ECUACIONES DE DIFERENCIAS

Ecuación de Diferencias Lineal de Segundo Orden

Teorema I:

Si $y_1(k)$ e $y_2(k)$ son dos soluciones cualesquiera de la ecuación homogénea:

$(a_0 E^2 + a_1 E + a_2)\, y(k) = 0$,

entonces: $C_1\, y_1(k) + C_2\, y_2(k)$ también es solución (C_1 y C_2 son dos constantes arbitrarias).

Teorema II:

Si $y_1(k)$ e $y_2(k)$ son dos soluciones de la ecuación homogénea:

$(a_0 E^2 + a_1 E + a_2)\, y(k) = 0$, para la cual la función: $\mathscr{C}[y_1(k)\ ,\ y_2(k)]$, definida como el Determinante de Casorati:

$$\mathscr{C}[y_1(k), y_2(k)] = \begin{vmatrix} y_1(k) & y_2(k) \\ Ey_1(k) & Ey_2(k) \end{vmatrix} \neq 0$$

El determinante de Casorati tiene similitud formal con el Wronskiano que se aplica a las Ecuaciones Diferenciales.

Entonces, cualquier solución $y_3(k)$ de la ecuación homogénea puede escribirse como:

$y_3(k) = C_1\, y_1(k) + C_2\, y_2(k)$, con C_1 , C_2 constantes adecuadas

$y_3(k)$ es la Solución General de la homogénea, o Solución Completa de la ecuación homogénea.

Teorema III:

Si Y(k) es una solución cualquiera de la Ecuación No Homogénea:

$(a_0 E^2 + a_1 E + a_2)\, y(k) = \Phi(k)$,

y si $C_1\, y_1(k) + C_2\, y_2(k)$

es una solución completa o general de la ecuación homogénea obtenida de ésta haciendo $\Phi(k) \equiv 0$, entonces:

$Y_c(k) = C_1\, y_1(k) + C_2\, y_2(k) + Y(k)$ es una solución completa de la ecuación no homogénea.

Podemos resumir en un cuadro sinóptico las soluciones para las ecuaciones de diferencias de 2º orden.

Cuadro I:

Ecuación homogénea: $(a_0 E^2 + a_1 E + a_2)\, y(k) = 0$

Solución propuesta: $y_h(k) = C\, M^k$, con C = cte. ≠ 0; y M (Solución) ≠ 0

De donde se obtiene laForma característica: $a_0 M^2 + a_1 M + a_2 = 0$, y $M_{1,2} = p \pm j\, q$

Naturaleza de las raíces	**Condición de los coeficientes Discriminante**	**Solución completa de la Ecuación de Diferencias Homogénea**
$M_1 \neq M_2$	$a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$	$y_{ch}(k) = C_1\, y_1(k) + C_2\, y_2(k)$
$M_1 = M_2$	$a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$	$y_{ch}(k) = C_1\, y_1(k) + C_2\, k\, y_2(k)$
$M_1 = p + j\, q$ $M_2 = p - j\, q$	$a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$	$y_{ch}(k) = \rho^k[A\cos\theta k + Bsen\theta k]$ Con $\rho = \sqrt{p^2+q^2}$; $tg\theta = \frac{q}{p}$

Cuadro II:

Para la Ecuación de Diferencias No Homogénea:

$(a_0 E^2 + a_1 E + a_2)\, y(k) = \varphi(k)$,

La solución Y(k) que debemos intentar, según la forma de la función φ(k), será:

Φ(k)	**Y(k)**
1) a (constante)	A
2) $a.k^x$	$A_0k^x + A_1 k^{x-1} + A_2 k^{x-2} + \ldots + A_{x-1} k + A_x$
3) $a.x^k$	$A.x^k$
4) $a.cosxk$	$A \cos xk + B\ sen\ xk$
5) $a.senxk$	
6) $a.k^x.l^k.senmk$ ó $a.k^x.l^k.cosmk$	$[A_0k^x + A_1 k^{x-1} + A_2 k^{x-2} + \ldots + A_{x-1} k + A_x]\ l^k \cos mk +$ $+ [B_0k^x + B_1 k^{x-1} + B_2 k^{x-2} + \ldots + B_{x-1} k + B_x]\ l^k senmk$

- Si *Φ(k)* = suma que es la combinación de estos sistemas, la solución será la combinación de las soluciones propuestas.

