INTEGRACION o CUADRATURA

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Puede ocurrir que $f(x)$ sea una función continua fácil de integrar

o una función continua difícil o imposible de integrar directamente

o que no conozcamos la función tabulada, solo un conjunto de valores medidos .

Los métodos se basan en que, dada $f(x)$ encontrar una familia de funciones $\{ f_n(x), n \geq 1\}$ que aproxime a $f(x)$ entonces

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx = I_n(f)$$

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f)$$

Usaremos como funciones de aproximación polinomios

Si usamos polinomios interpolantes:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b (p_n(x) + \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!})dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i) f^{n+1}(\xi)\, dx$$

Suma de Cuadratura:

$$In(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) \quad , \; x_i \in [a,b] \forall i$$

$\alpha_i =$ coeficientes de cuadratura

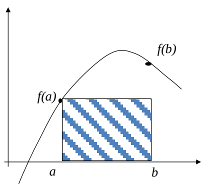
$x_i =$ nodos de cuadratura

Regla del Rectángulo

- Geométricamente

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)\; f(a) = I_R$$

$$E_R = f'(\eta)\frac{(b-a)^2}{2} \qquad \eta \in (a,b)$$



- Corresponde al polinomio de orden 0

$$p_0 = f(x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(\eta)(x-x_0)$$

$$\int f(x)dx = \int f(x_0)dx + \int f'(\eta)(x-x_0)dx$$

- Si $x_0 = a$

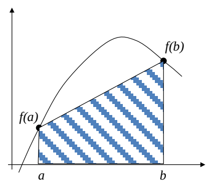
$$I_R = (b-a)\; f(a) \qquad E_R = f'(\eta)\frac{(b-a)^2}{2}$$

Regla del Trapecio

- Geométricamente

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = I_T$$

$$E_T = -f''(\eta)\frac{(b-a)^3}{12} \qquad \eta \in (a,b)$$



- Corresponde al polinomio de orden 1

$$p_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1)$$

$$f(x) = p_1(x) + f''(\eta)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}$$

$$\int f(x)dx = \int p_1(x)dx + \frac{1}{2}\int f''(\eta)(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$

- Si x_0=a ,x_1=b

$$I_T = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad E_T = -f''(\eta)\frac{(b-a)^3}{12}$$

Regla de Simpson

- Corresponde a reemplazar f(x) por el polinomio de orden 2

$$f(x) = p_2(x) + f'''(\eta)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!}$$

$$I_S = \int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)\right]dx$$

$$I_S = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

si $x_0=a$, $x_1=c=(a+b)/2$, $x_2= b$ $\quad h = (b-a)/2$

$$I_S = (b-a)\frac{f(a) + 4f(c) + f(b)}{6}$$

$$E_S = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\eta) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$$

Si observamos el error en Simpson:

$$E_S = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\eta)$$

- Es proporcional a la cuarta derivada, ya que el término del coeficiente de tercer orden se hace cero durante la integración del polinomio
- En consecuencia esta regla tiene una precisión de tercer orden aún cuando usa sólo tres puntos
- Da resultados exactos para polinomios cúbicos aún cuando se deriva de una parábola

Ejemplos:

f(x)	x2	x4	1/(x + 1)	sqrt(1 + x2)	sen (x)	exp(x)
Valor exacto	2,667	6,400	1,099	2,958	1,416	6,389
Trapecio	4,000	16,000	1,333	3,236	0,909	8,389
De Simpson	2,667	6,667	1,111	2,964	1,425	6,421

Fórmulas de Integración de Newton Cotes

Dados $n+1$ puntos equiespaciados de $[a,b]$, $x_i = a+ih$, $i=0,\dots,n$
si $x_0 = a$, $x_n = b$ y $h=(b-a)/n$.

definimos
$$I_n(f) = \int_a^b p_n(x)dx$$

siendo $p_n(x)$ el polinomio interpolante usando los nodos $x_0, x_1, \dots, x_n$ con esta elección de nodos las fórmulas de cuadratura se llaman de Newton Cotes cerradas, pues los limites de integración son nodos de cuadratura

