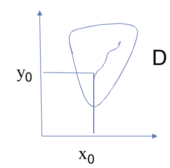
Métodos Numéricos para la Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Valor Inicial

Problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \forall\ x \in I$$



$y' = f(x,y)$ Relación entre y' e y

$y(x_0) = y_0$ Condición inicial

Suponemos que se verifica la condición de existencia y unicidad de la solución

Teorema de existencia y unicidad de la solución

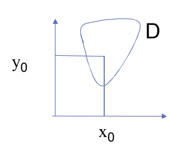
Sea $D \in \Re^{n+1}$ un dominio y sea $f : D \rightarrow \Re^{n}$ una función continua que satisface una condicion de Lipschitz:

$$\| f(x,y_1) - f(x,y_2) \| \leq L \| y_1 - y_2 \|$$

$\forall\ (x,y_1),(x,y_2) \in D$ y una constante $L > 0$.

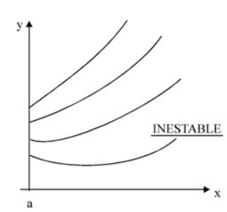
$\Rightarrow \forall\ (x_0,y_0) \in D\ \exists$ un intervalo I que contiene a x_0 tal que el problema

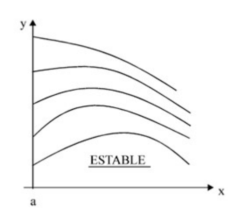
$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$



tiene solución unica en ese intervalo.

FAMILIA DE SOLUCIONES





Solución Numérica

Métodos de diferencia o métodos de variable discreta

Dado el intervalo I = [a,b] y si $y0 = y(x0)$,

sea $x1 = x0 + h$, $y1 \sim y(x1)$,

sea $x2 = x1 + h$, $y2 \sim y(x2)$,

…

$xn = xn\text{-}1 + h$, $yn \sim y(xn)$

⇧

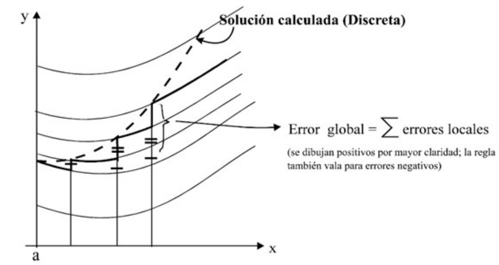
solución numérica

Errores en Solución Numérica

Error de truncamiento: $En = y(xn) – yn$

Error de redondeo: representación de punto flotante

Propagación del Error



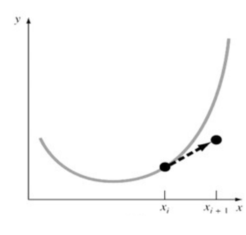
Errores en la solución Numérica

RESULTADO GENERAL

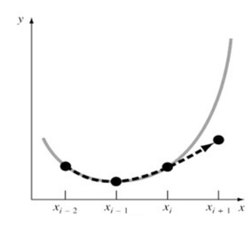
Si el error de truncamiento local de un método es $O(h^{p+1})$ entonces el error de truncamiento global es $O(h^{p})$

CLASIFICACION DE METODOS

Métodos de un paso



Métodos multipaso



Métodos Numéricos de un Paso

Un método numérico se dice de un paso si $\forall$ n $\geq$ 0, y_{n+1} depende solo de y_n.

Serie de Taylor

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \ldots + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} y^{r+1}(\xi_i)$$

$$T_{n+1} = \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} y^{r+1}(\xi_n) \quad \Longrightarrow \quad \text{Error de Truncamiento}$$

Métodos de Runge Kutta

Características Generales:
- son métodos de un paso
-coinciden con la serie de Taylor hasta el término de orden h^p sin requerir el cálculo de derivadas superiores, p es el orden del método
- hacen evaluaciones de la derivada en puntos intermedios entre x_n y x_{n+1}

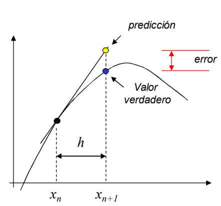
$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n, h, f)$$

F se llama función de incremento

F ~ f(x,y)

Método de Euler

$$y' = f(x, y)$$
$$dy / dx = f(x, y)$$
$$\int_{xn}^{xn+1} dy = \int_{xn}^{xn+1} f(x, y)\, dx$$



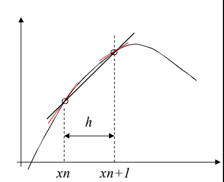
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$T_n(h) = h^2 / 2 y''(\xi_n) \quad \Longrightarrow \quad O(h)$$

Método de Trapecio

$$y_{n+1} = y_n + \int_{xn}^{xn+1} f(x, y) dx$$

$$\int_{xn}^{xn+1} f(x, y)\, dx \approx h/2(\, f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$



$$y_{n+1} \cong y_n + h/2(\, f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})) \quad n = 0,1,\ldots$$

$$T_n(h) \propto h^3 \quad \Longrightarrow \quad O(h^2)$$

Método de RK de cuarto orden

Es el método más popular de los métodos Runge Kutta

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

Siendo: $k_1 = f\left(x_n, y_n\right)$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_n + h, y_n + k_3 h\right)$$

$$T_n(h) \propto h^5 \Longrightarrow O(h^4)$$

Comparación de métodos

Butcher (60')