- Respecto a la función complementaria: “Siempre que un término cualquiera de los alistados en la primera columna duplique a un término ya presente en la función complementaria, todos los términos en esa solución *Y(k)* deben ser multiplicados por la potencia más baja de k que resulte suficiente para eliminar la duplicación”.

Solución de la Ecuación de Diferencias de Segundo Orden

Encontrar las alternativas de solución de una ecuación de diferencias homogénea de segundo orden:

$$(a_0E^2 + a_1E + a_2)y(k) = 0$$

Esta ecuación en términos del operador de avance, se puede escribir en términos funcionales de la siguiente manera:

$$a_0\, y(k+2) + a_1\, y(k+1) + a_2\, y(k) = 0$$

Para resolver esta ecuación de segundo orden, se propone como solución:

$$y(k) = CM^k, \qquad \text{con C = constante cualquiera} \neq 0$$

por lo tanto:

$$y(k+1) = CM^{k+1}$$

$$y(k+2) = CM^{k+2}$$

Reemplazando en la ecuación

$$a_0CM^{k+2} + a_1CM^{k+1} + a_2CM^k = 0$$

$$CM^k(a_0M^2 + a_1CM + a_2) = 0$$

Dado que C≠0, y lo que estamos buscando es encontrar el valor de M, ésta tampoco debe ser cero, por lo tanto deberá ser

$$(a_0M^2 + a_1M + a_2) = 0$$

Resolviendo esta Ecuación Característica, obtendremos las raíces de la ecuación de diferencias:

$$M_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$$

O bien

$$M_{1,2} = \frac{-a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0}}$$

Esta ecuación me brinda dos soluciones para M. Observando el discriminante de esta solución, vemos que se pueden distinguir tres casos:

Caso 1)	$\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 > \frac{a_2}{a_0}$	$\rightarrow$	$\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0} > 0$	Raíces reales distintas
Caso 2)	$\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 < \frac{a_2}{a_0}$	$\rightarrow$	$\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0} < 0$	Raíces complejas conjugadas
Caso 3)	$\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 = \frac{a_2}{a_0}$	$\rightarrow$	$\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0} = 0$	Raíces reales iguales (raíces dobles)

Para simplificar las operaciones llamaremos:

$$p = \frac{-a_1}{2a_0} \qquad ; \qquad q = \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0}}$$

A continuación estudiaremos los tres casos.

Caso 1: Raíces reales distintas **M = p ± q**

Para poder conformar una solución completa ambas raíces deben ser independientes, para lo cual aplicamos a estas raíces el determinante de Casorati:

$$\mathscr{C}[y_1(k), y_2(k)] = \begin{vmatrix} C_1M_1^k & C_2M_2^k \\ C_1M_1^{(k+1)} & C_2M_2^{(k+1)} \end{vmatrix}$$

Para que ambas soluciones sean independientes este determinante debe ser ≠ 0

$$\mathscr{C}[y_1(k), y_2(k)] = \begin{vmatrix} C_1(p+q)^k & C_2(p-q)^k \\ C_1(p+q)^{k+1} & C_1(p-q)^{k+1} \end{vmatrix} =$$

$$= C_1C_2(p+q)^k(p-q)^{k+1} - C_1C_2(p-q)^k(p+q)^{k+1}$$

$$= C_1C_2(p+q)^k(p-q)^k[(p-q)-(p+q)]$$

$$= C_1C_2(p+q)^k(p-q)^k[p-q-p-q]$$

$$= C_1C_2(p+q)^k(p-q)^k[-2q]$$

$$\mathscr{C}[y_1(k), y_2(k)] = -2qC_1C_2(p^2-q^2)^k \neq 0$$

Este resultado es ≠ 0 por la condición inicial planteada para este caso: p ≠ q, y las constantes C_1, $C_2 \neq 0$