Fórmulas de Newton Cotes Cerradas

	Fórmula	Error Truncamiento
Trapecio	$(b-a)\frac{[f(x_1)+f(x_2)]}{2}$	$-\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\eta)$
Simpson	$(b-a)\frac{[f(x_1)+4f(x_2)+f(x_3)]}{6}$	$-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\eta)$
3/8	$(b-a)\frac{[f(x_1)+3f(x_2)+3f(x_3)+f(x_4)]}{8}$	$-\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\eta)$
Boole	$(b-a)\frac{[7f(x_1)+32f(x_2)+12f(x_3)+32f(x_4)+7f(x_5)]}{90}$	$-\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\eta)$
6 puntos	$(b-a)\frac{[19\ f(x_1)+75\ f(x_2)+50\ f(x_3)+50\ f(x_4)+75\ f(x_5)+19\ f(x_6)]}{288}$	$-\frac{275}{12096}h^7 f^{(6)}(\eta)$

Fórmulas de Newton-Cotes Abiertas

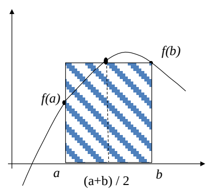
Son aquellas donde alguno de los extremos o ambos no son nodos de cuadratura, en general no se utilizan para el cálculo de integrales definidas.

Se usan para evaluar integrales impropias y en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ej: Regla del medio punto

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

$$E_{1/2} \cong \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta) \quad \eta \in (a,b)$$



Fórmulas de Cuadratura Compuesta

Estas fórmulas , en general no dan buenos resultados si [a,b] es grande, pues el E_n será grande, a menos que usemos polinomios de grado alto (mal condicionados). Esto lleva a las fórmulas de cuadratura compuesta.

Si
$$I = \int_a^b f(x)dx$$

sean n+1 puntos igualmente espaciados: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$
entonces $x_i = a + ih$, $h = (b-a)/n$

$$I(f) = \int_a^b f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Regla del Trapecio Compuesta

Aplicamos la regla del trapecio en cada subintervalo

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \frac{h^3}{12} f''(\eta_i)), \quad \eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

agrupando $I_{TC} = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$

el error $E_{TC} = \sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{12} f''(\eta_i) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i)$

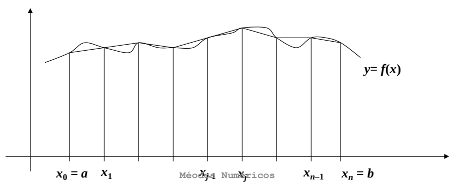
$$\overline{f}'' \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i)}{n}$$

$$E_{TC} = -\frac{(b-a)h^2}{12}\overline{f}''(\eta) \quad \eta \in (a,b)$$

$$|\varepsilon_{TC}| \leq -\frac{\overline{y}(b-a)^2 \varepsilon}{2h}$$

Teorema: Sea $f \in C^2[a, b]$, n par, $h = (b - a)/n$, y $x_j = a + jh$ para cada $j = 0, 1, 2, \ldots n$. La regla del trapecio para n subintervalos puede escribirse como:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right]$$



Regla de Simpson Compuesta

Aplicamos la regla de Simpson en cada subintervalo

$n>2$, n par, $n = 2m$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots ,n$, $h = (b-a)/n = (b-a)/2m$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{h}{3}(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right)$$

$$I \cong h\frac{[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}{3} + h\frac{[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]}{3} + \ldots + h\frac{[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]}{3}$$

Agrupando términos

$$I_S = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(x_n)\right)$$

Regla de Simpson Compuesta

$$E_{SC} = \sum_{i=1}^{m} -\frac{h^5}{90} f^4(\eta_i) = -\frac{(b-a)^5}{90(2m)^5}\sum_{i=1}^{m} f^4(\eta_i)$$

$$\overline{f}^4 \cong \frac{\sum_{i=1}^{m} f^4(\eta_i)}{m}$$

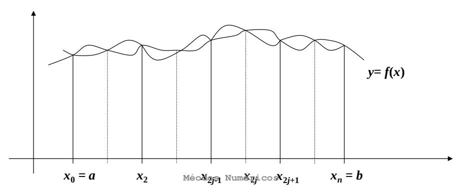
$$E_{SC} = -\frac{(b-a)h^4}{180}\overline{f}^4(\eta) \quad \eta \in (a,b)$$

$$\varepsilon_{SC} \propto \frac{1}{h}$$

Regla de Simpson Compuesta

Teorema. Sea $f \in C^4[a, b]$, n par, $h=(b - a)/n$, y $x_j = a + jh$ para cada $j = 0, 1, 2, \ldots n$. La regla de Simpson para n subintervalos puede escribirse como:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=0}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right]$$



Integración sobre intervalos no uniformes

Si los datos no son igualmente espaciados, puede aplicarse la regla del trapecio a cada intervalo y sumar los resultados

$$I = h_1\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h_2\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \ldots + h_n\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

h_i = ancho del intervalo *i-ésimo*

Si algunos intervalos consecutivos son iguales, se puede aproximar la integral usando regla de Simpson.

