SOLUCION DE ECUACIONES NO LINEALES

$f(x) = 0$

Por ejemplo:

$3x^2 - 6x + 5 = 0$

$3x^{10} - 15x^6 + 4x^3 = 0$

$\text{sen}(x) - e^x = 0$

$x(x - 43)^{1/2} = \ln(x)$

$16x^2 - k = 0$

Clasificación de Métodos

De intervalo
- Bisección
- Regula Falsi

Abiertos
- Secante
- Newton Raphson
- Iteración de Punto Fijo

Gráfico

METODO DE BISECCION

Sea $f(x):[a,b] \longrightarrow R$, continua y suponiendo $f(a)*f(b) < 0$.
Entonces por T.V.I. $\exists$ al menos un p en [a,b] / $f(p) = 0$.

Sea $a1 = a$
$b1 = b$ $p1 = ½ (a1+b1)$
si $f(p1) = 0$ entonces $p = p1$
si $f(p1)*f(a1) < 0$ entonces $a2 = a1$ y $b2 = p1$
si $f(p1)*f(b1) < 0$ entonces $a2 = p1$ y $b2 = b1$

calculamos $p2 = ½ (a2+b2)$
si $f(p2) = 0$ entonces $p = p2$
si $f(p2)*f(a2) < 0$ entonces $a3 = a2$ y $b3 = p2$
si $f(p2)*f(b2) < 0$ entonces $a3 = p2$ y $b3 = b2$

ALGORITMO DE BISECCION

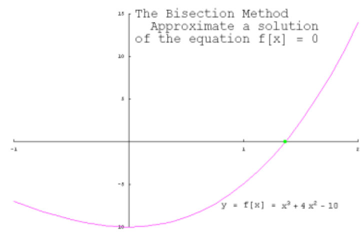
```
ENTRADA:    a, b , Eps: real; max: entero
SALIDA :    p : real o mensaje
VARIABLES:  iter: entero

PASO1 :  iter = 1; p← (a + b) / 2
PASO2 : MIENTRAS ( iter ≤ max ∧ |f ( p )| > Eps )
             iter ← iter +1
            SI f(a)*f(p) > 0  entonces
                   a← p
             SINO
                   b← p
            p← (a + b) / 2
PASO3 : SI ( iter > max) ENTONCES
             ESCRIBIR (´No converge en, max, iter.')
          SINO
             ESCRIBIR(´Raiz =´, p)
PASO4: PARAR
```


Teorema error absoluto máximo del Método de Bisección

Sea $f(x):[a,b] \longrightarrow R$, continua y suponiendo $f(a)*f(b) < 0$.
Entonces por T.V.I. $\exists$ al menos un p en [a,b] / $f(p) = 0$.
Sea p_n, n=0,1; .. la sucesión de aproximaciones obtenidas mediante el Metodo de Biseccion y sea $e_n = |p - p_n|$, para n = 0, 1,..

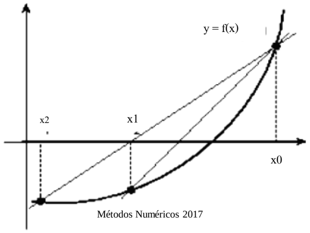
Entonces

$$e_n \leq (b - a) / 2^{n+1}$$



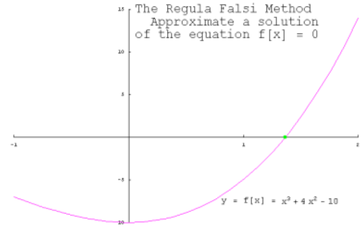
METODO REGULA FALSI

Sea f(x): [a,b]⟶R, f continua y supongamos que f(a)*f(b) <0. Entonces por T.V.I ∃ al menos un x en [a,b], tal que f(x) = 0.
Considerando x_0 = a y x_1 = b