Verificada la independencia de las dos soluciones, podemos escribir la solución completa de la ecuación de diferencias homogénea de segundo orden para este caso:

$$y(k)_{ch} = C_1M_1^k + C_2M_2^k$$

Caso 2: Raíces complejas conjugadas **M = p ± jq**

Las soluciones para este caso son:

$$y_1(k) = C_1(p+jq)^k$$

$$y_2(k) = C_2(p-jq)^k$$

Expresamos estas soluciones en coordenadas polares:

$$y_1(k) = C_1\rho^k e^{j\theta k}$$

$$y_2(k) = C_2\rho^k e^{-j\theta k}$$

donde:

$$\rho^k = [(p^2+q^2)]^k \qquad \text{y} \qquad \theta = Artg(-\frac{q}{p})$$

Para poder realizar una solución completa, ambas soluciones deben ser independientes.
Para verificarlo calculamos el determinante de Casorati:

$$\mathscr{C}[y_1(k), y_2(k)] = \begin{vmatrix} C_1\rho^k e^{j\theta k} & C_2\rho^k e^{-j\theta k} \\ C_1\rho^k e^{j\theta\,(k+1)} & C_2\rho^k e^{-j\theta\,(k+1)} \end{vmatrix}$$

$$= C_1C_2\rho^{2k+1}[e^{j\theta k}\,e^{-j\theta\,(k+1)} - e^{-j\theta k}\,e^{j\theta\,(k+1)}]$$

$$= C_1C_2\rho^{2k+1}e^{j\theta k}\,e^{-j\theta k}\,[e^{-j\theta} - e^{j\theta}]$$

$$\mathscr{C}[y_1(k), y_2(k)] = C_1C_2\rho^{2k+1}e^{j\theta k}\,e^{-j\theta k}\left[e^{-j\theta} - e^{j\theta}\right] \neq 0$$

Es decir, ambas soluciones son independientes, por lo tanto la solución completa es:

$$y(k)_{ch} = \rho^k[C_1e^{j\theta k} + C_2e^{-j\theta k}]$$

La respuesta arriba expresada, como puede verse es compleja, pero como las ecuaciones de diferencias trabajan con números reales, la respuesta debe ser real. Por lo tanto, las constantes C_1 y C_2 deben ser complejas y cumplir alguna condición para eliminar la parte imaginaria.

Expresaremos las constantes como números complejos:

$$C_1 = a + jb \quad ; \quad C_2 = c + jd$$

Y además:

$$\left.\begin{aligned} e^{j\theta k} &= \cos\theta k + sen\,\theta k = \alpha + j\beta \\ e^{-j\theta k} &= \cos\theta k - sen\,\theta k = \alpha - j\beta \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \alpha &= cos\theta k \\ \beta &= sen\theta k \end{aligned}$$

Entonces: $C_1 e^{j\theta k} + C_2 e^{-j\theta k} = (a + jb)(\alpha + j\beta) + (c + jd)(\alpha - j\beta)$

$$= (a\alpha - b\beta) + j(\alpha b + a\beta) + (c\alpha + d\beta) + j(\alpha d - c\beta)$$

$$= [\alpha(a + c) + \beta(d - b)] + j[\alpha(d + b) + \beta(a - c)]$$

Y, reeplazando en la solución: $y(k)_{ch} = \rho^k[\alpha(a + c) + \beta(d - b)] + j[\alpha(d + b) + \beta(a - c)]$

Para que la parte imaginaria sea cero se debe cumplir que: $\begin{cases} b + d = 0 \rightarrow b = -d \\ a - c = 0 \rightarrow a = c \end{cases}$

En consecuencia: $C_1 = a + jb = re^{j\varphi}$ con $\begin{cases} a = r.cos\varphi \\ b = r.sen\varphi \end{cases}$

$C_2 = C_1^* = a - jb = re^{-j\varphi}$

Entonces: $y(k)_{ch} = \rho^k[\alpha(a + c) + \beta(d - b) + j0]$

Por lo tanto la solución completa de la homogénea es:

$$y(k)_{ch} = \rho^k[2r.cos\varphi.cos\theta k - 2r.sen\varphi.sen\theta k]$$

$$y(k)_{ch} = 2r\rho^k[cos\varphi.cos\theta k - sen\varphi.sen\theta k]$$

Finalmente:

$$y(k)_{ch} = 2r\rho^k \cos(\theta k + \varphi)$$

Esta es la solución completa de la ecuación homogénea para el caso de raíces complejas conjugadas.

Caso 3: Raíces reales iguales (dobles) **$M_{1,2} =$ p ; q = 0**

Una raíz doble o dos raíces reales iguales, se obtienen cuando el discriminante de la raíz es igual a cero:

$\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0} = 0;$ o sea que: $\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 = \frac{a_2}{a_0}$

Entonces, siendo *q=0*, resulta que $M_1 = M_2 = p$; por lo tanto no se cumple el Teorema 2.

