=X_1(f)*10T.\frac{sen(\pi f10T)}{(\pi f10T)}$$

$$X_2(f)=\left(X_1(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{4}\delta(f\pm\frac{1}{2T})\right)*\left(10T.\frac{sen(\pi f10T)}{(\pi f10T)}\right)$$

Aplicando la propiedad de traslación de los impulsos:

$$X_2(f) = 5T.\frac{sen(\pi f 10T)}{(\pi f 10T)} + \frac{5}{2}T.\frac{sen\left(\pi\left(f \pm \frac{1}{2T}\right)10T\right)}{\pi\left(f \pm \frac{1}{2T}\right)10T}$$

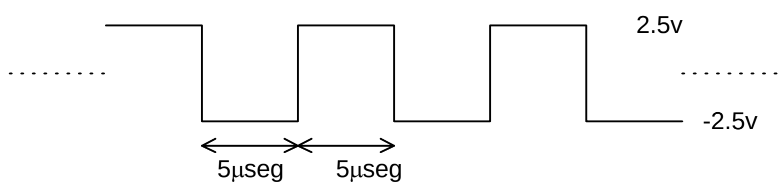


Problema 11.- El ancho de banda equivalente de un cuadripolo se define como:

$B_{eq} = \frac{1}{2.H_m^{\ 2}} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 .df$, donde H_m es el valor máximo que toma $|H(f)|$. Calcular B_{eq} para filtro pasabajos RC cuya función de transferencia es $H(f) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_0}}$

$$B_{eq} = \frac{1}{2}.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left|1 + j\frac{f}{f_0}\right|^2} df = \frac{\pi.f_0}{2} = 1{,}57\, f_0 \qquad (H_m = 1)$$

Problema 12.- Una onda cuadrada de 5v de amplitud y frecuencia fundamental de 100kHz como la de la figura,



se aplica como patrón de calibración de frecuencia a la entrada de un receptor de radio. Calcular la amplitud de las armónicas presentes en el entorno de 15MHz.

La señal es una onda cuadrada simétrica, periódica con $f_0 = 100\ kHz$ y amplitud $5v$ (pico a pico)

x(t) = x'(t) - 2.5 donde *x'(t)* es una señal idéntica a *x(t)* pero unipolar variable entre 0 y 5v
$X(f) = X'(f) - 2.5\ \delta(f)$ El contenido armónico de *X(f)* y *X'(f)* será idéntico, salvo la componente continua. La señal *x'(t)* es un pulso rectangular unipolar de *5 v* de amplitud, duración $T=5\ \mu seg$ que se repite cada $2T=10\ \mu seg$ y cuya Transformada de Fourier es conocida.

$$c_n = \frac{1}{2T} X_1\left(\frac{n}{2T}\right) \qquad \text{como} \qquad X_1(f) = 5T\,\frac{sen(\pi fT)}{(\pi fT)}$$

$$c_n = \frac{1}{2T} 5T \frac{sen\left(\pi \frac{n}{2T} T\right)}{\left(\pi \frac{n}{2T} T\right)} = \frac{5}{2} \frac{sen\left(\frac{\pi}{2} n\right)}{\left(\frac{\pi}{2} n\right)}$$

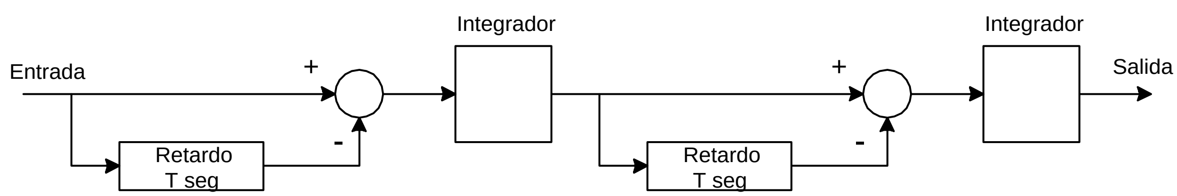
para *n* par, $|c_n| = 0$,

para *n* impar: $|c_n| = \dfrac{5}{\pi n}$

Se pide amplitud de armónicas alrededor de 15MHz:

$|c_{149}| = 10.7$ mV, $|c_{150}| = 0$, $|c_{151}| = 10.5$ mV

Problema 13.- Encontrar la respuesta al impulso *h(t)* y la función transferencia *H(f)* del sistema de la figura:

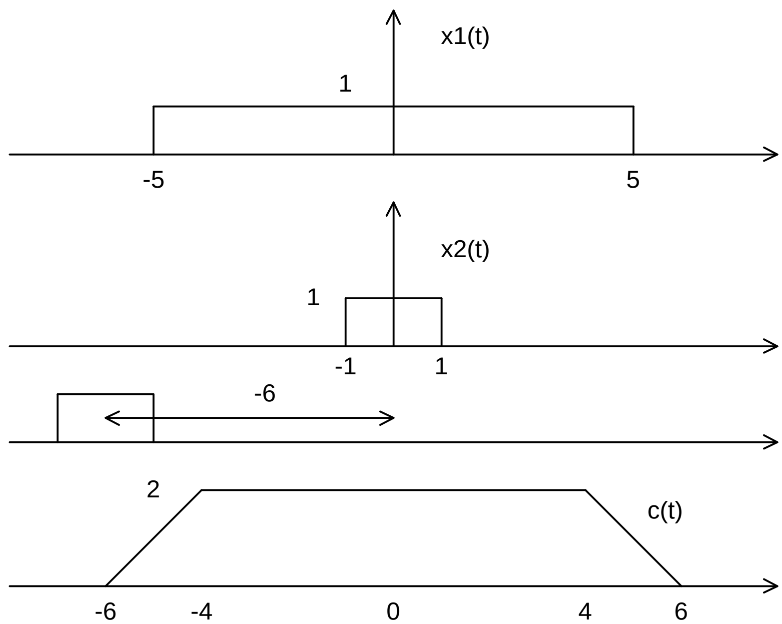


(Todas las componentes del sistema son ideales).

