



ELECTROMAGNETISMO I

¡BIENVENIDOS A LA TERCERA PARTE DEL CURSO DE ELECTROMAGNETISMO I!

1



ELECTROMAGNETISMO I

Aquí aprenderemos...

- Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell
- Ondas electromagnéticas, propiedades, propagación en distintos medios
- Guías de Onda

2



Ecuación de onda en un medio conductor

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad J = \sigma E$$

$$\nabla \times H = \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad \nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

Tomando el rotor en ambos miembros y considerando que

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$$

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu \frac{\partial(\nabla \times H)}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t}$$

3



Ecuación de onda en un medio conductor

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad J = \sigma E$$

$$\nabla \times H = \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad \nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

Tomando el rotor en ambos miembros y considerando que

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$$

$$\nabla(\nabla \cdot E) = -\mu \frac{\partial(\nabla \times H)}{\partial t} + \nabla^2 E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) + \nabla^2 E =$$

$$-\mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla^2 E$$

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot D = \frac{1}{\varepsilon} \rho \text{ pero un conductor la densidad de carga neta es nula}$$

4



Ecuación de onda en un medio conductor

$$-\mu\epsilon \frac{d^2 E}{dt^2} - \mu\sigma \frac{dE}{dt} + \nabla^2 E = 0 \quad \text{Ecuación de onda para } E$$

$$-\mu\epsilon \frac{d^2 H}{dt^2} - \mu\sigma \frac{dH}{dt} + \nabla^2 H = 0 \quad \text{Ecuación de onda para } H$$

En la practica la mayoría de los generadores varían sinusoidalmente

$$E = E e^{j\omega t} \quad H = H e^{j\omega t}$$

reemplazando tendremos...

$$\mu\epsilon\omega^2 E - j\omega\mu\sigma E + \nabla^2 E = 0 \Rightarrow \nabla^2 E + (\mu\epsilon\omega^2 - j\omega\mu\sigma)E = 0$$

$$\mu\epsilon\omega^2 H - j\omega\mu\sigma H + \nabla^2 H = 0 \Rightarrow \nabla^2 H + (\mu\epsilon\omega^2 - j\omega\mu\sigma)H = 0$$

5



Ecuación de onda en un medio conductor

Comparemos con la solución de la ecuación de una línea

$$V = V e^{\gamma x}$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - ZYV = 0 \quad \frac{d^2 I}{dx^2} - ZYI = 0$$

Acomodamos los términos...

$$\nabla^2 E - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)E = 0 \quad \nabla^2 H - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)H = 0$$

$$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$$

6



Ecuación de onda en un medio conductor

Hay dos soluciones para γ

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad \gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)$$

$$\alpha = \operatorname{Re}\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \frac{np}{mt} \quad \beta = \operatorname{Im}\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \frac{rad}{mt}$$

la suma de ambas también es una solución, y esto nos dice que...

... hay ondas propagándose en ambas direcciones

7



Ecuación de onda en un medio conductor

En el libro de Jordan Balmain se dan las siguientes expresiones

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} - 1 \right)} \frac{np}{mt}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} + 1 \right)} \frac{rad}{mt}$$

8



Ecuación de onda en un medio conductor

Desde el punto de vista del electromagnetismo los materiales pueden ser...

→ Conductores

Tengamos en cuenta que la división entre ambos no es muy definida

→ Dieléctricos o aislantes

Si consideramos que la ecuación de Maxwell deducida de la ley de Ampere habla de corrientes de naturaleza distinta...

¿Cuáles eran?

9



Ecuación de onda en un medio conductor

La razón $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ define la línea divisoria entre ambos

caso conductor $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} > 1$ por ej cobre $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 3.5 \cdot 10^8$

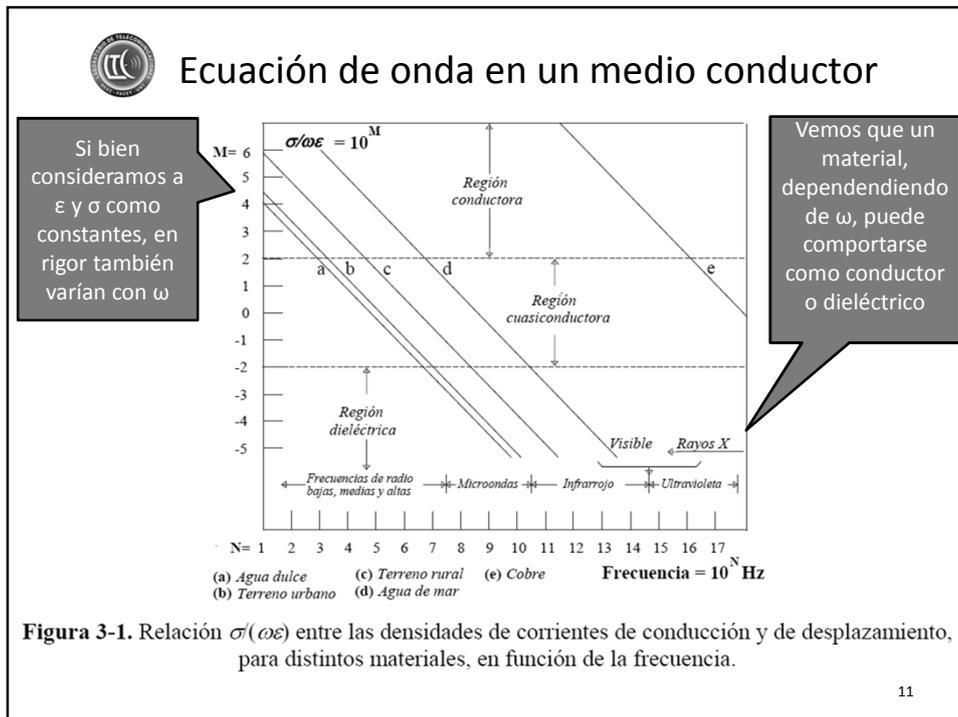
$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \quad \gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} \quad \gamma = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

caso aislador $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < 1$ por ej mica $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 2 \cdot 10^{-4}$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \quad \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad \alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

En los dieléctricos esta razón $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ suele definirse como el factor de disipación

10



 Ecuación de onda en un medio conductor

Problema. Se considera la tierra como buena conductora si:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} > 1 \text{ por ejemplo } = 10$$

Determinar la frecuencia limite hasta donde se puede considerar conductora

$$\epsilon_r = 10 \quad \sigma = 5,710^{-3} \frac{1}{\Omega m}$$

12



Ecuación de onda en un medio conductor

La impedancia en un medio es $\frac{V}{I}$ o, en términos de campos $\frac{E}{H}$

$$Z_0 = \frac{V_i}{I_i} = \frac{V_r}{I_r} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad \text{si la línea tiene bajas pérdidas} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \quad \text{para un medio sin pérdidas } \sigma = 0 \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \text{en vacío} \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$$

$$\text{en un medio conductor donde } \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1 \quad Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

14



Ecuación de onda en un medio conductor

Problema: Encontrar la impedancia del medio a la frecuencia de 1 MHz, considere las pérdidas en serie despreciables,

$$\sigma = 4.2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\Omega m} \quad \varepsilon_r = 5 - j3 \quad \mu_r = 2 + j1 \quad f = 10^6 \text{ Hz}$$

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu_r\mu_0}{\sigma + j\omega\varepsilon_r\varepsilon_0}}$$

$$Z = 115.36 + j117.86 \quad |Z| = 164.92 \quad \arg(Z) = 45.61^\circ$$

15



Ecuación de onda en un medio conductor

Es importante considerar la velocidad de fase en el medio

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

Para un medio conductor tendremos

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

Para un medio dieléctrico tendremos

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

16



Ecuación de onda en un medio conductor

Problema: Encontrar la velocidad de fase de una onda electromagnética propagándose por distintos medios

$$\mu_r = 1 \quad \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{F}{m} \quad \mu_0 = 400\pi \cdot 10^{-9} \frac{H}{m}$$

$$\epsilon_1 = 1 \text{ aire}$$

$$\epsilon_2 = 12 \text{ silicio}$$

$$\epsilon_3 = 83 \text{ agua}$$

17



Ecuación de onda en un medio conductor

En un conductor, donde los valores de σ son grandes, tendremos ...

