SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones representan problemas físicos que involucran la interacción de varias propiedades. Las variables en el sistema representan las propiedades que se estudian y las ecuaciones describen la interacción entre las variables. Vamos a resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{aligned} &a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ &a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ &a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{aligned}$$

En forma matricial: $Ax = b$, con $A \in \Re^{nxn}$, $x \in \Re^n$, $b \in \Re^n$

CLASIFICACIÓN DE MÉTODOS

METODOS DIRECTOS: Son aquellos que nos conducirían a la solución exacta luego de un número finito de operaciones elementales, si no hubiera errores de redondeo

METODOS ITERATIVOS: parten de una estimación inicial x_0 y construyen una sucesión de aproximaciones, que en principio, convergen a la solución x

TIPOS DE MATRICES

MATRICES DENSAS: Son aquellas que poseen pocos elementos nulos y son de orden bajo

MATRICES RALAS(SPARSE): Son aquellas que poseen muchos ceros y son de orden alto

Teorema 1: Dada A, matriz cuadrada de orden n, los enunciados siguientes son equivalentes:

- El sistema homogeneo Ax=0 tiene solo la solución trivial x=0
- ∀ miembro de la derecha, b, el sistema A x = b tiene una solución
- A es invertible

Matrices Especiales

- **Matriz Triangular Superior**
  - Sea aquella matriz de orden ***n*** en donde todos sus elementos por debajo de la diagonal principal son 0's

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j \quad i, j = 0..n \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrices Especiales

- **Matriz Triangular Inferior**
  - Sea aquella matriz de orden ***n*** en donde todos sus elementos por arriba de la diagonal principal son 0's

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i < j \quad i, j = 0..n \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

SISTEMA CON MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Dado el sistema A x = b, siendo A una matriz $\in \Re^{nxn}$, triangular superior, con todas sus entradas diagonales no nulas, entonces resolvemos el sistema utilizando **sustitución hacia atrás**

Algoritmo:

P1 *Calcular* $x_n = b_n / a_{nn}$

P2 *Para k = n-1 , … , 1.-1*

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}\, x_j}{a_{kk}}$$

Teorema: Si A es matriz triangular superior, con $a_{ii} \neq 0 \ \forall\, i$, entonces A es invertible

Matrices Especiales - Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix}$$

⇒ Matriz Triangular Superior ⇒ Algoritmo Sustitución hacia Atrás

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⇒ Matriz Triangular Inferior ⇒ Algoritmo Sustitución hacia Adelante

SISTEMA CON MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

- Dado el sistema A x= b, siendo A una matriz $\in \Re^{nxn}$, triangular inferior, con todas sus entradas diagonales no nulas, entonces resolvemos el sistema utilizando **sustitución hacia adelante**

  Algoritmo:

P1 *Calcular* $x_1 = b_1 / a_{11}$

P2 *Para k = 2 , … , n,1*

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\, x_j}{a_{kk}}$$

Teorema: Si A es matriz triangular inferior, con $a_{ii} \neq 0 \ \forall\, i$, entonces A es invertible

CASO GRAL

Dado el sistema de ecuaciones lineales de la forma

$A\,x = b$, donde $A \in \Re^{nxn}$; $b \in \Re^{n}$

siendo la matriz del sistema no triangular entonces utilizamos el método de Eliminación de Gauss para transformar el sistema en uno equivalente con matriz triangular superior

Teorema 2 (INVARIANZA DE LA SOLUCIÓN)**:**

Las soluciones de un sistema Ax = b permanecen invariantes ante las siguientes operaciones:

- Intercambio de dos ecuaciones cualesquiera
- Multiplicación de una ecuación por un escalar no nulo
- Suma de una ecuación con una combinación lineal no nula de otras ecuaciones

ELIMINACION DE GAUSS

ALGORITMO DE TRIANGULACION

Para resolver el sistema, se requiere el uso de la matriz ampliada del sistema, la cual se define como [A:B]. Luego, se sustituye A por la matriz escalonada equivalente, aplicando operaciones elementales.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

1) eliminamos los elementos de la primera columna.

Sumo a la 2da ecuación la 1era multiplicada por $m_{21} = -1/2$
sumo a la 3era ecuación la 1era multiplicada por $m_{31} = -2$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -3x_2 + 6x_3 &= -3 \\ -7x_2 + 2x_3 &= -10\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -3x_2 + 6x_3 &= -3 \\ -7x_2 + 2x_3 &= -10\ . \end{aligned}$$

2) eliminamos los elementos de la segunda columna.

