

Procesamiento Digital de Señales

Sistemas de Tiempo Discreto Lineales e Invariantes en el Tiempo

Laboratorio de Procesamiento Digital de Información

SIGNAL PROCESSING
The Science Behind Our Digital Life

E7Z - Ingeniería en Computación - 2017

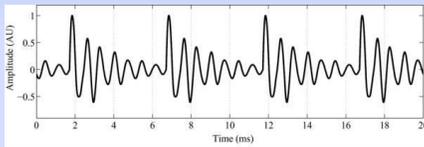
Señales y Sistemas

Bibliografía:

- Señales y Sistemas
A. Oppenheim, A. Willsky.
- Signals and Systems
S. Haykin, Barry Van Veen.
- Tratamiento Digital de Señales
J. Proakis, D. Manolakis.

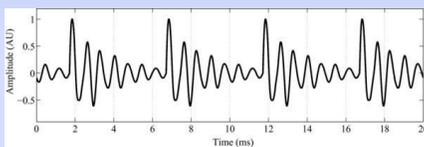
Ing. Fabián Pacheco
Profesor Adjunto
fpacheco@ieee.org

Señal



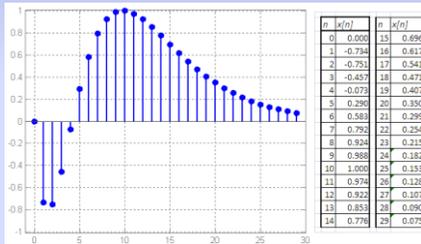
- Una señal se define formalmente como una función de una o más variables.
- Por lo general se hace referencia a la variable independiente como el tiempo.
- Una señal contiene información sobre el comportamiento o la naturaleza de algún fenómeno.
- La información de una señal está contenida en un patrón de variaciones que presenta alguna forma determinada.

Señal de tiempo continuo o analógica



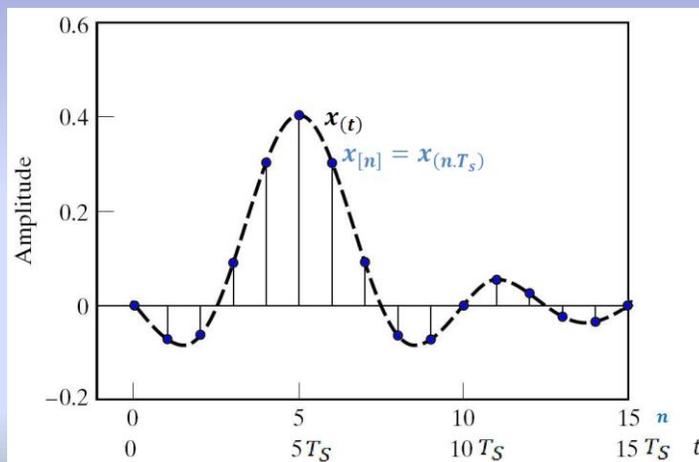
- Está definida para todo tiempo t .
- $x(t)$, amplitud y t tiempo (variable independiente) continuos.

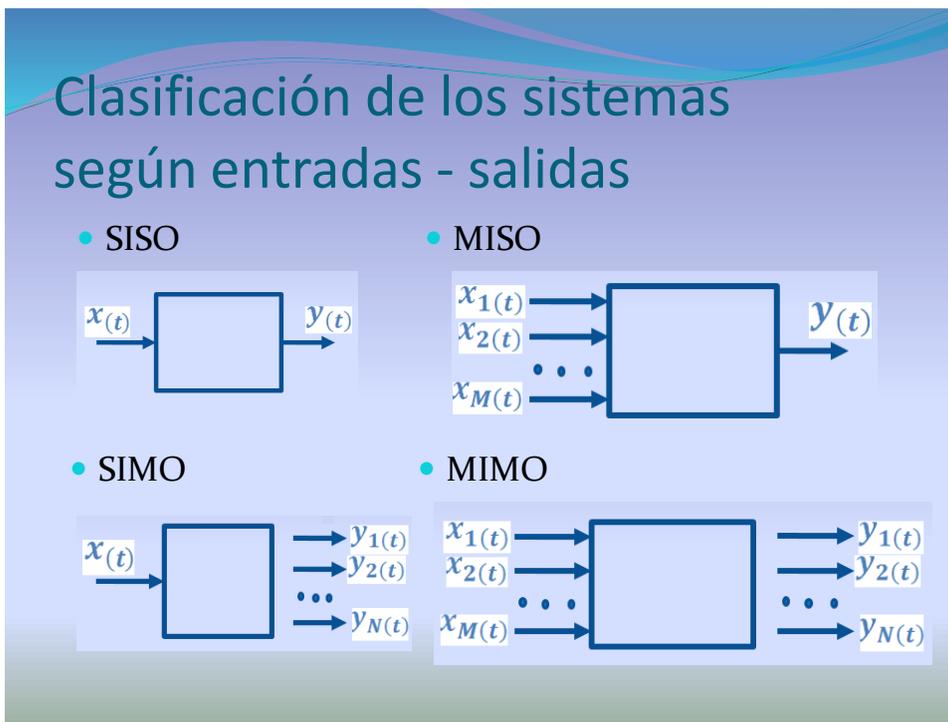
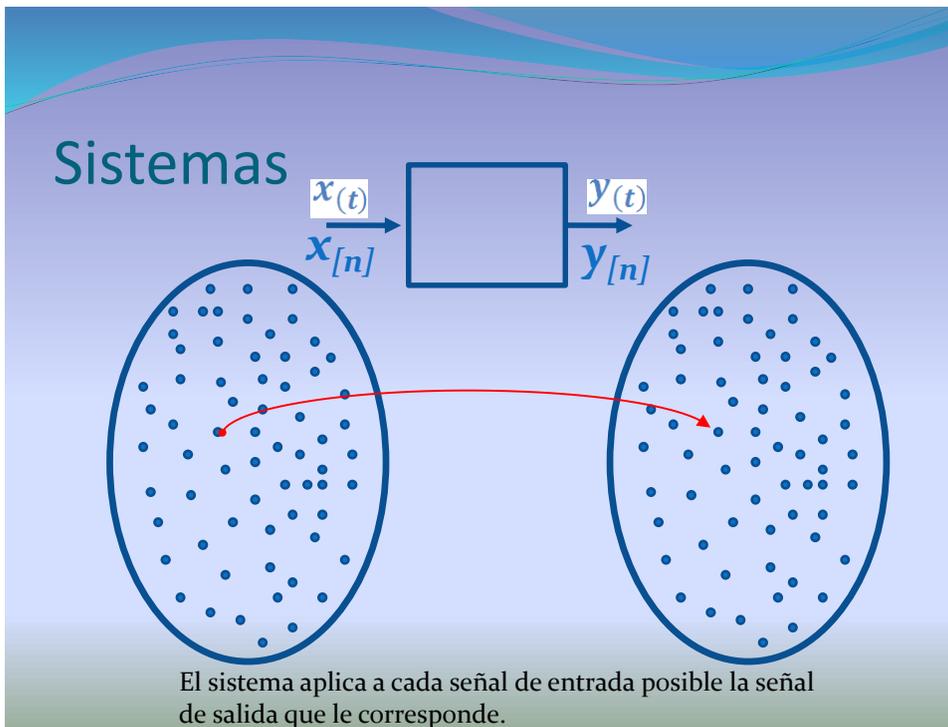
Señales de Tiempo Discreto



