PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

SISTEMAS DE TIEMPO DISCRETO

DEFINICION Y PROPIEDADES

SISTEMAS DE TIEMPO DISCRETO

Propiedades del STD

- Lineal
- Causal
- Invariante en el tiempo

Un STD se puede definir por :

- Tabla de valores
- Ecuaciones de Diferencias
- Transformada Z

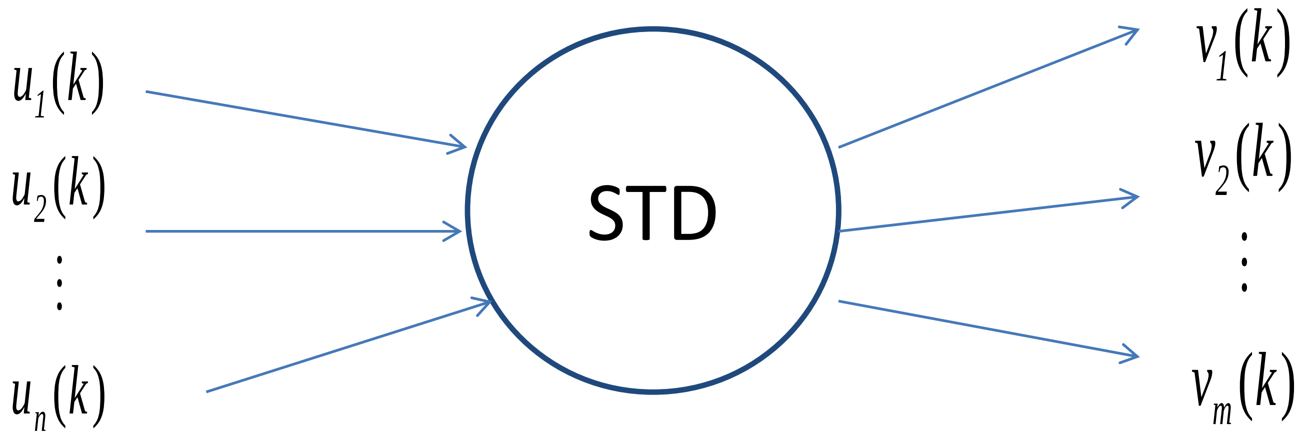
DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

- Un Sistema de Tiempo Discreto (STD) es aquél en que sus entradas, sus salidas y sus estados son funciones discretas del tiempo.

- Una función se dice discreta del tiempo si y solo si dicha función está definida para valores discretos de su variable dependiente t_k.

- En general t_k puede asumir la forma $t_k = kT$, donde k es un número entero y positivo; T es el intervalo de muestreo, y no es necesariamente constante.

Supongamos que tenemos un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO):



Las entradas y las salidas son respectivamente $\{u_i(k)\}$y $\{v_j(k)\}$, donde el subíndice *i* ó *j* indica el orden de la entrada o salida.

Tabla de Valores

k	u(k)	v(k)
0	u(0)	v(0)
1	u(1)	v(1)
2	u(2)	v(2)
…		
k-2	u(k-2)	v(k-2)
k-1	u(k-1)	v(k-1)
k	u(k)	v(k)

Puesto que la salida $v(k)$ es función de los k instantes anteriores de la entrada y de los k-1 valores anteriores de la salida, la relación funcional entre la entrada y la salida se expresa como:

$$v(k) = f\,\{u(k), u(k\text{-}1), u(k\text{-}2), \ldots, u(k\text{-}i); \\ v(k\text{-}1), v(k\text{-}2), \ldots, v(k\text{-}j)\} \qquad (1)$$

DEFINICIONES DE STD

Utilizaremos letras mayúsculas para indicar que las entradas y las salidas pueden representarse como vectores.

Para representar al sistema, utilizaremos el símbolo

$$\overset{S}{\Rightarrow}$$

esto indica que hay una relación funcional entre un conjunto de salidas y el conjunto de entradas.

Podríamos interpretar al sistema S como un ente que produce, sobre un conjunto ordenado de la variable u_j , una transformación o “mapping”, en las variables de salida v_j.

$$\{u(k)\} \overset{S}{\Longrightarrow} \{v(k)\} \qquad (2)$$

Esta expresión indica que, la sucesión de entrada $u(k)$, produce a través del sistema S, una sucesión de salida $v(k)$.