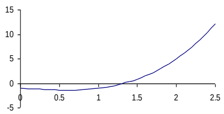


ALGORITMO REGULA FALSI

```
ENTRADA:    a, b , Eps: real; max: entero
SALIDA :    x : real o mensaje
VARIABLES:  iter: entero

PASO1 :  iter = 1; x ← b – f(b)(b - a) / (f(b)-f(a))
PASO2 : MIENTRAS ( iter ≤ max ∧ |f( x) |> Eps)
            iter ← iter +1
            SI f(a)*f(x) > 0  entonces
                 a← x
            SINO
                 b← x
            x ← b – f(b)(a + b) / (f(b)-f(a))
PASO3 : SI ( iter > max) ENTONCES
            ESCRIBIR (´No converge en, max, iter.)
        SINO
            ESCRIBIR(´Raiz =´, x)
PASO4: PARAR
```

Ejemplo: $f(x) = x^3 – x –1$ en [1,2]



Método de Bisección:

a_{20} = 1.3247175 $f(a_{20})$ = -1.857. 10^{-6}

b_{20} = 1.3247184 $f(b_{20})$ = 2.209. 10^{-6}

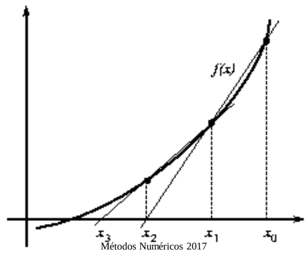
Método Regula Falsi

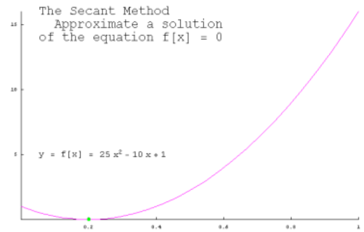
a_{16} = 1.3247174 $f(a_{16})$ = -1.95. 10^{-6}

b_{16} = 2 $f(b_{16})$ = 5

METODO DE LA SECANTE

Trabaja con la recta secante a la función, abandonando la acotación de la raíz.





ALGORITMO DE LA SECANTE

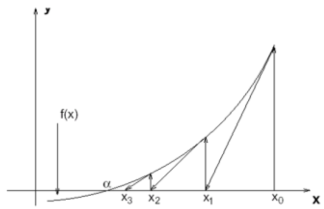
ENTRADA: a, b , Eps: real; max: entero
SALIDA : x_{n+1} : real o mensaje
VARIABLES: iter: entero

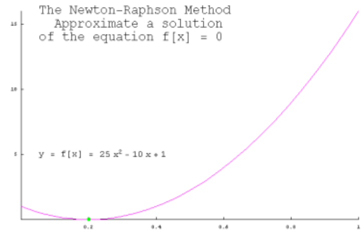
PASO1 : iter ← 0, x_{n-1} ← a, x_n ← b,
PASO2 : MIENTRAS ($|x_{n+1} - x_n| > Eps \wedge$ iter ≤ max)
    $x_{n+1} \leftarrow x_n - f(x_n)(x_n - x_{n-1}) / (f(x_n)-f(x_{n-1}))$
    $x_{n-1} \leftarrow x_n$
    $x_n \leftarrow x_{n+1}$
    iter ← iter +1
PASO3 : SI (iter > max) ENTONCES
    ESCRIBIR (´No converge en, max, iteraciones)
  SINO
    ESCRIBIR(´Raiz =´, x_{n+1})
PASO4: PARAR

METODO DE NEWTON-RAPHSON

Trabaja con la pendiente de la recta tangente

$x_{n+1} \leftarrow x_n - f(x_n) / f'(x_n)$





ALGORITMO DE NEWTON –RAPHSON

ENTRADA : x_0 ; Eps: real ;max: entero
SALIDA : x_1: solución o mensaje de error
VARIABLES: iter: entero

PASO 1: iter = 0, $x_1 \leftarrow x_0 + 2 *$ Eps
PASO2: MIENTRAS (iter ≤ max $\wedge$ | x1 – x_0 | > Eps)
    $x_1 \leftarrow x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$
    iter ← iter+1
    $x_0 \leftarrow x_1$
PASO3 : Si (iter > max) ENTONCES
    ESCRIBIR ((‘No converge en, max, iteraciones’)
  SINO
    ESCRIBIR(‘Raiz =’, x_1)
PASO4 : Parar