Problema 14.- Graficar el producto de convolución $c(t) = x_1(t) * x_2(t)$ cuando:

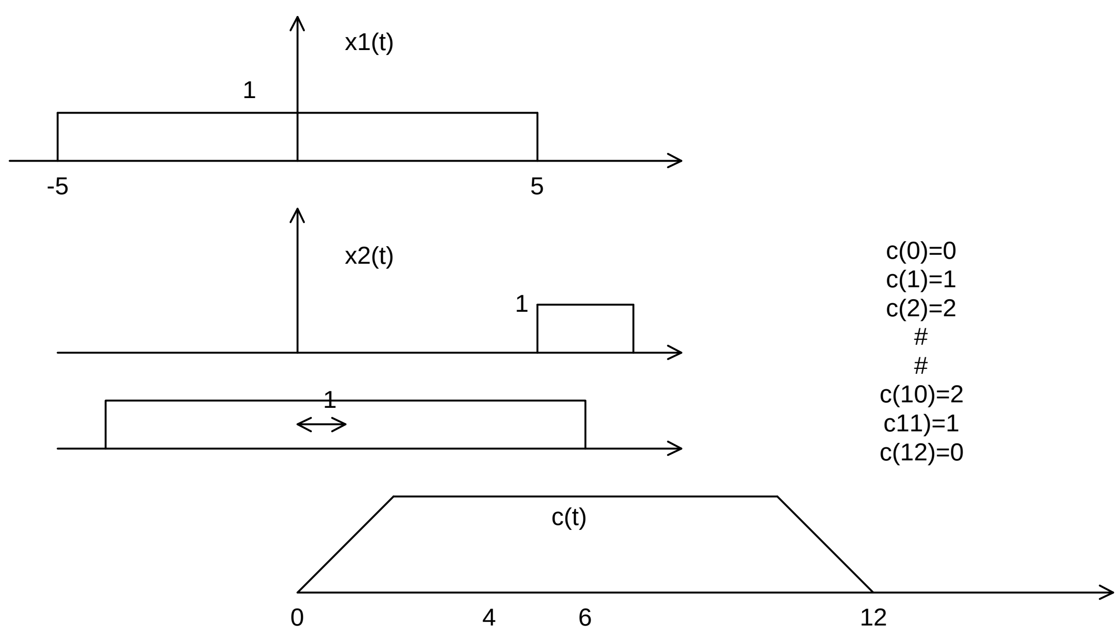
(a) $x_1(t) = rect(t,10ms)$ y $x_2(t) = rect(t,2ms)$
(b) $x_1(t) = rect(t,10ms)$ y $x_2(t) = rect((t-6ms),2ms)$

(a)



c(-6)=0
c(-5)=1
c(-4)=2
#
#
c(4)=2
c(5)=1
c(6)=0

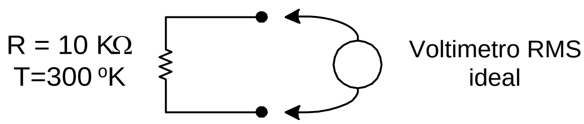
(b)

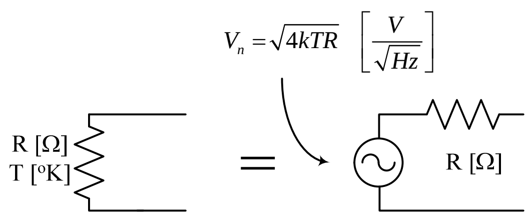


c(0)=0
c(1)=1
c(2)=2
#
#
c(10)=2
c11)=1
c(12)=0

<u>Tema: Ruido térmico, distorsión no lineal</u>

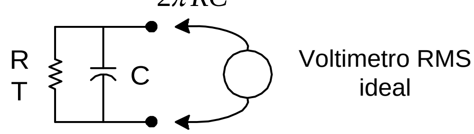
Problema 1.- Calcular la tensión eficaz de ruido que mediría un voltímetro RMS ideal (Z_{in} = ∞) en una resistencia de 10 kΩ a 300°K, suponiendo que el ancho de banda del voltímetro es (a) 1 MHz y (b) 10MHz.

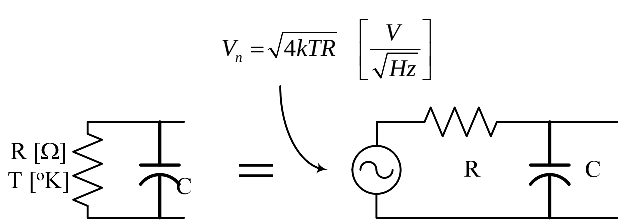




Densidad de tensión eficaz de la resistencia R [W} a T [ºK] : $V_n(f) = \sqrt{4kTR} \quad \left[\frac{V}{\sqrt{Hz}}\right]$, uniforme entre 0 e infinito (se considera frecuencias positivas únicamente). La densidad de tensión eficaz al cuadrado será: $V_n(f)^2 = 4kTR \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$, también uniforme. El cuadrado de la tensión eficaz que medirá el voltímetro de ancho de banda B [Hz] será el área entre 0 y B : $V^2 = 4kTRB \left[V^2\right]$,es decir que la tensión eficaz será $V = \sqrt{4kTRB} \quad [V]$. Reemplazando valores se tiene en el caso (a): $V = \sqrt{4.1,37.10^{-23}.300.10000.10^6} = 12,8\,\mu V$ y para (b): $12,8.\sqrt{10} = 40,5\,\mu V$

Problema 2.- Calcular la tensión eficaz de ruido que mediría un voltímetro RMS ideal (Z_{in} = ∞) con ancho de banda mucho mayor que $\frac{1}{2\pi RC}$ Hz en el circuito que se indica abajo :





Densidad de tensión eficaz de salida:

$$V_0(f) = V_n(f).\left|\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\right| = V_n(f).\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \quad \left[\frac{V}{\sqrt{Hz}}\right]$$

Elevando al cuadrado para poder integrar: $V_0(f)^2 = V_n(f)^2.\frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2} = \frac{4kTR}{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \quad \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$, donde $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$

Como el ancho de banda del voltímetro es mucho mayor que f_0, el cuadrado de la tensión eficaz que medirá puede calcularse con:

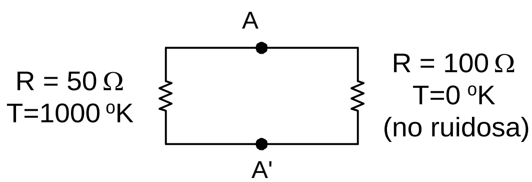
$$V_0^{\,2} = \int_0^{\infty} V_0(f)^2\,df = 4kTR.\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}df = 4kTR.\frac{\pi}{2}f_0 = \frac{kT}{C} \quad \left[V^2\right]$$

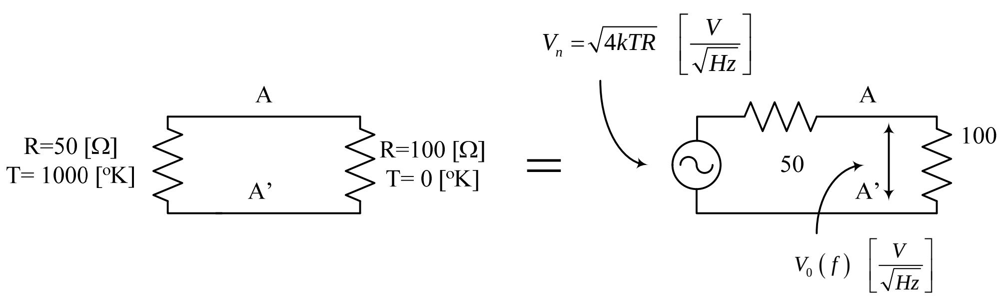
, es decir que:

$$V_0 = \sqrt{\frac{kT}{C}} \quad [V]$$

, independiente del valor de R.