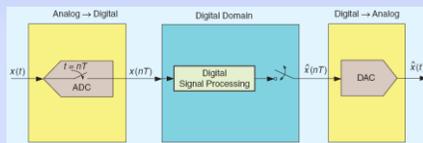
- $x[n]$, tiempo discreto, amplitud continua.
- Están definidas para una variable independiente que toma solamente un conjunto discreto de valores.
- Pueden representarse por una tabla de valores.

Muestreo de señales





Procesamiento Digital de Señales



- En el procesamiento digital de señal se obtiene una secuencia de salida $y[n]$ al aplicar un algoritmo computacional determinado a la secuencia de entrada $x[n]$.

Sistemas de Tiempo Discreto



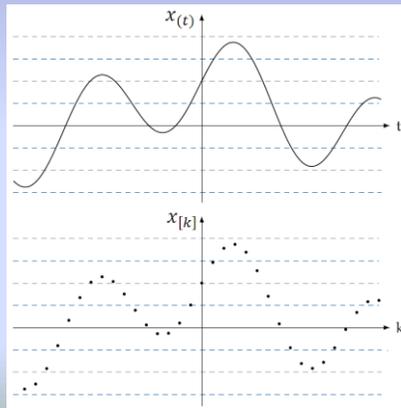
En la asignatura se trabajará con sistemas de tiempo discreto en los que la salida $y[n]$ es una combinación lineal del valor actual y pasados de la señal de entrada $x[n]$ y de valores pasados de la señal de salida.

$$y[n] = A_0 \cdot x[n] + A_1 \cdot x[n-1] + A_2 \cdot x[n-2] + \dots + A_N \cdot x[n-N] \\ - B_1 \cdot y[n-1] - B_2 \cdot y[n-2] - \dots - B_N \cdot y[n-N]$$

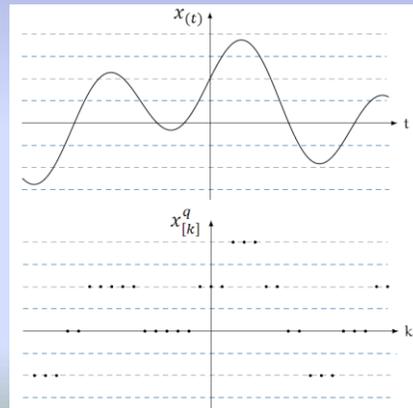
Donde A_k, B_k y N son constantes.

Convertor Analógico Digital

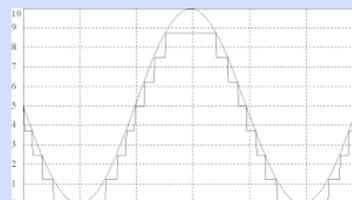
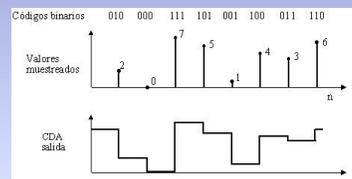
Señal de tiempo discreto



Señal digital



Convertor digital analógico



Ventajas de los Sistemas Digitales

- Flexibilidad para reconfigurar las operaciones del procesamiento digital de la señal modificando el programa.
- Facilidad para almacenar la señal sin deteriorarse o perder fidelidad.
- Permite la implementación de algoritmos de procesamiento digital sofisticados.
- Costos competitivos.

DSP: Implementación

- MCU: microcontroller.
- μ DSP: digital signal processor.
- FPGA: field programmable gate array.
- ASIC: application-specific integrated circuit.

Factores a considerar en la implementación

- Time to Market
- Performance
- Price
- Development Ease
- Power
- Feature Flexibility

Características

 **TEXAS INSTRUMENTS** SPRA879

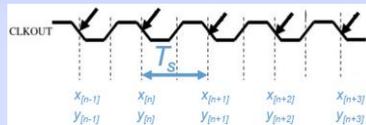
Table 1. Decision Table for Designers of Real-Time Applications

	Time to Market	Performance	Price	Development Ease	Power	Feature Flexibility	Summary
ASIC	Poor	Excellent	Excellent	Fair	Good	Poor	Fair
ASSP	Fair	Excellent	Good	Fair	Excellent	Poor	Good
Configurable	Poor	Excellent	Good	Poor	Good	Fair	Fair
DSP	Excellent	Excellent	Good	Excellent	Excellent	Excellent	Excellent
FPGA	Good	Excellent	Poor	Excellent	Poor	Good	Fair
MCU	Excellent	Fair	Excellent	Good	Fair	Excellent	Good
RISC	Good	Good	Fair	Good	Fair	Excellent	Good

Procesamiento digital de señales

Tiempo real

- Modelo ideal, sincronizado con el clock del sistema se toma la señal de entrada y en ese mismo instante se tiene la señal de salida.



- Implementación práctica: se tiene la restricción que el retraso entre la entrada y la salida no debe percibirse.

Tiempo Diferido

- La señal se registra y posteriormente se procesa.