α y β son grandes, por lo que la onda se atenúa rápidamente

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad j\beta = j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

Zo será baja y compleja con un ángulo de 45°

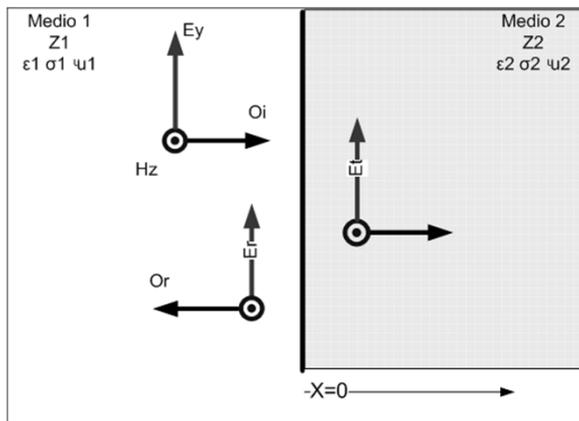
$$Z_0 = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

18



Ecuación de onda en un medio conductor

Supongamos una onda incidiendo en un medio conductor



$$E = E_0 e^{-\gamma x}$$

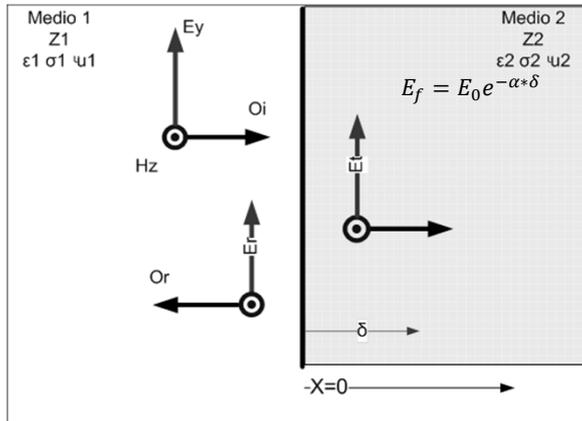
$$E = E_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

19



Ecuación de onda en un medio conductor

Definimos la profundidad de penetración δ , como el valor de «x» que produce una atenuación de $\frac{1}{e}$ o del 37% del valor inicial



$$E_i = E_0 e^{-\alpha \cdot 0}$$

$$E_f = E_0 e^{-\alpha \cdot \delta}$$

$$\frac{E_f}{E_i} = e^{-\alpha \cdot \delta} = \frac{1}{e} = 0,37$$

$$\alpha \cdot \delta = 1$$

20



Profundidad de penetración δ

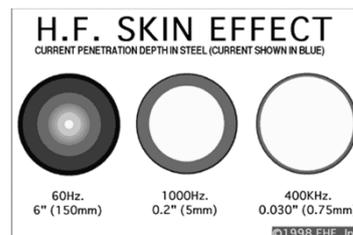
$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}}$$

δ es función inversa de la frecuencia

δ por lo tanto es pequeña a frecuencias muy altas

Esto se conoce como efecto...

Aplicaciones:
cables coaxiales con conductor central hueco o de aluminio cobreado



21



Profundidad de penetración δ

La velocidad de fase será

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad \alpha = \beta = \frac{1}{\delta} \quad v = \omega\delta = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

Como δ es pequeña v también será baja dentro del conductor

La razón de la velocidad de fase en el vacío a la velocidad en el medio se conoce como el índice de refracción

$$v = f(\omega) \text{ y } n = f(\omega) \quad \lambda_c * f = \omega\delta \quad \lambda_c = 2\pi\delta$$

22



Profundidad de penetración δ

Problema. Calcular la profundidad de penetración δ si

$$\sigma = 5.7 \cdot 10^7 \frac{1}{\Omega m} \quad \mu_0 = 400\pi 10^{-9} \frac{H}{m} \quad f = 10^6 \text{ Hz}$$

¿Qué pasa a 60 hz y a 100 Mhz?

Aplicación: una lamina metálica puede funcionar como un filtro pasabajo

23



Profundidad de penetración δ

¿A que distancia (relativa a λ) el campo se atenúa al 1% ($f = 100\text{MHz}$)?

$$\lambda_c = 2\pi\delta$$

$$\mu_r = 1 \quad \sigma = 5,710^7 \frac{1}{\Omega m}$$

Aproximadamente a $\frac{3}{4}$ de λ

25



Profundidad de penetración δ

Problema. Una onda con un vector de Poynting de 1 w/m^2 incide en una superficie de cobre con una frecuencia de 1 Mhz .

¿Cuál debería ser el espesor «d» del blindaje para atenuar el campo 40 db?

$$f = 10^6 \text{ Hz} \quad \mu = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Hy}}{\text{m}} \quad \sigma = 5,710^7 \frac{1}{\Omega m} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} \frac{\text{np}}{\text{m}}$$

$$d = 3,07 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

27



Ondas planas en entrecaras

Consideremos una onda que incide perpendicularmente en la frontera entre dos medios. ¿Cómo deberían ser los campos en la frontera?

Medio 1
 Z_1
 $\epsilon_1 \sigma_1 \mu_1$

$\frac{E_i}{H_i} = Z_1$
 $\frac{E_r}{H_r} = -Z_1$

Medio 2
 Z_2
 $\epsilon_2 \sigma_2 \mu_2$

$\frac{E_t}{H_t} = Z_2$

+ sumando

Consideramos la Z intrínseca de la onda reflejada como negativa

$$E_t \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) = \frac{2Z_2}{Z_1} E_i$$

$$\tau = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Coeficiente de transmisión τ

29



Ondas planas en entrecaras

Consideremos una onda que incide perpendicularmente en la frontera entre dos medios. ¿Cómo deberían ser los campos en la frontera?

Medio 1
 Z_1
 $\epsilon_1 \sigma_1 \mu_1$

$\frac{E_i}{H_i} = Z_1$
 $\frac{E_r}{H_r} = -Z_1$

Medio 2
 Z_2
 $\epsilon_2 \sigma_2 \mu_2$

$\frac{E_t}{H_t} = Z_2$

- restando

¿que sucede en un conductor perfecto?

$$E_t \left(\frac{Z_2}{Z_1} - 1\right) = \frac{2Z_2}{Z_1} E_r$$

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Coeficiente de reflexion Γ

30

Podemos ver la analogía con el modelo de la línea que se puede utilizar para analizar lo que sucede con una onda cuando cambia de medio.

Ondas planas en entrecaras

Onda Incidente

Onda Transmitida

Onda Reflejada

Z_1 Z_2

31

Ondas planas en entrecaras

Aplicaciones. Una superficie de $\frac{\lambda}{4}$ puede utilizarse para adaptar un medio y evitar reflexiones (por ej. en una lente de cámara fotográfica), como si fuera un transformador de cuarto de onda

Una onda plana (Z_0) incide sobre un medio con $\epsilon_2 = 4$ $Z_0 = 120\pi \Omega$

Se genera reflexión

$Z_2 = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_2}} = 188,5 \Omega$

$\epsilon_r = 1$ Z_0 $\epsilon_r = 4$ Z_2

$\epsilon_r = 1$ Z_0 $\epsilon_r = ?$ $Z_{N/4}$ $\epsilon_r = 4$ Z_2

$\lambda/4$

Aplicando una película de $\frac{\lambda}{4}$ para adaptar los medios, ¿Cual debería ser la $\epsilon_{\lambda/4}$?

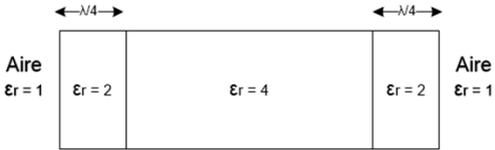
$$\epsilon_{\lambda/4} = \left(\frac{Z_0}{Z_{\lambda/4}}\right)^2 = 2$$

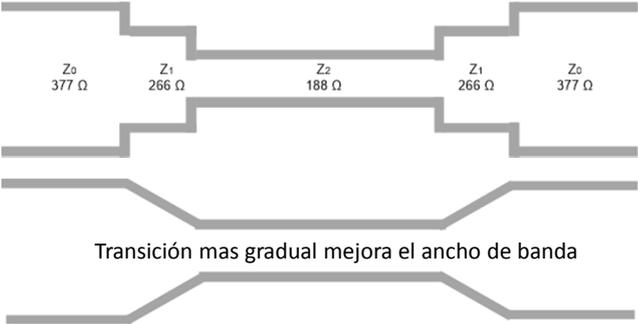
32



Ondas planas en entrecaras

De esta forma se puede mejorar el rendimiento de una lente disminuyendo las reflexiones, utilizando superficies de $\frac{\lambda}{4}$





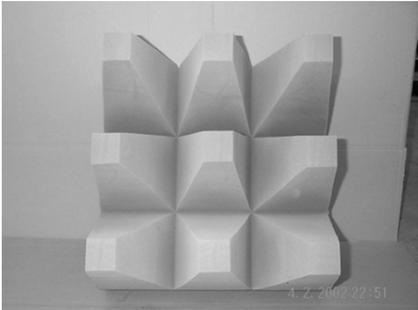
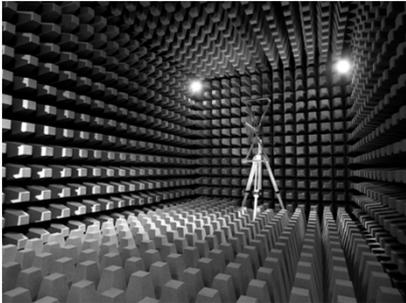
Transición mas gradual mejora el ancho de banda

33



Ondas planas en entrecaras

Transición mas gradual mejora el ancho de banda

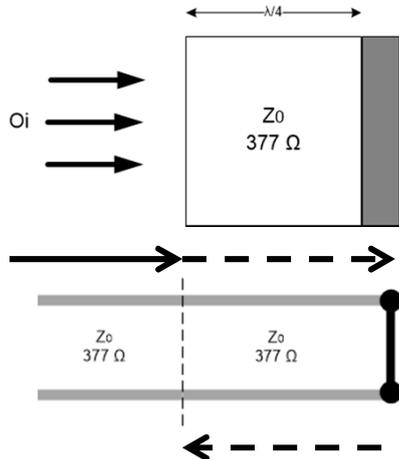


34



Ondas planas en entrecaras

Hoja de Salisbury: Una onda incide sobre una lamina de papel espacial de impedancia Z_0 y espesor $\frac{\lambda}{4}$, que esta terminada en una lamina perfectamente conductora.