- Utilizaremos esta notación de una sucesión, porque el proceso se realiza en forma repetitiva para todos los instantes k.
- La expresión (2) también puede escribirse interpretando a S como un operador:

$$U \overset{S}{\Longrightarrow} V \qquad (3)$$

donde:

$$U\begin{Bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_n(k) \end{Bmatrix} \overset{S}{\Longrightarrow} V\begin{Bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ \vdots \\ v_n(k) \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

Esto es, podemos obtener la salida en función de la entrada en un instante determinado, a través del sistema S.

PROPIEDADES DE UN STD

a) LINEALIDAD

Dadas C_1 y C_2 constantes, se verifica que:

$$C_1\{u_1(k)\} + C_2\{u_2(k)\} \overset{S}{\Longrightarrow} C_1\{v_1(k)\} + C_2\{v_2(k)\}$$

donde

$$\{u_1(k)\} \overset{S}{\Longrightarrow} \{v_1(k)\}$$

y

$$\{u_2(k)\} \overset{S}{\Longrightarrow} \{v_2(k)\}$$

b) SISTEMA INVARIANTE CON EL TIEMPO

Supongamos que una sucesión de término general $u(k\text{-}m)$ a través de un sistema S, produce una salida $v(k\text{-}m)$, es decir:

$$\{u(k-m)\} \overset{S}{\Longrightarrow} \{v(k-m)\}, \quad \forall\, m$$

Un sistema STD es invariante en el tiempo si y solo si se verifica esta expresión .

d) CAUSALIDAD

Un STD se dice causal si la(s) salida(s) no aparece(n) antes que la(s) entrada(s).
Si las señales son causales, el sistema es causal.

Si el STD es causal, lineal, e invariante en el tiempo, se denomina con la sigla STD LTI

STD: Sistema de Tiempo Discreto
LTI: Lineal , Tiempo Invariante

DESCRIPCIÓN DE LOS STD LTI

1) ECUACIÓN GENERAL DE DIFERENCIAS

Supongamos que tenemos un sistema STD LTI con una función de entrada y una función de salida:

$$x(k) \longrightarrow \boxed{STD} \longrightarrow y(k)$$

Las Ecuaciones de Diferencias nos permiten describir el sistema de la siguiente forma:

$$y(k)+B_1y(k-1)+B_2y(k-2)+...+B_ny(k-n)=A_0x(k)+A_1x(k-1)+A_2x(k-2)+...+A_mx(k-m)$$

no necesariamente debe ser n=m

Despejando $y(k)$ se obtiene una ecuación de diferencias en forma desarrollada:

$$\begin{aligned} y(k) = {} & A_0 x(k) + A_1 x(k-1) + A_2 x(k-2) + \ldots + A_m x(k-m) \\ & - B_1 y(k-1) - B_2 y(k-2) - \ldots - B_n y(k-n) \end{aligned} \qquad (7)$$

La ecuación (7) se llama "la forma más general de una Ecuación de Diferencias Lineal".

Se puede escribir en forma compacta:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(k-i) - \sum_{j=1}^{n} B_j y(k-j)$$

Esta ecuación y las condiciones iniciales determinan completamente el comportamiento del sistema.

Ecuaciones de Diferencias

$$y(k)+B_1y(k-1)+B_2y(k-2)+...+B_ny(k-n)=A_0x(k)+A_1x(k-1)+A_2x(k-2)+...+A_mx(k-m)$$

a) Forma desarrollada:

$$y(k)=A_0x(k)+A_1x(k-1)+A_2x(k-2)+...+A_mx(k-m)-B_1y(k-1)-B_2y(k-2)-...-B_ny(k-n)$$

