Análisis del Error en Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Dado el sistema de ecuaciones lineales de la forma

$A\,x = b$, donde $A \in \Re^{nxn}$; $b \in \Re^{n}$

En realidad tenemos:

$(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b)$

$A\,x + A\,\delta x + \delta A x + \delta A\,\delta x = Ax + \delta b$

Si despreciamos $\delta A\,\delta x$:

$\delta x = A^{-1}(\delta b - \delta A x)$

Norma

Medida escalar de la magnitud de un vector o una matriz.

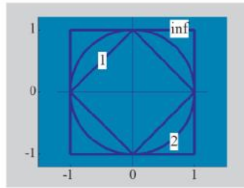
Norma Vectorial: Dado un vector X $\in \Re^{n}$, definimos **norma p**

$$\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$p=1: \quad \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$p=2: \quad \|X\|_2 = \|X\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

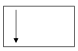
$$p=\infty: \quad \|X\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$



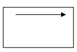
Norma Matricial: Dada un matriz A $\in \Re^{nxn}$, definimos las normas matriciales , en función de las normas vectoriales definidas antes, se llama norma inducida

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Norma Columna $\quad \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$



Norma Fila $\quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$



Norma Raíz $\quad \|A\|_2 = (\lambda_{max})^{1/2}$,

λ_{max} : radio espectral de $[A]^T[A]$

Número de Condición

$\mathrm{Cond}(A) = \kappa(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$

- El producto de normas es un medida cuantitativa del grado de mal condicionamiento de la matriz de coeficientes. Mide cuan cerca está una matriz de ser singular
- Se usa para calcular como afectan los errores relativos en A y/o b el cálculo de x.
- Se puede demostrar que

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \mathrm{Cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad \text{y} \quad \frac{\|\Delta X\|}{\|X + \Delta X\|} \le \mathrm{Cond}(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

- Si A y b tienen t cifras significativas y $\kappa(A)$ es de un orden 10^{s} entonces la precisión del resultado será 10^{s-t}

Sistema de ecuaciones mal condicionadas

- Una pequeño error en las entradas de la matriz A, causa una gran error en la solución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.48 & 0.99 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.47 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.49 & 0.99 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.47 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$K(A) = ?$

Definición de Residuo

Dado el sistema $A\,x = b$, donde $A \in \Re^{nxn}$; $b \in \Re^{n}$

Sea x_c valor calculado

$$e = x - x_c$$
$$r(x) = b - Ax_c$$
$$r(x) = Ax - Ax_c = Ae$$
$$e = A^{-1}r$$
$$si \;\; r(x) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; e = 0$$

***Teorema**: Para toda matriz $A \in \Re^{nxn}$ vale que*

$$\frac{1}{K(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|e\|}{\|x\|} \le K(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

Error en Eliminación de Gauss

- Wilkinson estudió el efecto del redondeo en el método de Eliminación de Gauss, considerando la triangulación con pivoteo y la solución de los dos sistemas triangulares, concluyendo que es un proceso muy estable, considerando que la matriz A no sea mal condicionada.
- Una forma de chequear esto es controlando los elementos de U, si crecen mucho es una señal de mala condición de la misma
- También multiplicar la inversa por la matriz de coeficientes original y estimar si el resultado es suficientemente cercano a la matriz identidad.

METODOS ITERATIVOS

- Son recomendados para matrices *sparse,* caracterizadas por ordenes altos y muchos elementos nulos.
- Las ventajas respecto a los métodos directos se relacionan con: número de operaciones
  posiciones de memoria
  errores de redondeo

El principio de estos métodos es dividir a la matriz A, de forma tal que el sistema sea fácil de resolver.