La onda se absorbe totalmente sin reflejarse

Esto funciona bien para una sola frecuencia!

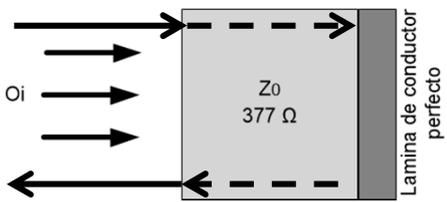
35



Ondas planas en entrecaras

Absorción en un medio disipativo: Utilizando una mezcla de materiales de alto μ_r (ferrita) y ϵ_r (titanato de bario) (μ y ϵ complejos) se puede lograr una buena absorción en un ancho de banda mayor. ¿Cuánto se atenúa la onda si el espesor es d y el medio es no conductor?

$d = 10 \text{ mm}$ $f = 100 \text{ Mhz}$



Lamina de conductor perfecto

$\mu_r = \epsilon_r = 60(2 - j)$

$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 377 \Omega$

$\alpha = \Re e \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$

$\alpha = \Re e j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\mu_r\epsilon_r}$ $\alpha = \Re e j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\mu_r\epsilon_r}$ $\alpha = \Re e j \frac{120\pi}{\lambda} \sqrt{(2-j)^2}$ $\alpha = \frac{120\pi}{\lambda} \frac{Np}{m}$

$\alpha * d = 11 \text{ db}$ en total la onda se atenúa 22 db ¿cuanto es en veces?

La atenuación es proporcional a la frecuencia

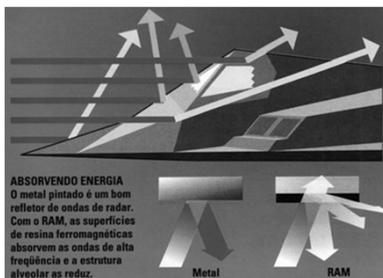
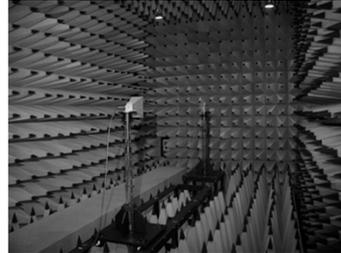
37



Ondas planas en entrecaras

Aplicaciones

Cámara anecoica



Tecnología Stealth

38



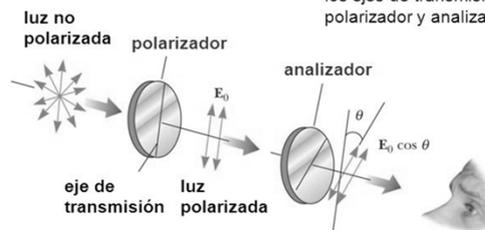
Polarización

Ley de Malus

Cuando un polarizador perfecto es colocado en el camino de un haz de luz polarizado, la intensidad de la luz que pasa a través del polarizador es dada por:

$$I = I_m \cos^2 \theta$$

θ es el ángulo que se forma entre los ejes de transmisión del polarizador y analizador

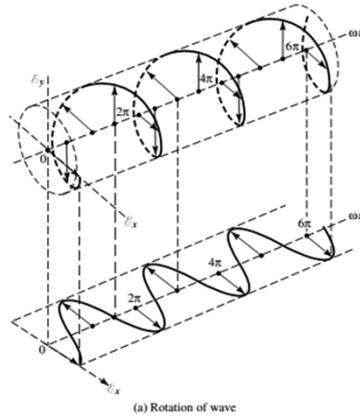


39



Polarización

Se entiende por Polarización al comportamiento temporal de la intensidad de campo eléctrico E en un punto del espacio



Polarization of a radiated wave is defined as "that property of an electromagnetic wave describing the time-varying direction and relative magnitude of the electric-field vector; specifically, the figure traced as a function of time by the extremity of the vector at a fixed location in space, and the sense in which it is traced, as observed along the direction of propagation."

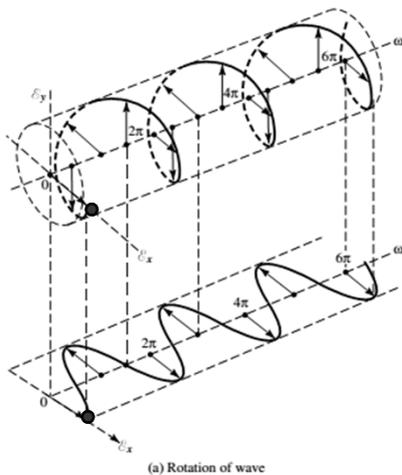
Polarization then is the curve traced by the end point of the arrow (vector) representing the instantaneous electric field. The field must be observed along the direction of propagation.

40



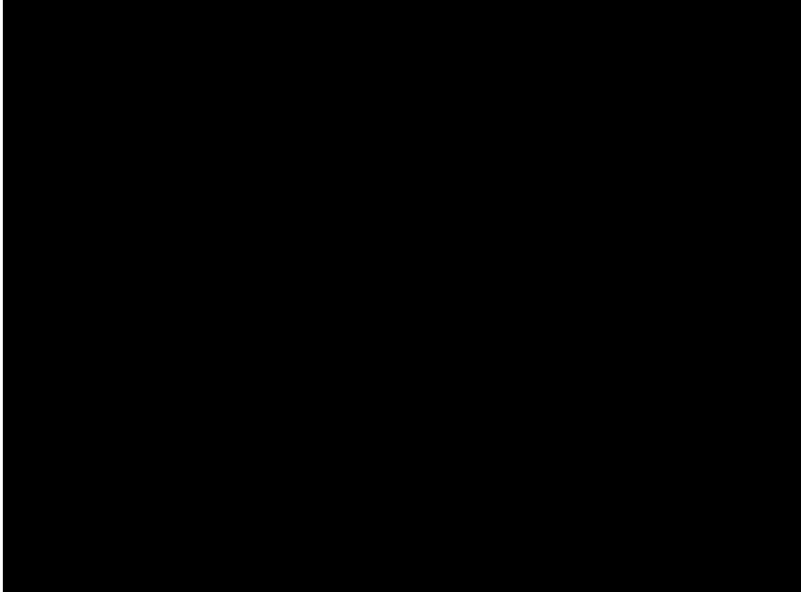
Polarización

Se entiende por Polarización al comportamiento temporal de la intensidad de campo eléctrico E en un punto del espacio



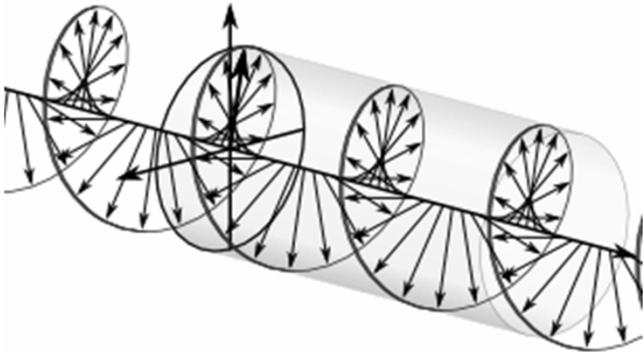
41

 Polarización



42

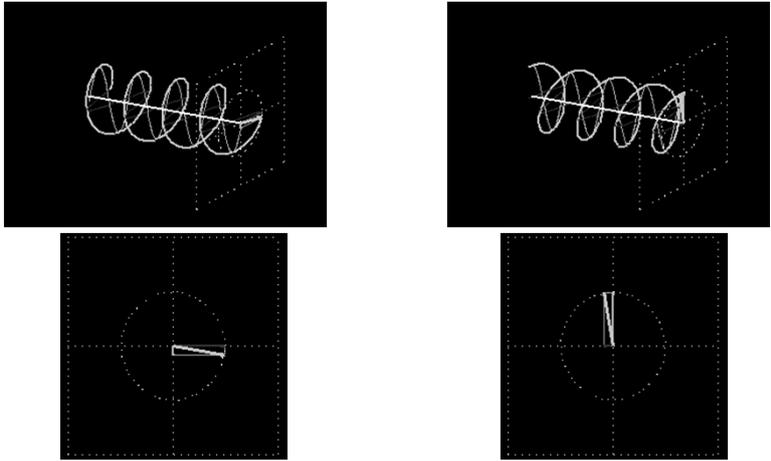
 Polarización



43

 **Polarización**

Polarización izquierda (IEEE) • Polarización derecha (IEEE)