Procesamiento en tiempo real

Procesamiento Muestra a muestra

- Sincronizado con el clock del sistema, por cada muestra de entrada se calcula una muestra de salida.
- El retardo entre salida y entrada es como máximo el período de muestreo.

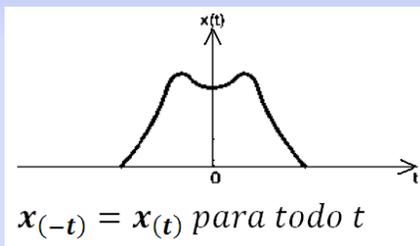
Procesamiento Por bloque

- Se descompone la señal de entrada en bloques de tamaño fijo, de L muestras.
- Mientras se procesa el último bloque que se completó, sincronizado por el clock del sistema, se almacena la señal de entrada en el próximo bloque y se toma la señal de salida del bloque anterior.
- El retardo entre salida y entrada es al menos de $2.L.T_s$.

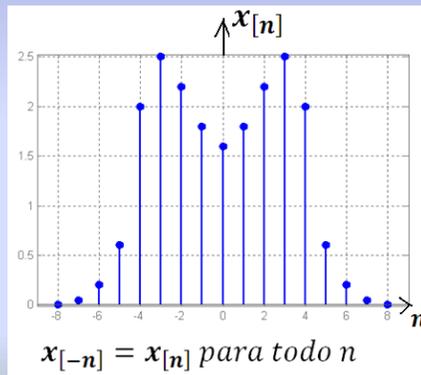
Simetría: Señal Par

1 de 2

Tiempo continuo



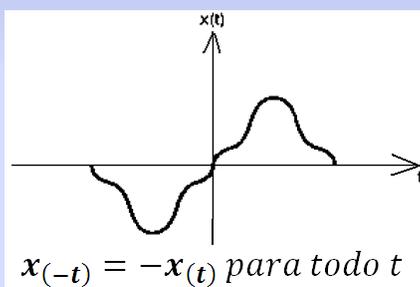
Tiempo discreto



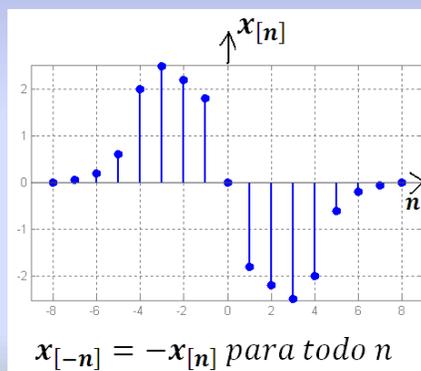
Simetría: Señal Impar

2 de 2

Tiempo continuo

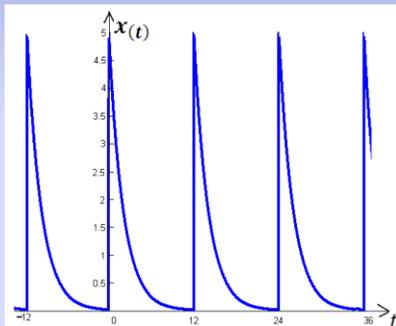


Tiempo discreto



Señales periódicas

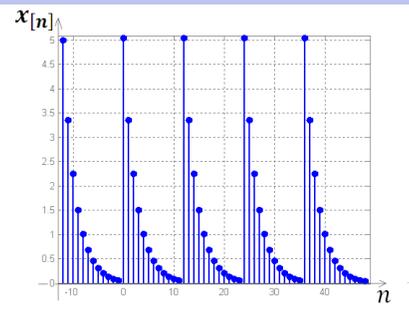
Tiempo continuo



Existe un valor T positivo tal que

$$x(t) = x(t+T)$$

Tiempo discreto



Existe un valor entero positivo N tal que

$$x[n] = x[n+N]$$

Energía y Potencia de una señal

Tiempo continuo

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

Tiempo discreto

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N x^2[n]$$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot N + 1} \sum_{n=-N}^N x^2[n]$$

Efecto de la cuantización en el conversor analógico digital

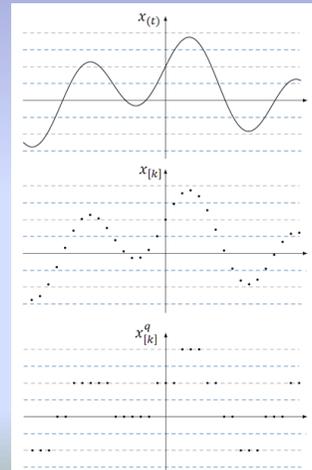
- La señal es afectada por la presencia de ruido.

$$e[n] = x[n] - x[n]^q$$

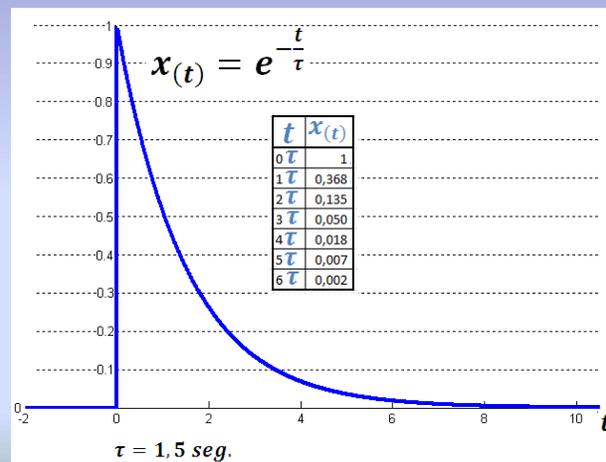
$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]^2 \quad P_e = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]^2$$

$$SNR(dB) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_x}{P_e} \right)$$

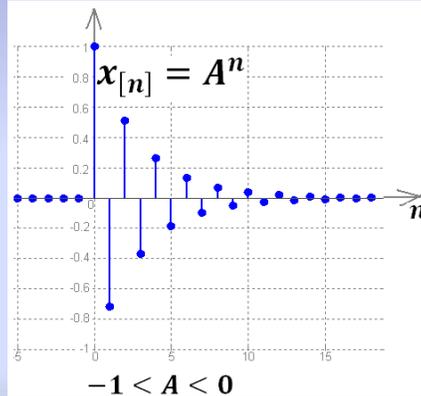
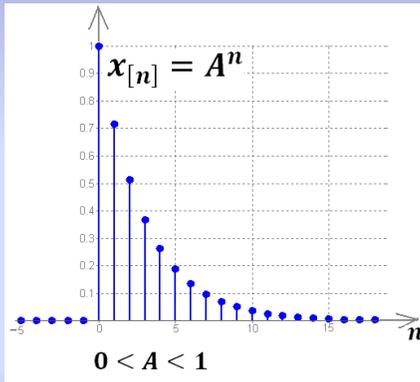
- Bajo los supuestos clásicos sobre el error de cuantización, por cada bit que se añade al CAD la relación señal a ruido de mejora en 6 dB.



