METODOS NUMERICOS

OBJETIVOS

- Comprender el significado y alcance de los modelos matemáticos en ciencia e ingeniería
- Reconocer los errores que se cometen con computadoras digitales
- Manejar técnicas del cálculo numérico de ciencias e Ingeniería.
- Ser capaz de elegir el mejor método para la resolución de un determinado problema.
- Poder aplicar los métodos numéricos en problemas específicos de su área de interés, interpretando los resultados obtenidos .

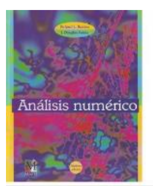
METODOS NUMERICOS

TEMAS

Unidad I: Teoría de errores
Unidad II: Solución de Ecuaciones no Lineales
Unidad III: Solución Numérica de Sistemas Lineales
Unidad IV: Interpolación.
Unidad V: Integración numérica.
Unidad VI: Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Valores Iniciales.

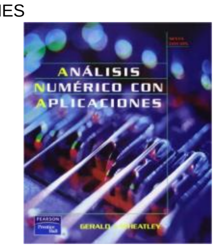
BIBLIOGRAFIA

ANALISIS NUMERICO
Richard L. Burden y Douglas Faires,
Thomson Learning, 7ta. Ed., 2009



METODOS NUMERICOS PARA INGENIEROS,
Steven C.Chapra y Raymond P. Canale,
Mc Graw Hill Interamericana, 5ta Ed., 2006

ANALISIS NUMERICO CON APLICACIONES
Curtis Gerald y Patrick O. Wheatley
PEARSON EDUCACION, 6ta. Ed., 2001



Métodos Numéricos en Ingeniería

- Los ingenieros utilizan modelos matemáticos para describir y predecir el comportamiento de los sistemas .
- Las soluciones analíticas sólo son posibles para determinados problemas
- Los computadoras son una herramienta de amplia disponibilidad, con gran potencia de cálculo

El **Análisis Numérico** es una disciplina, comprende dos aspectos

Conceptos y Teoría
- Qué problemas se pueden resolver.
- Que problemas no pueden resolverse , o serán difíciles de resolver.

Métodos y Técnicas
- Saber como funcionan los métodos
- Poder evaluar errores , convergencia y la estabilidad de soluciones
- Poder escribir programas o modificar software comercial

CALCULO NUMERICO

Objeto:
Proveer métodos numéricos para el estudio y solución de problemas matemáticos

Algoritmo:
Procedimiento para resolver un problema particular, sin ambigüedades, expresado como una secuencia finita de reglas

Método Numérico:
Un algoritmo para resolver un problema, cuya solución consiste en uno o más valores numéricos, llamados SOLUCIÓN NUMERICA

PASOS PARA RESOLVER UN PROBLEMA NUMERICAMENTE

i) Formulación del problema
ii) Elección del método
iii) Programación y codificación
iv) Análisis de los resultados

Formulación del problema

El proceso de análisis del mundo real para interpretar los aspectos esenciales de un problema y expresarlo en términos precisos se denomina **abstracción**.

Abstraer un problema del mundo real y simplificar su expresión, tratando de encontrar los aspectos principales que se pueden resolver , los datos que se van a procesar y el contexto del problema se denomina **modelización** (mental)

Formular un **Modelo Matemático** es:

Definir las ecuaciones matemáticas del modelo y los parámetros que intervienen

Un **modelo matemático** es una ecuación que muestra las características de un sistema físico:

y = f (x, parámetros, fn.fuerza)

y : vble. dep., muestra el comportamiento o estado del sistema

x : vbles. indep., determinan el comportamiento del sistema (tiempo, espacio)

parámetros: ctes que muestran la composición o propiedades del sistema

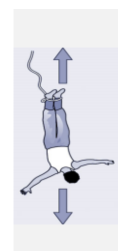
fn. fuerza: influencias externas sobre el sistema

Ejemplo:

Consideramos un bungee jumper ; una ecuación que representa su velocidad es

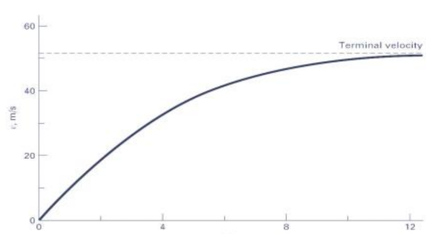
$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}\, t\right)$$

Vble dep   vble ind.   Fn. Fuerza   Parámetros (m,cd)



Si consideramos m = 68.1 kg , cd = 0.25 kg/m

Una gráfica de v(t) es:

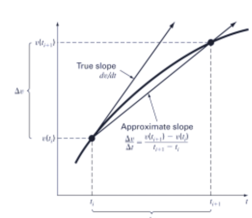


La ecuación anterior es la solución analitica de:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

usando una aproximacion:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$



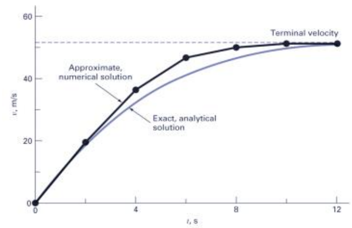
asi

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2 \right] (t_{i+1} - t_i)$$

Euler

Resultados de Euler con h = 2 seg



CLASIFICACION DE LOS ERRORES

i) Errores del modelo o del problema
ii) Errores del método
ii) Errores de cálculo y programación
iii) Errores en los datos
iii) Errores de truncamiento
iv) Errores de redondeo

Errores Sistemáticos

Son los que tienen siempre aproximadamente el mismo tamaño y signo, es decir que el error tiene una causa constante, son siempre por exceso o por defecto

Errores Accidentales

Son los relacionados a factores aleatorios en la medición

Precisión y **Exactitud**

Una medición es **exacta** cuando su valor es muy cercano al valor verdadero.
Una medición es **precisa** cuando el instrumento que empleamos nos proporciona muchas cifras decimales, pero la medida puede no ser exacta, por ej. si estamos cometiendo un error sistemático al usar el instrumento.
Una medida para ser exacta debe ser precisa, pero no todas las medidas precisas son exactas.

ERROR de TRUNCAMIENTO

Se origina al substituir procesos infinitos por procesos finitos

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\int_a^b f(x)dx \sim \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

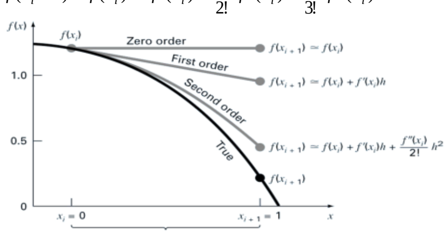
$$\frac{dy}{dx} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Los errores de truncamiento causan inexactitud de los resultados.

SERIE DE TAYLOR

El teorema de Taylor nos dice que toda función suave se puede aproximar con un polinomio .Esto se hace usando la Serie de Taylor

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + ... + Rn.$$



ERROR

Sean x y $\bar{x}$ un número y su valor aproximado:

$e = x - \bar{x}$ → error absoluto

$e_r = \dfrac{x - \bar{x}}{x}$ → error relativo, si $x \neq 0$

$e_{r\%} = e_r\, 100$ → error relativo porcentual

$|\, x - \bar{x}\, | \leq \varepsilon$ → cota de error

$x = \bar{x} \pm \varepsilon$

Ej: se debe medir la longitud de un puente y la de un remache, y se obtiene 99.99 m y 9 cm , supongamos que los valores reales son 100 m y 10 cm repectivamente, calcule el error absoluto y error relativo porcentual.

Errores al medir el puente :

$$\varepsilon_a = \left|\tilde{a} - a\right| = \left|10000 - 9999\right| = 1cm \quad \varepsilon_r = \left|\frac{\tilde{a} - a}{a}\right| = \left|\frac{10000 - 9999}{10000}\right| * 100\% = 0.01\%$$

Errores al medir el remache:

$$\varepsilon_a = \left|\tilde{a} - a\right| = \left|10 - 9\right| = 1cm \qquad \varepsilon_r = \left|\frac{\tilde{a} - a}{a}\right| = \left|\frac{10 - 9}{10}\right| * 100\% = 10\%$$

ERROR

Sean x y $\bar{x}$ є R^n

$e = \| x - \bar{x} \|$ error absoluto

$e_r = \dfrac{\| x - \bar{x} \|}{\| x \|}$ error relativo, si $x \neq 0$

ERROR DE REDONDEO

Se debe a que una máquina sólo puede representar cantidades con un número finito de dígitos.

Podemos distinguir dos tipos:

a) error de representación

b) error debido a los cálculos

REPRESENTACION INTERNA

Existen dos maneras de representarlos:

1. Punto fijo: Los números se representan con un número fijo de cifras decimales. 6.358, 0.013

2. Punto flotante: Los números se representan con un número fijo de dígitos significativas 0.636E01, 0.135E-01

Dígito Significativo: Dado un número x, es cualquier dígito, excepto los ceros a la izquierda del primer dígito diferente de cero y que solo sirven para fijar la posición del punto decimal Ej. 1360, 1.360; 0.001360; tienen cuatro dígitos significativos.