<http://cddemo.szilab.org/>

44

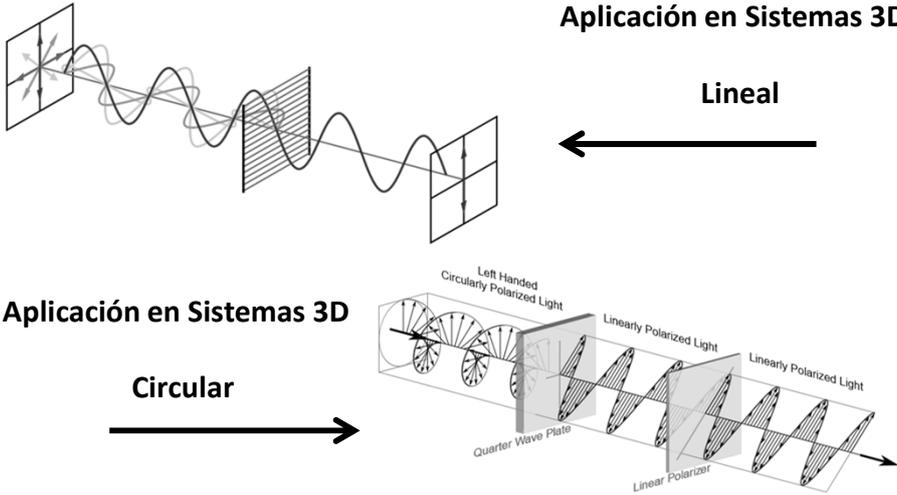
 **Polarización**

Aplicación en Sistemas 3D

Lineal

Aplicación en Sistemas 3D

Circular



45

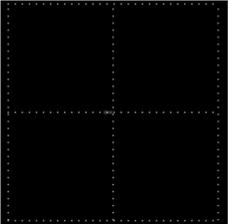
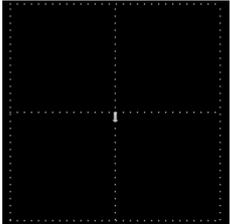
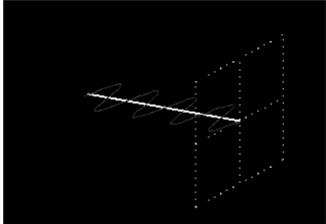
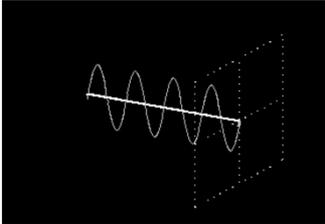
 Polarización



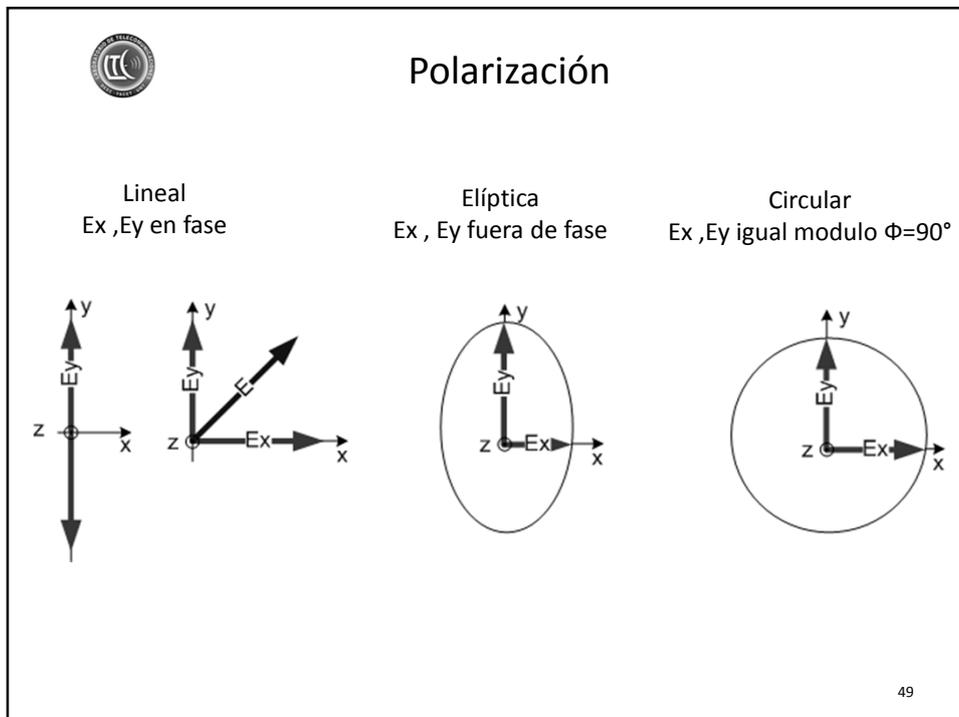
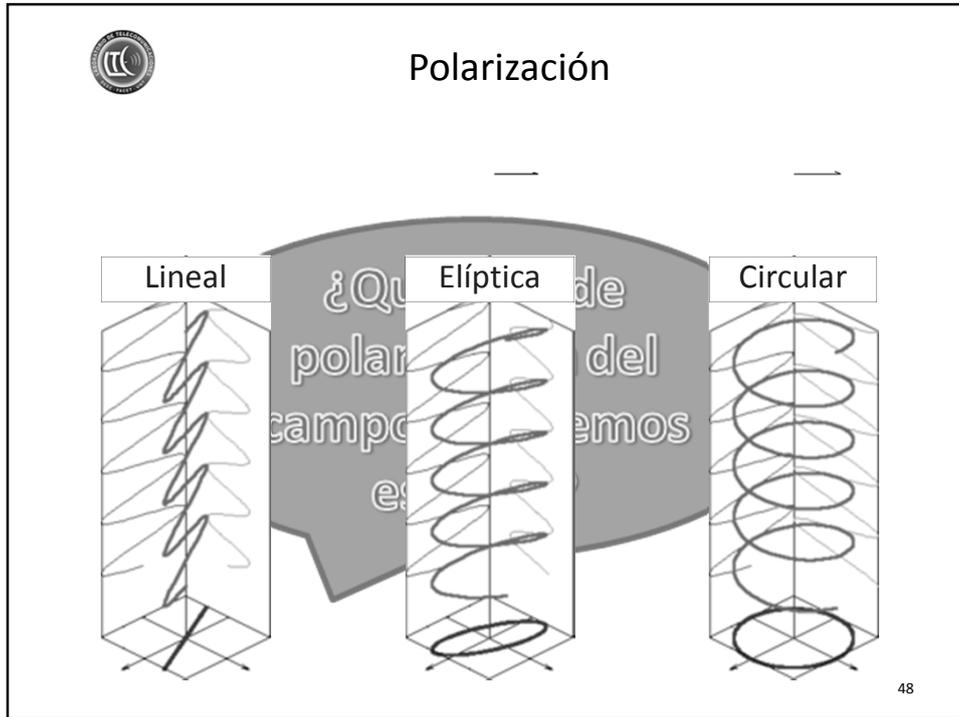
46

 Polarización

Polarización vertical • Polarización horizontal

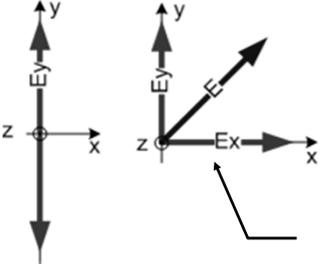


<http://cddemo.szilab.org/> 47





Polarización Lineal



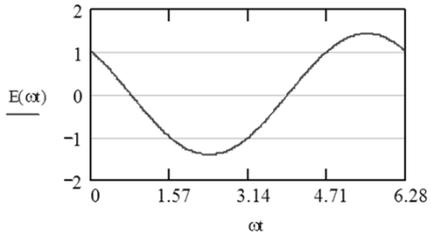
$E_{(z,t)} = E_0 \cdot e^{j\omega t} e^{-j\beta z}$ onda viajera en Z $E_0 = \vec{E}_y + \vec{E}_x$

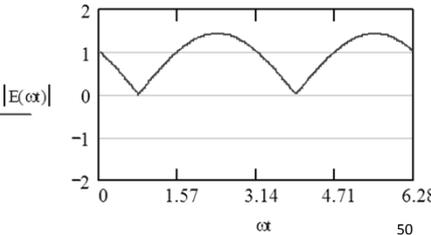
$E_y = E_2 \cdot \sin(\omega t - \beta z)$ $E_x = E_1 \cdot \sin(\omega t - \beta z)$

$\vec{E}_{(z,t)} = \vec{y}E_2 \cdot \sin(\omega t - \beta z) + \vec{x}E_1 \cdot \sin(\omega t - \beta z)$

$\vec{E}_{(z,t)} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \cdot \sin(\omega t - \beta z)$

La dirección de E se mantiene constante
La componentes Ey y Ex están en fase temporal







