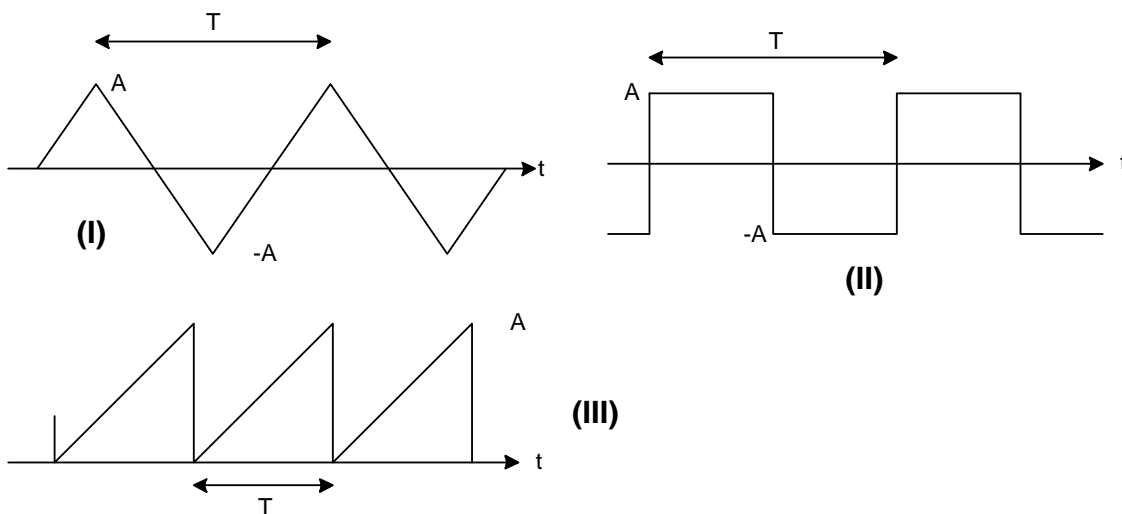


## Señales Eléctricas-Ejercicios

### Tema: Señales en dominio de tiempo, señales aleatorias, promedios estadísticos

**Problema 1.-** Calcular los valores medio, eficaz y eficaz de alterna de las formas de onda periódicas de la figura

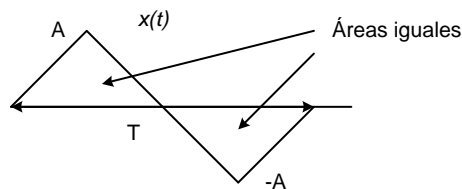


(I) La función es periódica, entonces:

$$x_{med} = \langle x \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_T x(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot (\text{área de 1 período de } x(t)) ,$$

$$x_{ef} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_T x(t)^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot (\text{área de 1 período de } x(t)^2)}$$

$$y \quad x_{ef\_ac} = \sqrt{x_{ef}^2 - x_{med}^2}$$



Por simetría de la forma de onda, se ve que:

$$x_{med} = 0$$

$$x_{ef} = \sqrt{\frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} A^2 \cdot \left(1 - \frac{4}{T}t\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{T} \cdot \frac{A^2 T}{6}} = \frac{A}{\sqrt{3}} \quad y \quad x_{ef\_ac} = x_{ef} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

(II).- Función periódica, igual que en (I) :  $x_{med} = 0$  ,  $x_{ef} = x_{ef\_ac} = A$

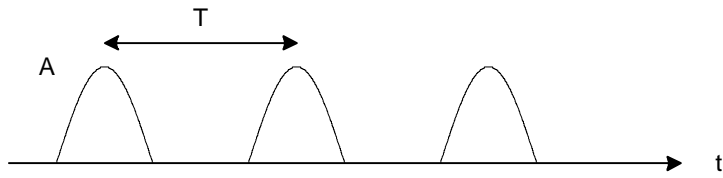
(III).- Función periódica:

$$x_{med} = \frac{1}{T} \cdot \frac{AT}{2} = \frac{A}{2} \quad , \quad x_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(\frac{At}{T}\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{A^2 T}{3}} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

$$x_{ef\_ac} = \sqrt{\frac{A^2}{3} - \frac{A^2}{4}} = \frac{A}{\sqrt{12}}$$

**Problema 2.-** Calcular los valores medio, eficaz y eficaz de alterna de las formas de las señales que se indican:

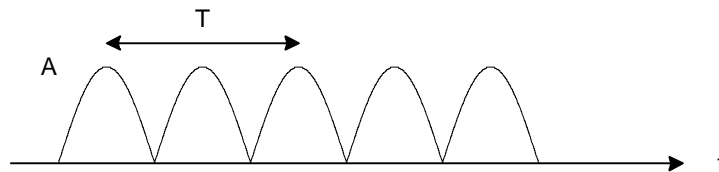
a) Onda senoidal rectificada 1/2 onda.



$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{T} \cdot t\right) dt \rightarrow \frac{1}{\pi} \cdot A \quad \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} A^2 \cdot \left(\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{T} \cdot t\right)\right)^2 dt \rightarrow \frac{1}{4} \cdot A^2$$

$$\langle x(t) \rangle = \frac{A}{\pi} \quad x_{ef} = \sqrt{\langle x(t)^2 \rangle} = \frac{A}{2} \quad x_{ef\_AC} = \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2}} = 0.386A$$

b) Onda senoidal rectificada en onda completa.



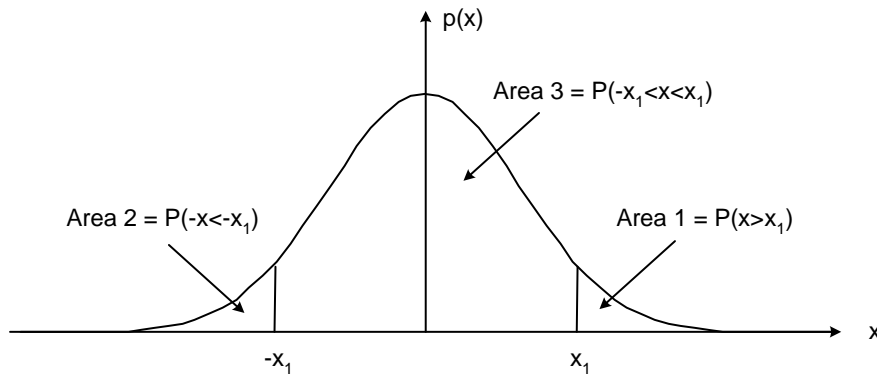
$$\frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{T} \cdot t\right) dt \rightarrow \frac{2}{\pi} \cdot A \quad \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} A^2 \cdot \left(\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{T} \cdot t\right)\right)^2 dt \rightarrow \frac{1}{2} \cdot A^2$$

$$\langle x(t) \rangle = \frac{2A}{\pi} \quad x_{ef} = \sqrt{\langle x(t)^2 \rangle} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad x_{ef\_AC} = \sqrt{\frac{A^2}{2} - \frac{4A^2}{\pi^2}} = 0.308A$$

**Problema 3.-** Se mide, con instrumentos adecuados, que el valor eficaz de una señal aleatoria, estacionaria y ergódica, es de  $50 \mu\text{V}$  y su valor medio  $0 \text{ V}$ . Si se sabe que su función densidad de probabilidad es Gaussiana y se la observa durante un período de tiempo suficientemente largo, entre que límites (simétricos respecto a  $0 \text{ V}$ ) de tensión estima Ud. que estará la señal durante el 99% del tiempo y (b) Idem que antes, pero durante 99,99% del tiempo.

$$P(x < |x_1|) = P(-x_1 < x < x_1) = 1 - (\text{Area 1}) - (\text{Area 2}) = (\text{Area 3})$$

$$\text{Area 1} = \text{Area 2} = Q(x_1), \text{ donde } x_1 = \frac{V_1}{\sigma}$$



$$(a) P(-x_1 < x < x_1) = 0,99 = 1 - 2Q(x_1) \therefore Q(x_1) = \frac{1 - 0,99}{2} = 5 \cdot 10^{-3}$$

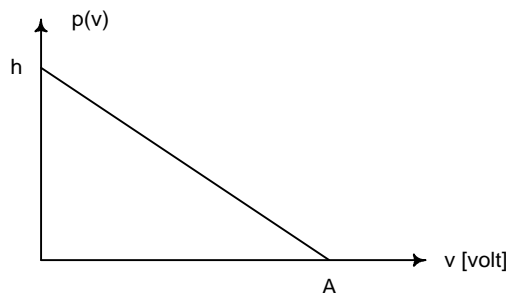
De la tabla o gráfico de  $Q(x)$  resulta que:

$$x_1 \approx 2,58 \quad \therefore V_1 = 2,58\sigma = 2,58 \cdot V_{rms} = 2,58 \cdot 50 = 129 \mu\text{V}$$

$$(b) P(-x_1 < x < x_1) = 0,9999 = 1 - 2Q(x_1) \therefore Q(x_1) = \frac{1 - 0,9999}{2} = 5 \cdot 10^{-5}$$

$$x_1 \approx 3,89 \quad \therefore V_1 = 3,89\sigma = 3,89 \cdot V_{rms} = 3,89 \cdot 50 = 195 \mu\text{V}$$

**Problema 4.-** La función densidad de probabilidad de una señal aleatoria estacionaria y ergódica es la de la figura, (a) Calcular el valor de  $h$ , (b) La tensión que se mediría con un voltímetro de CC si  $A=5 \text{ volt}$  y (c) El porcentaje de tiempo que la señal estará por encima y por debajo del valor de CC.



$$a) p(x) = h - \frac{h}{A} \cdot x \text{ para } x \text{ entre } 0 \text{ y } A, p(x) = 0 \text{ fuera del rango}$$

$$\text{Area de } p(x) = 1 = \int_0^A \left( h - \frac{h}{A} \cdot x \right) dx = \frac{A \cdot h}{2} \quad \therefore \quad h = \frac{2}{A} \quad \text{y} \quad p(x) = \frac{2}{A} \cdot \left( 1 - \frac{x}{A} \right) \quad (\text{para } x \text{ entre } 0 \text{ y } A)$$

$$\text{b) } \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \cdot dx = \int_0^A \frac{2x}{A} \cdot \left( 1 - \frac{x}{A} \right) \cdot dx = A \cdot \left( 1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{A}{3} = 1,67 \text{ volt}$$

$$\text{c) } P\left(x > \frac{A}{3}\right) = \int_{\frac{A}{3}}^A p(x) \cdot dx = \int_{\frac{A}{3}}^A \left( \frac{2}{A} \cdot \left( 1 - \frac{x}{A} \right) \right) \cdot dx = \frac{4}{9} = 0,44$$

$$P\left(x < \frac{A}{3}\right) = 1 - P\left(x > \frac{A}{3}\right) = 1 - 0,44 = 0,56$$

44% del tiempo la señal estará por encima de su valor medio y 56% por debajo.