Eval Fn.	2	3	4	5	6	7	N >8
Error	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^4)$	$O(h^5)$	$O(h^6)$	$O(h^{n-2})$

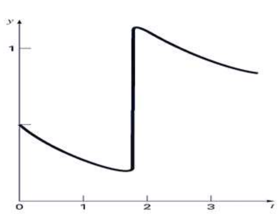
No hay relación directa entre número de evaluaciones y el mejor error posible para $n \geq 4$

Paso Variable

La solucion de algunas ecuaciones presenta escalas de tiempo muy variables,

Si se utiliza un paso h constante se realiza más esfuerzo del necesario

Una forma de solucionar esto es utilizando paso variable



Se trata de garantizar que el error local en cada paso permanezca acotado .

Se puede implementar de dos formas:

1) Realizando dos veces el cálculo, con un paso h y con dos pasos de h/2 y comparando los resultados.

2) Combinando dos métodos de Runge Kutta de ordenes diferentes (ODE23, ODE45)

Método de Runge-Kutta Fehlberg (1990)

RK4 $$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{37}{378}k_1 + \frac{250}{621}k_3 + \frac{125}{594}k_4 + \frac{512}{1771}k_6\right)h$$

RK5 $$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{2825}{27648}k_1 + \frac{18575}{48384}k_3 + \frac{13525}{55296}k_4 + \frac{277}{14336}k_5 + \frac{1}{4}k_6\right)h$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + \frac{1}{5}h, y_i + \frac{1}{5}k_1 h) \\ k_3 = f(x_i + \frac{3}{10}h, y_i + \frac{3}{40}k_1 h + \frac{9}{40}k_2 h) \\ k_4 = f(x_i + \frac{3}{5}h, y_i + \frac{3}{10}k_1 h - \frac{9}{10}k_2 h + \frac{6}{5}k_3 h) \\ k_5 = f(x_i + h, y_i - \frac{11}{54}k_1 h + \frac{5}{2}k_2 h - \frac{70}{27}k_3 h + \frac{35}{27}k_4 h) \\ k_6 = f(x_i + \frac{7}{8}h, y_i + \frac{1631}{55296}k_1 h + \frac{175}{512}k_2 h + \frac{575}{13824}k_3 h - \frac{44275}{110592}k_4 h + \frac{253}{4096}k_5 h) \end{cases}$$

Ventajas de Runge Kutta:

Se autoinician
Son fáciles de implementar
Son estables

Desventajas de Runge Kutta:

Requieren tiempo de cálculo relativamente alto
No es sencillo el cálculo del error
No trabajan bien para resolver ecuaciones stiff
Con el uso de paso variable se aumenta su eficiencia y pueden utilizarse para resolver ecuaciones stiff

Métodos Multipaso

Forma General:

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f_{n-j}, n = \text{p, p-1, p-2, …}$$

a_j y b_j son constantes,
Si $a_p \neq 0$ o $b_p \neq 0$ el método es de p+1 pasos

Si $b_{-1} = 0$ $\Rightarrow$ Método explicito

Si $b_{-1} \neq 0$ $\Rightarrow$ Método implicito

Se usa información en varios puntos anteriores x_i, x_{i-1}, x_{i-2} esto determina el orden del método
No se autoinician

Métodos de Adams

$$y' = f(x, y)$$

$$\int_{xn}^{xn+1} dy = \int_{xn}^{xn+1} f(x, y)dx$$

Se construye el polinomio interpolante de $f(x,y)$ en los puntos x_n, x_{n-1}, … , x_{n-p} y se calcula:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{xn}^{xn+1} p(x)dx$$

obteniéndose $$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f_{n-j}$$

$b_{-1} = 0$ $\Rightarrow$ ADAMS- BASHFORTH explicito
$b_{-1} \neq 0$ $\Rightarrow$ ADAMS- MOULTON implicito

Métodos de Adams Bashforth

$p = 0 \qquad y_{n+1} = y_n + h\, f_n + \tfrac{1}{2}\, h^2\, y''(\xi_n)$

$p = 1 \qquad y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{2}\left[3 f_n - f_{n-1}\right] + \tfrac{5}{12}\, h^3\, y''(\xi_n)$

$p = 2 \qquad y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{12}\left[23 f_n - 16 f_{n-1} + 5 f_{n-2}\right] + \tfrac{3}{8}\, h^4\, y'''(\xi_n)$

$p = 3 \qquad y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{24}\left[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right] + \tfrac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_n)$

Métodos de Adams Moulton

$p = 0 \qquad y_{n+1} = y_n + h\, f_{n+1} - \tfrac{1}{2}\, h^2\, y''(\xi_n)$

$p = 1 \qquad y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{2}\left[f_{n+1} + f_n\right] - \tfrac{1}{12}\, h^3\, y''(\xi_n)$