METODO DE NEWTON-RAPHSON

Otra forma de derivar el método es a partir de serie de Taylor

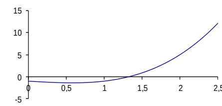
$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \ldots$$

Si x_{i+1} es raíz entonces $f(x_{i+1}) = 0$

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) / f'(x_i)$$

EJEMPLO: **$f(x) = x^3 - x - 1$** en [1,2]



Método de Secante

X0 = 1, x1 = 2, x_7 = 1.3247179
$f(x_7) = 3.458 . 10^{-8}$

Método Newton Raphson

X0 = 1, x_4 = 1.3247181
$f(x_4) = 9.2 . 10^{-8}$

METODO DE NEWTON

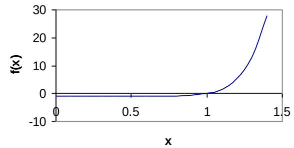
Ventajas
- Velocidad de convergencia
- Permite el cálculo de raíces complejas

Desventajas
- Necesidad de conocer f ’
- Valor inicial debe ser próximo a la raiz

No hay un criterio general de convergencia para este método

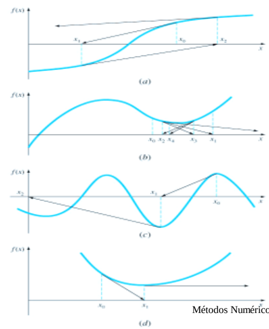
Ej.

$f(x) = x^{10} - 1$



Valor inicial	Valor calculado	Iteraciones
0.5	1.0000	42
0.6	1.0000	27
0.8	1.0000	8
5	1.0000	19

Problemas al usar Newton-Raphson



f´´ (x) = 0 , divergencia

Max o min local, oscilaciones

Salta de una raiz a otra muy alejada.

Una derivada 0 da error

ITERACION DE PUNTO FIJO

Método que se basa en la forma de la función:

$f(x) = 0 \longrightarrow x = g(x)$

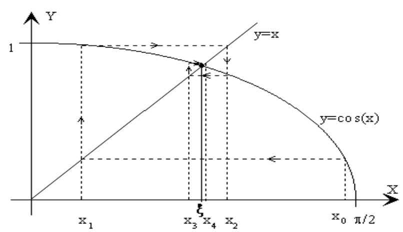
$x_{n+1} = g(x_n) \quad n = 0, 1, \ldots$

Definición: Dada $g(x)$: $[a,b] \to R$, g continua y si $g(\alpha) = \alpha$, para algún $\alpha \in [a,b]$ entonces $g(x)$ tiene un ***punto fijo*** en $[a,b]$

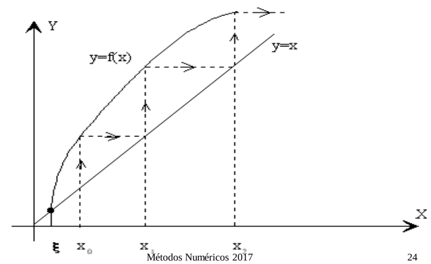
Si α es punto fijo de $g(x)$ $\therefore$ α es cero de $f(x)$ pues
$g(x) = x - f(x)$

Ej:
- *$f(x) = x^2-2x+3$ ➔ $x = g(x)=(x^2+3)/2$*
- *$f(x) = \sin x$ ➔ $x = g(x)= \sin x + x$*
- *$f(x) = e^{-x}- x$ ➔ $x = g(x)= e^{-x}$*

Iteración convergente



Iteración no convergente



Teorema (existencia y unicidad del punto fijo)

Si $g \in C_{[a,b]}$ y $g(x) \in [a,b]\ \forall x \in [a,b]$. Si además $g'(x)$ existe en (a,b), es continua y $|g'(x)| \le K < 1\ \forall x \in [a,b]$.
Si $x_0 \in [a,b]$ entonces la sucesión definida $x_{n+1} = g(x_n)$, $n \ge 1$ converge al único punto fijo $\alpha \in [a,b]$.