**Problema 5.-** Calcular el valor eficaz de una señal de banda angosta definida por:

$e(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ , donde  $a(t)$  es una señal permanente y ancho de banda mucho menor que  $f_0$

$$\begin{aligned} \langle e^2 \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_{\tau} e(t)^2 dt = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} a(t)^2 \cdot \cos^2(2\pi f_0 t) dt = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} a(t)^2 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos(4\pi f_0 t)) dt = \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{\tau} a(t)^2 \cdot \frac{1}{2} dt + \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \cos(4\pi f_0 t) dt \quad , \text{ El segundo término será } 0 \text{ si } \tau \text{ es suficientemente grande} \end{aligned}$$

$$\text{Queda: } \langle e^2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau} \int_{\tau} a(t)^2 dt = \frac{\langle a^2 \rangle}{2} \quad \text{y} \quad e_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a_{RMS}$$

## Tema: Transformada de Fourier, espectros de frecuencia

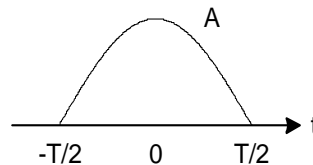
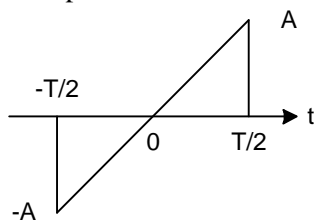
**Problema 1.-** Dados los pulsos que se describen abajo, determinar las siguientes características de sus espectros en dominio de frecuencia :

- Valor de  $X(0)$
- Características matemáticas del espectro (real, imaginario o complejo)

$$\text{a) } x(t) = \frac{2 \cdot A}{T} \cdot t \quad \text{cuando } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad x(t) = 0 \text{ para cualquier otro } t$$

$$\text{b) } x(t) = A \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \quad \text{cuando } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad x(t) = 0 \text{ para cualquier otro } t$$

Gráficos de los pulsos:



Pulso (a) : Area = 0  $\therefore X(0) = 0$  , Función impar  $\therefore X(f) = j \cdot \text{Im}(X(f))$  , Función discontinua

$$\therefore |X(f)|_{f \rightarrow \text{alta}} \rightarrow \frac{k}{f}$$

Pulso (b): Area =  $2 \frac{AT}{\pi}$   $\therefore X(0) = \frac{2AT}{\pi}$  , Función par  $\therefore X(f) = \text{Re}(X(f))$  , Función continua

y su primera derivada discontinua  $\therefore |X(f)|_{f \rightarrow \text{alta}} \rightarrow \frac{k}{f^2}$

**Problema 2.-** Comprobar los resultados obtenidos en el problema anterior, calculando el espectro de frecuencia para cada uno de los pulsos.

Se utiliza MathCad

a)

$$x(t) := \frac{2A}{T} \cdot t$$

$$X(f) := \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \exp(-2i \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt \quad \left| \begin{array}{l} \text{complex} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow i \cdot A \cdot \frac{(-\sin(f \cdot \pi \cdot T) + \cos(f \cdot \pi \cdot T)) \cdot f \cdot \pi \cdot T}{\pi^2 \cdot f^2 \cdot T}$$

$$\lim_{f \rightarrow 0} X(f) \rightarrow 0$$

b)

$$x(t) := A \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

$$X(f) := \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \exp(-2i \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt \text{ simplify } \rightarrow \frac{-2}{\pi} \cdot T \cdot \frac{\cos(f \cdot \pi \cdot T)}{(4 \cdot f^2 \cdot T^2 - 1)} \cdot A$$

$$X(0) \rightarrow \frac{2}{\pi} \cdot T \cdot A$$

**Problema 3.-** Calcular la Transformada de Fourier de una señal definida por

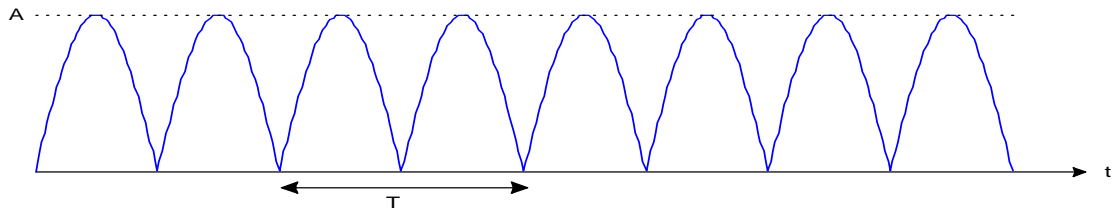
$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi).$$

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} \cdot e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)} = \frac{A \cdot e^{j\phi}}{2} \cdot e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A \cdot e^{-j\phi}}{2} \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$X(f) = \frac{A \cdot e^{j\phi}}{2} \cdot \delta(f - f_0) + \frac{A \cdot e^{-j\phi}}{2} \cdot \delta(f + f_0) \text{ El \u00e1rea de los impulsos es compleja, } \frac{A \cdot e^{j\phi}}{2} \text{ en}$$

$$f = f_0 \text{ y } \frac{A \cdot e^{-j\phi}}{2} \text{ en } f = -f_0$$

**Problema 4.-** Determinar el espectro de frecuencias de una se\u00f1al senoidal rectificada en onda completa:



Calcular los valores de amplitud de: (a) componente continua, (b) 1<sup>a</sup> y 2<sup>a</sup> arm\u00f3nica.

$$x(t) := A \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

$$c(n) := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} x(t) \cdot \exp\left(-2i\pi \cdot \frac{2n}{T} \cdot t\right) dt \text{ simplify } \rightarrow \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{\cos(\pi \cdot n)}{(4 \cdot n^2 - 1)} \cdot A$$

$$c(0) \rightarrow 2 \cdot \frac{A}{\pi} \quad c(1) \rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{A}{\pi} \quad c(2) \rightarrow \frac{-2}{15} \cdot \frac{A}{\pi}$$

**Problema 5.-** Calcular la Transformada de Fourier y el espectro de densidad de potencia de  $e(t)$  cuando:

(a)  $e(t) = A.\cos(2.\pi.f_1t + \phi_1) + B.\sen(2.\pi.f_2t + \phi_2)$

(b)  $e(t) = A.\cos(2.\pi.f_1t + \phi_1) + B.\cos(2.\pi.f_2t + \phi_2)$

(a)

$$e(t) = \frac{A}{2} \cdot e^{j(2\pi f_1 t + \Phi_1)} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j(2\pi f_1 t + \Phi_1)} + \frac{B}{j2} \cdot e^{j(2\pi f_2 t + \Phi_2)} - \frac{B}{j2} \cdot e^{-j(2\pi f_2 t + \Phi_2)}$$

$$= \left( \frac{A}{2} \cdot e^{j\Phi_1} \right) e^{j2\pi f_1 t} + \left( \frac{A}{2} \cdot e^{-j\Phi_1} \right) e^{-j2\pi f_1 t} + \left( \frac{B}{j2} \cdot e^{j\Phi_2} \right) e^{j2\pi f_2 t} - \left( \frac{B}{j2} \cdot e^{-j\Phi_2} \right) e^{-j2\pi f_2 t}$$

Aplicando el teorema de traslación en frecuencia:

$$E(f) = \left( \frac{A}{2} \cdot e^{j\Phi_1} \right) \delta(f - f_1) + \left( \frac{A}{2} \cdot e^{-j\Phi_1} \right) \delta(f + f_1) + \left( \frac{B}{j2} \cdot e^{j\Phi_2} \right) \delta(f - f_2) - \left( \frac{B}{j2} \cdot e^{-j\Phi_2} \right) \delta(f + f_2)$$

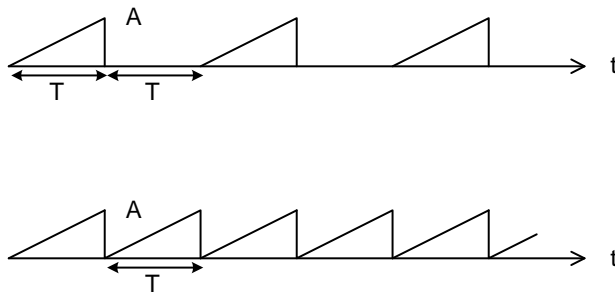
El espectro de densidad de potencia será:

$$G(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f \pm f_1) + \frac{B^2}{4} \delta(f \pm f_2)$$

(b)

El problema (b) es similar, cambiará  $E(f)$ , pero no  $G(f)$ .

**Problema 6.-** Calcular el módulo de los coeficientes de Fourier  $c_n$  de las señales periódicas de la figura y la amplitud de la 10ª y 11ª armónica en ambos casos:



(a) La señal periódica es una rampa entre 0 y  $T$  de pendiente  $A/T$ , el período fundamental es  $2T$ :

$x_1(t) = \frac{A}{T} \cdot t$  entre 0 y  $T$ , y  $x_1(t) = 0$  entre  $T$  y  $2T$ . La T. de Fourier de un período será:

$$X_1(f) = \frac{A}{T} \int_0^T t \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{T(2\pi f)^2} \left[ (1 + j2\pi fT) e^{-j2\pi fT} - 1 \right]$$

Los coeficientes de la señal periódica serán:

$$c_n = \frac{1}{2T} \cdot X_1 \left( \frac{n}{2T} \right) = \frac{A}{2(\pi n)^2} \left[ (1 + j\pi n) e^{-j\pi n} - 1 \right]$$

Si  $n$  es par:  $c_n = \frac{jA}{2\pi n}$  mientras que, si  $n$  es impar:  $c_n = \frac{-A(1 + jn\pi)}{2(\pi n)^2}$

Los coeficientes 10 y 11 valen:  $|c_{10}| = 0.016A$        $|c_{11}| = 0.014A$     y la amplitud de las armónicas 10 y 11 serán:  $A_{10} = 0.032A$        $A_{11} = 0.028A$

Usando MathCad:

$$x(t) := \frac{A}{T} \cdot t$$

$$c(n) := \frac{1}{2T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \exp\left(-2i \cdot \pi \cdot \frac{n}{2T} \cdot t\right) dt \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot i \cdot \frac{(\exp(-i \cdot \pi \cdot n) \cdot n \cdot \pi \cdot A - i \cdot A \cdot \exp(-i \cdot \pi \cdot n) + i \cdot A)}{\pi^2 \cdot n^2}$$

$$c(10) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{20} \cdot i \cdot \frac{A}{\pi} \qquad c(11) \text{ simplify} \rightarrow \frac{-1}{242} \cdot i \cdot A \cdot \frac{(11 \cdot \pi - 2 \cdot i)}{\pi^2}$$

(b) La señal periódica es una rampa entre 0 y  $T$  de pendiente  $A/T$ , el período fundamental es  $T$ :

$x_1(t) = \frac{A}{T} \cdot t$  entre 0 y  $T$ ,. La T. de Fourier de un período será :

$$X_1(f) = \frac{A}{T} \int_0^T t \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{T(2\pi f)^2} \left[ (1 + j2\pi fT) e^{-j2\pi fT} - 1 \right]$$

En éste caso, los coeficientes de la señal periódica serán:

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot X_1 \left( \frac{n}{T} \right) = \frac{A}{(2\pi n)^2} \left[ (1 + j2\pi n) e^{-j2\pi n} - 1 \right] = \frac{jA}{2\pi n}$$

Los coeficientes 10 y 11 valen:  $|c_{10}| = 0.016A$        $|c_{11}| = 0.014A$     y la amplitud de las armónicas 10 y 11 serán:  $A_{10} = 0.032A$        $A_{11} = 0.028A$   
(Igual que en (a). )

MathCad:



$$x(t) := \frac{A}{T} \cdot t$$

$$c(n) := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \exp\left(-2i \cdot \pi \cdot \frac{n}{T} \cdot t\right) dt \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot i \cdot \frac{(2 \cdot \exp(-2 \cdot i \cdot \pi \cdot n) \cdot n \cdot \pi \cdot A - i \cdot A \cdot \exp(-2 \cdot i \cdot \pi \cdot n) + i \cdot A)}{\pi^2 \cdot n^2}$$

$$c(10) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{20} \cdot i \cdot \frac{A}{\pi} \qquad c(11) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{22} \cdot i \cdot \frac{A}{\pi}$$

**Problema 7.-** Dado un pulso rectangular de amplitud A [volt] y duración T [seg]

$x(t) = A \cdot \text{rect}\left(t, T\right)$ , calcular el porcentaje de la energía total del pulso contenida entre  $\pm 1/T$  [Hz].