b) Forma compacta

$$y(k)=\sum_{i=0}^{m}A_ix(k-i)-\sum_{j=1}^{n}B_jy(k-j)$$

Transformada Z

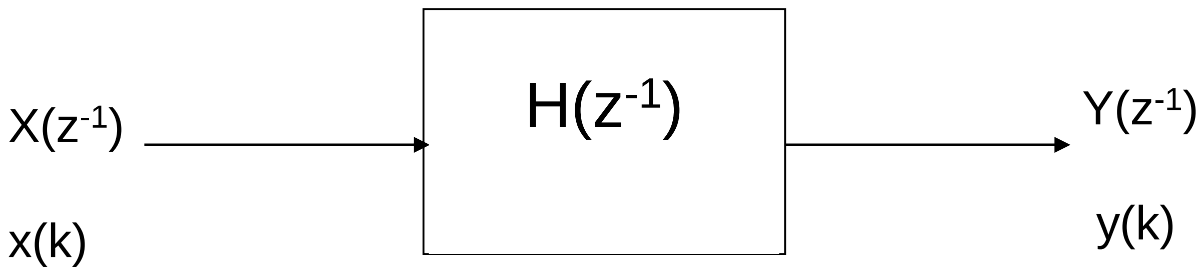
$$Y(z^{-1}) = A_0 X(z^{-1}) + A_1 z^{-1} X(z^{-1}) + A_2 z^{-2} X(z^{-1}) + \ldots + A_m z^{-m} X(z^{-1}) -$$
$$- B_1 z^{-1} Y(z^{-1}) - B_2 z^{-2} Y(z^{-1}) - \ldots - B_n z^{-n} Y(z^{-1})$$

$$Y(z^{-1})\left(1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \ldots + B_n z^{-n}\right) = \left(A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \ldots + A_m z^{-m}\right) X(z^{-1})$$

$$Y(z^{-1}) = \frac{\left(A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \ldots + A_m z^{-m}\right)}{\left(1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \ldots + B_n z^{-n}\right)} X(z^{-1})$$

$$\frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})} = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \ldots + A_m z^{-m}}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \ldots + B_n z^{-n}}$$

Función Transferencia



$$Y(z^{-1}) = H(z^{-1})X(z^{-1})$$

$$H(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})} = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \ldots + A_m z^{-m}}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \ldots + B_n z^{-n}}$$

Formas de la Función Transferencia $H(z^{-1})$

a) Forma desarrollada

$$H(z^{-1}) = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \ldots + A_m z^{-m}}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \ldots + B_n z^{-n}}$$

b) Forma compacta

$$H(z^{-1}) = \frac{\sum_{i=0}^{m} A_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{n} B_j z^{-j}}$$

También es posible expresar la Función Transferencia en términos de sus polos y ceros.

Función Transferencia

Expresada en términos de polos y ceros

- De la expresión general de la función transferencia se obtienen las raíces de los polinomios numerador y denominador.
- Llamando **ceros** c_i a las singularidades del polinomio numerador, y **polos** p_i a las del polinomio denominador, y siendo γ el factor de ganancia, la función transferencia también se puede expresar como:

$$H(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})} = \gamma \frac{(z^{-1} - c_1)(z^{-1} - c_2)\ldots(z^{-1} - c_n)}{(z^{-1} - p_1)(z^{-1} - p_2)\ldots(z^{-1} - p_m)}$$

- En forma compacta la función transferencia en términos de polos y ceros es:

$$H(z^{-1}) = \gamma \frac{\prod_{i=1,n}(z^{-1} - c_i)}{\prod_{i=1,n}(z^{-1} - p_i)}$$

REALIZACIONES

En el proceso de encontrar las raíces de un polinomio, éstas se presentarán de a pares, siempre que el polinomio sea de *orden par*, y se presentarán en uno de tres casos posibles:

a) raíces sean reales distintas,
b) raíces complejas conjugadas
c) raíces reales iguales.

$$H(z) = \Gamma \frac{\prod_{i=1}^{n/2} (z^{-1} - z_{ci}^{-1})(z^{-1} - z_{ci}^{-1^*})}{\prod_{j=1}^{m/2} (z^{-1} - z_{pj}^{-1})(z^{-1} - z_{pj}^{-1^*})}$$

Γ es una constante que agrupa todas las constantes que aparecen al encontrar y ordenar las raíces.

Si es de *orden impar*, las raíces se presentarán en pares, más una raíz simple que necesariamente deberá ser real.

$$H(z) = \Gamma \frac{\prod_{i=1}^{(n-1)/2} (z^{-1} - z_{ci}^{-1})(z^{-1} - z_{ci}^{-1*})}{\prod_{j=1}^{(m-1/2)} (z^{-1} - z_{pj}^{-1})(z^{-1} - z_{pj}^{-1*})} \cdot \frac{(z^{-1} - z_{cn}^{-1})}{(z^{-1} - z_{pm}^{-1})}$$

Realización Cascada

;

Tomando la última representación de la función transferencia, y separando los pares complejos conjugados, se puede obtener una *realización en cascada* de módulos de segundo orden (y eventualmente uno de primer orden, si alguno de los polinomios, o ambos, es de orden impar).