Problema 3.- Determinar la densidad espectral de ruido $\left[\frac{Watt}{Hz}\right]$ entre A y A' .





$$V_0(f)^2 = V_n(f)^2.\left(\frac{100}{50+100}\right)^2 = 0,444.\left(4.1,37.10^{-23}.1000.50\right) = 1,216.10^{-18} \quad \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$$

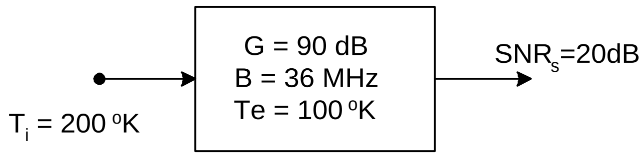
El espectro de densidad de potencia sobre la resistencia de 100 Ω será:

$$\eta(f) = \frac{V_0(f)^2}{100} = 1,216.10^{-20} \quad \left[\frac{V^2}{\Omega.Hz}\right] = \left[\frac{W}{Hz}\right]$$

El espectro de máxima densidad de potencia disponible de la resistencia de 50 ohm a 1000 ºK es:

$\eta_{\max}(f) = kT = 1,37.10^{-23}.1000 = 1,37.10^{-20}\left[\frac{W}{Hz}\right]$, es decir que $\eta(f)$ es 11% menor que $\eta_{max}(f)$

Problema 4.- Dado el esquema de la figura, calcular el nivel de potencia necesario de la señal de entrada para tener, en la salida, una relación señal-ruido de 20 dB (suponer que el sistema es lineal y adaptación en entrada/salida).



a) Cálculo del nivel de ruido en la salida:

$N_s = k(T_i + T_e).B.g \quad [W]$ en unidad logarítmica:

$N_s = 10.\log(k) + 10.\log(T_i + T_e) + 10.\log(B) + G$ donde *k*, *T* y *B* deben estar en unidades coherentes. Normalmente se utiliza $k = 1,37.10^{-23}\left[\frac{W}{^0K.Hz}\right]$ *o* $k = 1,37.10^{-20}\left[\frac{mW}{^0K.Hz}\right]$ lo que obliga a poner *T* y *B* en ^{o}K y Hz respectivamente para tener el resultado en *dBw* o *dBm*:

$$10.\log(k) = -228,6 \left[\frac{dBw}{^0K.Hz}\right] = -198,6 \left[\frac{dBm}{^0K.Hz}\right]$$

$$N_s[dBm] = -198,6 + 10.\log(T_i + T_e) + 10.\log(B) + G = -198,6 + 10.\log(300) + 10.\log(36.10^6) + 90$$

$$N_s = -8,26 \ [dBm]$$

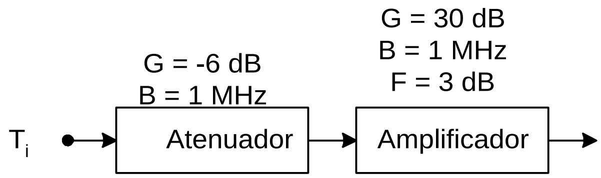
b) Cálculo del nivel de señal de salida necesario:

Si SNR_s = 20 *dB* y N_s=-8.26 *dBm* , entonces $S_s = -8,26 + 20 = 11,74\,dBm$

c) Cálculo del nivel de señal de entrada:

Como $S_s = S_e + G \quad \therefore \quad S_e = S_s - G = 11,74 - 90 = -78,26\,dBm$

Problema 5.- Dado el sistema :



Calcular: (a) La temperatura equivalente y el número de ruido de la cascada , (b) Potencia de ruido en la salida y nivel de señal necesario en la entrada para que la relación señal ruido de salida sea 10 dB, si T_i=100^{o}K. (considerar componentes lineales y adaptación en las junturas).

(a) Temperatura equivalente y número de ruido de la cascada de cuadripolos

Primera etapa (atenuador):

Ganancia $G_1 = -6\,dB$, numérico: $g_1 = 0,25$ veces

N^o. de ruido = atenuación = *6 dB*, numérico $F_1 = 4$

Temperatura equivalente: $T_{e1} = T_0.(F-1) = 290.3 = 870\ ^0K$

Ancho de banda = 1 *MHz*

Segunda etapa (amplificador):
Ganancia $G_2 = 30\,dB$, numérico: $g_2 = 1000$ veces
N^o. de ruido = 3 *dB*, numérico $F_2 = 2$
Temperatura equivalente: $T_{e2} = T_0.(F-1) = 290.1 = 290\ ^0K$
Ancho de banda = 1 *MHz*

Ganancia del sistema: 24 *dB*, Ancho de banda: 1 *MHz*

$$T_{eT} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{g_1} = 870 + \frac{290}{0,25} = 2030\ ^0K \qquad F_T = F_1 + \frac{F_2 - 1}{g_1} = 4 + \frac{1}{0,25} = 8 \quad (9\,dB)$$

(b) Potencia de ruido en la salida y nivel de señal de entrada para tener $SNR_s = 10\ dB$

$$N_s = -198,6 + 10.\log(100 + 2030) + 10.\log(10^6) + 24 = -81,3\,dBm$$

$$S_s = N_s + (SNR)_s = -81,3 + 10 = -71,3\ \ dBm$$

$$S_e = S_s - G_T = -71,3 - 24 = -95,3\ dBm$$

Problema 6.- Idem que el Prob. 5 pero cambiando las posiciones del amplificador y atenuador.

Igual que el anterior, intercambiando los bloques:
Ganancia del sistema: 24 *dB*, Ancho de banda: 1 *MHz*

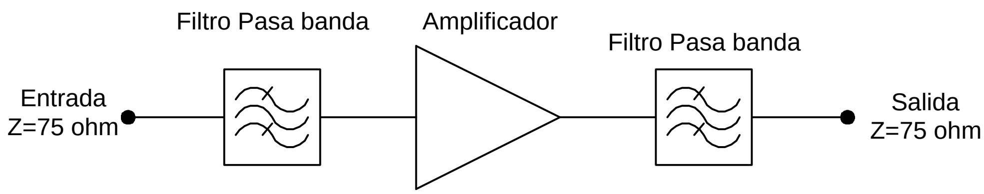
(a) $T_{eT} = T_{e1} + \dfrac{T_{e2}}{g_1} = 290 + \dfrac{870}{1000} = 290,9\ ^0K$, $F_T = F_1 + \dfrac{F_2 - 1}{g_1} = 2 + \dfrac{3}{1000} = 2,003 \quad (3\,dB)$

(b) $N_s = -198,6 + 10.\log(100 + 291) + 10.\log(10^6) + 24 = -88,6\,dBm$

$$S_s = N_s + (SNR)_s = -88,6 + 10 = -78,6\ \ dBm$$

$$S_e = S_s - G_T = -78,6 - 24 = -102,6\ dBm$$

Problema 7.- Un diagrama simple de un amplificador de línea para CATV que opera en el rango de frecuencias de 50MHz a 500 MHz es:



Los datos de las componentes del sistema son:

a) Filtros pasa banda de entrada/salida: Ancho de banda equivalente 450 MHz (50/500MHz)
Atenuación en banda de paso: 2 dB
Impedancia entrada/salida 75 ohm

b) Amplificador (Mini Circuits HELA-10):
Ganancia adaptada : 12 dB entre 50 y 1000MHz
Impedancia entrada/salida: 75 ohm
Número de ruido: 3.5 dB
Punto de compresión de 1 dB: 26 dBm
IP2 : 88 dBm
IP3 : 47 dBm

Calcular:

a) Ganancia, temperatura equivalente de ruido y número de ruido del sistema entrada/salida
b) Potencia de ruido térmico disponible a la salida, suponiendo que la temperatura de ruido de entrada es 350 ^oK
c) Máxima potencia de salida posible utilizando como criterio de que, en ésa condición, el ruido de intermodulación sea aproximadamente igual al térmico.
d) Relación señal ruido en la carga cuando la tensión eficaz de la señal de salida es de 500 mV.