Como la transformada de F. del pulso es:  $X(f) = A \cdot T \cdot \frac{\text{sen}(\pi \cdot f \cdot T)}{\pi \cdot f \cdot T}$ , su espectro de densidad de

$$\text{energía será: } |X(f)|^2 = \left( A \cdot T \cdot \frac{\text{sen}(\pi \cdot f \cdot T)}{\pi \cdot f \cdot T} \right)^2 \quad \left[ \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right]$$

$$\text{Energía entre } \pm \frac{1}{T} : E_1 = \int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} \left( A \cdot T \cdot \frac{\text{sen}(\pi \cdot f \cdot T)}{\pi \cdot f \cdot T} \right)^2 df = 0.9028 A^2 \cdot T \quad \left[ \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right]$$

Como la energía total del pulso es  $A^2 T \left[ \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right]$ , entre  $\pm \frac{1}{T}$  está contenida el 90.3% de la energía total.

**Problema 8.-** Repetir el cálculo del problema anterior, pero para un pulso coseno elvado

$x(t) = \frac{A}{2} \cdot \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right)$  que existe entre  $\pm T$ . (El resultado en éste caso puede ser aproximado).

Como la transformada de F. del pulso es:  $X(f) = \frac{A}{2} \cdot \frac{\text{sen}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{\pi \cdot f \cdot (1 - (2 \cdot f \cdot T)^2)}$ , su espectro de densidad

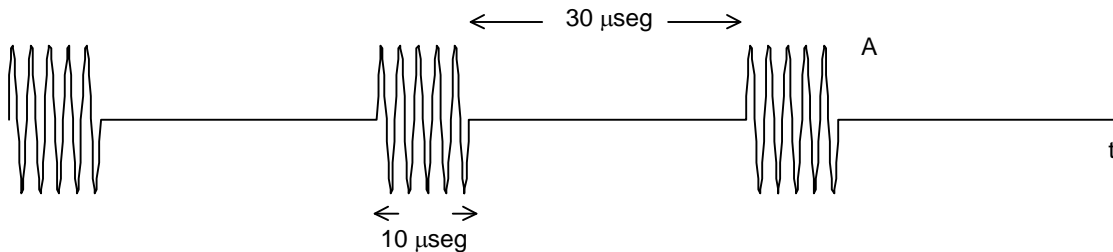
$$\text{de energía será: } |X(f)|^2 = \left( \frac{A}{2} \cdot \frac{\text{sen}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{\pi \cdot f \cdot (1 - (2 \cdot f \cdot T)^2)} \right)^2 \quad \left[ \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right]$$

$$\text{Energía entre } \pm \frac{1}{T} : E_1 = \int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} \left( \frac{A}{2} \cdot \frac{\text{sen}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot T)}{\pi \cdot f \cdot (1 - (2 \cdot f \cdot T)^2)} \right)^2 df = 0.3748 A^2 \cdot T \quad \left[ \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right]$$

Como la energía total del pulso es  $0.3750.A^2T \left[ \frac{V^2}{Hz} \right]$ , entre  $\pm \frac{1}{T}$  está contenida prácticamente

el 100% de la energía total. A éste resultado puede llegarse, sin cálculo matemático, graficando el espectro de densidad de energía.

**Problema 9.-** Una señal periódica está formada por la repetición, cada 40  $\mu\text{seg}$ , de un pulso armónico (seno o coseno) de 10  $\mu\text{seg}$  de duración y cuya frecuencia es de 100MHz (el dibujo de abajo es indicativo, no a escala).



Dibujar, esquemáticamente, el módulo del espectro de frecuencia de la señal y determinar el ancho de banda ocupado.

La señal representativa de un ciclo de la función periódica puede ser modelada como:

$$x_1(t) = a(t).b(t) = A.\cos(2\pi f_0 t).rect(t, T_1) \quad , \text{ donde } f_0 = 100 \text{ MHz y } T_1 = 10 \mu\text{seg}$$

Su T. de Fourier será:  $X_1(f) = A(f) * B(f)$

como:

$$a(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$

$$b(t) = rect(t, T_1) \leftrightarrow T_1 \frac{\text{sen}(\pi f T_1)}{(\pi f T_1)}$$

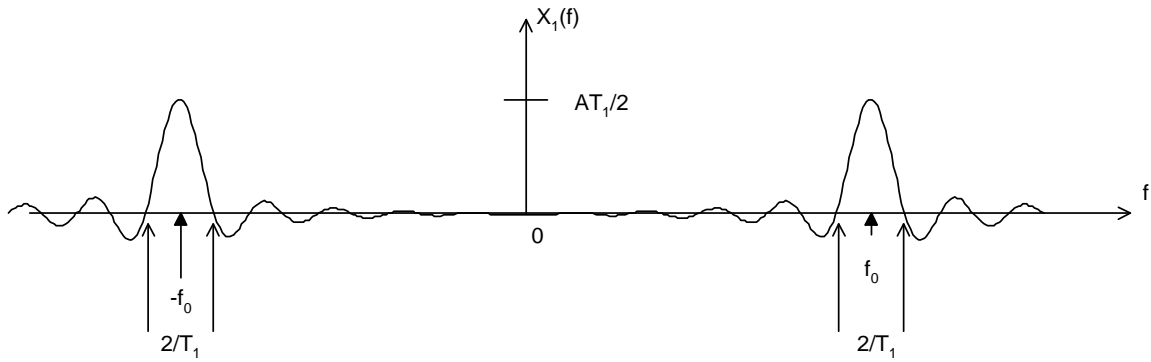
Se tendrá, aplicando la propiedad de desplazamiento de los impulsos en frecuencia:

$$X_1(f) = \frac{AT_1}{2} \cdot \frac{\text{sen}(\pi(f - f_0)T_1)}{\pi(f - f_0)T_1} + \frac{AT_1}{2} \cdot \frac{\text{sen}(\pi(f + f_0)T_1)}{\pi(f + f_0)T_1}$$

Para éste caso particular, la expresión de arriba puede simplificarse, considerando que  $f_0.T_1 = 10^3$  (un número entero par) y se puede llegar a:

$$X_1(f) = \frac{A}{\pi} \cdot \frac{f}{(f^2 - f_0^2)} \text{sen}(\pi f T_1)$$

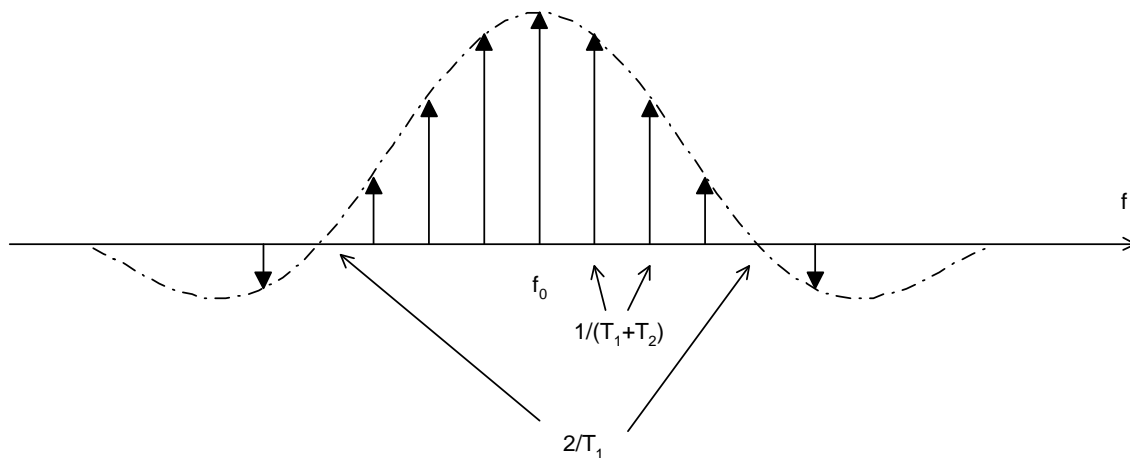
Esquemáticamente, el gráfico de  $X_1(f)$  se muestra abajo (no a escala). Las funciones  $\text{sen}(x)/x$  están centradas en 100MHz y su ancho entre los dos primeros ceros es de  $2/T_1 = 0.2\text{MHz}$



El espectro de la señal periódica será:

$$X(f) = X_1(f) \cdot \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \quad \text{donde } T_0 = T_1 + T_2 = 40 \mu\text{seg} . \text{ La frecuencia}$$

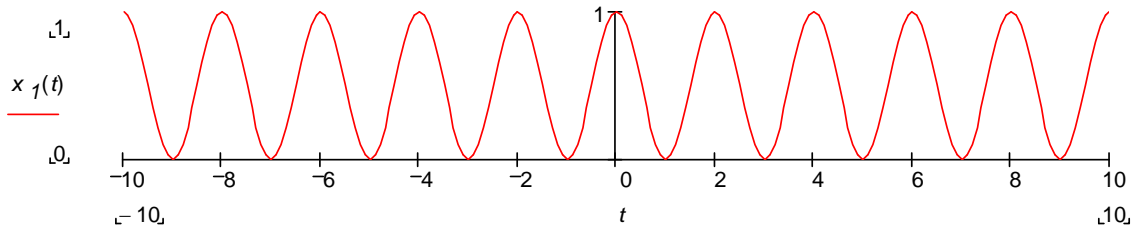
fundamental de la señal periódica es de  $1/40 = 0.025 \text{ MHz} = 25 \text{ kHz}$  y por consiguiente sus armónicas estarán en sus múltiplos. Por la forma de  $X_1(f)$  que se anula para todo  $f$ , salvo en el entorno de  $\pm f_0$  se ve que las componentes significativas de  $x(t)$  estarán ubicadas en  $\pm 100 \text{ kHz}$  alrededor de  $\pm f_0$



Teniendo en cuenta el resultado del problema 1, el ancho de banda necesario para transmitir el 90% de la potencia de la señal será de  $200 \text{ kHz}$  (considerando frecuencias positivas)..

**Problema 10.-** Dada la señal  $x_1(t) = 0.5 \cdot (1 + \cos(\pi t/T))$ , graficar (esquemáticamente) la señal y su espectro. Idem para  $x_2(t) = x_1(t) \cdot \text{rect}(t, 10T)$ .

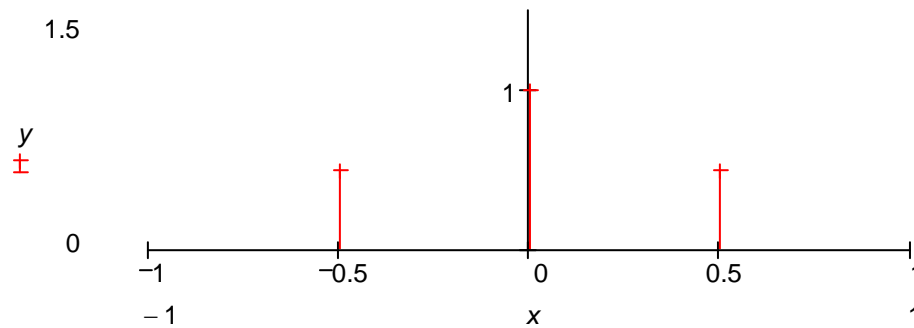
(a)  $x_1(t) = 0.5 \cdot (1 + \cos(\pi t/T))$



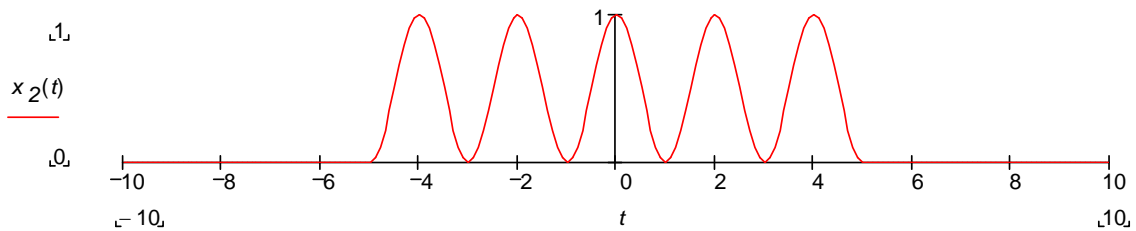
La señal es periódica con período  $2T$ . El eje de abscisas de los gráficos en dominio. de tiempo está normalizado tal que  $1(\text{uno}) = T$ . En los de dominio. de frecuencia,  $1(\text{uno}) = 1/T$