Señal exponencial (tiempo continuo)



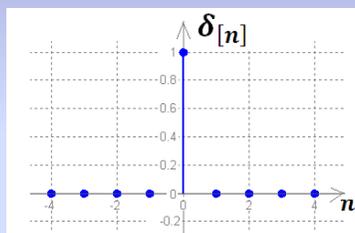
Señal exponencial (tiempo discreto)



Señales Elementales: Función Impulso

1 de 3

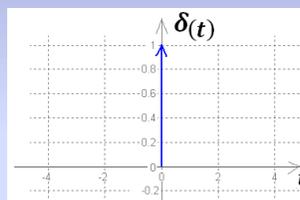
Tiempo Discreto



Delta de Kronecker

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$$

Tiempo continuo



Delta de Dirac

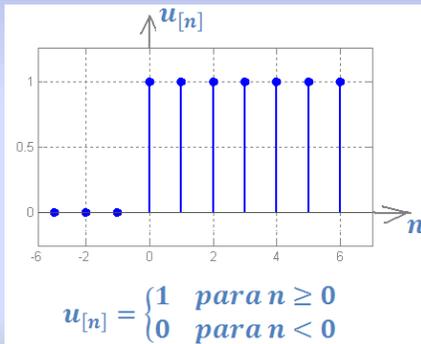
$$\delta(t) = 0 \quad \text{para } t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

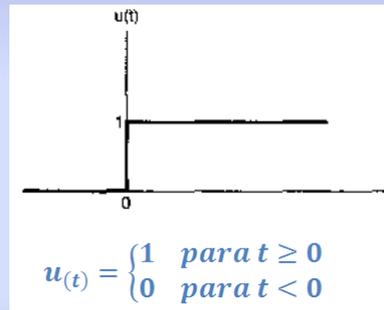
Señales Elementales: Función Escalón

2 de 3

Tiempo Discreto



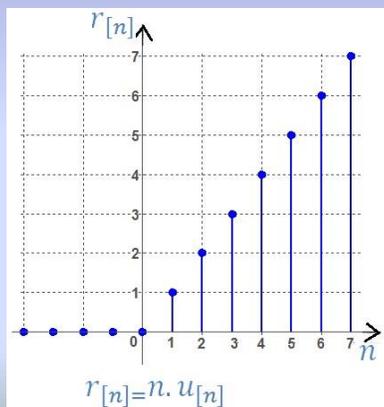
Tiempo continuo



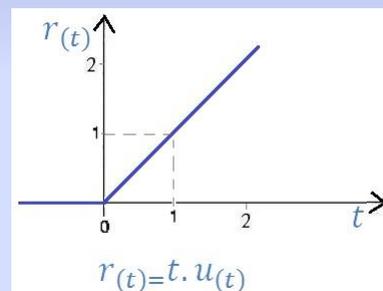
Señales Elementales: Rampa unitaria

3 de 3

Tiempo Discreto

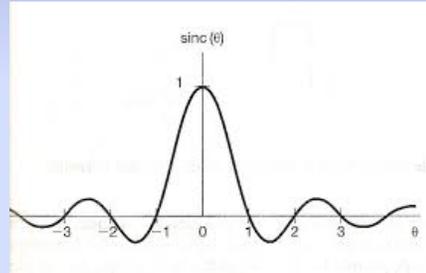


Tiempo continuo



Función seno cardinal

$$\text{sinc}(t) = \frac{\text{sen}(\pi \cdot t)}{\pi \cdot t}$$



Operaciones con señales 1 de 2

- Escalado de amplitud

$$y(t) = c \cdot x(t)$$

$$y[n] = c \cdot x[n]$$

- Suma

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

- Multiplicación

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

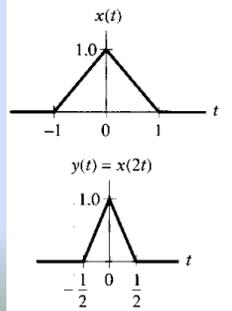
$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$$