Polarización Elíptica

δ fase temporal Ey adelanta Ex

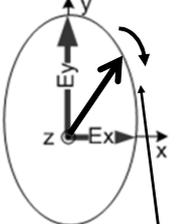
$E_{(z,t)} = E_0 \cdot e^{j\omega t} e^{-j\beta z}$ onda viajera en z $E_0 = \vec{E}_y + \vec{E}_x$

$E_y = E_2 \cdot \sin(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{2})$ $E_x = E_1 \cdot \sin(\omega t - \beta z)$

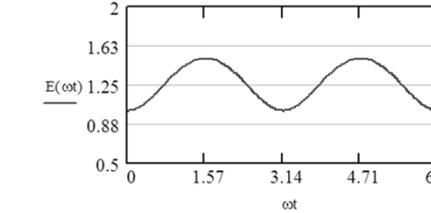
en z=0 $E_y = E_2 \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = E_2 \cdot \cos(\omega t)$ $E_x = E_1 \cdot \sin(\omega t)$

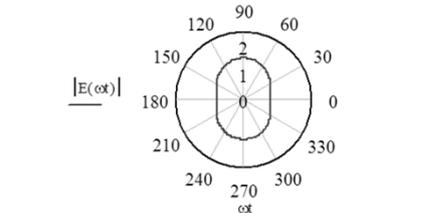
$\vec{E}_0 = \vec{y}E_2 \cdot \cos(\omega t - \beta z) + \vec{x}E_1 \cdot \sin(\omega t - \beta z)$

$\vec{E}_0 = \sqrt{(E_1 \sin \omega t)^2 + (E_2 \cos \omega t)^2}$ $E_2 \neq E_1$



E gira con amplitud variable
Ey y Ex están desfasadas espacial y temporalmente

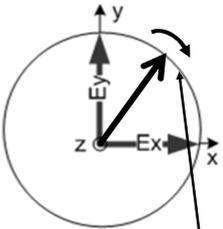






Polarización Circular

δ fase temporal E_y adelanta E_x | $E_{(z,t)} = E_0 \cdot e^{j\omega t} e^{-j\beta z}$ onda viajera en z $E_0 = \vec{E}_y + \vec{E}_x$



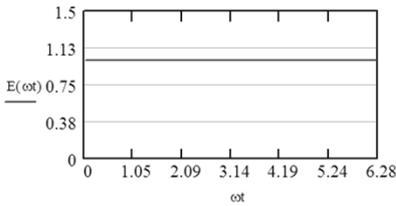
$$E_y = E_1 \cdot \sin(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{2}) \quad E_x = E_1 \cdot \sin(\omega t - \beta z)$$

en $z=0$ $E_y = E_1 \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = E_1 \cdot \cos(\omega t)$ $E_x = E_1 \cdot \sin(\omega t)$

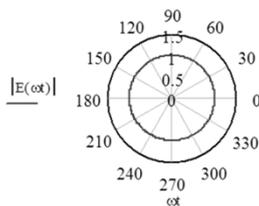
$$\vec{E}_0 = \vec{y}E_1 \cdot \cos(\omega t - \beta z) + \vec{x}E_1 \cdot \sin(\omega t - \beta z)$$

$$E_0 = \sqrt{(E_1 \sin \omega t)^2 + (E_1 \cos \omega t)^2}$$

E gira con amplitud constante
 E_y y E_x están desfasadas espacial y temporalmente



$E_y(\omega t)$



$|E(\omega t)|$

52



Polarización Circular

Según la definición de la IEEE la onda tiene **Polaridad Circular Izquierda** cuando la fase es de 90° y tiene **Polaridad Circular Derecha** cuando la fase es de -90° .

Vale decir se tiene una inversión del sentido de giro aplicando un desfase de 180° a cualquiera de los componentes

53



Polarización Circular



Array of four axial-mode helical antennas used as a satellite tracking-acquisition antenna, Pleumeur-Bodou, France

54



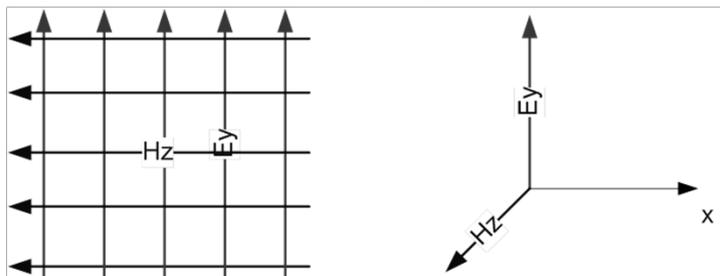
Onda Plana Uniforme

$$E_y = f(x - vt) \quad H_z = f(x - vt)$$

Onda Plana Uniforme E y H son función de X y t (independientes de Y y Z).
TEM : Transversal Electromagnética.

En una onda plana uniforme los puntos de igual fase son planos y vienen dados por la ecuación $x=\text{constante}$

¿Cuál es la polarización de la onda en el diagrama?

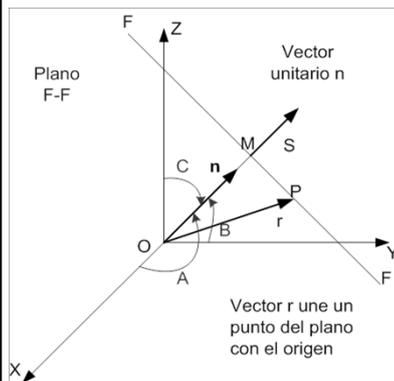


55



Cosenos Directores

Si tenemos una onda plana uniforme propagándose con dirección S tenemos que encontrar una expresión que al igualarla a una constante, de los planos equifásicos, para eso nos valemos de los Cosenos Directores.



$$n \cdot r = cte = OM \text{ Ecuacion de un plano}$$

Cosenos Directores $\cos(A), \cos(B), \cos(C)$

$$r_{(x,y,z)} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

$$n_{(A,B,C)} = \vec{i} \cos(A) + \vec{j} \cos(B) + \vec{k} \cos(C)$$

$$n_{(A,B,C)} \cdot r_{(x,y,z)} = x \cos(A) + y \cos(B) + z \cos(C)$$

$$E_{(x,t)} = E_0 \cdot e^{-j\beta x} \text{ onda viajera en el eje "x"}$$

$$E_{(r,t)} = E_0 \cdot e^{-j\beta n \cdot r} \text{ onda viajera en la direccion "S"}$$

56



Cosenos Directores

$$\cos(A) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \cos(B) = \frac{y}{|n|} \quad \cos(C) = \frac{z}{|n|}$$

Onda viajera en la direccion "S"

$$E_{(r,t)} = E_0 \cdot e^{-j\beta(x \cos(A) + y \cos(B) + z \cos(C))} \cdot e^{j\omega t}$$

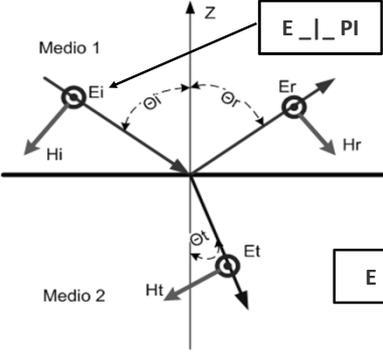
E_0 segun el modo de polarizacion que se este utilizando

57

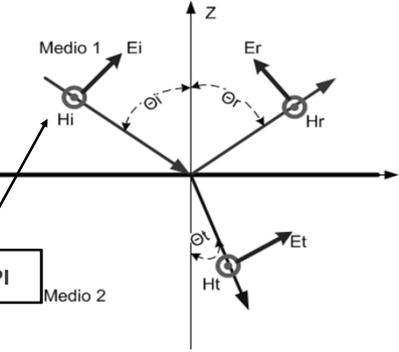
 **Reflexión y refracción de ondas**

Plano de incidencia: es el plano que contiene el rayo incidente y la normal de la superficie

Podemos distinguir dos casos



Caso polarización perpendicular (horizontal)



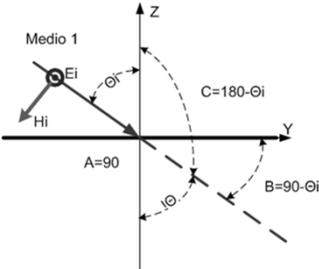
Caso polarización paralela (vertical)

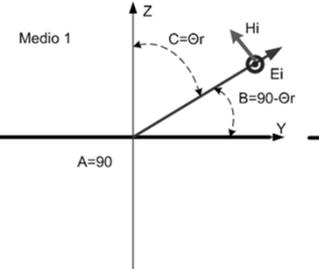
58

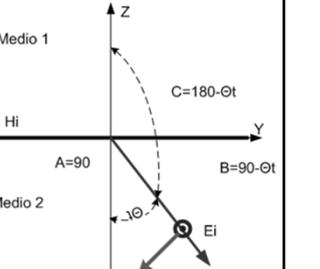
 **Reflexión y refracción de ondas**

Caso de incidencia perpendicular: haciendo cumplir las condiciones de frontera en $z = 0$ tendremos....