La T. de F. es inmediata:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{1}{2T} t\right) \quad X_1(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{4} \delta\left(f \pm \frac{1}{2T}\right)$$



(b)  $x_2(t) = x_1(t) \cdot \text{rect}(t, 10T)$

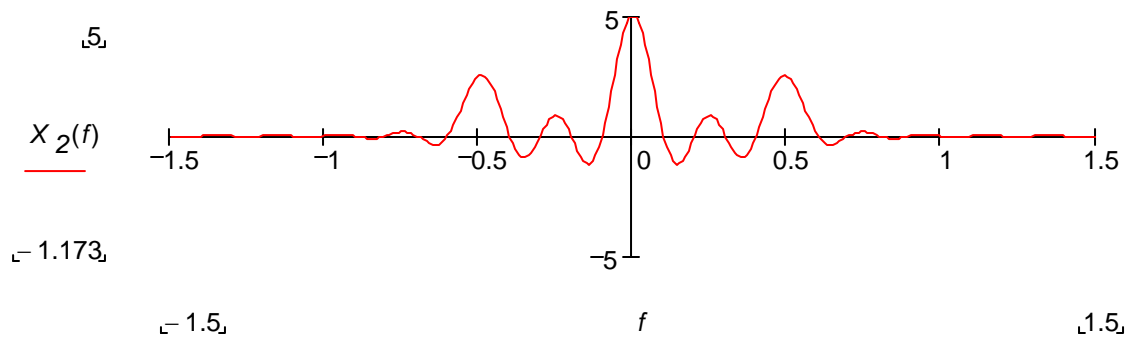


$$x_2(t) = x_1(t) \cdot \text{rect}(t, 10T) \quad X_2(f) = X_1(f) * 10T \cdot \frac{\text{sen}(\pi f 10T)}{(\pi f 10T)}$$

$$X_2(f) = \left( X_1(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{4} \delta\left(f \pm \frac{1}{2T}\right) \right) * \left( 10T \cdot \frac{\text{sen}(\pi f 10T)}{(\pi f 10T)} \right)$$

Aplicando la propiedad de traslación de los impulsos:

$$X_2(f) = 5T \cdot \frac{\text{sen}(\pi f 10T)}{(\pi f 10T)} + \frac{5}{2}T \cdot \frac{\text{sen}\left(\pi\left(f \pm \frac{1}{2T}\right)10T\right)}{\pi\left(f \pm \frac{1}{2T}\right)10T}$$



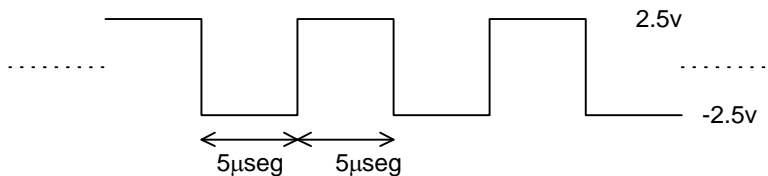
**Problema 11.-** El ancho de banda equivalente de un cuadripolo se define como:

$B_{eq} = \frac{1}{2.H_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 .df$  , donde  $H_m$  es el valor máximo que toma  $|H(f)|$  . Calcular  $B_{eq}$  para filtro

pasabajos RC cuya función de transferencia es  $H(f) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_0}}$

$$B_{eq} = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left|1 + j \frac{f}{f_0}\right|^2} df = \frac{\pi \cdot f_0}{2} = 1,57 f_0 \quad (H_m=1)$$

**Problema 12.-** Una onda cuadrada de 5v de amplitud y frecuencia fundamental de 100kHz como la de la figura,



se aplica como patrón de calibración de frecuencia a la entrada de un receptor de radio. Calcular la amplitud de las armónicas presentes en el entorno de 15MHz.

La señal es una onda cuadrada simétrica, periódica con  $f_0 = 100 \text{ kHz}$  y amplitud 5v (pico a pico)

$x(t) = x'(t) - 2.5$  donde  $x'(t)$  es una señal idéntica a  $x(t)$  pero unipolar variable entre 0 y 5v  
 $X(f) = X'(f) - 2.5 \delta(f)$  El contenido armónico de  $X(f)$  y  $X'(f)$  será idéntico, salvo la componente continua. La señal  $x'(t)$  es un pulso rectangular unipolar de 5 v de amplitud, duración  $T=5 \mu\text{seg}$  que se repite cada  $2T=10 \mu\text{seg}$  y cuya Transformada de Fourier es conocida.

$$c_n = \frac{1}{2T} X_1\left(\frac{n}{2T}\right) \quad \text{como} \quad X_1(f) = 5T \frac{\text{sen}(\pi f T)}{(\pi f T)}$$

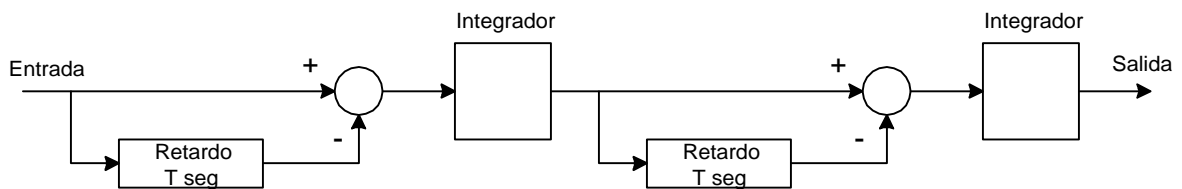
$$c_n = \frac{1}{2T} 5T \frac{\text{sen}\left(\pi \frac{n}{2T} T\right)}{\left(\pi \frac{n}{2T} T\right)} = \frac{5}{2} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} n\right)}{\left(\frac{\pi}{2} n\right)} \quad \text{para } n \text{ par, } |c_n| = 0,$$

$$\text{para } n \text{ impar: } |c_n| = \frac{5}{\pi n}$$

Se pide amplitud de armónicas alrededor de 15MHz:

$$|c_{149}| = 10.7 \text{ mV}, \quad |c_{150}| = 0, \quad |c_{151}| = 10.5 \text{ mV}$$

**Problema 13.-** Encontrar la respuesta al impulso  $h(t)$  y la función transferencia  $H(f)$  del sistema de la figura:



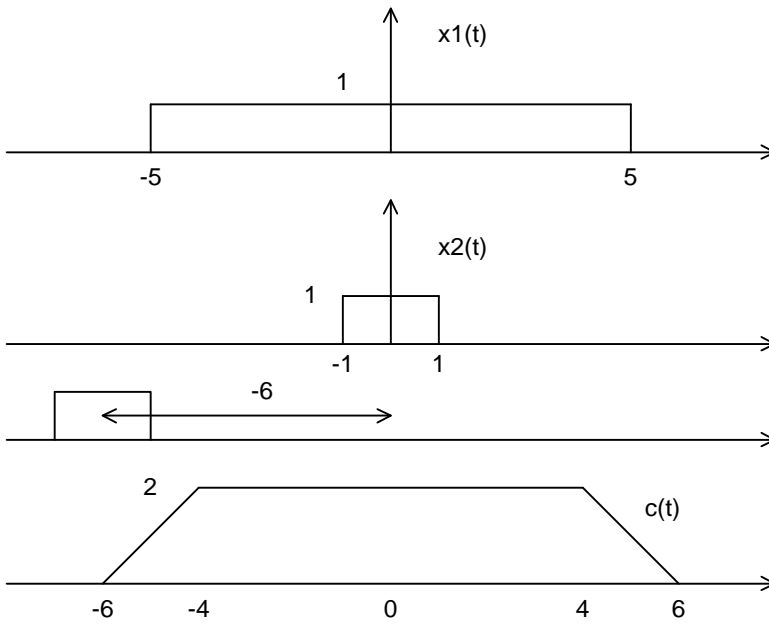
(Todas las componentes del sistema son ideales).

**Problema 14.-** Graficar el producto de convolución  $c(t) = x_1(t) * x_2(t)$  cuando:

(a)  $x_1(t) = \text{rect}(t, 10\text{ms})$  y  $x_2(t) = \text{rect}(t, 2\text{ms})$

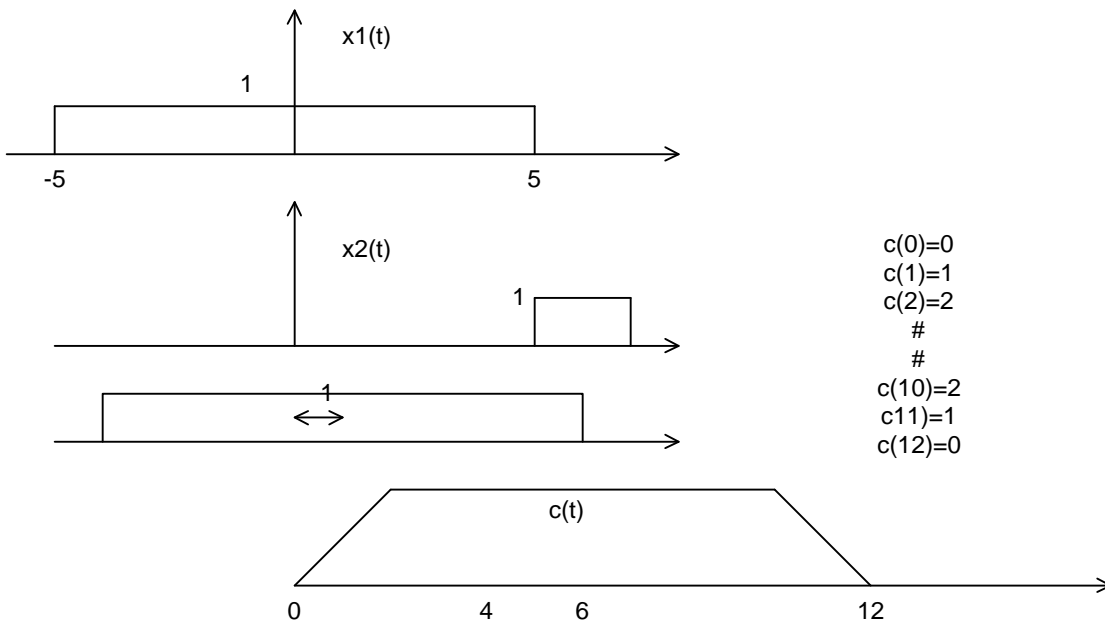
(b)  $x_1(t) = \text{rect}(t, 10\text{ms})$  y  $x_2(t) = \text{rect}(t-6\text{ms}, 2\text{ms})$

(a)



$c(-6)=0$   
 $c(-5)=1$   
 $c(-4)=2$   
#  
#  
 $c(4)=2$   
 $c(5)=1$   
 $c(6)=0$

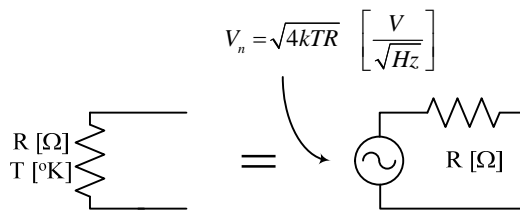
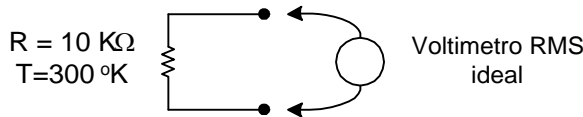
(b)



$c(0)=0$   
 $c(1)=1$   
 $c(2)=2$   
#  
#  
 $c(10)=2$   
 $c(11)=1$   
 $c(12)=0$

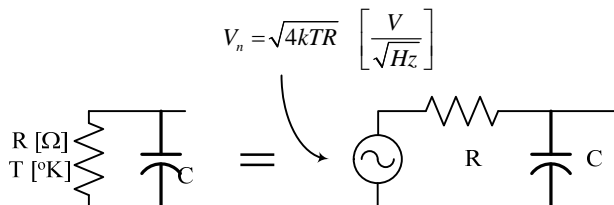
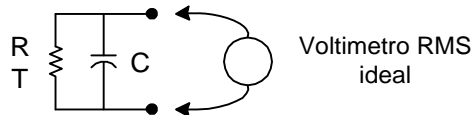
**Tema: Ruido térmico, distorsión no lineal**

**Problema 1.-** Calcular la tensión eficaz de ruido que medirá un voltímetro RMS ideal ( $Z_{in} = \infty$ ) en una resistencia de 10 k $\Omega$  a 300°K, suponiendo que el ancho de banda del voltímetro es (a) 1 MHz y (b) 10MHz.