Generamos una ecuación de la forma:

$$x^{k+1} = B\, x^{k} + C$$

B se llama matriz de iteración

Método de Jacobi

Escribimos A = L + D + U

D: matriz diagonal , L y U: matrices triangulares

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i = j \\ 0 & \end{cases} \quad l_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i > j \\ 0 & \end{cases} \quad u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i < j \\ 0 & \end{cases}$$

Suponiendo que los $a_{ii} \neq 0 \ \forall\, i$, D es invertible

$$\begin{aligned} A x &= b \\ (D + L + U)\, x &= b \\ D x &= -(L+U)\, x + b \\ x &= -D^{-1}(L+U)\, x + D^{-1} b \end{aligned}$$

$$\boxed{x^{k+1} = -D^{-1}(L+U)\, x^{k} + D^{-1} b}$$

Método de Jacobi

Este método se puede ilustrar usando las siguientes ecuaciones:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$$
$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$$
$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3$$

Despejo cada x_i de la ecuación i-esima, arrancamos de x^0

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(k)} - a_{13} \cdot x_3^{(k)}}{a_{11}}$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(k)} - a_{23} \cdot x_3^{(k)}}{a_{22}}$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31} \cdot x_1^{(k)} - a_{32} \cdot x_2^{(k)}}{a_{33}}$$

Método de Jacobi

Forma Gral:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{k}}{a_{ii}} \qquad i = 1, \dots, n \quad k > 0$$

Criterios de Convergencia

$$\left\| x^{k+1} - x^{k} \right\| < \varepsilon$$

$$\frac{\left\| x^{k+1} - x^{k} \right\|}{\left\| x^{k+1} \right\|} < \varepsilon$$

$$k > N$$

Algoritmo Jacobi

Para k =0,1,...
    Para i=1,2,..., n
        $x_i = 0$
        Para j=1,2,...,i-1,i+1,...,n
            $x_i = x_i + a_{ij} x_j^k$
        Fin
        $x_i^{k+1} = (b_i - x_i) / a_{ii}$
    Fin
Fin

Método de Gauss Seidel

Escribimos A = L + D + U
D: matriz diagonal , L y U: matrices triangulares

$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i = j \\ 0 \end{cases}$ $l_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i > j \\ 0 \end{cases}$ $u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i < j \\ 0 \end{cases}$

Suponiendo que los $a_{ii} \neq 0 \; \forall \, i$, D es invertible

A x = b
(D + L + U) x = b
(D + L) x = -U x + b
D x^{k+1} = - L x^{k+1} - U x^{k} + b

$$\boxed{x^{k+1} = -D^{-1}(L\, x^{k+1} + U\, x^{k}) + D^{-1}\, b}$$

Algoritmo Gauss-Seidel

Forma Gral:

$$x_i^{k+1} = \frac{\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k} \right]}{a_{ii}}$$

Para k=0,1,2,...
    Para i=1,2,..., n
        sum=0
        Para j=1,2,...,i-1,
            $sum = sum + a_{ij}\, x_j^{k+1}$
        Fin
        Para j=i+1,...,n
            $sum = sum + a_{ij}\, x_j^{k}$
        Fin
    Fin $x_i^{k+1} = (b_i - sum) / a_{ii}$
Fin

Método Sobrerelajación (SOR)

Este método usa un factor de ponderación para mejorar el valor calculado

$$\boxed{x_i^{k+1} = \omega \cdot x_i^{(k+1)} + (1-\omega) \cdot x_i^{k}} \qquad 0 \le \omega \le 2$$

$0 < \omega < 1$ hace convergente el método (subrelajación)

$\omega = 1$ Gauss Seidel

$1 < \omega < 2$ acelera convergencia del método (sobre relajación)

Convergencia

Método de Jacobi: Podemos afirmar su convergencia si A es diagonalmente dominante: $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$

Método de Gauss Seidel: Podemos afirmar su convergencia si A es diagonalmente dominante y también si es simétrica y definida positiva

Teorema de Convergencia: Suponiendo tener la ecuación: $X^{k+1} = B\, x^{k} + C$, si en alguna norma matricial $||B|| < 1$ y si x^0, x^1, … es la sucesión generada por esta ecuación, esta sucesión converge a la única solución x de la ecuación vectorial x = B x + C independientemente del x^0 escogido