- Corolario 1: Si g satisface las hipótesis del teorema, las cotas de error para aproximar α están dadas por:

$$|x_n - \alpha| \le K^n \max(x_0 - a,\ x_0 - b)$$

y por

$$|x_n - \alpha| \le \frac{K^n}{1-K} \max(x_1 - x_0)\ \forall n \ge 1$$

Teorema (existencia y unicidad del punto fijo)

Ejemplo:

$x^2 - x - 2 = 0$, $x_{1,2} = -1 , 2$

i) $x = x^2 - 2$ $g1(x) = x^2 - 2$

- $|g1'(x)| = 2x < 1$ si $x < 1/2$ $\rightarrow$ g1 no verifica teorema

ii) $x^2 = x + 2$ $g2(x) = (x + 2)^{1/2}$

$|g2'(x)| = 0.5(x+2)^{-1/2} < 1$ vale si $x > 0$

$g2(1) = 1.732$ y $g2(3) = 2.236 \rightarrow$ g2 verifica teorema

- Por ej. $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ $x = 3$, $x = -1$

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - 3 = 0 \\ & \Rightarrow x^2 = 2x + 3 \\ & \Rightarrow x = \sqrt{2x+3} \\ & \Rightarrow g1(x) = \sqrt{2x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - 3 = 0 \\ & \Rightarrow x(x-2) - 3 = 0 \\ & \Rightarrow x = \frac{3}{x-2} \\ & \Rightarrow g2(x) = \frac{3}{x-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - 3 = 0 \\ & \Rightarrow 2x = x^2 - 3 \\ & \Rightarrow x = \frac{x^2-3}{2} \\ & \Rightarrow g3(x) = \frac{x^2-3}{2} \end{aligned}$$

g1(x) $x_{i+1} = \sqrt{2x_i + 3}$

1.	$x_0 = 4$
2.	$x_1 = 3.31662$
3.	$x_2 = 3.10375$
4.	$x_3 = 3.03439$
5.	$x_4 = 3.01144$
6.	$x_5 = 3.00381$

Converge x = 3

g2(x) $x_{i+1} = \frac{3}{x_i - 2}$

1.	$x_0 = 4$
2.	$x_1 = 1.5$
3.	$x_2 = -6$
4.	$x_3 = -0.375$
5.	$x_4 = -1.263158$
6.	$x_5 = -0.919355$
7.	$x_6 = -1.02762$
8.	$x_7 = -0.990876$
9.	$x_8 = -1.00305$

Converge x = -1

g3(x) $x_{i+1} = \frac{x_i^2 - 3}{2}$

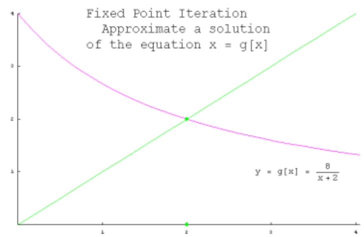
1.	$x_0 = 4$
2.	$x_1 = 6.5$
3.	$x_2 = 19.625$
4.	$x_3 = 191.070$

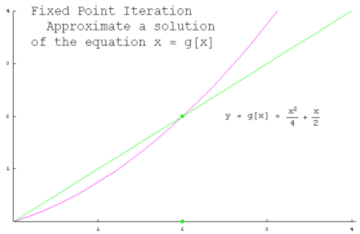
No Converge

Algoritmo de Iteración de Punto Fijo

ENTRADA : x_0 ; Eps: real ;max: entero
SALIDA : x_1: real o mensaje de error
VARIABLES: iter: entero