$$H(z)=\gamma_1\frac{(z^{-1}-z_{c1}^{-1})(z^{-1}-z_{c1}^{-1^*})}{(z^{-1}-z_{p1}^{-1})(z^{-1}-z_{p1}^{-1^*})}\gamma_2\frac{(z^{-1}-z_{c2}^{-1})(z^{-1}-z_{c2}^{-1^*})}{(z^{-1}-z_{p2}^{-1})(z^{-1}-z_{p2}^{-1^*})}\ldots\gamma_l\frac{(z^{-1}-z_{cl}^{-1})(z^{-1}-z_{cl}^{-1^*})}{(z^{-1}-z_{pl}^{-1})(z^{-1}-z_{pl}^{-1^*})}$$

Esto es, suponiendo que numerador y denominador sean ambos de orden par e iguales (n=m=l), pero no es necesariamente así, uno o ambos polinomios pueden ser de orden impar.

Por lo tanto, en un caso más general, y suponiendo m≥n como normalmente ocurre, tendríamos:

$$H(z)=\gamma_1\frac{(z^{-1}-z_{c1}^{-1})(z^{-1}-z_{c1}^{-1^*})}{(z^{-1}-z_{p1}^{-1})(z^{-1}-z_{p1}^{-1^*})}\gamma_2\frac{(z^{-1}-z_{c2}^{-1})(z^{-1}-z_{c2}^{-1^*})}{(z^{-1}-z_{p2}^{-1})(z^{-1}-z_{p2}^{-1^*})}\ldots\gamma_m\frac{(z^{-1}-z_{cn}^{-1})}{(z^{-1}-z_{pm}^{-1})}$$

Y finalmente hay que construir una función transferencia con cada módulo. Escribiendo la función transferencia para cada etapa, será:

$$H_1(z)=\frac{A_{01}+A_{11}z^{-1}+A_{21}z^{-2}}{1+B_{11}z^{-1}+B_{21}z^{-2}}$$

$$H_2(z)=\frac{A_{02}+A_{12}z^{-1}+A_{22}z^{-2}}{1+B_{12}z^{-1}+B_{22}z^{-2}}$$

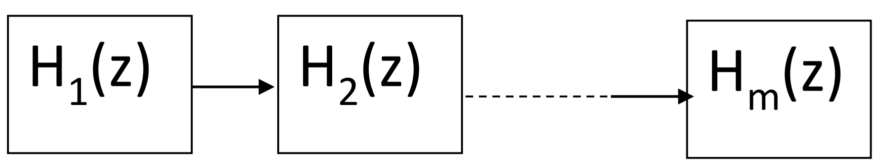
$$H_m(z)=\frac{A_{0m}+A_{1m}z^{-1}+A_{2m}z^{-2}}{1+B_{1m}z^{-1}+B_{2m}z^{-2}}$$

....

$$H_m(z)=\frac{A_{0m}+A_{1m}z^{-1}}{1+B_{1m}z^{-1}}$$

O sea que el sistema completo será: $H(z) = \Gamma . H_1(z) \, . \, H_2(z) \ldots . \, H_m(z)$

Representado en un diagrama en bloques



Realización paralelo

- Una función real racional admite desarrollo en fracciones parciales, por lo tanto es posible dividir una realización de orden elevado, en una sucesión de realizaciones de primer y segundo orden.
- Básicamente el procedimiento consiste en desarrollar la función transferencia en módulos de segundo orden sumados, aplicando la teoría de fracciones parciales.
- Igual que en el caso anterior, puede darse el caso de que alguno o ambos polinomios sean de orden impar, entonces aparecerá un módulo de primer orden en paralelo con los demás.