Operaciones sobre la variable independiente - Escalado en el Tiempo

1 de 3

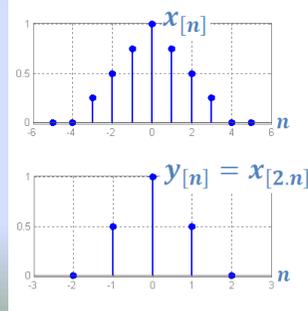
Tiempo Continuo

- $y(t) = x(at)$
- $a > 1$ con $a \in \mathbb{R}$



Tiempo Discreto

- $y[n] = x[an]$
- $a > 1$ con $a \in \mathbb{Z}$

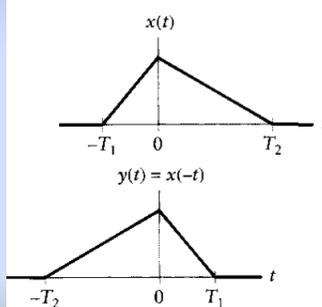


Operaciones sobre la variable independiente - Escalado en el Tiempo

2 de 3

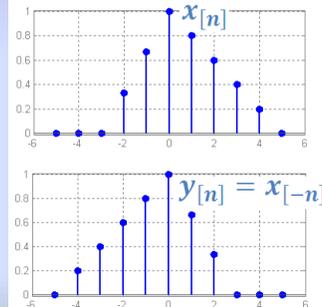
Tiempo Continuo

- $a \leq -1$ con $a \in \mathbb{R}$



Tiempo Discreto

- $a \leq -1$ con $a \in \mathbb{Z}$

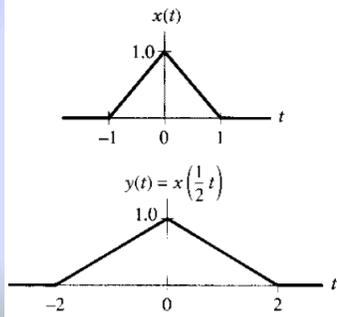


Operaciones sobre la variable independiente - Escalado en el Tiempo

3 de 3

Tiempo Continuo

$$0 < a < 1 \text{ con } a \in \mathbb{R}$$



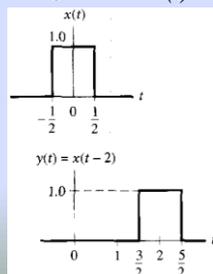
Operaciones sobre la variable independiente - Desplazamiento en el Tiempo

Tiempo Continuo

$$y(t) = x(t - t_0)$$

$$t_0 \in \mathbb{R}$$

- Para $t_0 > 0$, $y(t)$ es una versión rezagada de $x(t)$.

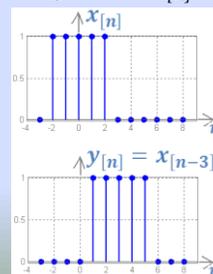


Tiempo Discreto

$$y[n] = x[n-m]$$

$$m \in \mathbb{Z}$$

- Para $m > 0$, $y[n]$ es una versión rezagada de $x[n]$.



Propiedades de los Sistemas 1 de 4

Estabilidad



- $$|x(t)| \leq M_x \leq \infty \quad \text{para todo } t$$
- $$|y(t)| \leq M_y \leq \infty \quad \text{para todo } t$$

- Un sistema es estable si para toda señal de entrada acotada corresponde una señal de salida también acotada.

Propiedades de los Sistemas 2 de 4

Causalidad



- Un sistema es causal si el valor actual de la salida depende sólo del valor presente y/o de valores pasados de la señal de entrada.
- En contraste, la señal de salida de un sistema no causal depende de valores futuros de la señal de entrada.

Propiedades de los Sistemas Invariante en el tiempo 3 de 4



- Un sistema invariante en el tiempo responde en forma idéntica sin importar cuando se aplica la señal de entrada.
- Un desplazamiento en el tiempo de la señal de entrada, de rezago (retraso) o de avance, produce el mismo desplazamiento en el tiempo en la señal de salida.

Propiedades de los Sistemas Linealidad 4 de 4



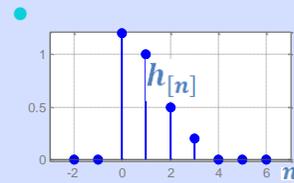
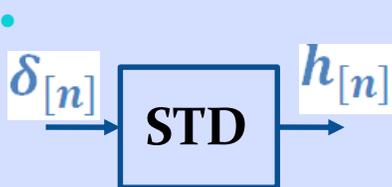
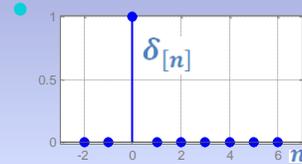
$$\mathbf{x}_3[n] = a_1 \mathbf{x}_1[n] + a_2 \mathbf{x}_2[n]$$

$$\mathbf{y}_3[n] = a_1 \mathbf{y}_1[n] + a_2 \mathbf{y}_2[n]$$

$$\mathbf{x}_3(t) = a_1 \mathbf{x}_1(t) + a_2 \mathbf{x}_2(t)$$

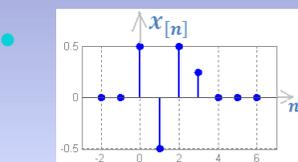
$$\mathbf{y}_3(t) = a_1 \mathbf{y}_1(t) + a_2 \mathbf{y}_2(t)$$

Respuesta de un Sistema de Tiempo Discreto Lineal e Invariante en el Tiempo 1 de 9



Un Sistema de Tiempo Discreto Lineal e Invariante en el tiempo queda totalmente determinado por su respuesta al impulso. Teniendo la respuesta al impulso se puede determinar la señal de salida para toda señal de entrada.

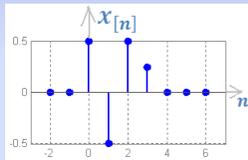
Respuesta de un Sistema de Tiempo Discreto Lineal e Invariante en el Tiempo 2 de 9



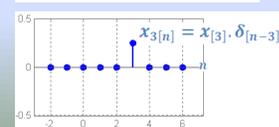
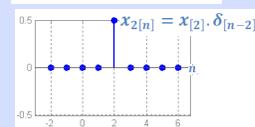
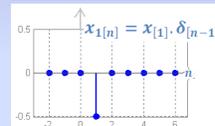
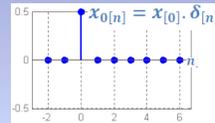
Toda señal de entrada puede descomponerse en infinitas señales elementales (que tengan un solo valor distinto de cero para $n=m$) pudiéndose del mismo modo, para un sistema lineal e invariante en el tiempo, determinar la señal de salida como la sumatoria de las señales de salida correspondiente a cada una de las señales elementales.

Respuesta de un Sistema de Tiempo Discreto Lineal e Invariante en el Tiempo 3 de 9

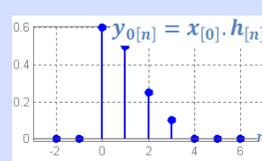
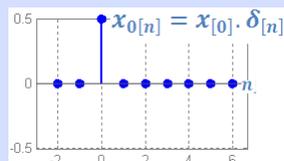
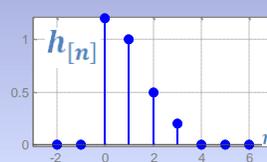
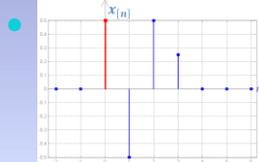
- Descomposición de la señal de entrada.