Sistema de tres etapas en cascada: Atenuador-Amplificador-Atenuador

Parámetros por etapa:

Ganancia (numérico) : $g1 := 10^{-0.2}$ $g2 := 10^{1.2}$ $g3 := g1$

No. de ruido (numérico): $F1 := 10^{0.2}$ $F2 := 10^{0.35}$ $F3 := F1$

Temp. equivalente (ºK) $T1 := 290(F1 - 1)$ $T2 := 290(F2 - 1)$ $T3 := T1$

(a) Sistema completo :

Ganancia (numérico) $g := g1 \cdot g2 \cdot g3$ Ganancia (dB) $G := 10 \cdot log(g)$

$g = 6.31$ $G = 8$ dB

Temperatura equiv. : $Te := T1 + \frac{T2}{g1} + \frac{T3}{g1 \cdot g2}$ $Te = 755.921$ ºK

Número de ruido (numérico): $F := 1 + \frac{Te}{290}$ Número de ruido (dB): $Fdb := 10\, log(F)$

$F = 3.607$ $Fdb = 5.571$

Ancho de banda: 450 MHz

(b) Cálculo de ruido térmico a la salida si Tent=350 ºK

$Nterm := 1.37 \cdot 10^{-20} \cdot (350 + Te) \cdot 450 \cdot 10^{6} \cdot g$ mW $Nterm = 4.302 \times 10^{-8}$ mW

$10 \cdot log(Nterm) = -73.663$ dBm

(**c) Máxima potencia de salida para tener, en la salida, ruido térmico=ruido de intermodulación**

Datos del amplificador: $IP2 := 10^{8.8}$ mW $IP3 := 10^{4.7}$ mW

Se debe igualar a 0 la ecuación $\frac{x^2}{IP2} + \frac{x^3}{IP3^2} - Nterm$ (Ojo, todas las variables en la misma dimensión, en éste caso mW)

$$\frac{x^2}{IP2} + \frac{x^3}{IP3^2} - Nterm \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -3.8609454207949199744 - 3.7388898732630300173 \cdot i \\ -3.8609454207949199744 + 3.7388898732630300173 \cdot i \\ 3.7408191360548674411 \end{pmatrix}$$

Como el resultado debe ser real (potencia), se descartan las raíces complejas: Psmáx=3.74 mW o 5.73 dBm

(c) Relación señal/ruido si Vs=500 mV

$Vs := 0.5$ v $\qquad Ps := \frac{Vs^2}{75} \cdot 1000$ mW $\qquad Ps = 3.333$ mW $\qquad 10\,log(Ps) = 5.229$ dBm

$Nterm = 4.302 \times 10^{-8}$ mW $\qquad 10\,log(Nterm) = -73.663$ dBm

$Nintermod := \frac{Ps^2}{IP2} + \frac{Ps^3}{IP3^2}$ $\qquad Nintermod = 3.235 \times 10^{-8}$ mW $\qquad 10\,log(Nintermod) = -74.901$ dBm

$Nstot := Nterm + Nintermod$ $\qquad Nstot = 7.537 \times 10^{-8}$ mW $\qquad 10\,log(Nstot) = -71.228$ dBm

$SNR := \frac{Ps}{Nstot}$ $\qquad SNR = 4.422 \times 10^{7}$

$SNRdB := 10\,log(SNR)$ $\qquad SNRdB = 76.457$

Tema: Modulación lineal

Problema 1.- Una señal aleatoria (estacionaria y ergódica) *x(t)* cuyas características son : (a) Limitada en ancho de banda a 4 kHz, (b) Sin componente de continua, (c) Valor eficaz 5 volt con función de densidad de probabilidad gaussiana, es utilizada como moduladora en en un sistema de AM. Analizar la señal modulada de salida bajo las siguientes suposiciones: (1) La potencia de portadora es de 100 watt, (2) Es tolerable definir como valor de pico simétrico de *x(t)* a aquel que no es superado el 99% del tiempo y (3) La impedancia de carga de la salida modulada es de 50 ohm.
En particular, considerando que se utilize el máximo índice de modulación posible, definir: (a) El valor de pico (tensión) de la señal modulada, (b) La potencia total transmitida, (c) La distribución de la potencia transmitida en portadora y bandas laterales, (e) El ancho de banda ocupado.

(a) Valor de pico de la señal moduladora
Señal aleatoria gaussiana: $\overline{x} = 0$, $x_{rms} = \sigma = 5$ [volt] , el 99% del tiempo estará entre $\pm 2{,}58.\sigma \approx \pm 13$ [volt] $\therefore$ $x_p = \pm 13$ [volt]

(b) Potencia total transmitida
Señal modulada AM: $e(t) = \left(k_1 + k_2.x(t)\right).\cos(2\pi f_0 t)$ donde k_1 (dim. [volt]) es la amplitud de la portadora y k_2 (adimensional) un factor de escala que asegure modulación sin distorsión. Tiene que cumplirse, para cualquier valor de *x(t)*: $k_1 + k_2.x(t) \geq 0$, el caso más desfavorable es cuando *x(t)* alcanza su pico negativo: $k_1 - k_2.x_p \geq 0 \quad \therefore \quad k_2 \leq \frac{k_1}{x_p}$. La máxima modulación posible es cuando $k_2 = \frac{k_1}{x_p}$. Con éste valor, la amplitud máxima de la señal modulada será $2k_1$

Potencia total: $P = \frac{\langle e^2 \rangle}{R} = \frac{1}{2R}.\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}.\langle x^2 \rangle\right) = \frac{k_1^{\,2}}{2R} + \frac{k_2^{\,2}.\langle x^2 \rangle}{2R}$, el primer término corresponde a la potencia de la portadora y el segundo la de las bandas laterales (que llevan información)

La potencia de portadora es 100 watt : $\frac{k_1^{\,2}}{2R} = 100 \quad \therefore \quad k_1 = \sqrt{100.2R} = 100$ [volt] y

$k_2 = \frac{k_1}{x_p} = \frac{100}{13} = 7{,}7$, entonces: $P = \frac{k_1^{\,2}}{2R} + \frac{k_2^{\,2}.\langle x^2 \rangle}{2R} = 100 + \frac{7{,}7^2.25}{100} = 115$ [watt]

Tensión máxima de la señal modulada 200 [volt]

(c) La portadora lleva el 87% de la potencia media transmitida y las bandas laterales el 13% restante.