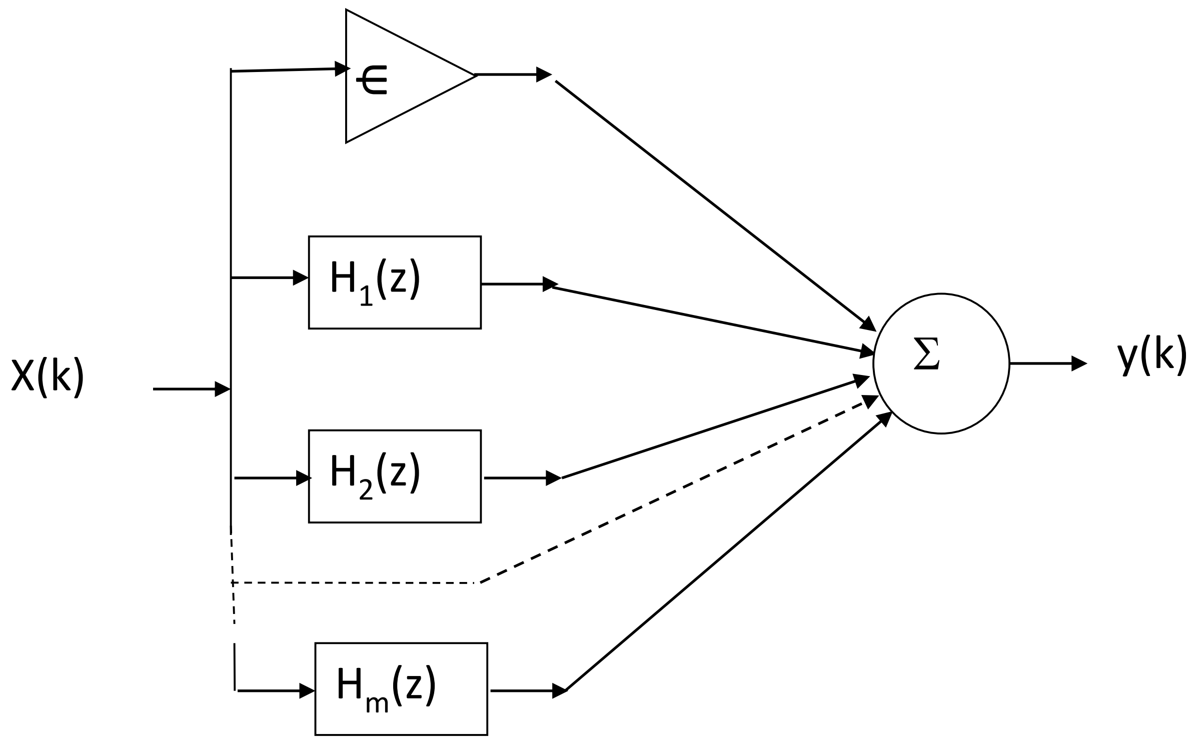
$$H(z)=\frac{A_{01}+A_{11}z^{-1}+A_{21}z^{-2}}{1+B_{11}z^{-1}+B_{21}z^{-2}}+\frac{A_{02}+A_{12}z^{-1}+A_{22}z^{-2}}{1+B_{12}z^{-1}+B_{22}z^{-2}}+....+\frac{A_{0m}+A_{1m}z^{-1}+A_{2m}z^{-2}}{1+B_{1m}z^{-1}+B_{2m}z^{-2}}+\frac{A_{0m}+A_{1m}z^{-1}}{1+B_{1m}z^{-1}}$$

Pero la teoría de fracciones parciales impone ciertas reglas, sólo permite para su aplicación, que el denominador sea de mayor orden que el numerador, y en el procedimiento matemático los módulos obtenidos tendrán el numerador de primer orden y el denominador de segundo orden, y generalmente aparecerá una constante Ψ que se suma como un módulo en paralelo con los demás.

Esto es:

$$H(z) = \Psi + H_1(z) + H_2(z) + ... + H_m(z)$$

En un diagrama en bloques se verá del siguiente modo:



$$H(z) = \Psi + H_1(z) + H_2(z) + \ldots. + H_m(z)$$

BIBLIOGRAFIA

THEORY AND APPLICATION OF DIGITAL SIGNAL PROCESSING. Lawrence Rabiner and Bernard Gold. Prentice Hall Inc. Englewood CliffsNew Jersey

DIGITAL SIGNAL PROCESSING. William D. Stanley, J. Dougherty & R. Dougherty. Reston Publishing Company.

DIGITAL SIGNAL PROCESSING. PRINCIPLES, ALGORITHMS AND APPLICATIONS. John G. Proakis, Dimitris K. Manolakis. Macmillan Publishing Company.

DIGITAL SIGNAL PROCESSING USING MATLAB .Vinay K. Ingle and John G. Proakis. The BookWare Companion Series.

http://www.tecnun.es/asignaturas/tratamiento%20digital/Tema10/sld008.htm