$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot \delta[n-m]$$

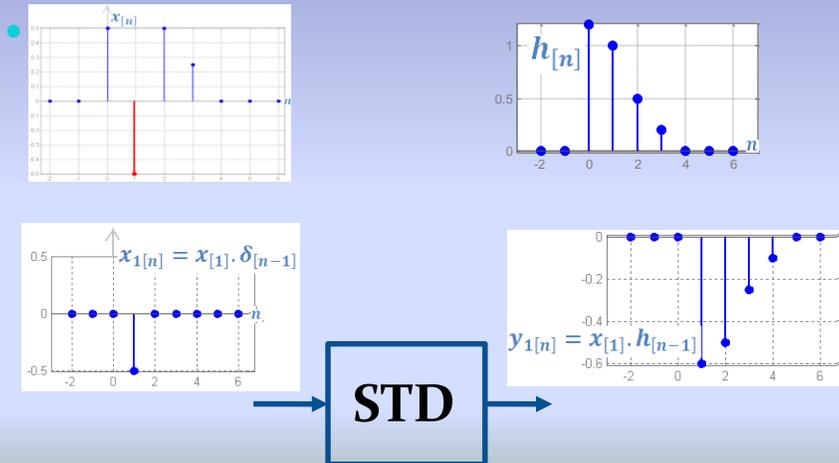


Respuesta de un Sistema de Tiempo Discreto Lineal e Invariante en el Tiempo 4 de 9

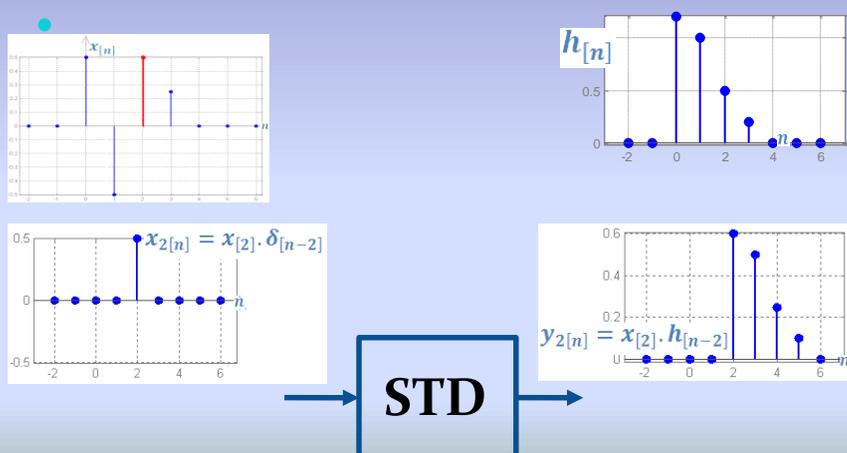


STD

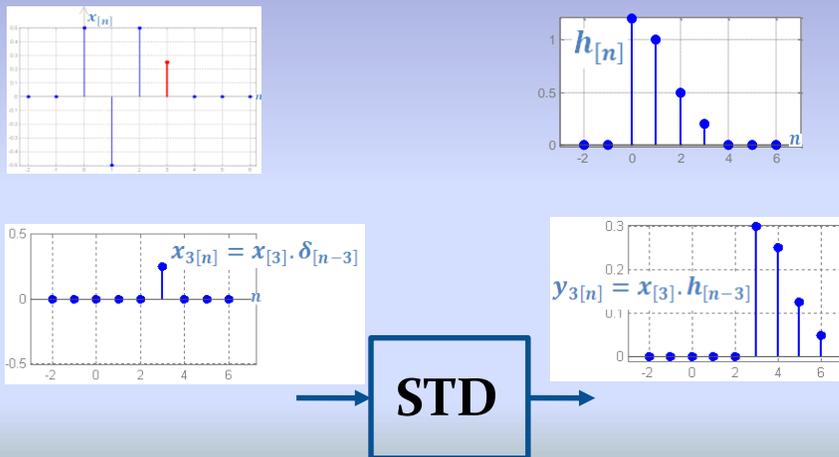
Respuesta de un Sistema de Tiempo Discreto Lineal e Invariante en el Tiempo 5 de 9



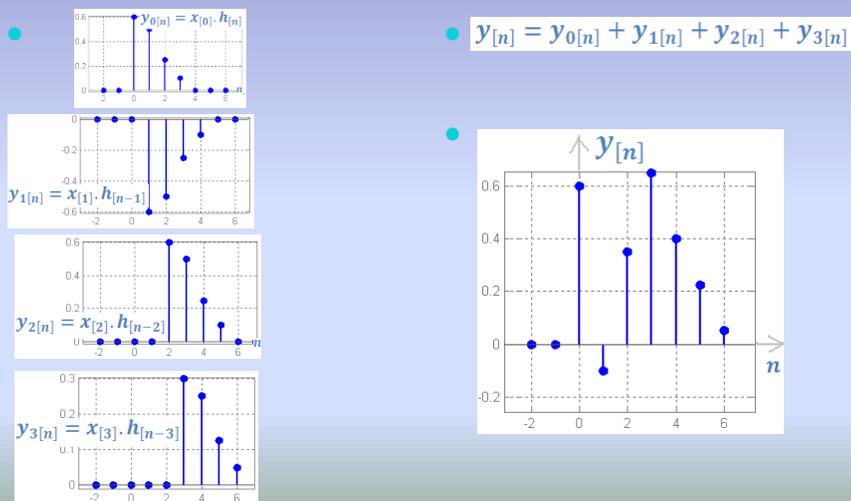
Respuesta de un Sistema de Tiempo Discreto Lineal e Invariante en el Tiempo 6 de 9



Respuesta de un Sistema de Tiempo Discreto Lineal e Invariante en el Tiempo 7 de 9



Respuesta de un Sistema de Tiempo Discreto Lineal e Invariante en el Tiempo 8 de 9



Respuesta de un Sistema de Tiempo Discreto Lineal e Invariante en el Tiempo 9 de 9