PASO 1: iter = 0, $x_1 \leftarrow x_0 + 2^*$ Eps
PASO2: MIENTRAS (iter $\le$ max $\wedge$ $|x_1 - x_0|$ > Eps)
    $x_1 \leftarrow g(x_0)$
    iter $\leftarrow$ iter+1
    $x_0 \leftarrow x_1$
PASO3 : Si (iter > max) ENTONCES
    ESCRIBIR ((‘No converge en max iteraciones’)
  SINO
    ESCRIBIR(‘Raiz =’, x_1)
PASO4 : Parar





ORDEN DE CONVERGENCIA

Definición: Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión que converge a x' y que $e_n = x_n - x'$ para cada $n>0$
Si existen constantes positivas λ, α tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x'|}{|x_n - x'|^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\alpha}} = \lambda$$

decimos que $\{x_n\}$ **converge a x' con orden α,** con una constante de error asintótico λ.
Por lo tanto:

$\alpha = 1$: método lineal
$\alpha = 2$: método cuadrático

ORDENES DE CONVERGENCIA

$\alpha = 1$ método de bisección
método Regula Falsi
iteración de punto fijo

$\alpha = 1.6$ método de la secante

$\alpha = 2$ método de Newton-Raphson

Newton-Raphson vs. Iteración de Punto Fijo

$f(x) = e^{-x} - x$

$X_{n+1} = \dfrac{e^{-X_n}(X_n + 1)}{(e^{-X_n} + 1)}$

i	x_i	*F(xi)*
0	0	1
1	0,500000000	0,10653066
2	0,566311003	0,00130451
3	0,567143165	1,9654E-07
4	0,567143290	6,4219E-10

$X_{n+1} = e^{-X_n}$

i	x_i	*F(xi)*
0	0	1,00000000
1	1,000000	1,71828183
2	0,367879	1,07679312
3	0,692201	1,30590753
4	0,500473	1,14902830
5	0,606244	1,22728770
6	0,545396	1,17989546
7	0,579612	1,20573358
8	0,560115	1,19075884
9	0,571143	1,19914634
10	0,564879	1,19435590

Ejemplo: $f(x) = e^{-x} - x$

$\alpha = 2$

Dado $X_0 = 0$

n	xn	f(xn)
0	0	1
1	0.5	0.1065306
2	0.566311003	0.0013045
3	0.567143165	$1.965\ 10^{-7}$
4	0.567143290	$6.426\ 10^{-10}$

Δ^2 DE AITKEN

Supóngase que $\{x_n\}$ converge linealmente al limite p y que, para valores suficientemente grandes de n, $(x_n - p)(x_{n+1} - p) > 0$
Entonces, la sucesión

$$\hat{x} = x_n - \frac{(\Delta x)_n)^2}{(\Delta^2 x)_n} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

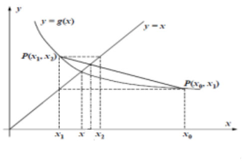
Converge con orden cuadrático

Acelera la convergencia de cualquier sucesión de orden lineal.

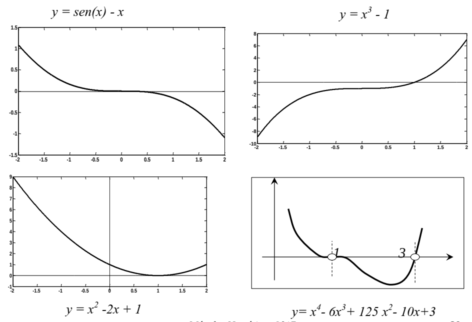
METODO DE STEFFENSEN

Se obtiene al aplicar Aitken a la sucesión generada con iteración de punto fijo:
Dado $x0,\ x1=g(x0),\ x2=g(x1)$

$$\hat{x}_s = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}, \quad n=0,1,\ldots$$



RAICES "DIFICILES"



En resumen:

- Los métodos numéricos para resolver raíces se dividen en abiertos y de intervalo

- Métodos que usan intervalos, necesitan dos valores iniciales que contengan la raíz, tienen garantizada la convergencia. Pero son lentos.