(d) El ancho de banda ocupado, considerando frecuencias positivas, será 8 kHz

Problema 2.- La misma señal *x(t)* del problema 1, se aplica como moduladora a un sistema de doble banda lateral sin portadora. Suponiendo que la tensión de pico de la señal modulada es igual a la considerada en el prob.1, calcular la potencia total transmitida y el ancho de banda ocupado.

Señal de doble banda lateral sin portadora: $e(t)=k.x(t).\cos(2\pi f_0 t)$, donde *k* es un factor de escala (adimensional). El valor máximo de amplitud será $e(t)\big|_{\max} = k.x_p = 200$ [volt] , la misma tensión máxima del problema 1. $\therefore$ $k=\dfrac{200}{x_p}=\dfrac{200}{13}=15,38$

Potencia media transmitida total: $P=\dfrac{\langle e^2\rangle}{R}=\dfrac{k^2.\langle x^2\rangle}{2R}=\dfrac{15,38^2.25}{100}=59$ [watt] , la totalidad en las bandas laterales que transportan información.

El ancho de banda ocupado es similar al del problema 1: 8 kHz

Notar que utilizando doble banda lateral sin portadora, a igualdad de potencia de pico, se transmite 393% mas potencia útil utilizando el 51% de la potencia total transmitida por un sistema de mod. de amplitud con portadora.

Problema 3.- La misma señal *x(t)* del problema 1, se aplica como moduladora a un sistema de banda lateral única. Suponiendo que la tensión de pico de la señal modulada es igual a la considerada en el prob.EAL#4.1, calcular la potencia total transmitida y el ancho de banda ocupado.

Señal de banda lateral única: $e(t)=k.\left(x(t).\cos(2\pi f_0 t)\pm\hat{x}(t).\sin(2\pi f_0 t)\right)$, donde *k* es un factor de escala (adimensional).

El valor máximo de $e(t)$ no puede determinarse sin conocer $x(t)$ y su T. de Hilbert $\hat{x}(t)$. Para señales aleatorias continuas aproximadamente se cumple que :

$$x(t).\cos(2\pi f_0 t)\pm\hat{x}(t).\sin(2\pi f_0 t)\big|_{\max}=1,01...1,5.\,x(t)\big|_{\max}$$

Tomando un valor intermedio, p.ej.: $x(t).\cos(2\pi f_0 t)\pm\hat{x}(t).\sin(2\pi f_0 t)\big|_{\max}=1,25.\,x(t)\big|_{\max}$

se tendría: $e(t)\big|_{\max}=1,25.k.\,x(t)\big|_{\max}=1,25.k.13=200$ [volt] , lo que da: $k=\dfrac{200}{1,25.13}=12,3$

(Otra aproximación menos precisa, sería suponer que $x(t)\big|_{\max}=\hat{x}(t)\big|_{\max}$ y que los valores máximos ocurren en el mismo instante, en ése caso $e(t)\big|_{\max}=\sqrt{2}.\,x(t)\big|_{\max}=1.41.\,x(t)\big|_{\max}$)

Potencia media transmitida total: $P=\dfrac{\langle e^2\rangle}{R}=\dfrac{k^2.\left(\langle x^2\rangle+\langle\hat{x}^2\rangle\right)}{2R}=\dfrac{k^2.\langle x^2\rangle}{R}$, utilizando el valor de $k=12,3$: $P=\dfrac{12,3^2.25}{50}=75,6$ [watt], la totalidad en la banda lateral que transporta información.

El ancho de banda ocupado es la mitad de la de los problemas (EAL#4) 1 y 2: 4 kHz

Notar la mayor eficiencia del sistema de banda lateral única.

Problema 4.- Repetir el cálculo de los problemas 1 ,2 y 3, pero suponiendo de que *x(t)* es una señal senoidal de frecuencia 4 kHz del mismo valor eficaz (5 v) y, para el caso de modulación de amplitud, considerar un índice de modulación 1.

$x(t) = A.\cos(2\pi . f_m .t)$ si $x_{rms} = 5$ [volt] , $A = 5.\sqrt{2} = 7,07$ [volt]

Caso 1, Modulación de amplitud con portadora: $e(t) = \left(k_1 + k_2 .x(t)\right).\cos(2\pi\, f_0 t)$

$$k_1 = 100 \text{ [volt]} \qquad k_2 = \frac{k_1}{x_p} = \frac{100}{7,07} = 14,14$$

$$e(t) = \left(100 + 100.\cos(2\pi\, f_m t)\right).\cos(2\pi\, f_0 t)$$

Potencia total: $P = \dfrac{\langle e^2 \rangle}{R} = \dfrac{1}{2R}.\left(k_1{}^2 + k_2{}^2.\langle x^2 \rangle\right) = \dfrac{k_1{}^2}{2R} + \dfrac{k_2{}^2.\langle x^2 \rangle}{2R} = 100 + \dfrac{14,14^2.25}{100} = 150$ [watt]

100 watt en portadora (66,6%P) , 50 watt en bandas laterales (33,3%P) . Ancho de banda ocupado 8 kHz. Máxima tensión de *e(t)* 200 volt

Caso 2, Modulación de banda lateral doble sin portadora: $e(t) = k.x(t).\cos(2\pi\, f_0 t)$

$$\therefore \quad k = \frac{200}{x_p} = \frac{200}{7,07} = 28,29$$

$$P = \frac{\langle e^2 \rangle}{R} = \frac{k^2.\langle x^2 \rangle}{2R} = \frac{28,29^2.25}{100} = 200 \text{ [watt]}$$

$$e(t) = 200.\cos(2\pi . f_m .t).\cos(2\pi\, f_0 t) = 100.\cos\left(2\pi .(f_0 + f_m).t\right) + 100.\cos\left(2\pi .(f_0 - f_m).t\right)$$

Caso 3, Modulación de banda lateral única:

$$e(t) = k.\left(x(t).\cos(2\pi\, f_0 t) \pm \hat{x}(t).\sin(2\pi\, f_0 t)\right) = k.\sqrt{x(t)^2 + \hat{x}(t)^2}.\cos\left(2\pi\, f_0 t + \phi(t)\right)$$

si $x(t) = 7,07.\cos(2\pi . f_m t)$ entonces $\hat{x}(t) = 7,07.\cos\left(2\pi . f_m t - \dfrac{\pi}{2}\right) = 7,07.\sin\left(2\pi . f_m t\right)$

En éste caso puede determinarse exactamente el valor máximo de *e(t)* :

$$e(t)\Big|_{\max} = k.\sqrt{7,07^2.\left(\cos^2(2\pi . f_m t) + \sin^2(2\pi . f_m t)\right)} = k.7,07 = 200 \text{ [volt]} \quad \therefore \quad k = 28.28$$