- $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot \delta_{[n-m]}$

- $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot h_{[n-m]}$

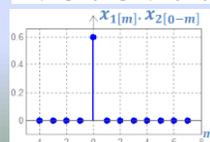
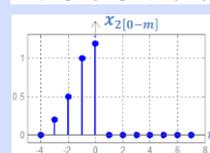
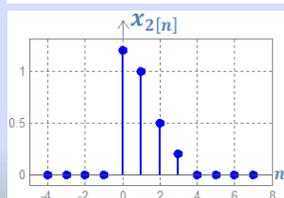
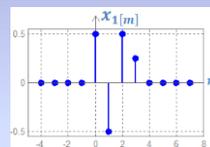
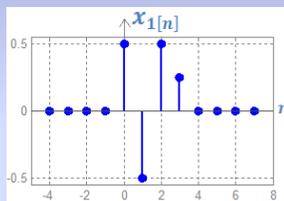
- Producto de Convolución

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Producto de Convolución

$$x_3[m] = x_1[m] * x_2[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[n-m]$$

$$n = 0$$



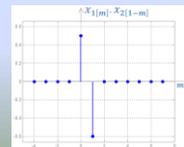
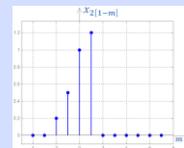
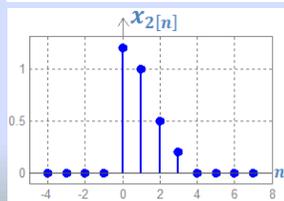
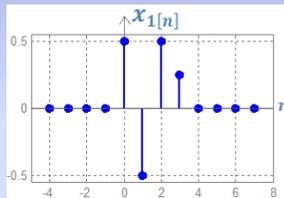
$$x_3[0] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[0-m]$$

$$x_3[0] = 0,6$$

Producto de Convolución

$$x_3[m] = x_1[m] * x_2[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[n-m]$$

$$n = 1$$



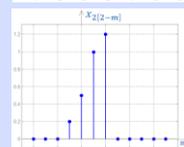
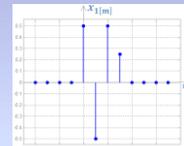
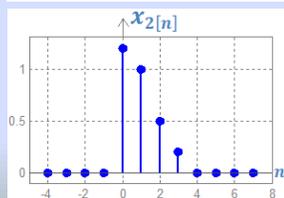
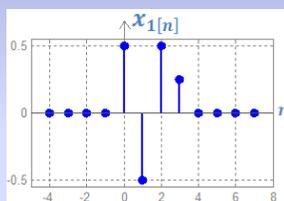
$$x_3[1] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[1-m]$$

$$x_3[1] = -0, 1$$

Producto de Convolución

$$x_3[m] = x_1[m] * x_2[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[n-m]$$

$$n = 2$$

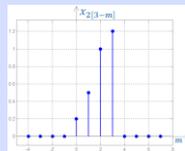
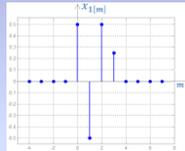
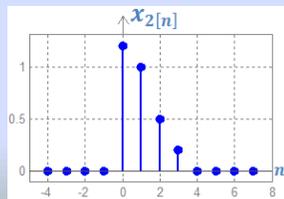
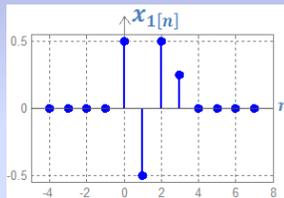


$$x_3[2] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[2-m]$$

$$x_3[2] = 0, 35$$

Producto de Convolución

$$x_3[m] = x_1[m] * x_2[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[n-m] \quad n = 3$$

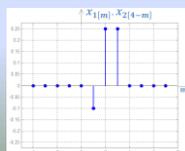
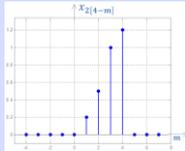
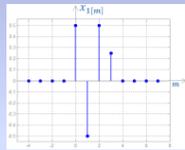
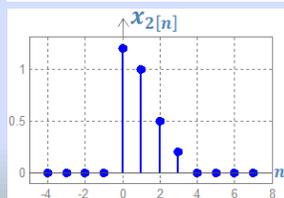
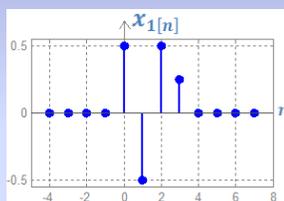


$$x_3[3] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[3-m]$$

$$x_3[3] = 0,65$$

Producto de Convolución

$$x_3[m] = x_1[m] * x_2[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[n-m] \quad n = 4$$

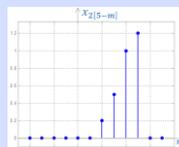
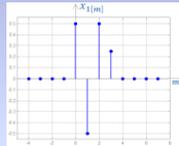
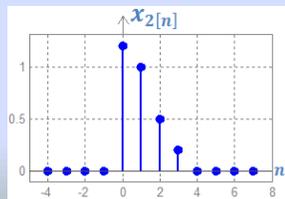
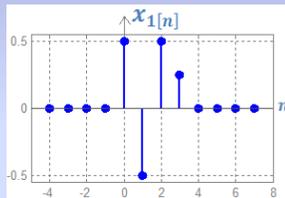


$$x_3[4] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[4-m]$$

$$x_3[4] = 0,4$$

Producto de Convolución

$$x_3[m] = x_1[m] * x_2[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[n-m] \quad n = 5$$

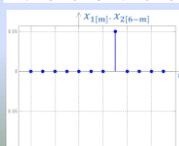
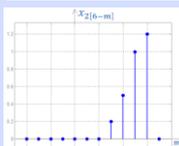
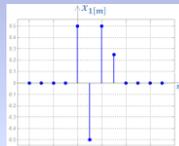
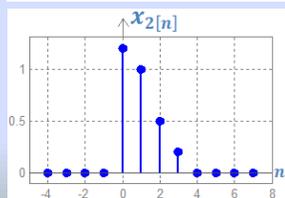
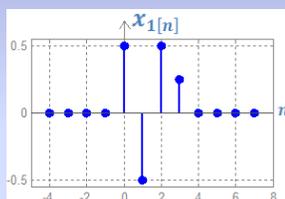


$$x_3[5] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[5-m]$$

$$x_3[5] = 0,225$$

Producto de Convolución

$$x_3[m] = x_1[m] * x_2[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[n-m] \quad n = 6$$



$$x_3[6] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[6-m]$$

$$x_3[6] = 0,05$$

Respuesta de un Sistema de Tiempo Continuo Lineal e Invariante en el Tiempo



- $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

- $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

- Producto de Convolución

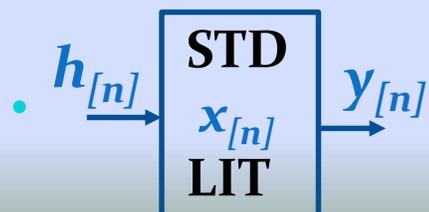
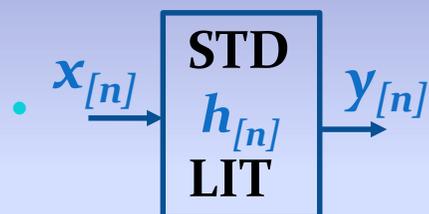
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Propiedades del Producto de Convolución