$$E_i + E_r = E_t \quad \Rightarrow \quad E_i + \Gamma * E_i = \tau * E_i$$



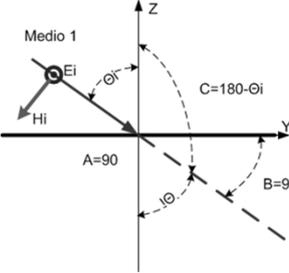
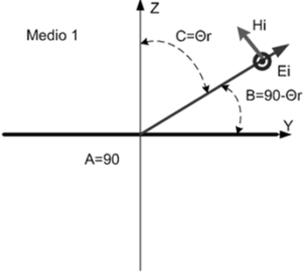
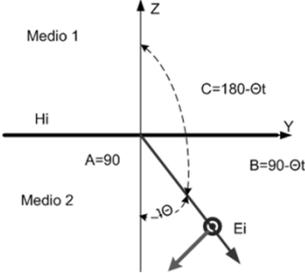




59



Reflexión y refracción de ondas

$$E_0 e^{-i\beta_1 \left(x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) + 0 \cos(\pi - \theta_i) \right)} +$$

Coef. Reflexión

$$+ \Gamma E_0 e^{-i\beta_1 \left(x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_r\right) + 0 \cos(\theta_r) \right)} =$$

Coef. Transmisión

$$= \tau E_0 e^{-i\beta_2 \left(x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_t\right) + 0 \cos(\pi - \theta_t) \right)}$$

60



Reflexión y refracción de ondas

$$E_0 e^{-i\beta_1 \left(x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) + 0 \cos(\pi - \theta_i) \right)} +$$

$$+ \Gamma E_0 e^{-i\beta_1 \left(x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_r\right) + 0 \cos(\theta_r) \right)} =$$

$$= \tau E_0 e^{-i\beta_2 \left(x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_t\right) + 0 \cos(\pi - \theta_t) \right)}$$

$$E_0 e^{-i\beta_1 (y \sin(\theta_i))} + \Gamma E_0 e^{-i\beta_1 (y \sin(\theta_r))} = \tau E_0 e^{-i\beta_2 (y \sin(\theta_t))}$$

$$\rightarrow 1 + \Gamma = \tau$$

$$E_0 e^{-i\beta_1 (y \sin(\theta_i))} + \Gamma E_0 e^{-i\beta_1 (y \sin(\theta_r))} =$$

$$= E_0 e^{-i\beta_2 (y \sin(\theta_t))} + \Gamma E_0 e^{-i\beta_2 (y \sin(\theta_t))}$$

61



Reflexión y refracción de ondas

$$E_0 e^{-i\beta_1(y \sin(\theta_i))} + \Gamma E_0 e^{-i\beta_1(y \sin(\theta_r))} = E_0 e^{-i\beta_2(y \sin(\theta_t))} + \Gamma E_0 e^{-i\beta_2(y \sin(\theta_t))}$$

Para que se cumpla esta propiedad es necesario que...

$$\beta_1 \cdot \sin(\theta_i) = \beta_2 \cdot \sin(\theta_t)$$

$$\beta_1 \cdot \sin(\theta_r) = \beta_2 \cdot \sin(\theta_t)$$

$$\div \sin(\theta_i) = \sin(\theta_r)$$

$$\theta_i = \theta_r$$

$$\beta_1 \cdot \sin(\theta_i) = \beta_2 \cdot \sin(\theta_t)$$

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} = \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\sin(\theta_t) = \frac{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \cdot \sin(\theta_i)$$

Leyes de Snell

62



Reflexión y refracción de ondas

Una onda se propaga en una dirección y medio determinados según:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

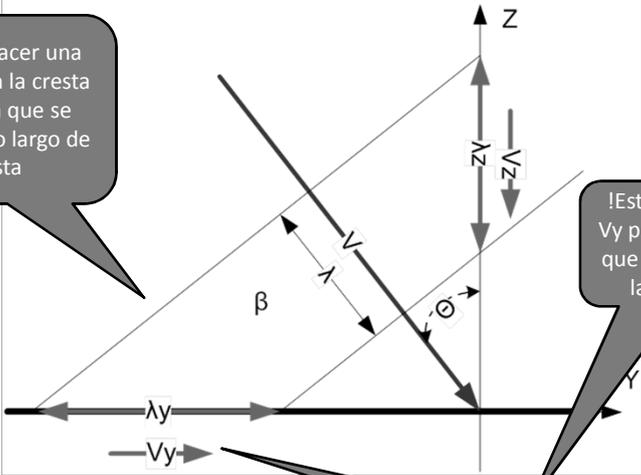
Considerando los cosenos directores podemos escribir para cada eje lo siguiente:

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{\beta \cdot \cos(A)} \quad v_x = \frac{\omega}{\beta \cdot \cos(A)} \quad \lambda_y = \frac{2\pi}{\beta \cdot \cos(B)} \quad v_y = \frac{\omega}{\beta \cdot \cos(B)}$$

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta \cdot \cos(C)} \quad v_z = \frac{\omega}{\beta \cdot \cos(C)}$$

63

 **Reflexión y refracción de ondas**



Podemos hacer una analogía con la cresta de una ola que se desplaza a lo largo de la costa

!Esto nos dice que V_y puede ser mayor que la velocidad de la luz! ¿.....?

V_y será mayor que V , en tanto $\theta \neq 0$, tendiendo a ∞ cuando θ tiende a $\frac{\pi}{2}$

 **Reflexión sobre una superficie conductora**

Caso de incidencia perpendicular ¿...? ¿Cómo serán los ángulos de incidencia y reflexión?... *Veamos la expresión para la onda incidente*

$$n \cdot r = x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + z \cos(\pi - \theta) = y \sin(\theta) - z \cos(\theta)$$

$$E_I = E_I e^{-i\beta(y \sin(\theta) - z \cos(\theta))}$$

De igual forma resolvemos para la onda reflejada...

$$n \cdot r = x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + z \cos(\theta) = y \sin(\theta) + z \cos(\theta)$$

$$E_R = E_R e^{-i\beta(y \sin(\theta) + z \cos(\theta))}$$

65



Reflexión sobre una superficie conductora

La expresión del campo E será...

$$E = E_I e^{-i\beta(y \sin(\theta) - z \cos(\theta))} + E_R e^{-i\beta(y \sin(\theta) + z \cos(\theta))}$$

Aplicando las condiciones de borde en $z = 0$ tendremos ...

$$E_i + E_r = 0 \Rightarrow E_i = -E_r \quad \text{y finalmente para } z \neq 0$$

$$E = E_I e^{-i\beta y \sin(\theta)} (e^{i\beta z \cos(\theta)} - e^{-i\beta z \cos(\theta)})$$

$$E = 2iE_I \sin(\beta z \cos(\theta)) e^{-i\beta y \sin(\theta)}$$

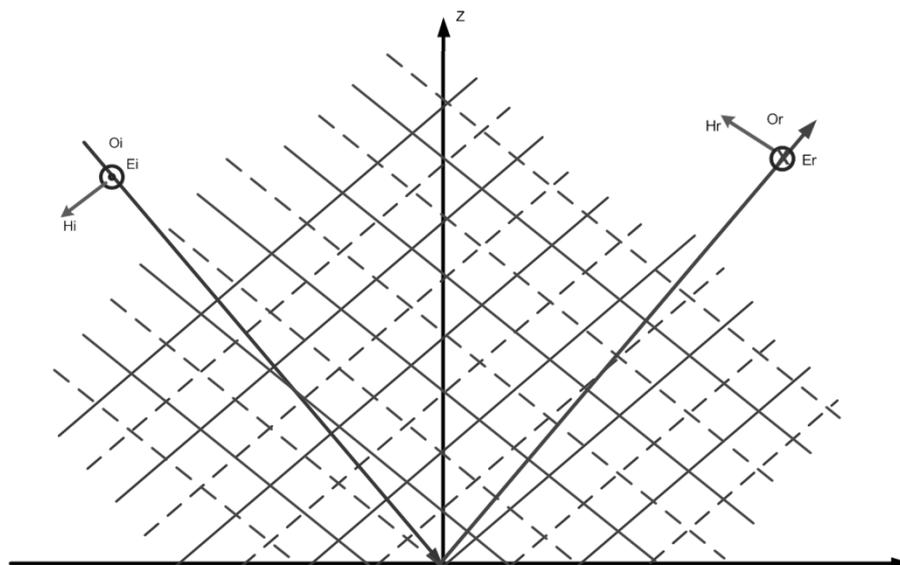
$$\text{definiendo } \beta_z = \beta \cos(\theta) \quad \text{y} \quad \beta_y = \beta \sin(\theta)$$

$$E = 2iE_I \sin(\beta_z z) e^{-i\beta_y y}$$

66



Reflexión sobre una superficie conductora

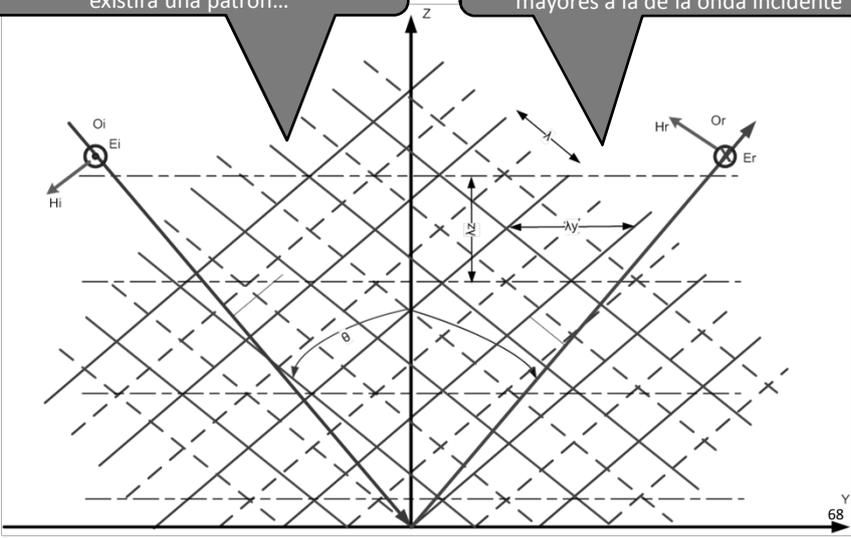


67

 **Reflexión sobre una superficie conductora**

Tenemos la superposición de ondas incidentes y reflejadas, entonces se existirá un patrón...