REPRESENTACION EN PUNTO FLOTANTE

Sea un número x, representado en punto flotante en una base b

$$\mathbf{x = (sign\ x)\ (.a_1a_2a_3 \ldots a_t)_b \times b^e}$$

ai : dígitos en el sistema de base b , $a_1 \neq 0$ o $a_i = 0 \quad \forall i$

t: número de dígitos de la mantisa (determina la **precisión**)

$.a_1a_2a_3 \ldots a_t$: mantisa normalizada, por ser a1 > 0

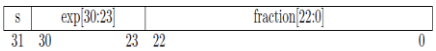
e: exponente o característica (determina el **rango**)

Estándar **IEEE 754** (85') se estableció para facilitar la portabilidad de los programas de un procesador a otro.

Define el formato para precisión simple de 32 bits y para precisión doble de 64 bits.

REPRESENTACION EN PUNTO FLOTANTE

IEEE Standard 754



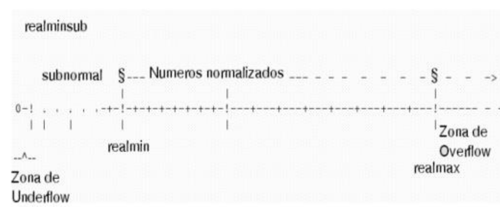
32 bits:
- 1 bit para signo número
- 8 bits para exponente (10^{-38}, 10^{38})
- 23 bits para mantisa (~7 digitos)

Overflow: Resultado del cálculo mayor que el numero mas grande que se puede representar

Underflow: Resultado del cálculo menor que el numero mas pequeño (no nulo)que se puede representar. Se considera 0 al valor

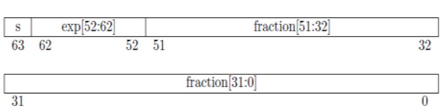
Valores Especiales (single-precision)

Exponente	Mantisa	Valores
00000000	0…0 0	+0.0 , -0.0
00000000	n.….n	números subnormales $(-1)^s \times 2^{-126} \times (0.a_1a_2…a_{23})$ 2^{-149} , 2^{-126}
11111111	0….0	Infinito
11111111	n.….n	Not a Number (NaN)



REPRESENTACION EN PUNTO FLOTANTE

Doble Precision



64 bits:
- 1 bit para signo número
- 11 bits para exponente (10^{-308}, 10^{308})
- 53 bits para mantisa (~15 dig.)

ERROR DE REPRESENTACION

Como la mantisa contiene n dígitos en la base b, todo número más largo debe cortarse

Ej:

7/3 = 2.3333333333…

1/6 = 0.1666666666…

л = 3.141596265358…

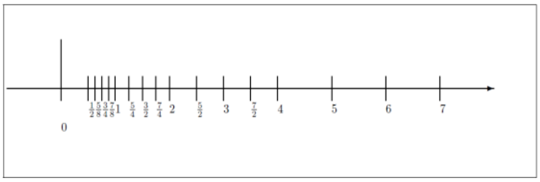
También puede ocurrir que haya números con representación exacta en una base pero no en otra

Ej. 4/5 = $(0.8)_{10}$,3/5 = $(0.6)_{10}$, 1.6_{10}

ERROR DE REPRESENTACION

Los valores de t, e y b determinan que valores reales se pueden representar exactamente en una computadora.

Ej. b = 2, t = 3, e = 3



ERROR DE REPRESENTACION

Un número x que no tiene representación exacta se denomina **fl(x).**

Los dos criterios más usados para calcular este valor son:

a) Redondeo: se elige como fl(x) el número de punto flotante normalizado más cercano a x

b) Corte: se elige como fl(x) el número de punto flotante normalizado más cercano entre 0 y x

ERROR DE REPRESENTACION

Se define **fl(x) = x(1+**ε **)**

ε : error de redondeo,

Si redondeamos:

$$|\varepsilon| < \frac{1}{2} b^{1-t}$$

Si cortamos:

$$|\varepsilon| \leq b^{1-t}$$

OPERACIONES ARITMETICAS EN PUNTO FLOTANTE

Ej: b = 10, t = 3

$X = 0.164.10^3$, $y = 0.280.10^3$

$Z = x+y = 0.167.10^3$

Operaciones en punto flotante: $\hat{+}$, $\hat{-}$, $\hat{*}$, $\hat{/}$

x $\widehat{op}$ y = fl(x op y) = (x op y)(1+ε)