- Métodos abiertos abandonan la acotación de la raíz, ganando en velocidad; pero pueden diverger. La convergencia depende de una buena elección de los valores iniciales

CEROS DE POLINOMIOS

Dado un polinomio, de orden n, con coeficientes a_i, i =0,.., n

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$$

Recordemos:

•Para un orden n, hay n raíces reales o complejas, no necesariamente distintas.
•Si n es impar, hay al menos una raíz real.
•Si las raíces complejas existen, existe un par conjugado.

Teorema de Acotación de Raíces: Todos los ceros de un polinomio se hallan en el disco cerrado cuyo centro está en el origen del plano complejo y cuyo radio es ρ, siendo:

$$\rho = 1 + |a_n|^{-1} \max_{0\le k\langle n} |a_k|$$

Ej: si tomamos el polinomio

$$p(x) = 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 6$$

Calculamos: $\rho = 1 + \dfrac{6}{3} = 3$

En función de este valor las raíces están el intervalo (-3,3)

Método de Horner

Sea un polinomio $P(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots + a_n$.

Se toman: $\begin{cases} d_0 = a_0 \\ d_k = a_k + d_{k-1}x_0 \ \ (k=1,\ldots,n-1) \\ d_n = P(x_0) \end{cases}$

Así el cociente de hacer $P(x)/(x - x_0)$ es :
$Q(x) = d_0\, x^{n-1} + d_1\, x^{n-1} + \ldots + d_{n-1}$.

Algoritmo para calcular *P(x) y P'(x)*

Dado un polinomio $P(x)$, hallar $P(x_0)$, $P'(x_0)$.

Entrada: grado N; coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$; punto donde evaluar el polinomio, x_0 .

Salida: $y = P(x_0)$, $z = P'(x_0)$.

Paso 1: Tomar
$y = a_0$; (calcular d_0 para P);

$z = a_0$; (calcular δ_0 para Q);

Paso 2: para $j = 1,2,\dots,N-1$ tomar:
$y = a_j + x_0 y$; (calcular d_j para P);
$z = y + x_0 z$; (calcular δ_j para Q);

Paso 3: tomar:
$y = a_n + x_0 y$; (calcular d para P);

Paso 4: SALIDA(y, z) ; PARAR.

Método de Newton Raphson

Dado el polinomio, $p_{n(x)}$, se calcula:

$$x_{n+1} = x_n - p(x_n)/p'(x_n) \qquad n = 0,1,2,3,\dots.$$

usando Horner para calcular $p_{n(x)}$ y $p'_{n(x)}$.

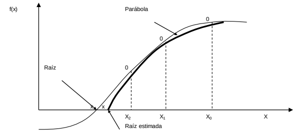
Mediante el proceso de **deflación** podemos calcular todos los ceros del polinomio

Método de Muller

Calcula las raíces del polinomio, $pn(x)$, donde n es el orden del polinomio y las a_n son coeficientes constantes.

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots + a_n x^n$$

Este método es una generalización del método de la secante, trabaja con la parábola que intersecta al polinomio dado



Supongamos buscar las raíces de

$$p_2(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

Considerando dados P0, P1 y P2, $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$ y $[x_2, f(x_2)]$, entonces:

$$p_2(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c$$
$$p_2(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$$
$$p_2(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c$$

vemos que $p_2(x_2) = c$

Si definimos:

$$h_0 = x_1 - x_0 \quad h_1 = x_2 - x_1 \quad \delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_0} \quad \delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Al reemplazar en el sistema anterior

$$(h_0 - h_1)b - (h_0 + h_1)^2 a = h_0\delta_0 + h_1\delta_1$$
$$h_1 b - h_1^{\,2} a = h_1\delta_1$$

Teniendo como resultado los coeficientes:

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} \qquad b = ah_1 + \delta_1 \qquad c = f(x_2)$$

Para el cálculo de la raíz, x_3:

$$x_3 - x_2 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

para prevenir error de redondeo

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Este método también permite calcular raíces complejas, y es más estable que Newton, siendo su orden de convergencia $\cong$ 1.8