Vemos que la velocidad de fase y la longitud de onda sobre los ejes, son mayores a la de la onda incidente



 **Reflexión sobre una superficie conductora**

Vemos que hay una distribución estacionaria a lo largo del eje Z...

...y una onda progresiva a lo largo del eje Y

$\sin(\beta_z z)$

Onda estacionaria sobre Z

$e^{-i\beta_y y}$

Onda progresiva sobre Y

$$\beta_z = \beta \cos(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda_z} \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{\beta \cos(\theta)} = \frac{\lambda}{\cos(\theta)} \Rightarrow \lambda_z > \lambda$$

$$\beta_y = \beta \sin(\theta) = \frac{\omega}{v_y} \quad v_y = \frac{\omega}{\beta \sin(\theta)} = \frac{v}{\sin(\theta)} \Rightarrow v_y > v$$

λ y β constantes de propagación en los respectivos ejes Z e Y

$$\lambda_y = \frac{\lambda}{\sin(\theta)}$$

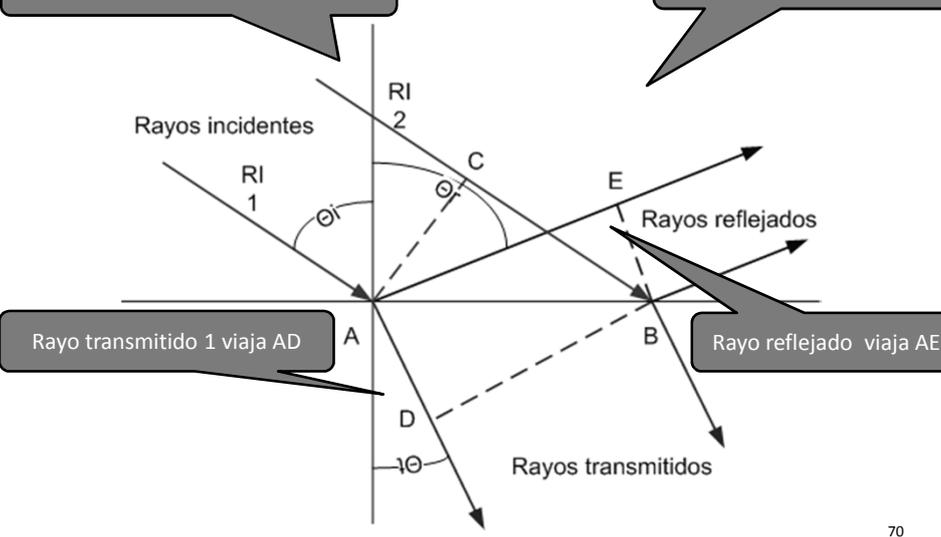
$v_y > v$

69

 **Incidencia Oblicua sobre un dieléctrico ideal**

Al mismo tiempo tenemos...

Rayo incidente 2 viaja CB



Rayos incidentes

Rayos reflejados

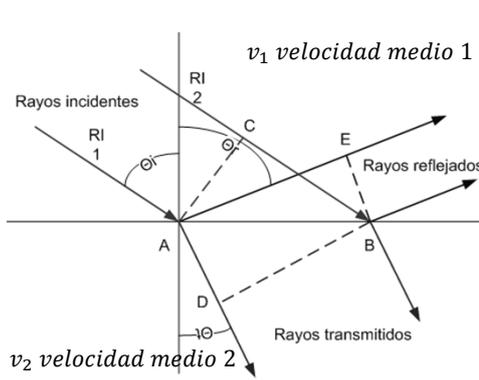
Rayos transmitidos

Rayo transmitido 1 viaja AD

Rayo reflejado viaja AE

70

 **Incidencia Oblicua sobre un dieléctrico ideal**



v_1 velocidad medio 1

v_2 velocidad medio 2

1) $\frac{CB}{AD} = \frac{v_1}{v_2}$ 2) $AE = CB$
distancia recorrida por los planos de fase

3) $AE = AB \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_r\right) = AB \sin(\theta_r)$

¿AD? y ¿CB?

4) $AD = AB \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_t\right) = AB \sin(\theta_t)$

5) $CB = AB \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = AB \sin(\theta_i)$

2) \wedge 3) \wedge 5) *concluimos que ...*

$\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r) \quad \theta_i = \theta_r$

1) \wedge 4) \wedge 5) *concluimos que ...*

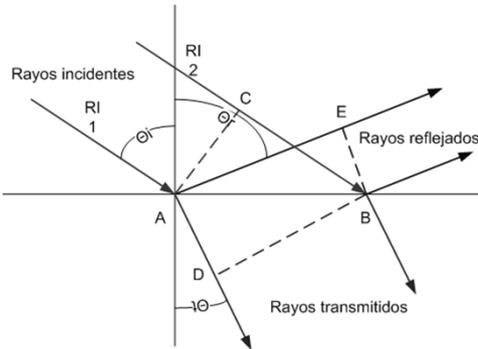
$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} = \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}}$

71



Incidencia Oblicua sobre un dieléctrico ideal

Por el principio de conservación de la energía planteamos...



$$P_i = P_r + P_t$$

$$\frac{E_i^2 \cos \theta_i}{\eta_1} = \frac{E_r^2 \cos \theta_r}{\eta_1} + \frac{E_t^2 \cos \theta_t}{\eta_2}$$

$$1 = \frac{E_r^2}{E_i^2} + \frac{\eta_1 E_t^2 \cos \theta_t}{\eta_2 E_i^2 \cos \theta_i}$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\sqrt{\mu_1} \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} \sqrt{\mu_2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}$$

$$\frac{E_r^2}{E_i^2} = 1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_2} E_t^2 \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_1} E_i^2 \cos \theta_i}$$

72



Incidencia Oblicua sobre un dieléctrico ideal

Si E es perpendicular al plano de incidencia (Horizontal)

$$\text{En } z = 0 \text{ tenemos que } E_t = E_i + E_r \rightarrow \frac{E_t}{E_i} = 1 + \frac{E_r}{E_i}$$

$$\frac{E_r^2}{E_i^2} = 1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left(1 + \frac{E_r}{E_i}\right)^2 \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \quad 1 - \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left(1 + \frac{E_r}{E_i}\right)^2 \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

$$\left(1 - \frac{E_r}{E_i}\right) \left(1 + \frac{E_r}{E_i}\right) = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left(1 + \frac{E_r}{E_i}\right) \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \quad \left(1 - \frac{E_r}{E_i}\right) = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left(1 + \frac{E_r}{E_i}\right) \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

$$\text{Despejando } \frac{E_r}{E_i} \dots \quad \frac{E_r}{E_i} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_t}$$

73



Incidencia Oblicua sobre un dieléctrico ideal

Si E es perpendicular al plano de incidencia (Horizontal)

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_t}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_t} \quad \cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}$$

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i} - \sqrt{\epsilon_2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}}{\sqrt{\epsilon_1} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i} + \sqrt{\epsilon_2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}} \quad \sqrt{\epsilon_2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_i}$$

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}$$

Relación entre la intensidad de campo incidente y reflejado sobre una superficie dieléctrica para el caso de que E este polarizado horizontalmente

74



Incidencia Oblicua sobre un dieléctrico ideal

Si E es paralelo al plano de incidencia (Vertical)

Debe cumplirse en la frontera la siguiente condición...

$$E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_i = E_t \cos \theta_t$$

$$1 - \frac{E_r}{E_i} = \frac{E_t \cos \theta_t}{E_i \cos \theta_i} \quad \frac{E_t}{E_i} = \left(1 - \frac{E_r}{E_i}\right) \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_t}$$

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}$$

Relación entre la intensidad de campo incidente y reflejado sobre una superficie dieléctrica para el caso de que E este incidiendo en forma paralela al plano de incidencia (polarización vertical)

75



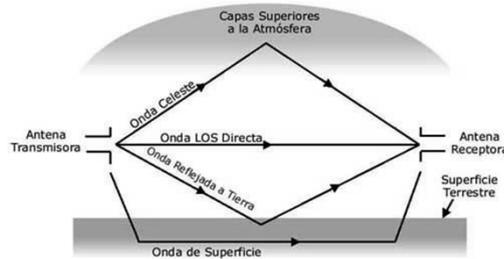
Incidencia Oblicua sobre un dieléctrico ideal

Polarización Horizontal

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}$$

Polarización Vertical

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}$$

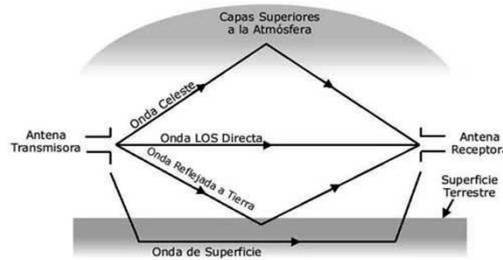


¡Las condiciones de propagación dependen de la polarización!