Densidad de tensión eficaz de la resistencia R [W} a T [°K] :  $V_n(f) = \sqrt{4kTR} \left[ \frac{\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right]$ , uniforme entre 0 e infinito (se considera frecuencias positivas únicamente). La densidad de tensión eficaz al cuadrado será:  $V_n(f)^2 = 4kTR \left[ \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right]$ , también uniforme. El cuadrado de la tensión eficaz que medirá el voltímetro de ancho de banda B [Hz] será el área entre 0 y B :  $V^2 = 4kTRB \left[ \text{V}^2 \right]$ , es decir que la tensión eficaz será  $V = \sqrt{4kTRB} \left[ \text{V} \right]$ . Reemplazando valores se tiene en el caso (a):  $V = \sqrt{4 \cdot 1,37 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 10000 \cdot 10^6} = 12,8 \mu\text{V}$  y para (b):  $12,8 \cdot \sqrt{10} = 40,5 \mu\text{V}$

**Problema 2.-** Calcular la tensión eficaz de ruido que medirá un voltímetro RMS ideal ( $Z_{in} = \infty$ ) con ancho de banda mucho mayor que  $\frac{1}{2\pi RC}$  Hz en el circuito que se indica abajo :





Densidad de tensión eficaz de salida:

$$V_0(f) = V_n(f) \cdot \left| \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right| = V_n(f) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \left[ \frac{V}{\sqrt{Hz}} \right] \text{ Elevando al cuadrado para poder}$$

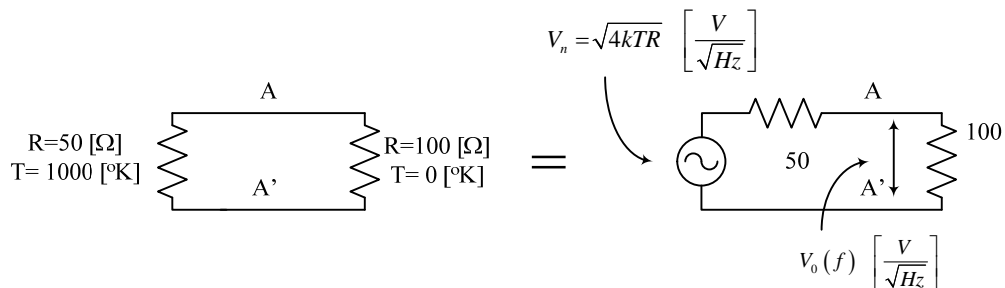
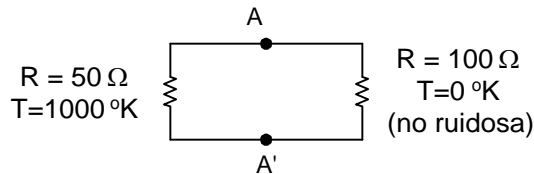
$$\text{integrar: } V_0(f)^2 = V_n(f)^2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} = \frac{4kTR}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \left[ \frac{V^2}{Hz} \right], \text{ donde } f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

Como el ancho de banda del voltímetro es mucho mayor que  $f_0$ , el cuadrado de la tensión eficaz que medirá puede calcularse con:

$$V_0^2 = \int_0^\infty V_0(f)^2 df = 4kTR \cdot \int_0^\infty \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} df = 4kTR \cdot \frac{\pi}{2} f_0 = \frac{kT}{C} [V^2], \text{ es decir que:}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{kT}{C}} [V], \text{ independiente del valor de R.}$$

**Problema 3.-** Determinar la densidad espectral de ruido  $\left[ \frac{Watt}{Hz} \right]$  entre A y A' .



$$V_0(f)^2 = V_n(f)^2 \cdot \left( \frac{100}{50 + 100} \right)^2 = 0,444 \cdot (4,1,37 \cdot 10^{-23} \cdot 1000 \cdot 50) = 1,216 \cdot 10^{-18} \left[ \frac{V^2}{Hz} \right]$$

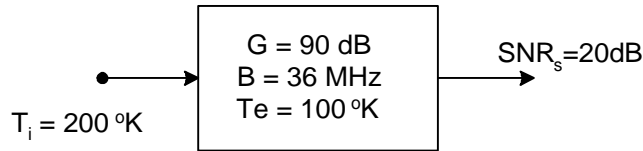
El espectro de densidad de potencia sobre la resistencia de 100 Ω será:

$$\eta(f) = \frac{V_0(f)^2}{100} = 1,216 \cdot 10^{-20} \left[ \frac{V^2}{\Omega \cdot Hz} \right] = \left[ \frac{W}{Hz} \right]$$

El espectro de máxima densidad de potencia disponible de la resistencia de 50 ohm a 1000 °K es:

$$\eta_{\max}(f) = kT = 1,37 \cdot 10^{-23} \cdot 1000 = 1,37 \cdot 10^{-20} \left[ \frac{W}{Hz} \right], \text{ es decir que } \eta(f) \text{ es } 11\% \text{ menor que } \eta_{\max}(f)$$

**Problema 4.-** Dado el esquema de la figura, calcular el nivel de potencia necesario de la señal de entrada para tener, en la salida, una relación señal-ruido de 20 dB (suponer que el sistema es lineal y adaptación en entrada/salida).



a) Cálculo del nivel de ruido en la salida:

$$N_s = k(T_i + T_e) \cdot B \cdot g \quad [W] \text{ en unidad logarítmica:}$$

$$N_s = 10 \cdot \log(k) + 10 \cdot \log(T_i + T_e) + 10 \cdot \log(B) + G \text{ donde } k, T \text{ y } B \text{ deben estar en unidades}$$

$$\text{coherentes. Normalmente se utiliza } k = 1,37 \cdot 10^{-23} \left[ \frac{W}{K \cdot Hz} \right] \quad \text{o} \quad k = 1,37 \cdot 10^{-20} \left[ \frac{mW}{K \cdot Hz} \right] \text{ lo}$$

que obliga a poner  $T$  y  $B$  en  $^{\circ}K$  y  $Hz$  respectivamente para tener el resultado en  $dBw$  o  $dBm$ :

$$10 \cdot \log(k) = -228,6 \left[ \frac{dBw}{K \cdot Hz} \right] = -198,6 \left[ \frac{dBm}{K \cdot Hz} \right]$$

$$N_s [dBm] = -198,6 + 10 \cdot \log(T_i + T_e) + 10 \cdot \log(B) + G = -198,6 + 10 \cdot \log(300) + 10 \cdot \log(36 \cdot 10^6) + 90$$

$$N_s = -8,26 [dBm]$$

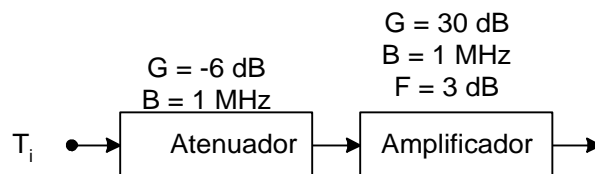
b) Cálculo del nivel de señal de salida necesario:

$$\text{Si } SNR_s = 20 \text{ dB y } N_s = -8,26 \text{ dBm, entonces } S_s = -8,26 + 20 = 11,74 \text{ dBm}$$

c) Cálculo del nivel de señal de entrada:

$$\text{Como } S_s = S_e + G \quad \therefore \quad S_e = S_s - G = 11,74 - 90 = -78,26 \text{ dBm}$$

**Problema 5.-** Dado el sistema :



Calcular: (a) La temperatura equivalente y el número de ruido de la cascada, (b) Potencia de ruido en la salida y nivel de señal necesario en la entrada para que la relación señal ruido de salida sea 10 dB, si  $T_i = 100^{\circ}K$ . (considerar componentes lineales y adaptación en las juntas).

(a) Temperatura equivalente y número de ruido de la cascada de cuádrupolos

Primera etapa (atenuador):

$$\text{Ganancia } G_1 = -6 \text{ dB, numérico: } g_1 = 0,25 \text{ veces}$$

$$\text{N}^{\circ} \text{ de ruido} = \text{atenuación} = 6 \text{ dB, numérico } F_1 = 4$$

$$\text{Temperatura equivalente: } T_{e1} = T_0 \cdot (F - 1) = 290 \cdot 3 = 870 \text{ } ^{\circ}K$$

$$\text{Ancho de banda} = 1 \text{ MHz}$$

Segunda etapa (amplificador):

Ganancia  $G_2 = 30 \text{ dB}$ , numérico:  $g_2 = 1000$  veces

Nº. de ruido =  $3 \text{ dB}$ , numérico  $F_2 = 2$

Temperatura equivalente:  $T_{e2} = T_0 \cdot (F - 1) = 290 \cdot 1 = 290 \text{ } ^\circ\text{K}$

Ancho de banda =  $1 \text{ MHz}$

Ganancia del sistema:  $24 \text{ dB}$ , Ancho de banda:  $1 \text{ MHz}$

$$T_{eT} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{g_1} = 870 + \frac{290}{0,25} = 2030 \text{ } ^\circ\text{K} \quad F_T = F_1 + \frac{F_2 - 1}{g_1} = 4 + \frac{1}{0,25} = 8 \quad (9 \text{ dB})$$

(b) Potencia de ruido en la salida y nivel de señal de entrada para tener  $SNR_s = 10 \text{ dB}$

$$N_s = -198,6 + 10 \cdot \log(100 + 2030) + 10 \cdot \log(10^6) + 24 = -81,3 \text{ dBm}$$

$$S_s = N_s + (SNR)_s = -81,3 + 10 = -71,3 \text{ dBm}$$

$$S_e = S_s - G_T = -71,3 - 24 = -95,3 \text{ dBm}$$

**Problema 6.-** Idem que el Prob. 5 pero cambiando las posiciones del amplificador y atenuador.

Igual que el anterior, intercambiando los bloques:

Ganancia del sistema:  $24 \text{ dB}$ , Ancho de banda:  $1 \text{ MHz}$

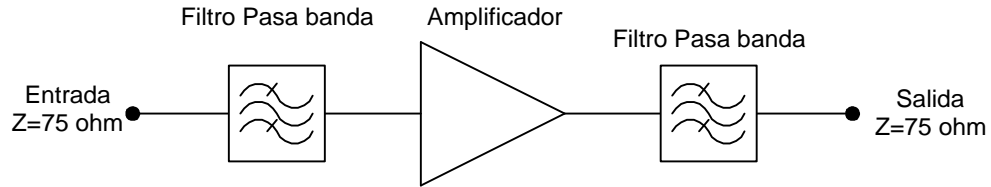
$$(a) T_{eT} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{g_1} = 290 + \frac{870}{1000} = 290,9 \text{ } ^\circ\text{K} \quad , \quad F_T = F_1 + \frac{F_2 - 1}{g_1} = 2 + \frac{3}{1000} = 2,003 \quad (3 \text{ dB})$$

$$(b) N_s = -198,6 + 10 \cdot \log(100 + 291) + 10 \cdot \log(10^6) + 24 = -88,6 \text{ dBm}$$

$$S_s = N_s + (SNR)_s = -88,6 + 10 = -78,6 \text{ dBm}$$

$$S_e = S_s - G_T = -78,6 - 24 = -102,6 \text{ dBm}$$

**Problema 7.-** Un diagrama simple de un amplificador de línea para CATV que opera en el rango de frecuencias de 50MHz a 500 MHz es:



Los datos de las componentes del sistema son:

- a) Filtros pasa banda de entrada/salida: Ancho de banda equivalente 450 MHz (50/500MHz)  
Atenuación en banda de paso: 2 dB  
Impedancia entrada/salida 75 ohm
- b) Amplificador (Mini Circuits HELA-10):  
Ganancia adaptada : 12 dB entre 50 y 1000MHz  
Impedancia entrada/salida: 75 ohm  
Número de ruido: 3.5 dB  
Punto de compresión de 1 dB: 26 dBm  
IP2 : 88 dBm  
IP3 : 47 dBm

Calcular:

- a) Ganancia, temperatura equivalente de ruido y número de ruido del sistema entrada/salida
- b) Potencia de ruido térmico disponible a la salida, suponiendo que la temperatura de ruido de entrada es 350 °K
- c) Máxima potencia de salida posible utilizando como criterio de que, en esa condición, el ruido de intermodulación sea aproximadamente igual al térmico.
- d) Relación señal ruido en la carga cuando la tensión eficaz de la señal de salida es de 500 mV.