Sumo a la 3era ecuación la 2da multiplicada por $m_{31} = -\ 7/3$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -3x_2 + 6x_3 &= -3 \\ -12x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Obtengo una matriz triangular superior.

Utilizando el algoritmo de sustitución hacia atrás resolvemos el sistema $x^T = (1/4,\ 3/2,\ 1/4)$

FACTORIZACION LU

Sea el problema general de resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$Ax = b \quad \text{, donde } A \in \Re^{nxn}, b \in \Re^{n}$$

Este método se usa para resolver sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes y distintos términos independientes.
Se descompone la matriz A en un producto de dos matrices:

- Una matriz triangular inferior unidad *L*.
- Una matriz triangular superior *U*,

de tal forma que *A=LU*

FACTORIZACION LU

- Dado el sistema inicial, A x = b,

$$A^1 = (a^1{}_{ij}\ ),\ b^1 = (b^1{}_i\ ),\ 1 \le i,j \le n$$

Paso 1: suponiendo $a^1{}_{11} \neq 0$

$$m_{i1} = a^1{}_{i1} \,/\, a^1{}_{11} \qquad i = 2, 3, \ldots, n$$

$$a^2{}_{ij} = a^1{}_{ij} - m_{i1}\, a^1{}_{1j} \qquad i,j = 2, 3, \ldots, n$$

$A^2 = (a^2{}_{ij}\ )$

Paso k: suponiendo $a^k{}_{kk} \neq 0$

$$m_{ik} = a^k{}_{ik} \,/\, a^k{}_{kk} \qquad i = k+1, \ldots, n$$

$$a_{ij}^{k+1} = a^k{}_{ij} - m_{ik}\, a^k{}_{kj} \qquad i,j = k+1, \ldots, n$$

$A^{k+1} = (a_{ij}^{k+1})$

FACTORIZACION LU

Despues de n-1 pasos: A^n, triangular superior, $U = A^n$

$$U = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & . & a_{1n}^1 \\ 0 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & . & a_{2n}^2 \\ 0 & 0 & a_{33}^3 & . & a_{3n}^3 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0. & . & a_{nn}^n \end{bmatrix}$$

Definimos ahora la matriz L, formada por los multiplicadores

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & . & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ m_{n1} & m_{n2} & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 3 .- *(Factorización LU)*
Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}$ tal que las n submatrices principales:

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

sean inversibles (esto es, $det(\Delta_k) \neq 0$, $\forall k = 1, \ldots, n$). Entonces, $a_{kk}^k \neq 0$, $\forall k = 1, \ldots, n$, y, por tanto, existe una matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$ con elementos diagonales $l_{ii} = 1$, $\forall i = 1, \ldots, n$, y una matriz triangular superior $U = (u_{ij})$ tales que $A = LU$. Además, esta factorización es única.

FACTORIZACION LU

Dado el sistema inicial, Ax = b, y calculada A = LU, solución del sistema es:

$$LU\,x = b$$
$$L\,y = b$$
$$U\,x = y$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

NUMERO DE OPERACIONES

Consideramos el costo de:

i) Cálculo de L y U

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 \cong 2\int_1^{n-1}(n-k)^2\,dk = -2\left(\frac{(n-k)^3}{3}\right)_1^{n-1} = 2\left(\frac{(n-1)^3}{3} - \frac{1}{3}\right) \cong \frac{2n^3}{3}$$

ii) Resolución de Ly = b

$$\sum_{i=1}^{n} 2(i-1)+1 = \sum_{i=1}^{n} 2i-1 = 1+3+\ldots+2n-1 = \frac{1+2n-1}{2}n = n^2$$

iii) Resolución de Ux = y

$$\sum_{i=1}^{n} 2(i-1)+1 = \sum_{i=1}^{n} 2i-1 = 1+3+\ldots+2n-1 = \frac{1+2n-1}{2}n = n^2$$

El costo es $O(n^3)$

CALCULO DEL DETERMINANTE

A = LU $\longrightarrow$ **det(A) = det(L)det(U) = det(U)**

CALCULO DE A^{-1}

Dado que: $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

Calculamos: $\mathbf{A}\,x^i = e^i$, $i = 1,\ldots, n$

A : matriz de partida

X^i : columna i-esima de la matriz inversa

e^i : columna i-esima de la matriz identidad, $(0\ldots.1^{(i)}\ldots\ldots0)^t$

Pivoteo y Escalamiento en el Método de Gauss

- Se ha supuesto que $a_{kk}^k \neq 0 \ \forall k$, elemento pivote, caso contrario hay que realizar intercambio de filas.