Planteamos como solución:

$$y_1(k) = C_1 M^k$$

$$y_2(k) = C_2\, k\, M^k$$

Para encontrar la solución $y_2(k)$ de manera que sea independiente de $y_1(k)$, multiplico la raíz por la variable independiente elevada al orden de multiplicidad de la raíz: $k\, M^k$

Comprobamos la independencia de las soluciones con el determinante de Casorati:

$$\mathscr{C}[y_1(k), y_2(k)] = \begin{vmatrix} y_{1_p}(k) & y_{2_p}(k) \\ y_{1_p}(k+1) & y_{2_p}(k+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 M^k & C_2\, k\, M^k \\ C_1 M^{k+1} & C_2\,(k+1)\, M^{k+1} \end{vmatrix} =$$

$$= C_1 C_2\,(k+1)\, M^k M^{k+1} - C_1 C_2 k\, M^k M^{k+1}$$

$$= C_1 C_2\, M^{2k+1}(k + 1 - k) \neq 0$$

Se verifica que son independientes, con lo cual la solución completa de la homogénea es:

$$y(k)_{ch} = C_1 M^k + C_2 k M^k$$

ya que: $M_1 = M_2$, será también $C_1 = C_2$, y la solución puede escribirse también como:

$$y(k)_{ch} = CM^k(1 + k)$$

Ahora hay que comprobar que la solución propuesta $y_2(k) = C_2 k M^k$ sí es solución de la ecuación homogénea: $(a_0 E^2 + a_1 E + a_2) y(k) = 0$

Para ello reemplazamos la solución propuesta en esta ecuación:

$$(a_0 E^2 + a_1 E + a_2) C_2 k M^k = 0$$

$$a_0 C_2 (k+2) M^{k+2} + a_1 C_2 (k+1) M^{k+1} + a_2 C_2 k M^k = 0$$

$$C_2 M^k (a_0 (k+2) M^2 + a_1 (k+1) M + a_2 k) = 0$$

$$C_2 M^k (a_0 k M^2 + 2 a_0 M^2 + a_1 k M + a_1 M + a_2 k) = 0$$

$$C_2 M^k [k(a_0 M^2 + a_1 M + a_2) + (2 a_0 M^2 + a_1 M)] = 0$$

Puesto que $C_2 M^k \neq 0$, debe ser: $k(a_0 M^2 + a_1 M + a_2) + (2 a_0 M^2 + a_1 M) = 0$

Para ello ambos términos deben ser = 0

El primer término se cumple que: $a_0 M^2 + a_1 M + a_2 = 0$ porque M es la raíz de la ecuación

En el segundo término: $2 a_0 M^2 + a_1 M = M(2 a_0 M + a_1) = 0$, como $M \neq 0$, entonces es $(2 a_0 M + a_1) = 0 \rightarrow M = -\frac{a_1}{2 a_0}$; por lo tanto: $\left(2 a_0 (-\frac{a_1}{2 a_0}) + a_1\right) = -a_1 + a_1 = 0$

Con esto concluimos que: $y_2(k) = C_2 k M^k$ **es solución**

de la Ecuación de Diferencias Homogénea de segundo orden: $(a_0 M^2 + a_1 M + a_2) y(k) = 0$

Digresión:

Si aplicamos el resultado obtenido en el caso de raíces complejas conjugadas, particularizando para raíces reales dobles, con *q= 0*, será $\theta = 0$ y $\varphi = 0$, $\cos(\theta k + \varphi) = 1$
por lo tanto la solución será $y(k)_{ch} = 2 r \rho^k$,
pero como son 2 raíces iguales, hay que hacer la misma salvedad para la segunda solución:
$y(k)_{ch} = r \rho^k + r k \rho^k$

A continuación se propone resolver algunos ejemplos y gráficos de los tres casos:

a) Raíces reales distintas: $M_1 = 1$; $M_2 = -½$

b) Raíces complejas conjugadas: $M_1 = -1 + j$; $M_2 = -1 – j$ (Para graficar hacer C = 1 ; φ = 90º)

c) Raíces reales iguales: $M_{1,2} = 2$