También se podría hacer una partición uniforme interpolando con alguna función apropiada

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

Sirve para mejorar la estimación de la integral utilizando una combinación de estimaciones para distintos valores del paso de integración, h.

Al usar regla del trapecio, para integrandos finitos con derivadas finitas dentro del intervalo de integración vale

$$I = I_T(h) + ah^2 + bh^4 + ch^6 + \ldots$$

,*a, b, c* ctes no dependen de *f(x)*

Usando h_1 y h_2

$$I = I_T(h_1) + ah_1^2, \; I = I_T(h_2) + ah_2^2$$

Sustituyendo,

$$I_T(h_1) + ah_1^2 = I_T(h_2) + ah_2^2 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{I(h_2) - I(h_1)}{h_1^2 - h_2^2}$$

$$I \cong I(h_2) + \frac{h_2^2}{h_1^2 - h_2^2}(I(h_2) + I(h_1)) \qquad \text{con } O(h^4)$$

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

Se puede escribir

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1}\left[I(h_2) - I(h_1)\right]$$

Si consideramos

$$h_2 = \frac{h_1}{2}$$

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{2^2 - 1}\left[I(h_2) - I(h_1)\right]$$

$$I \cong \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1)$$

Calcular la integral de $f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$

En el intervalo: a = 0, b = 0.8

Ej:

$$I_v = 1.6405$$

n	h	I
1	0.8	0.1728
2	0.4	1.0688
4	0.2	1.4848

$$I \cong \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.3674$$

$$I \cong \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.6235$$

Integración de Romberg

Es una generalización de la extrapolación de Richardson, se genera una estimación de la integral dentro de una tolerancia de error especificada. La idea es hacer sucesivas estimaciones para valores de h cada vez mas pequeños y mejorar las aproximaciones a la integral.

Si $h_{i+1} = h_i / 2$

Forma General:

$$I_{j,k} \cong \frac{4^{k-1} I_{j,k-1} - I_{j-1,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

K = 2,…,j , j = 2,3,4,…n

$I_{j,k-1}$: integral más exacta

$I_{j-1,k-1}$: integral menos exacta

$I_{j,k}$: integral mejorada

k: nivel de la integración

Ejemplo:

Calcular la integral de $f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ en [0,0.8]

Ej: $I_v = 1.6405$

n	h	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$
1	0.8	0.1728		
2	0.4	1.0688	1.3674	
4	0.2	1.4848	1.6235	1.6405

$$I_{2,2} \cong \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.3674$$

$$I_{2,3} \cong \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.6235$$

$$I_{3,3} = \frac{16}{15}(1.6235) - \frac{1}{15}(1.3675) = 1.6405$$

Integración de Romberg

Los sucesivos valores $I_{j,k}$ se calculan por filas:

$I_{1,1}$

$I_{2,1}$ $I_{2,2}$

$I_{3,1}$ $I_{3,2}$ $I_{3,3}$

$I_{4,1}$ $I_{4,2}$ $I_{4,3}$ $I_{4,4}$

. … ....

Romberg finaliza cuando $|I_{k,k-1} - I_{k,k}| < \epsilon$, para un $\epsilon > 0$

Cuadratura de Gauss

Las aproximaciones vistas son:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b p_n(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = In(f)$$

Las fórmulas de cuadratura de Gauss se basan en buscar valores de α_i y x_i de forma tal que la aproximación sea exacta para polinomios de grado lo mas alto posible.

Es decir que no partimos de nodos igualmente espaciados, debemos elegir los α_i y x_i , 2n parámetros,

Cuadratura de Gauss

Definición: Dada $I = \int_a^b \omega(x) f(x) dx$ integral generalizada con ω(x)≥0 , si la aproximamos con una suma de cuadratura $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$ diremos que la fórmula tiene <u>grado de precisión m</u> si es exacta siempre que *f(x)* sea un polinomio de grado ≤m

Sin perdida de generalidad vamos a considerar integrales con ω(*x*) = 1 en el intervalo [-1,1], o sea

queremos $$\int_{-1}^{1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

En(f) =0 para polinomios del mayor grado posible

$$En(f) = \int_{-1}^{1} f(x) dx - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = 0$$