ERROR DE REPRESENTACION

Unidad de redondeo: se define como el menor valor u tal que

$$1 \hat{+} u > 1$$

Depende de la máquina que utilicemos

ERROR DE REDONDEO ACUMULADO

Es la suma de todos los errores efectuados durante el cálculo

Ej: b = 10, t = 8

a= $0.23371258\ 10^{-4}$

b = $0.33678429\ 10^{2}$

c = $-0.33678429\ 10^{2}$

Calculamos a$\hat{+}$b$\hat{+}$c de dos formas diferentes:

i) a$\hat{+}$(b$\hat{+}$c) = $0.64137126\ 10^{-3}$

ii) (a$\hat{+}$b)$\hat{+}$c = $0.64100000\ 10^{-3}$

Resultado exacto: a+b+c = $0.641371258\ 10^{-3}$

ERROR DE REDONDEO ACUMULADO

En resumen:

Los resultados de las operaciones en la computadora tendrán en general errores debido a los errores de los operandos y al redondeo o truncamiento que ocurre al efectuar estas operaciones.

Errores de redondeo invalidan leyes basicas de la aritmética tal como la ley asociativa

$$(x + y) + z \neq x + (y + z).$$

Si en un método los errores crecen mucho hablamos de método **mal condicionado o inestable**

ESTABILIDAD

Si pequeños cambios en los datos producen pequeños cambios en los resultados diremos que es **estable**, caso contrario es **inestable,** en algunos casos la estabilidad depende del conjunto de datos, entonces se dice: **condicionalmente estable**

Inestabilidad inherente es aquella propia del problema o sistema.

Inestabilidad inducida es la que se produce por usar un método equivocado para resolver un determinado problema.

ERROR DE SIGNIFICACION

Se produce por perdida de cifras significativos

Def: Si $\bar{\bar{x}} \sim x$, decimos que lo aproxima en r cifras significativas o b dígitos si:

$$\left| \frac{\bar{\bar{x}} \sim x}{x} \right| \leq 0.5\, b^{1-r}$$

PROPAGACION DE ERRORES

Cuando usamos métodos numéricos , el error del resultado será la suma de los errores en el desarrollo del mismo

Funciones de una variable

$$y = f(x)$$
$$\Delta y = y(x_0) - y(\overline{x_0})$$
$$\Delta y \approx y'(\overline{x_0})\ \Delta x$$

FORMULA GRAL DE PROPAGACION DEL ERROR

Supongamos conocer $\overline{x1}, \overline{x2}, \ldots \overline{xn}$ ~ x1, x2, … xn y sea y función de estas vbles.

Sea $\bar{x}$ = ($\overline{x1}, \overline{x2}, \ldots \overline{xn}$) , x = (x1, x2, … xn)

$\Delta xi = \overline{xi}$ - xi , $\Delta y = y(\bar{x} - x)$

Veamos el siguiente Teorema: Dados $\bar{x}$, x e y(x) entonces,

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial xi}(\overline{x})\Delta xi \quad \text{, por lo tanto}$$

$$|\Delta y| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial xi}(\overline{x}) \right| |\Delta xi|$$

Una corriente pasa a través de una resistencia de 10 Ohmios, este valor tiene una precisión de 5%, la corriente es de 2 A y fue medida con una aproximación de ±0.1 A.

A) Hallar el valor aproximado del voltaje ***(e=i*r).***

B) Hallar el error absoluto y relativo

$$i = 2 \quad , \quad r = 10$$
$$\Delta i = 0.1 \quad , \Delta r = 5\%(10) = 0.5$$
$$e = i * r$$
$$\Delta e \approx \left|\frac{\partial e}{\partial i}\right|\Delta_i + \left|\frac{\partial e}{\partial r}\right|\Delta_r$$
$$\Delta e \approx r\Delta_i + i\Delta_r$$
$$\Delta e \approx (10)(0.1) + (2)(0.5)$$
$$\Delta e \approx 2$$

$$e = i * r = 2 * 10 = 20$$
$$e = 20 \pm 2$$
$$er = 2/20 = 10\ \%$$

Se tiene un triangulo rectángulo cuya altura h~ 3 cm y b~ 4 cm
Si se quiere calcular el área con un error no mayor al 10 %.
Qué errores se pueden tener en los valores de h y b ?

$$h = 3$$
$$b = 4$$
$$area = (b * h) / 2 = 6$$
$$\xi_a^* = 0.1(6) = 0.6$$
$$\xi_a \approx \xi_b * h + \xi_h * b$$

Suponiendo que cada vble contribuye en igual proporción

$$\xi_b^* = \frac{\xi_a^*}{2h} = \frac{0.6}{2(3)} = 0.1$$
$$\xi_h^* = \frac{\xi_a^*}{2b} = \frac{0.6}{2(4)} = 0.075$$

METODOS DE ESTIMACION DEL ERROR

- Doble precisión
- Análisis regresivo del error
- Aritmética de intervalo
- Enfoque estadístico