Sistema de tres etapas en cascada: Atenuador-Amplificador-Atenuador

Parámetros por etapa:

Ganancia (numérico) :  $g1 := 10^{-0.2}$        $g2 := 10^{1.2}$        $g3 := g1$

No. de ruido (numérico):  $F1 := 10^{0.2}$        $F2 := 10^{0.35}$        $F3 := F1$

Temp. equivalente (°K)       $T1 := 290(F1 - 1)$        $T2 := 290(F2 - 1)$        $T3 := T1$

**(a) Sistema completo :**

Ganancia (numérico)       $g := g1 \cdot g2 \cdot g3$       Ganancia (dB)       $G := 10 \cdot \log(g)$

$g = 6.31$        $G = 8 \text{ dB}$

Temperatura equiv. :       $Te := T1 + \frac{T2}{g1} + \frac{T3}{g1 \cdot g2}$        $Te = 755.921 \text{ °K}$

Número de ruido (numérico):  $F := 1 + \frac{Te}{290}$       Número de ruido (dB):  $Fdb := 10 \log(F)$

$F = 3.607$        $Fdb = 5.571$

Ancho de banda: 450 MHz

**(b) Cálculo de ruido térmico a la salida si Tent=350 °K**

$Nterm := 1.37 \cdot 10^{-20} \cdot (350 + Te) \cdot 450 \cdot 10^6 \cdot g \text{ mW}$        $Nterm = 4.302 \times 10^{-8} \text{ mW}$

$10 \cdot \log(Nterm) = -73.663 \text{ dBm}$

**(c) Máxima potencia de salida para tener, en la salida, ruido térmico=ruido de intermodulación**

Datos del amplificador:  $IP2 := 10^{8.8} \text{ mW}$        $IP3 := 10^{4.7} \text{ mW}$

Se debe igualar a 0 la ecuación  $\frac{x^2}{IP2} + \frac{x^3}{IP3^2} - Nterm$       (Ojo, todas las variables en la misma dimensión, en éste caso mW)

$$\frac{x^2}{IP2} + \frac{x^3}{IP3^2} - Nterm \text{ solve } ,x \rightarrow \begin{pmatrix} -3.8609454207949199744 - 3.7388898732630300173 \cdot i \\ -3.8609454207949199744 + 3.7388898732630300173 \cdot i \\ 3.7408191360548674411 \end{pmatrix}$$

Como el resultado debe ser real (potencia), se descartan las raíces complejas: Psmáx=3.74 mW o 5.73 dBm

**(c) Relación señal/ruido si  $V_s=500$  mV**

$$V_s := 0.5 \text{ v} \quad P_s := \frac{V_s^2}{75} \cdot 1000 \text{ mW} \quad P_s = 3.333 \text{ mW} \quad 10 \log(P_s) = 5.229 \text{ dBm}$$

$$N_{term} = 4.302 \times 10^{-8} \text{ mW} \quad 10 \log(N_{term}) = -73.663 \text{ dBm}$$

$$N_{intermod} := \frac{P_s^2}{IP2} + \frac{P_s^3}{IP3^2} \quad N_{intermod} = 3.235 \times 10^{-8} \text{ mW} \quad 10 \log(N_{intermod}) = -74.901 \text{ dBm}$$

$$N_{stot} := N_{term} + N_{intermod} \quad N_{stot} = 7.537 \times 10^{-8} \text{ mW} \quad 10 \log(N_{stot}) = -71.228 \text{ dBm}$$

$$SNR := \frac{P_s}{N_{stot}} \quad SNR = 4.422 \times 10^7$$

$$SNR_{dB} := 10 \log(SNR) \quad SNR_{dB} = 76.457$$

## Tema: Modulación lineal

**Problema 1.-** Una señal aleatoria (estacionaria y ergódica)  $x(t)$  cuyas características son : (a) Limitada en ancho de banda a 4 kHz, (b) Sin componente de continua, (c) Valor eficaz 5 volt con función de densidad de probabilidad gaussiana, es utilizada como moduladora en un sistema de AM. Analizar la señal modulada de salida bajo las siguientes suposiciones: (1) La potencia de portadora es de 100 watt, (2) Es tolerable definir como valor de pico simétrico de  $x(t)$  a aquel que no es superado el 99% del tiempo y (3) La impedancia de carga de la salida modulada es de 50 ohm.

En particular, considerando que se utilice el máximo índice de modulación posible, definir: (a) El valor de pico (tensión) de la señal modulada, (b) La potencia total transmitida, (c) La distribución de la potencia transmitida en portadora y bandas laterales, (e) El ancho de banda ocupado.

(a) Valor de pico de la señal moduladora

Señal aleatoria gaussiana:  $\bar{x} = 0$  ,  $x_{rms} = \sigma = 5$  [volt] , el 99% del tiempo estará entre  $\pm 2,58.\sigma \approx \pm 13$  [volt]  $\therefore x_p = \pm 13$  [volt]

(b) Potencia total transmitida

Señal modulada AM:  $e(t) = (k_1 + k_2 \cdot x(t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$  donde  $k_1$  (dim. [volt]) es la amplitud de la portadora y  $k_2$  (adimensional) un factor de escala que asegure modulación sin distorsión. Tiene que cumplirse, para cualquier valor de  $x(t)$ :  $k_1 + k_2 \cdot x(t) \geq 0$  , el caso más desfavorable es cuando  $x(t)$

alcanza su pico negativo:  $k_1 - k_2 \cdot x_p \geq 0 \quad \therefore k_2 \leq \frac{k_1}{x_p}$  . La máxima modulación posible es

cuando  $k_2 = \frac{k_1}{x_p}$  . Con éste valor, la amplitud máxima de la señal modulada será  $2k_1$

Potencia total:  $P = \frac{\langle e^2 \rangle}{R} = \frac{1}{2R} \cdot (k_1^2 + k_2^2 \cdot \langle x^2 \rangle) = \frac{k_1^2}{2R} + \frac{k_2^2 \cdot \langle x^2 \rangle}{2R}$  , el primer término

corresponde a la potencia de la portadora y el segundo la de las bandas laterales (que llevan información)

La potencia de portadora es 100 watt :  $\frac{k_1^2}{2R} = 100 \quad \therefore k_1 = \sqrt{100 \cdot 2R} = 100$  [volt] y

$k_2 = \frac{k_1}{x_p} = \frac{100}{13} = 7,7$  , entonces:  $P = \frac{k_1^2}{2R} + \frac{k_2^2 \cdot \langle x^2 \rangle}{2R} = 100 + \frac{7,7^2 \cdot 25}{100} = 115$  [watt]

Tensión máxima de la señal modulada 200 [volt]

(c) La portadora lleva el 87% de la potencia media transmitida y las bandas laterales el 13% restante.

(d) El ancho de banda ocupado, considerando frecuencias positivas, será 8 kHz

**Problema 2.-** La misma señal  $x(t)$  del problema 1, se aplica como moduladora a un sistema de doble banda lateral sin portadora. Suponiendo que la tensión de pico de la señal modulada es igual a la considerada en el prob.1, calcular la potencia total transmitida y el ancho de banda ocupado.

Señal de doble banda lateral sin portadora:  $e(t) = k \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ , donde  $k$  es un factor de escala (adimensional). El valor máximo de amplitud será  $e(t)|_{\max} = k \cdot x_p = 200$  [volt], la misma tensión

máxima del problema 1.  $\therefore k = \frac{200}{x_p} = \frac{200}{13} = 15,38$

Potencia media transmitida total:  $P = \frac{\langle e^2 \rangle}{R} = \frac{k^2 \cdot \langle x^2 \rangle}{2R} = \frac{15,38^2 \cdot 25}{100} = 59$  [watt], la totalidad en las bandas laterales que transportan información.

El ancho de banda ocupado es similar al del problema 1: 8 kHz

Notar que utilizando doble banda lateral sin portadora, a igualdad de potencia de pico, se transmite 393% mas potencia útil utilizando el 51% de la potencia total transmitida por un sistema de mod. de amplitud con portadora.

**Problema 3.-** La misma señal  $x(t)$  del problema 1, se aplica como moduladora a un sistema de banda lateral única. Suponiendo que la tensión de pico de la señal modulada es igual a la considerada en el prob.EAL#4.1, calcular la potencia total transmitida y el ancho de banda ocupado.

Señal de banda lateral única:  $e(t) = k \cdot (x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \pm \hat{x}(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t))$ , donde  $k$  es un factor de escala (adimensional).

El valor máximo de  $e(t)$  no puede determinarse sin conocer  $x(t)$  y su T. de Hilbert  $\hat{x}(t)$ . Para señales aleatorias continuas aproximadamente se cumple que :

$$x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \pm \hat{x}(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)|_{\max} = 1,01 \dots 1,5 \cdot x(t)|_{\max}$$

Tomando un valor intermedio, p.ej.:  $x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \pm \hat{x}(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)|_{\max} = 1,25 \cdot x(t)|_{\max}$

se tendría:  $e(t)|_{\max} = 1,25 \cdot k \cdot x(t)|_{\max} = 1,25 \cdot k \cdot 13 = 200$  [volt], lo que da:  $k = \frac{200}{1,25 \cdot 13} = 12,3$

(Otra aproximación menos precisa, sería suponer que  $x(t)|_{\max} = \hat{x}(t)|_{\max}$  y que los valores máximos ocurren en el mismo instante, en ése caso  $e(t)|_{\max} = \sqrt{2} \cdot x(t)|_{\max} = 1,41 \cdot x(t)|_{\max}$  )

Potencia media transmitida total:  $P = \frac{\langle e^2 \rangle}{R} = \frac{k^2 \cdot (\langle x^2 \rangle + \langle \hat{x}^2 \rangle)}{2R} = \frac{k^2 \cdot \langle x^2 \rangle}{R}$ , utilizando el valor

de  $k = 12,3$ :  $P = \frac{12,3^2 \cdot 25}{50} = 75,6$  [watt], la totalidad en la banda lateral que transporta información.

El ancho de banda ocupado es la mitad de la de los problemas (EAL#4) 1 y 2: 4 kHz

Notar la mayor eficiencia del sistema de banda lateral única.



**Problema 4.-** Repetir el cálculo de los problemas 1 ,2 y 3, pero suponiendo de que  $x(t)$  es una señal senoidal de frecuencia 4 kHz del mismo valor eficaz (5 v) y, para el caso de modulación de amplitud, considerar un índice de modulación 1.