También puede ocurrir que el elemento pivote sea pequeño entonces:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k+1)}}{a_{kk}^{(k+1)}} \quad , \quad i = k+1, \ldots, n$$

serán grandes y producen mucho error de redondeo

Pivoteo Parcial

- Wilkinson llama así a tomar como pivote el elemento de mayor valor absoluto de una columna

Paso k :

$$c_k = \max_{i=k \dots n} \left| a_{ik}^{k} \right|$$

Siendo i el menor índice $\geq k$ tal que se obtiene el valor c_k

Nótese que de esta forma los multiplicadores

$$|m_{ik}| \leq 1 \qquad , i = k+1,\dots,n$$

Si $i > k$ se intercambian las filas en A y b

Pivoteo Total

- Wilkinson llama así a tomar como pivote el elemento de mayor valor absoluto de toda la matriz

Paso k :

$$c_k = \max_{i,\, j=k \dots n} \left| a_{ij}^{k} \right|$$

es muy caro por el numero de comparaciones , por ello es mas utilizado el pivoteo parcial

Implementación de LU con Pivoteo

-

Si representamos con $P = (P_{n-1} \dots P_1)$ las permutaciones de filas realizadas, entonces $P A = L U$

Dado $A x = b$ si $P A = L U \therefore A = PLU$

$PLU\, x = b$

$L y = P b$

$U x = y$

Escalamiento Implícito

- Wilkinson propone que una matriz debe *equilibrarse* antes de aplicar una algoritmo de solución de sistemas lineales.

Al aplicar el **escalamiento implícito**, supongamos estar en el paso k del proceso de triangulación:

$$c_k = \max_{i=k \dots n} \frac{\left| a_{ik}^{k} \right|}{s_i}$$

Siendo s, vector tamaño, que se inicializa al comenzar el algoritmo: $s_i = \max_{j=1 \dots n} \left| a_{ij} \right|$

i es el menor índice tal que $i \geq k$, si son distintos se intercambian las filas

Variantes de Eliminación de Gauss
Método de Gauss Jordan

Es similar al método de Gauss, la diferencia es que se diagonaliza la matriz

Paso k: suponiendo $a^{k}{}_{kk} \neq 0$

$$m_{ik} = a^{k}{}_{ik} / a^{k}{}_{kk} \qquad i = 1, \ldots, n \ , i \neq k$$
$$a^{k+1}{}_{ij} = a^{k}{}_{ij} - m_{ik}\, a^{k}{}_{kj} \qquad j = k, \ldots, n$$
$$b^{k+1}{}_{i} = b^{k}{}_{i} - m_{ik}\, b^{k}{}_{k}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & 0 & b_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array}\right]$$

Al finalizar el algoritmo tenemos $x = b^n$

Desventaja: Costo aumenta en 50%

Variantes de Eliminación de Gauss
Método de Cholesky

- Sea $A \in \Re^{nxn}$, simétrica y definida positiva :

A simétrica si A = A^T

A definida positiva si $X^T A X > 0 \ \forall \ X \neq 0$

Para estas matrices se puede encontrar una matriz triangular inferior L, con elementos diagonales positivos, tal que A = L L^T

$$l_{jj} = (a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^{2})^{1/2}$$

$$l_{ij} (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, l_{jk}) / l_{jj} \ , \qquad i>j$$

Ventajas: costo es la mitad de LU y no necesita pivoteo

Método de Thomas(sistemas tridiagonales)

Para estas matrices, llamadas de Jacobi, se implementa una variante de LU, con un costo O(n)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y vale que:

$$l_{11} = a_{11} \ , \qquad u_{12} = a_{12}/l_{11}$$
$$l_{ii} = a_{ii} - a_{ii-1} u_{i-1i}, \qquad u_{i\,i+1} = a_{i\,i+1}/l_{ii} \qquad i = 2,\ldots,n-1$$
$$l_{nn} = a_{nn} - a_{n\,n-1} u_{n-1\,n}$$