Cuadratura de Gauss

Para n = 1, *α1, x1*

$$E(1) = \int_{-1}^{1} 1\, dx - \alpha_1 = 0 \quad \alpha 1 = 2$$

$$E(x) = \int_{-1}^{1} x dx - \alpha_1 x_1 = 0 \quad x1 = 0$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx \approx 2 f(0)$$

Para n = 2, *α1, x1, α2, x2*

Usamos 4 condiciones : $E(x^i) = 0$, i = 0,1,2,3

α1 = α2 =1 x2 = -x1 = $\sqrt{3}/3$

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

Cuadratura de Gauss

En general para n ≥ 3

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = \int_{-1}^{1} x^j dx = \frac{x^{j+1}}{j+1} = \begin{cases} 0 & j = 1,3,\ldots,2n-1 \\ \frac{2}{j+1} & j = 0,2,\ldots,2n-2 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones no lineales

Teorema: Las fórmulas de cuadratura $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$ pueden tener un grado máximo de precisión 2n-1, se obtiene sii los n nodos *xi* son los ceros de *pn(x)*, polinomio ortogonal sobre [a,b] y la fórmula es interpolatoria.

Una vez conocidos los nodos, los *αi* se calculan

$$\alpha_i = \frac{1}{p'_n(x_i)} \int_a^b \frac{p_n(x)}{x - x_i} dx \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Cuadratura de Gauss

En resumen:

Una fórmula de cuadratura con n nodos es exacta para polinomios de grado $\leq$ *2n-1* si y sólo si:

- la fórmula es interpolatoria, y
- los nodos son las raíces del n-ésimo polinomio ortogonal respecto del producto escalar inducido por ω*(x)* en [*a*,*b*].

$$\int_a^b \omega(x)\, f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Fórmulas de Cuadratura de Gauss

CUADRATURA	INTERVALO	F. PESO
Gauss-Legendre	*[a,b]=[-1,1]*	*w(x)=1*
Gauss-Chebyshev	*[a,b]=[-1,1]*	$w(x)=1/(1-x^2)^{1/2}$
Gauss-Jacobi	*[a,b]=[-1,1]*	$w(x)=(x-1)^a(x+1)^b$
Gauss-Laguerre	$[a,b]=[0,+\infty)$	$w(x)=x^a e^{-x}$
Gauss-Hermite	$[a,b]=(-\infty, +\infty)$	$w(x) = e^{-x^2}$

Cuadratura de Gauss- Legendre

Podemos hacer cambio de variable, dado un intervalo a,b cualquiera:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2})(\frac{b-a}{2}) dt$$

la fórmula de cuadratura será

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f\left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{b+a}{2}\right) + E(f)$$

En este caso:

n	nodos	coeficientes
2	±0.5773502692	1.0000000000
3	±0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
4	±0.8611361159	0.3478548451
	±0.3399810436	0.6521451549

Ejemplo:

Dada $f(x)=0,2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$ en [0, 0.8]

$I_v = 1.6405$

Llevamos de [0, 0.8] a [-1, 1]

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\right)dt$$

$$\int_0^{0.8} f(x)\,dx = \left(\frac{0.8}{2}\right)\int_{-1}^{1} f\left(\frac{0.8}{2}t+\frac{0.8}{2}\right)dt$$

O sea que $\int_a^b f(x)dx = 0.4\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \cdot f\left(0.4+0.4x_i\right)$

Para n = 2, $x_i = \pm 1/\sqrt{3}$, $\alpha_i = 1$, $I_{G2} \approx 0.5167 + 1.3058 = 1.8226$

Para n = 3, $x_i = \pm\sqrt{3/5}, 0$, $\alpha_i = 5/9, 8/9$, $I_{G3} \approx 1.6405$

Error para Cuadratura de Gauss

El error para las fórmulas de Gauss

$$E(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b p_n^2(x)w(x)\,dx$$
$$a<\xi<b$$

Esto significa que con n puntos podemos integrar exactamente hasta un polinomio de grado 2n-1.

Cuadratura de Gauss

- Su mayor ventaja es la eficiencia en el cálculo, el doble de rápido que las de Newton Cotes
- Además permite calcular integrales con singularidades
- Una limitación de Cuadratura de Gauss es que debe evaluarse en puntos específicos, es decir que debemos conocer la función, lo cual muchas veces no ocurre cuando trabajamos con datos experimentales
- Es difícil de calcular su error