$p = 2 \qquad y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{12}\left[5 f_{n+1} + 8 f_n - 5 f_{n-1}\right] - \tfrac{1}{24}\, h^4\, y'''(\xi_n)$

$p = 3 \qquad y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{24}\left[9 f_n + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right] - \tfrac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_n)$

Métodos Predictor Corrector

Huen

$P: \quad y_{n+1} = y_n + h\, f_{n+1}$

$C: \quad y_{n+1} = y_n + h\,(f_n + f_{n+1})$

Milne

$P: \; y_{n+1} = y_{n-3} + \tfrac{4h}{3}\left[2 f_n - f_{n-1} + 2 f_{n-2}\right]$

$C: \; y_{n+1} = y_{n-1} + \tfrac{h}{3}\left[f_{n+1} + 4 f_n + f_{n-1}\right]$

Adams

$P: \quad y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{24}\left[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right]$

$C: \quad y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{24}\left[9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right]$

Consistencia, Convergencia y Estabilidad

- Si $T_n \longrightarrow 0$ cuando $h \longrightarrow 0$, el método es consistente (condición local)

- Si $\lim_{h \to 0} \max_{1 \le n \le N} | y_n - y(x_n) | = 0$ cuando $h \longrightarrow 0$, el método es convergente (condición global)

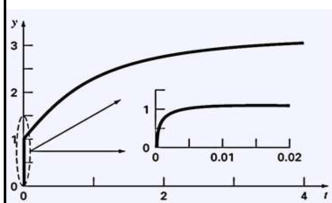
- Si $\exists\, k(x)$ / $| y_n - \dot{y}_n | \le k(x_n) | y_0 - \dot{y}_0 |$, $n = 1, 2, \ldots$, el método es estable

En general:

Un método de diferencia es convergente si y solo si es consistente y estable.

Ecuaciones Stiff

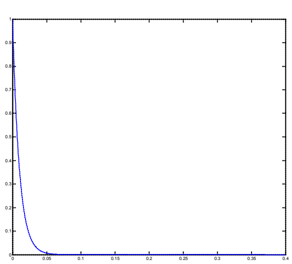
Se dice que una EDO es Stiff (rígida) si su solución numérica requiere, para algunos métodos y quizás en una porción del intervalo donde está definida la solución, una disminución del tamaño de paso para evitar la inestabilidad.



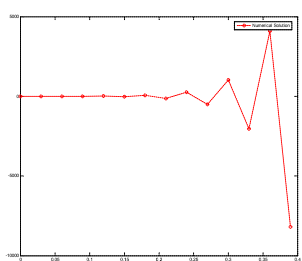
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -1000y + 3000 - 2000e^{-t} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y_{exact} = 3 - 0.998e^{-1000t} - 2.002e^{-t}$$

Ecuación Stiff
$$\left.\begin{array}{r} \dot{y} + 100y = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y(t) = e^{-100t}$$



Sol. Analítica



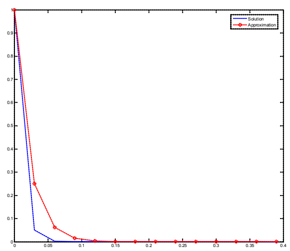
Euler Explícito ($t = 0.03$)

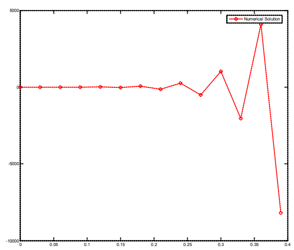
Ecuación stiff
$$\left.\begin{array}{r} \dot{y} + 100y = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y(t) = e^{-100t}$$

Usando Euler, para *: Δt=0.01, Δt=0.03*

Δt=0.03 Error	*Δt=0.01 Error*
0	*0*
2.04978706836786	*0.36787944117144*
-3.99752124782333	*0.13533528323661*
8.00012340980409	*0.04978706836786*
-15.99999385578765	*0.01831563888873*
32.00000030590232	*0.00673794699909*

Ecuación Stiff $\left.\begin{array}{r}\dot{y}+100y=0\\ y(0)=1\end{array}\right\} \Rightarrow \quad y(t)=e^{-100t}$





Sol. Analítica y Euler implicito Euler explícito *(t= 0.03)*

Sistema de Ecuaciones

Dado el sistema:

$$\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad y_1(x_0) = y_{1,0} \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad y_2(x_0) = y_{2,0} \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad y_n(x_0) = y_{n,0} \end{array},$$

Se cumple una condición de Lipschitz extendida

<u>Ecuaciones Diferenciales de orden Superior</u>

Dada la siguiente ecuación:

$$y^m = f\left(x, y, y', y'' \ldots, y^{m-1}\right)$$

Si se conoce

$$y(x_0), \quad y'(x_0), \quad y''(x_0), \ldots, \quad y^{m-1}(x_0)$$

se puede escribir como un sistema de ecuaciones de primer orden con valor inicial

Ejemplo:

$$y''' + 2y'' - x^2 y' = 5x$$

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -2y_3 + x^2 y_2 + 5x \end{cases}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ x^2 y_2 - 2y_3 + 5x \end{pmatrix}$$