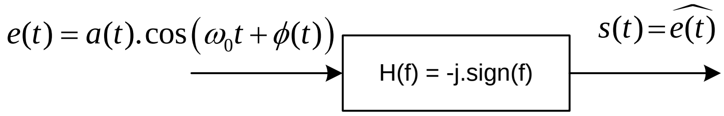
$$P = \frac{\langle e^2 \rangle}{R} = \frac{k^2.\left(\langle x^2 \rangle + \langle \hat{x}^2 \rangle\right)}{2R} = \frac{k^2.\langle x^2 \rangle}{R} = \frac{28,28^2.25}{50} = 400 \text{ [watt]}$$

$$e(t) = 28,28.\left(7,07.\cos(2\pi f_m t).\cos(2\pi f_0 t) \pm 7,07.7,07.\sin(2\pi f_m t).\sin(2\pi f_0 t)\right) =$$
$$= 200.\left(\cos(2\pi f_m t).\cos(2\pi f_0 t) \pm \sin(2\pi f_m t).\sin(2\pi f_0 t)\right) =$$
$$= 200.\cos\left(2\pi.(f_m \pm f_0).t\right)$$

Problema 5.- Determinar la Transformada de Hilbert de una señal de banda angosta

Señal de banda angosta en dominio de tiempo: $e(t) = a(t).\cos\left(\omega_0 t + \phi(t)\right)$ y su espectro de frecuencias:

$$E(f) = A(f) * \left(\frac{e^{-j\phi(t)}}{2}\delta(f - f_0) + \frac{e^{j\phi(t)}}{2}\delta(f + f_0) \right) = \frac{e^{-j\phi(t)}}{2}A(f - f_0) + \frac{e^{j\phi(t)}}{2}A(f + f_0)$$



Multiplicando E(f) con $H(f) = -j.sign(f)$ se tendrá el espectro de frecuencias de $\widehat{e(t)}$:

$$\widehat{E(f)} = -\frac{j.e^{-j\phi(t)}}{2}A(f - f_0) + \frac{j.e^{j\phi(t)}}{2}A(f + f_0) = A(f) * \left(\frac{-j.e^{-j\phi(t)}}{2}\delta(f - f_0) + \frac{j.e^{j\phi(t)}}{2}\delta(f + f_0) \right)$$

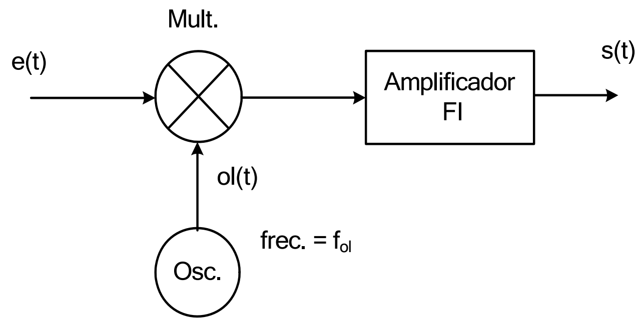
La transformada inversa de $\widehat{E(f)}$, dará la T. de H. de *e(t)* : $\widehat{e(t)} = a(t).\sin\left(\omega_0 t + \phi(t)\right)$, válido cuando el ancho de banda de *a(t)* sea menor o igual a f_0 .

Casos particulares:

(a) $\phi(t) = 0 \quad \therefore \quad e(t) = a(t).\cos\left(\omega_0 t\right)$ y $\widehat{e(t)} = a(t).\sin\left(\omega_0 t\right)$

(b) $\phi(t) = -\frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad e(t) = a(t).\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = a(t).\sin\left(\omega_0 t\right)$ y $\widehat{e(t)} = -a(t).\cos\left(\omega_0 t\right)$

Problema 6.- Analizar el sistema receptor de la figura y determinar el espectro de la señal de salida *s(t)* si la entrada es: $e(t) = a(t).\cos(2\pi f_1 t) + b(t).\cos(2\pi f_2 t)$, donde *a(t)* y *b(t)* son señales de banda de base con ancho de banda idéntico de *B* Hz+ con *B* << f_1 o f_2 . La frecuencia del oscilador Osc. es $f_{ol} = \frac{f_1 + f_2}{2}$ y el ancho de banda del amplificador es 2B Hz+ centrado en $\frac{f_1 - f_2}{2}$ Hz (suponer su ganancia uniforme en el ancho de banda y que $f_1 > f_2$).



Es posible recuperar únicamente *a(t)* o *b(t)* de la salida *s(t)* ?. Como lo haría ?

Señal de entrada al multiplicador: $e(t)=a(t)\cos(\omega_1 t)+b(t)\cos(\omega_2 t)$, suponiendo que la señal del oscilador local es: $e_{ol}=\cos(\omega_{ol}.t)$, se tendrá a la salida del multiplicador:

$$e_{mult}(t)=e(t).e_{ol}(t)=\big(a(t).\cos(\omega_1.t)+b(t).\cos(\omega_2.t)\big).\cos(\omega_{ol}.t)=$$

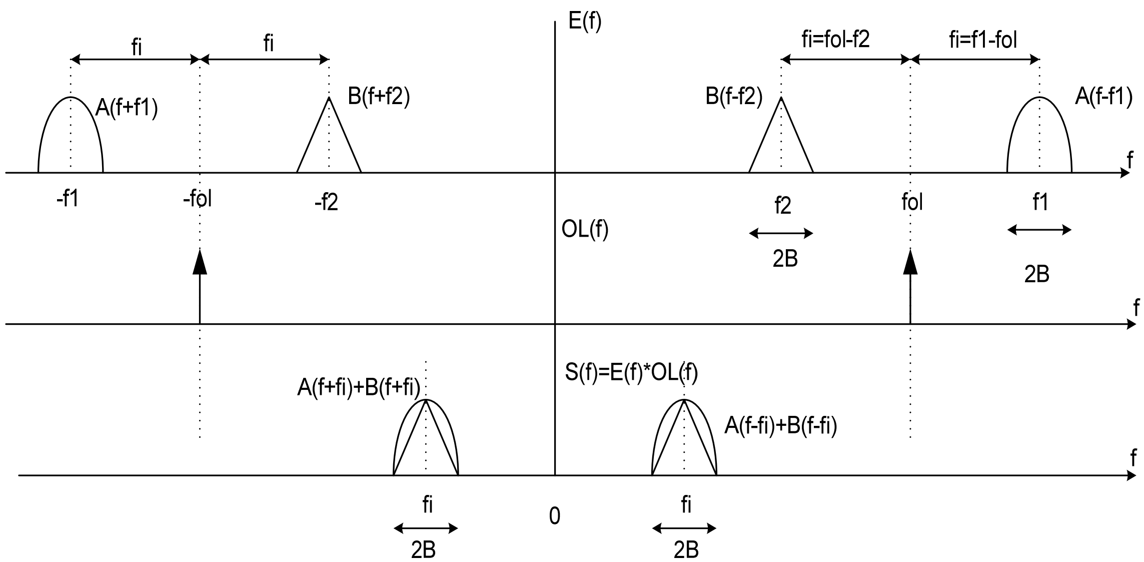
$=\dfrac{a(t)}{2}.\cos(\omega_1 \pm \omega_{ol})t+\dfrac{b(t)}{2}.\cos(\omega_2 \pm \omega_{ol})t$, como $\omega_1-\omega_{ol}=\omega_1-\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}=\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}$

y $\omega_2-\omega_{ol}=\omega_2-\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}=\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}$, el filtro dejará pasar las componentes diferencia y eliminará la suma, es decir que:

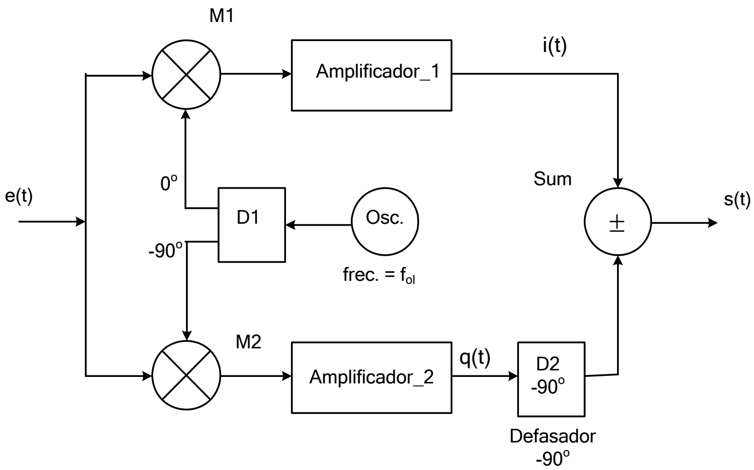
$$s(t)=\frac{a(t)}{2}\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}.t\right)+\frac{b(t)}{2}\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}.t\right)=\frac{a(t)+b(t)}{2}.\cos(\omega_i t)\ .$$

La señal de salida tiene las componentes moduladoras *a(t)* y *b(t)* modulando la misma frecuencia portadora y ocupando el mismo ancho de banda. No es posible separarlas (El problema de la frecuencia imagen en un receptor superheterodino). Un detector coherente, recuperaría la suma de las dos señales moduladoras *a(t)* y *b(t)*.

Espectros de frecuencia :



Problema 7.- La misma señal de entrada del problema 6 es aplicada al el sistema receptor de la figura:



Los datos de las componentes del sistema son:

(1) Frecuencia del oscilador Osc. $f_{ol} = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$

(2) Los amplificadores _1 y _2 son idénticos, con ancho de banda de 2B Hz$^+$ centrado en $f_i = \dfrac{f_1 - f_2}{2}$ Hz y ganancia uniforme.

(3) D1 y D2 son defasadores de 90^o (Transf. De Hilbert).

(4) El bloque Sum puede configurarse como sumador o restador

Es posible recuperar únicamente *a(t)* o *b(t)* de la salida *s(t)* ?. Como lo haría ?

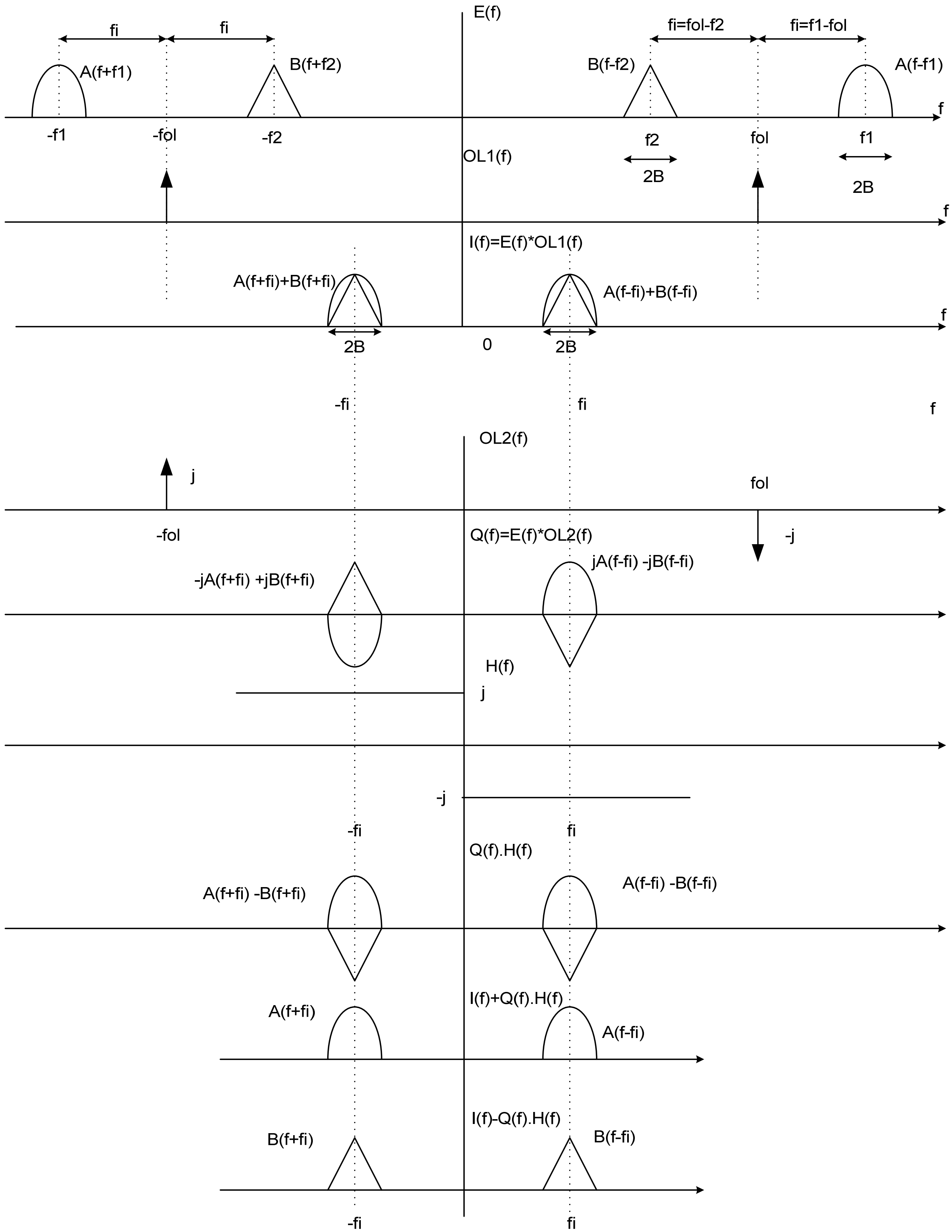
Suponiendo que las salidas de 0^o y -90^o del defasador D1 son $\cos\left(\omega_{ol}t\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\omega_{ol}t\right)$, se tendrá en las salidas *i(t)* y *q(t)*:

$i(t)=\dfrac{a(t)}{2}.\cos(\omega_i t)+\dfrac{b(t)}{2}.\cos(\omega_i t)$ y $q(t)=-\dfrac{a(t)}{2}.\sin(\omega_i t)+\dfrac{b(t)}{2}.\sin(\omega_i t)$, después del defasador D2: $\widehat{q(t)}=\dfrac{a(t)}{2}.\cos(\omega_i t)-\dfrac{b(t)}{2}.\cos(\omega_i t)$.