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_m \cdot t) \quad \text{si } x_{rms} = 5 \text{ [volt] , } A = 5 \cdot \sqrt{2} = 7,07 \text{ [volt]}$$

Caso 1, Modulación de amplitud con portadora:  $e(t) = (k_1 + k_2 \cdot x(t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

$$k_1 = 100 \text{ [volt]} \quad k_2 = \frac{k_1}{x_p} = \frac{100}{7,07} = 14,14$$

$$e(t) = (100 + 100 \cdot \cos(2\pi f_m t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\text{Potencia total: } P = \frac{\langle e^2 \rangle}{R} = \frac{1}{2R} \cdot (k_1^2 + k_2^2 \cdot \langle x^2 \rangle) = \frac{k_1^2}{2R} + \frac{k_2^2 \cdot \langle x^2 \rangle}{2R} = 100 + \frac{14,14^2 \cdot 25}{100} = 150 \text{ [watt]}$$

100 watt en portadora (66,6%P) , 50 watt en bandas laterales (33,3%P) . Ancho de banda ocupado 8 kHz. Máxima tensión de  $e(t)$  200 volt

Caso 2, Modulación de banda lateral doble sin portadora:  $e(t) = k \cdot x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

$$\therefore k = \frac{200}{x_p} = \frac{200}{7,07} = 28,29$$

$$P = \frac{\langle e^2 \rangle}{R} = \frac{k^2 \cdot \langle x^2 \rangle}{2R} = \frac{28,29^2 \cdot 25}{100} = 200 \text{ [watt]}$$

$$e(t) = 200 \cdot \cos(2\pi \cdot f_m \cdot t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) = 100 \cdot \cos(2\pi \cdot (f_0 + f_m) \cdot t) + 100 \cdot \cos(2\pi \cdot (f_0 - f_m) \cdot t)$$

Caso 3, Modulación de banda lateral única:

$$e(t) = k \cdot (x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \pm \hat{x}(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)) = k \cdot \sqrt{x(t)^2 + \hat{x}(t)^2} \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

$$\text{si } x(t) = 7,07 \cdot \cos(2\pi \cdot f_m \cdot t) \text{ entonces } \hat{x}(t) = 7,07 \cdot \cos\left(2\pi \cdot f_m \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = 7,07 \cdot \sin(2\pi \cdot f_m \cdot t)$$

En éste caso puede determinarse exactamente el valor máximo de  $e(t)$  :

$$e(t)|_{\max} = k \cdot \sqrt{7,07^2 \cdot (\cos^2(2\pi \cdot f_m \cdot t) + \sin^2(2\pi \cdot f_m \cdot t))} = k \cdot 7,07 = 200 \text{ [volt]} \quad \therefore k = 28,28$$

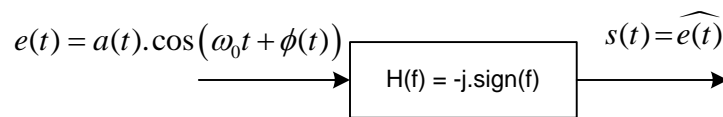
$$P = \frac{\langle e^2 \rangle}{R} = \frac{k^2 \cdot (\langle x^2 \rangle + \langle \hat{x}^2 \rangle)}{2R} = \frac{k^2 \cdot \langle x^2 \rangle}{R} = \frac{28,28^2 \cdot 25}{50} = 400 \text{ [watt]}$$

$$\begin{aligned}
e(t) &= 28,28.(7,07.\cos(2\pi f_m t).\cos(2\pi f_0 t) \pm 7,07.7,07.\sin(2\pi f_m t).\sin(2\pi f_0 t)) = \\
&= 200.(\cos(2\pi f_m t).\cos(2\pi f_0 t) \pm \sin(2\pi f_m t).\sin(2\pi f_0 t)) = \\
&= 200.\cos(2\pi.(f_m \pm f_0).t)
\end{aligned}$$

**Problema 5.-** Determinar la Transformada de Hilbert de una señal de banda angosta

Señal de banda angosta en dominio de tiempo:  $e(t) = a(t).\cos(\omega_0 t + \phi(t))$  y su espectro de frecuencias:

$$E(f) = A(f) * \left( \frac{e^{-j\phi(t)}}{2} \delta(f - f_0) + \frac{e^{j\phi(t)}}{2} \delta(f + f_0) \right) = \frac{e^{-j\phi(t)}}{2} A(f - f_0) + \frac{e^{j\phi(t)}}{2} A(f + f_0)$$



Multiplicando  $E(f)$  con  $H(f) = -j.\text{sign}(f)$  se tendrá el espectro de frecuencias de  $\widehat{e}(t)$  :

$$\widehat{E}(f) = -\frac{j.e^{-j\phi(t)}}{2} A(f - f_0) + \frac{j.e^{j\phi(t)}}{2} A(f + f_0) = A(f) * \left( \frac{-j.e^{-j\phi(t)}}{2} \delta(f - f_0) + \frac{j.e^{j\phi(t)}}{2} \delta(f + f_0) \right)$$

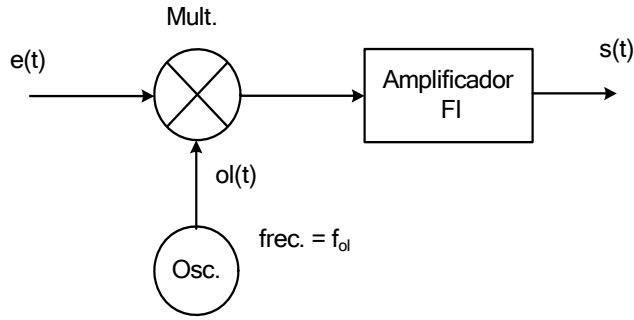
La transformada inversa de  $\widehat{E}(f)$ , dará la T. de H. de  $e(t)$  :  $\widehat{e}(t) = a(t).\sin(\omega_0 t + \phi(t))$ , válido cuando el ancho de banda de  $a(t)$  sea menor o igual a  $f_0$ .

Casos particulares:

$$(a) \phi(t) = 0 \quad \therefore \quad e(t) = a(t).\cos(\omega_0 t) \quad \text{y} \quad \widehat{e}(t) = a(t).\sin(\omega_0 t)$$

$$(b) \phi(t) = -\frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad e(t) = a(t).\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = a(t).\sin(\omega_0 t) \quad \text{y} \quad \widehat{e}(t) = -a(t).\cos(\omega_0 t)$$

**Problema 6.-** Analizar el sistema receptor de la figura y determinar el espectro de la señal de salida  $s(t)$  si la entrada es:  $e(t) = a(t).\cos(2\pi f_1 t) + b(t).\cos(2\pi f_2 t)$ , donde  $a(t)$  y  $b(t)$  son señales de banda de base con ancho de banda idéntico de  $B \text{ Hz}^+$  con  $B \ll f_1$  o  $f_2$ . La frecuencia del oscilador Osc. es  $f_{oi} = \frac{f_1 + f_2}{2}$  y el ancho de banda del amplificador es  $2B \text{ Hz}^+$  centrado en  $\frac{f_1 - f_2}{2} \text{ Hz}$  (suponer su ganancia uniforme en el ancho de banda y que  $f_1 > f_2$ ).



Es posible recuperar únicamente  $a(t)$  o  $b(t)$  de la salida  $s(t)$  ?. Como lo haría ?

Señal de entrada al multiplicador:  $e(t) = a(t) \cos(\omega_1 t) + b(t) \cos(\omega_2 t)$ , suponiendo que la señal del oscilador local es:  $e_{ol} = \cos(\omega_{ol} t)$ , se tendrá a la salida del multiplicador:

$$e_{mult}(t) = e(t) \cdot e_{ol}(t) = (a(t) \cdot \cos(\omega_1 t) + b(t) \cdot \cos(\omega_2 t)) \cdot \cos(\omega_{ol} t) =$$

$$= \frac{a(t)}{2} \cdot \cos(\omega_1 \pm \omega_{ol}) t + \frac{b(t)}{2} \cdot \cos(\omega_2 \pm \omega_{ol}) t, \text{ como } \omega_1 - \omega_{ol} = \omega_1 - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

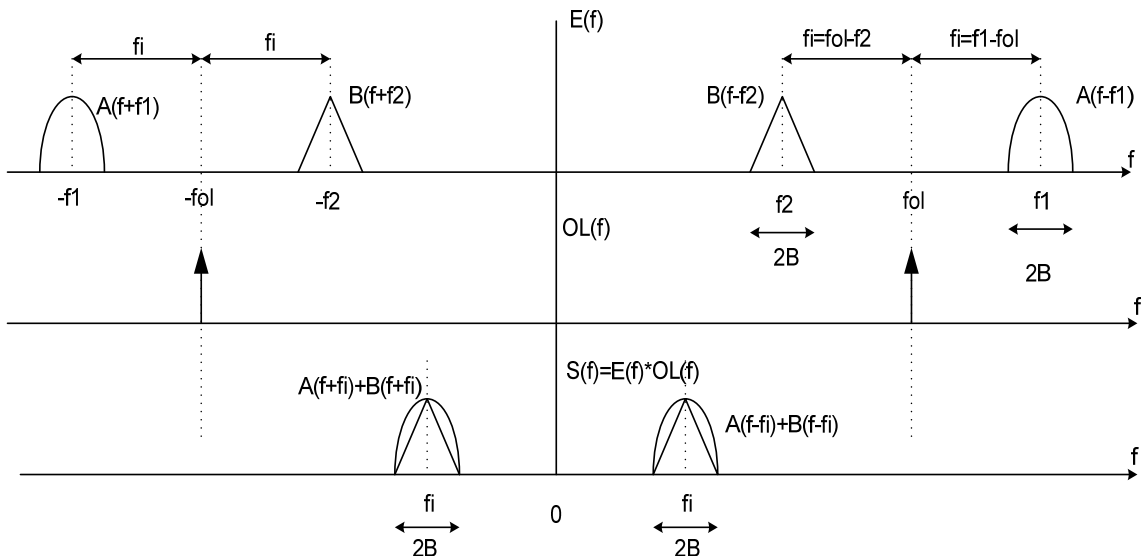
y  $\omega_2 - \omega_{ol} = \omega_2 - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ , el filtro dejará pasar las componentes diferencia y

eliminará la suma, es decir que:

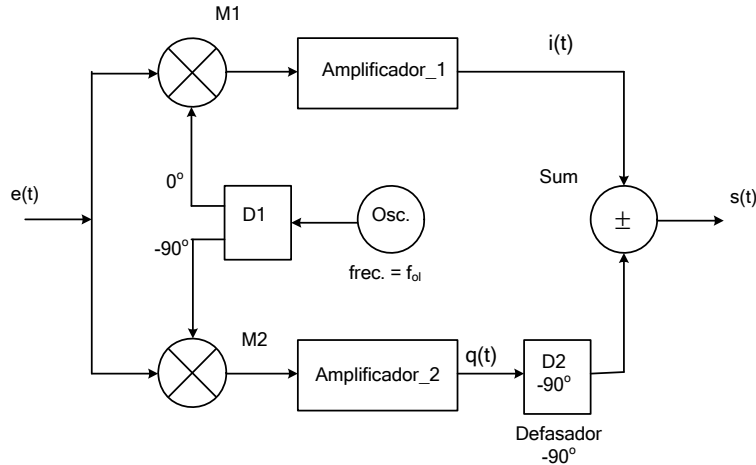
$$s(t) = \frac{a(t)}{2} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) + \frac{b(t)}{2} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) = \frac{a(t) + b(t)}{2} \cdot \cos(\omega_i t).$$

La señal de salida tiene las componentes moduladoras  $a(t)$  y  $b(t)$  modulando la misma frecuencia portadora y ocupando el mismo ancho de banda. No es posible separarlas (El problema de la frecuencia imagen en un receptor superheterodino). Un detector coherente, recuperaría la suma de las dos señales moduladoras  $a(t)$  y  $b(t)$ .