- Conmutativa

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \cdot x[n-m]$$

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

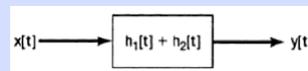
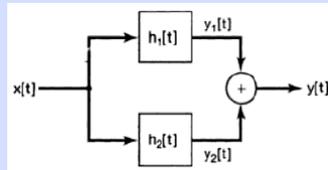


Propiedades del Producto de Convolución

- Distributiva

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

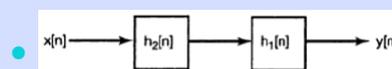
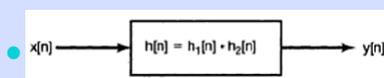
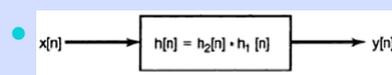
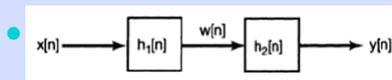
-



Propiedades del Producto de Convolución

- Asociativa

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$



Causalidad

- Tiempo Discreto

$$h_{[n]} = 0 \quad \text{para } n < 0$$

$$x_{[n]} = \sum_{m=-\infty}^n x_{[m]} \cdot h_{[n-m]} = \sum_{m=0}^{\infty} h_{[m]} \cdot x_{[n-m]}$$

- Tiempo Continuo

$$h_{(t)} = 0 \quad \text{para } t < 0$$

$$y_{(t)} = \int_{-\infty}^t x_{(\tau)} h_{(t-\tau)} d\tau = \int_0^{\infty} x_{(t-\tau)} h_{(\tau)} d\tau$$

Estabilidad

Tiempo Discreto

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{[n]}| < \infty$

Tiempo Continuo

- $\int_{-\infty}^{\infty} |h_{(t)}| d\tau < \infty$

Correlación de señales discretas

- Señales de energía

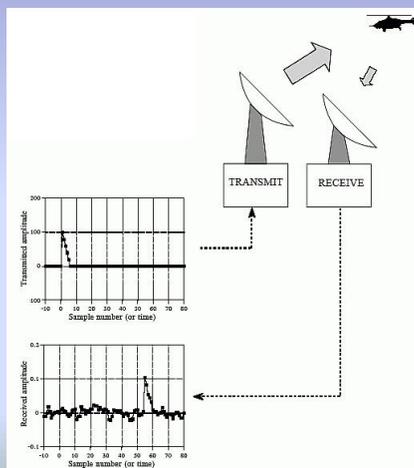
$$r_{xy[l]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N x[n] \cdot y[n-l]$$

- Es una medida de la relación lineal entre dos señales, para distintos valores de desplazamiento relativo entre ellas.

- Señales de potencia

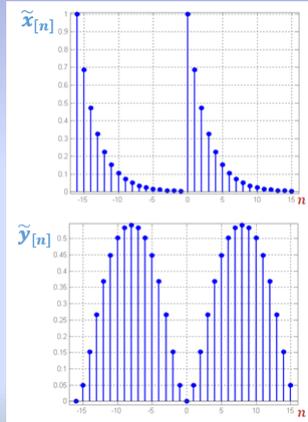
$$r_{xy[l]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot N + 1} \sum_{n=-N}^N x[n] \cdot y[n-l]$$

Correlación de señales - Aplicación



$$y[n] = \alpha x[n-D] + w[n]$$

Correlación de señales periódicas



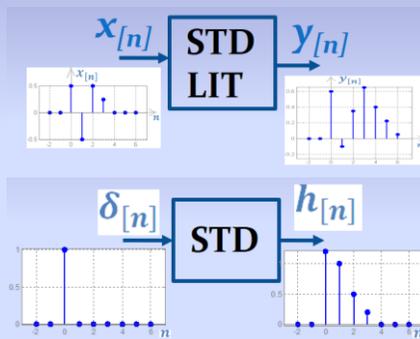
- Si $\tilde{x}[n]$ y $\tilde{y}[n]$ son señales periódicas con igual período N .

$$\tilde{r}_{xy}[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \cdot \tilde{y}[n-l]$$

- $\tilde{r}_{xy}[l]$ es periódica con período N .

$$\tilde{r}_{xx}[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \cdot \tilde{x}[n-l]$$

Correlación entre señales de entrada y salida de un Sistema LTI



- $r_{xy}[l] = h[-l] * r_{xx}[l]$
- $r_{yx}[l] = h[l] * r_{xx}[l]$
- $r_{yy}[l] = r_{hh}[l] * r_{xx}[l]$
- $r_{yy}[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{hh}[k] \cdot r_{xx}[k]$
- Energía o Potencia de la señal de salida en término de autocorrelaciones.

Correlación normalizada

- $|r_{xy[l]}| \leq \sqrt{r_{xx[0]} \cdot r_{yy[0]}}$

- Sean:

$$x'_{[n]} = A \cdot x_{[n]}$$

$$y'_{[n]} = B \cdot x_{[n]}$$

$$r_{x'y'[l]} = A \cdot B \cdot r_{xy[l]}$$

$$\rho_{xy[l]} = \frac{r_{xy[l]}}{\sqrt{r_{xx[0]} \cdot r_{yy[0]}}$$

$$-1 < \rho_{xy[l]} < 1$$

$$\rho_{x'y'[l]} = \rho_{xy[l]}$$