Sumando las salidas: $i(t)+\widehat{q(t)}=a(t).\cos\left(\omega_i t\right)$

Restándolas: $i(t)-\widehat{q(t)}=b(t).\cos\left(\omega_i t\right)$

Será posible recuperar *a(t)* o *b(t)*.



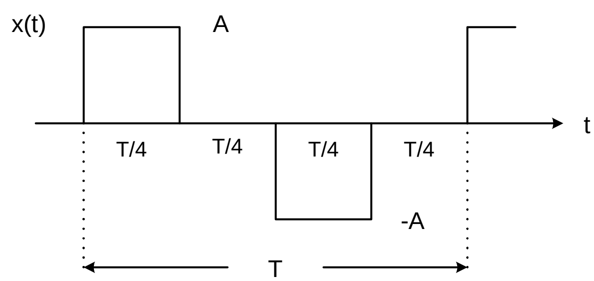
Este esquema se utiliza en algunos circuitos integrados de RF, se puede alcanzar un excelente rechazo de imagen aun en el rango de microondas (11GHz p.ej.) utilizando frecuencias intermedias bajas (eventualmente CC) y eliminando la necesidad de utilizar conversiones múltiples.

<u>Tema: Modulación angular</u>

Problema 1.- La señal moduladora en un sistema de modulación de fase es un tono $x(t)=cos2\pi f_m t$ (suponer $x(t)=0$ para $t<0$). Si la máxima desviación de fase obtenida en la señal de salida es $\Delta\phi$, calcular (a) La desviación instantánea de frecuencia ($f_i(t)$ o $\omega_i(t)$) y (b) La máxima desviación de frecuencia (Δf o $\Delta\omega$).

Problema 2.- La señal moduladora en un sistema de modulación de frecuencia es un tono $x(t)=cos2\pi f_m t$ (suponer $x(t)=0$ para $t<0$). Si la máxima desviación de frecuencia obtenida en la señal de salida es Δf, calcular (a) La desviación instantánea de fase ($\phi_i(t)$) y (b) La máxima desviación de fase ($\Delta\phi$).

Problema 3.- Una señal periódica como la de la figura, modula un generador de FM que tiene una constante de modulación K_ω [radianes/seg.volt].



Dibuje dos gráficos similares durante T seg., pero de $\omega_i(t)$ vs. t y $\phi(t)$ vs. t , donde $\omega_i(t)$ y $\phi(t)$ son las desviaciones de frecuencia y fase instantánea de la señal modulada respectivamente. Determinar con precisión la máxima desviación de fase ($\Delta\phi$) y la máxima desviación de frecuencia instantánea ($\Delta\omega$) .

Problema 4.- En un transmisor de modulado en frecuencia, se mide que la desviación de frecuencia instantánea es lineal respecto a la tensión de entrada de modulación y tiene las siguientes características: (a) con 0 volt de entrada de modulación no hay desviación de frecuencia, (b) con ± 2 volt de entrada, la desviación de frecuencia vale ± 30 kHz y (c) La linealidad se mantiene hasta ± 10 volt de entrada.
Si al transmisor descripto se le aplica, como moduladora, una señal aleatoria con componente continua nula, limitada en amplitud a ± 5 volt y en ancho de banda a 10 kHz, calcular: (a) La máxima desviación de frecuencia y (b) El ancho de banda ocupado por la señal modulada.

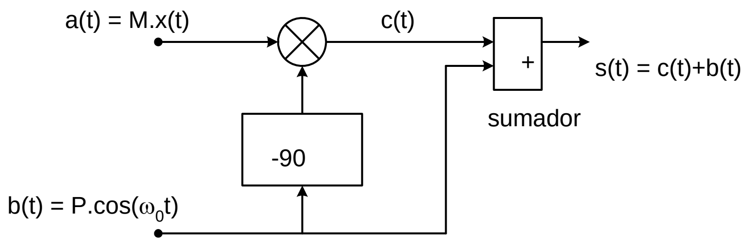
Problema 5.- En un sistema de modulación angular, la desviación instantánea de frecuencia (o frecuencia instantánea variacional) viene dada por $f_i(t)=\Delta f.x(t)$, donde Δf es la máxima desviación de frecuencia y $x(t)$ la señal moduladora (normalizada a $|x(t)_{máx}|=1$) de ancho de banda B. Si se define la desviación eficaz de frecuencia f_e como el valor eficaz de $f_i(t)$, determine el ancho de banda de Carson en función de B, f_e y el factor de pico de $x(t)$.

Problema 6.- Una señal de frecuencia central f_0 modulada en fase, es demodulada por un detector (ideal) de FM. Suponiendo que la máxima desviación de fase es $\Delta\phi$ y que el ancho de banda de la señal moduladora $x(t)$ es mucho menor que f_0, calcular la señal de salida del detector y el módulo de su espectro de frecuencias. (Suponer que el espectro de $x(t)$, es continuo entre $\pm B$).

Problema 7.- Una señal de frecuencia central f_0 modulada en frecuencia, es demodulada por un detector (ideal) de PM. Suponiendo que la máxima desviación de frecuencia es Δf y que el ancho de banda de la señal moduladora $x(t)$ es mucho menor que f_0, calcular la señal de salida del detector y el módulo de su espectro de frecuencias (Suponer que el espectro de $x(t)$, es continuo entre $\pm B$).

Problema 8.- Que haría para recuperar la señal moduladora $x(t)$ en los problemas 6 y 7 utilizando los mismos detectores?

Problema 9.- Analizar el esquema de la figura:



Las componentes del sistema son ideales y $x(t)$ es una señal acotada en ancho de banda a $\pm B$ Hz con $B << f_0$ y en tensión a ±1 volt. Las constantes M y P son reales y positivas.
Determinar $s(t)$ y, suponiendo un espectro genérico para $X(f)$, el módulo de su espectro $|S(f)|$ y el ancho de banda ocupado .

Problema 10.- El esquema del problema anterior puede utilizarse como modulador de fase (sistema Armstrong). Para que que la modulación no tenga distorsión apreciable y suponiendo el valor de P constante, debe imponerse una limitación en el valor de M. Proponga un valor que estime razonable y calcule la máxima desviación de fase de $s(t)$ y el ancho de banda ocupado por $S(f)$ aplicando la regla de Carson. Si el resultado obtenido difiere al ya calculado, ¿a que atribuye la diferencia?