Espectros de frecuencia :



**Problema 7.-** La misma señal de entrada del problema 6 es aplicada al el sistema receptor de la figura:



Los datos de las componentes del sistema son:

- (1) Frecuencia del oscilador Osc.  $f_{oi} = \frac{f_1 + f_2}{2}$
- (2) Los amplificadores \_1 y \_2 son idénticos, con ancho de banda de  $2B \text{ Hz}^+$  centrado en  $f_i = \frac{f_1 - f_2}{2} \text{ Hz}$  y ganancia uniforme.
- (3) D1 y D2 son defasadores de  $90^\circ$  (Transf. De Hilbert).
- (4) El bloque Sum puede configurarse como sumador o restador

Es posible recuperar únicamente  $a(t)$  o  $b(t)$  de la salida  $s(t)$  ?. Como lo haría ?

Suponiendo que las salidas de  $0^\circ$  y  $-90^\circ$  del defasador D1 son  $\cos(\omega_{oi}t)$  y  $\sin(\omega_{oi}t)$ , se tendrá en las salidas  $i(t)$  y  $q(t)$ :

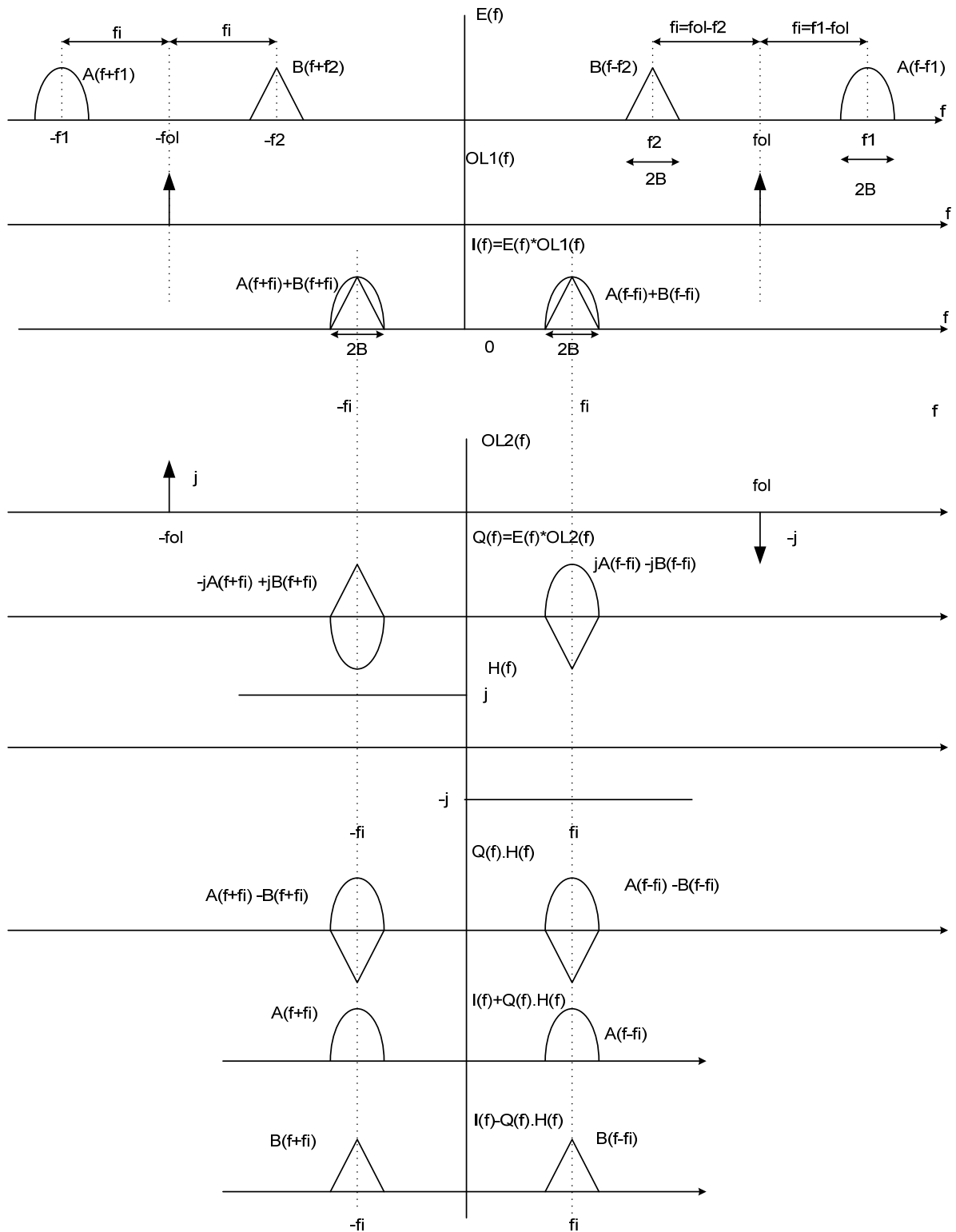
$$i(t) = \frac{a(t)}{2} \cdot \cos(\omega_i t) + \frac{b(t)}{2} \cdot \cos(\omega_i t) \quad \text{y} \quad q(t) = -\frac{a(t)}{2} \cdot \sin(\omega_i t) + \frac{b(t)}{2} \cdot \sin(\omega_i t) \quad , \text{después del}$$

$$\text{defasador D2: } \widehat{q(t)} = \frac{a(t)}{2} \cdot \cos(\omega_i t) - \frac{b(t)}{2} \cdot \cos(\omega_i t) .$$

$$\text{Sumando las salidas: } i(t) + \widehat{q(t)} = a(t) \cdot \cos(\omega_i t)$$

$$\text{Restándolas: } i(t) - \widehat{q(t)} = b(t) \cdot \cos(\omega_i t)$$

Será posible recuperar  $a(t)$  o  $b(t)$ .



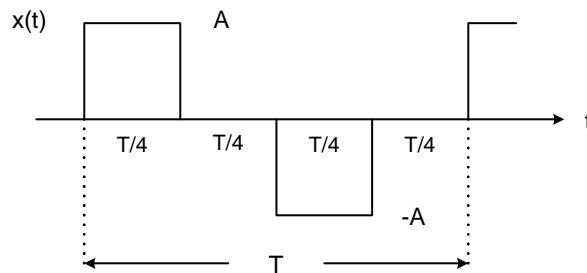
Este esquema se utiliza en algunos circuitos integrados de RF, se puede alcanzar un excelente rechazo de imagen aun en el rango de microondas (11GHz p.ej.) utilizando frecuencias intermedias bajas (eventualmente CC) y eliminando la necesidad de utilizar conversiones múltiples.

## Tema: Modulación angular

**Problema 1.-** La señal moduladora en un sistema de modulación de fase es un tono  $x(t)=\cos 2\pi f_m t$  (suponer  $x(t)=0$  para  $t<0$ ). Si la máxima desviación de fase obtenida en la señal de salida es  $\Delta\phi$ , calcular (a) La desviación instantánea de frecuencia ( $f_i(t)$  o  $\omega_i(t)$ ) y (b) La máxima desviación de frecuencia ( $\Delta f$  o  $\Delta\omega$ ).

**Problema 2.-** La señal moduladora en un sistema de modulación de frecuencia es un tono  $x(t)=\cos 2\pi f_m t$  (suponer  $x(t)=0$  para  $t<0$ ). Si la máxima desviación de frecuencia obtenida en la señal de salida es  $\Delta f$ , calcular (a) La desviación instantánea de fase ( $\phi_i(t)$ ) y (b) La máxima desviación de fase ( $\Delta\phi$ ).

**Problema 3.-** Una señal periódica como la de la figura, modula un generador de FM que tiene una constante de modulación  $K_\omega$  [radianes/seg.volt].



Dibuje dos gráficos similares durante T seg., pero de  $\omega_i(t)$  vs.  $t$  y  $\phi(t)$  vs.  $t$ , donde  $\omega_i(t)$  y  $\phi(t)$  son las desviaciones de frecuencia y fase instantánea de la señal modulada respectivamente. Determinar con precisión la máxima desviación de fase ( $\Delta\phi$ ) y la máxima desviación de frecuencia instantánea ( $\Delta\omega$ ).

**Problema 4.-** En un transmisor de modulado en frecuencia, se mide que la desviación de frecuencia instantánea es lineal respecto a la tensión de entrada de modulación y tiene las siguientes características: (a) con 0 volt de entrada de modulación no hay desviación de frecuencia, (b) con  $\pm 2$  volt de entrada, la desviación de frecuencia vale  $\pm 30$  kHz y (c) La linealidad se mantiene hasta  $\pm 10$  volt de entrada.

Si al transmisor descrito se le aplica, como moduladora, una señal aleatoria con componente continua nula, limitada en amplitud a  $\pm 5$  volt y en ancho de banda a 10 kHz, calcular: (a) La máxima desviación de frecuencia y (b) El ancho de banda ocupado por la señal modulada.

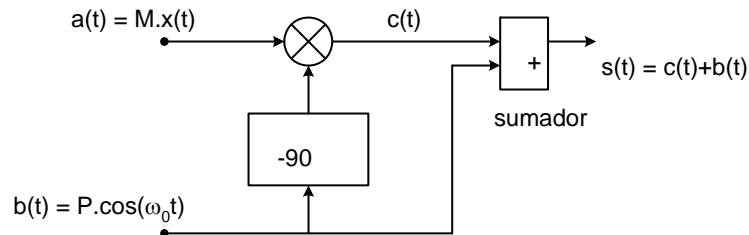
**Problema 5.-** En un sistema de modulación angular, la desviación instantánea de frecuencia (o frecuencia instantánea variacional) viene dada por  $f_i(t)=\Delta f \cdot x(t)$ , donde  $\Delta f$  es la máxima desviación de frecuencia y  $x(t)$  la señal moduladora (normalizada a  $|x(t)_{\max}| = 1$ ) de ancho de banda  $B$ . Si se define la desviación eficaz de frecuencia  $f_e$  como el valor eficaz de  $f_i(t)$ , determine el ancho de banda de Carson en función de  $B$ ,  $f_e$  y el factor de pico de  $x(t)$ .

**Problema 6.-** Una señal de frecuencia central  $f_0$  modulada en fase, es demodulada por un detector (ideal) de FM. Suponiendo que la máxima desviación de fase es  $\Delta\phi$  y que el ancho de banda de la señal moduladora  $x(t)$  es mucho menor que  $f_0$ , calcular la señal de salida del detector y el módulo de su espectro de frecuencias. (Suponer que el espectro de  $x(t)$ , es continuo entre  $\pm B$ ).

**Problema 7.-** Una señal de frecuencia central  $f_0$  modulada en frecuencia, es demodulada por un detector (ideal) de PM. Suponiendo que la máxima desviación de frecuencia es  $\Delta f$  y que el ancho de banda de la señal moduladora  $x(t)$  es mucho menor que  $f_0$ , calcular la señal de salida del detector y el módulo de su espectro de frecuencias (Suponer que el espectro de  $x(t)$ , es continuo entre  $\pm B$ ).

**Problema 8.-** Que haría para recuperar la señal moduladora  $x(t)$  en los problemas 6 y 7 utilizando los mismos detectores?

**Problema 9.-** Analizar el esquema de la figura:



Las componentes del sistema son ideales y  $x(t)$  es una señal acotada en ancho de banda a  $\pm B$  Hz con  $B \ll f_0$  y en tensión a  $\pm 1$  volt. Las constantes M y P son reales y positivas. Determinar  $s(t)$  y, suponiendo un espectro genérico para  $X(f)$ , el módulo de su espectro  $|S(f)|$  y el ancho de banda ocupado .

**Problema 10.-** El esquema del problema anterior puede utilizarse como modulador de fase (sistema Armstrong). Para que que la modulación no tenga distorsión apreciable y suponiendo el valor de P constante, debe imponerse una limitación en el valor de M. Proponga un valor que estime razonable y calcule la máxima desviación de fase de  $s(t)$  y el ancho de banda ocupado por  $S(f)$  aplicando la regla de Carson. Si el resultado obtenido difiere al ya calculado, ¿a que atribuye la diferencia?