76



Propagación



RECOMENDACIÓN UIT-R BT.419-3*

Directividad y discriminación por polarización de las antenas para recepción en la radiodifusión de televisión

Según las evidencias disponibles, el uso de la polarización horizontal ofrece mejor calidad de imagen en terreno montañoso y con arbolado, en comparación con la polarización vertical, al menos para las bandas de ondas métricas (VHF) (véase el Anexo 1)

77



Angulo de Brewster

En el caso de incidencia paralela se da que si el numerador se anula, no existe reflexión y la onda se transmite totalmente

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}} \quad \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i} \quad \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \cos^2 \theta_i = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i$$

Despejando $\sin(\theta_i)$...

$$\sin^2(\theta_i) = \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2} \quad \sin^2(\theta_i) = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad \theta_i = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

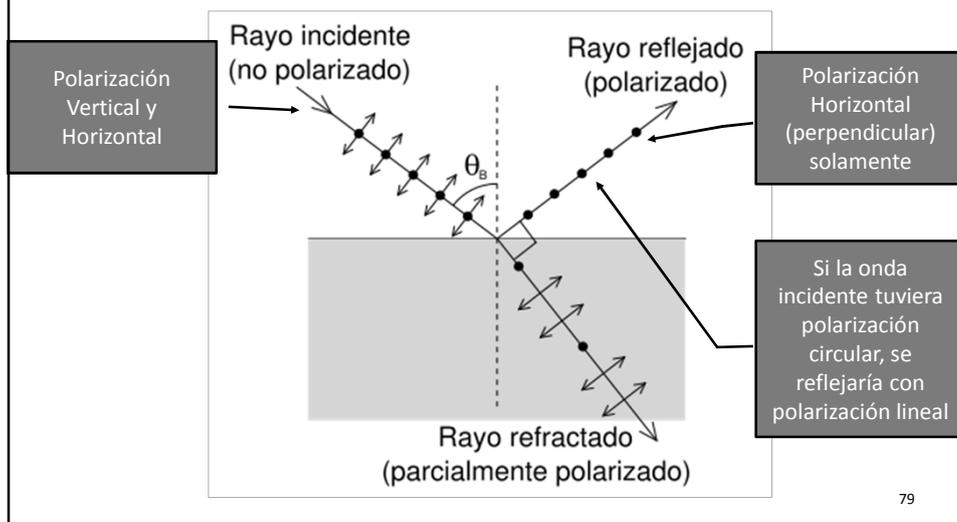
Angulo de Brewster

78



Angulo de Brewster

Se conoce también como ángulo de polarización



79



Angulo de Brewster

Una onda polarizada paralela viaja en el aire e incide en los siguientes medios calcular el ángulo de Brewster

$$\theta_i = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------|
| a) Agua destilada $\epsilon_r = 81$ | $\theta_{iB} = 83.7^\circ$ |
| b) Cristal de roca $\epsilon_r = 10$ | $\theta_{iB} = 72.4^\circ$ |
| c) Parafina $\epsilon_r = 2$ | $\theta_{iB} = 54.7^\circ$ |

80



Angulo Critico

Si el medio 2 fuera menos denso que el medio 1 $\epsilon_1 > \epsilon_2$ se puede dar el caso de que Γ_v sea complejo

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{\epsilon_2 \cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}{\epsilon_1}}{\frac{\epsilon_2 \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}{\epsilon_1}} \quad \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \sin^2 \theta_i$$

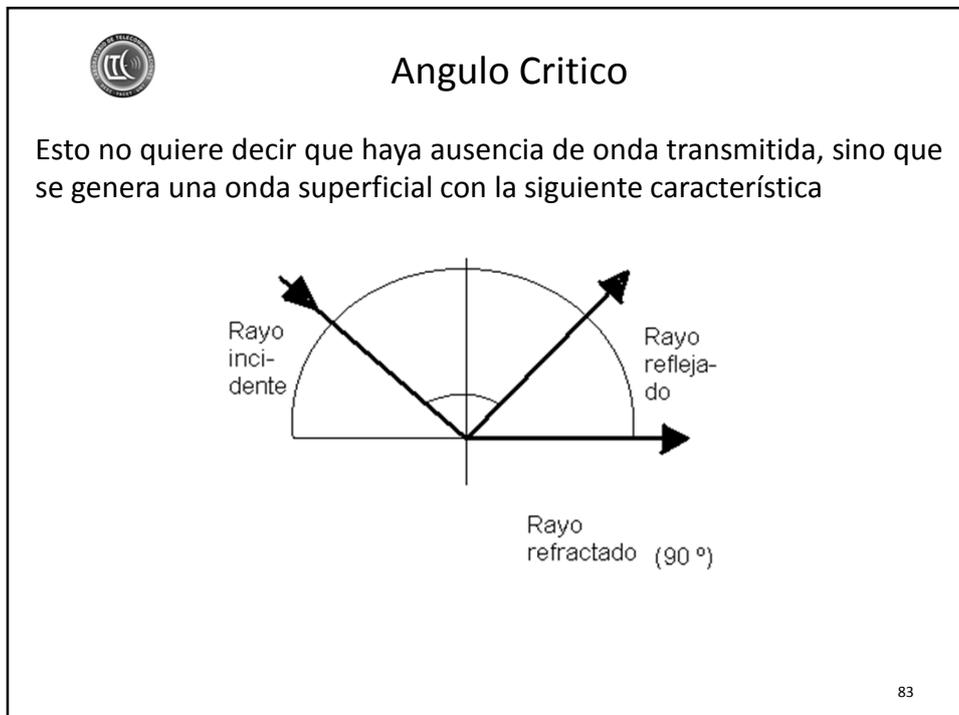
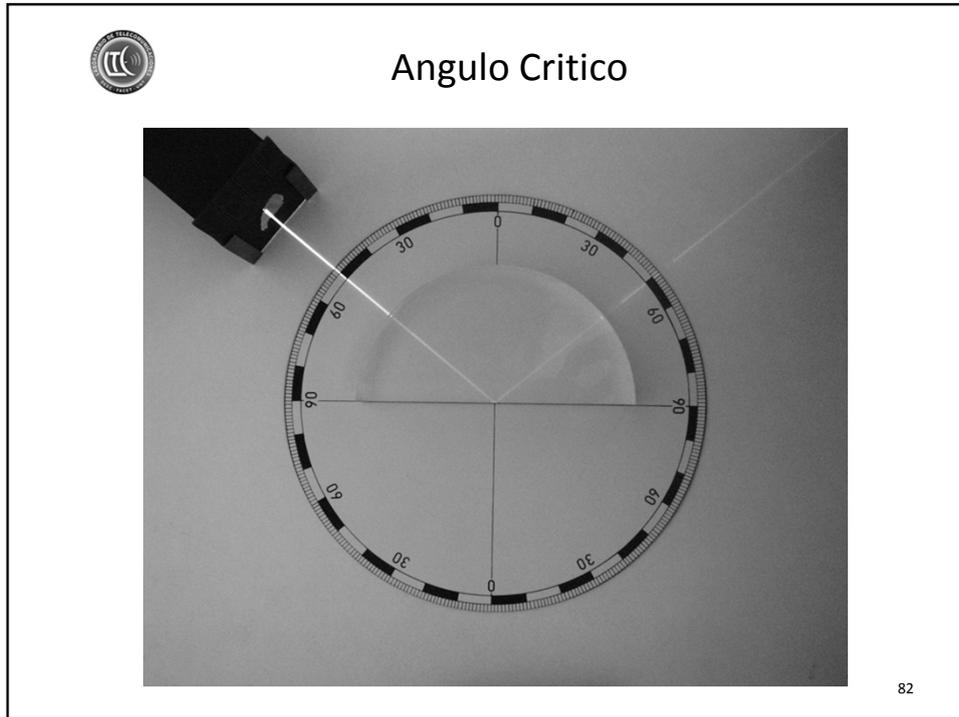
En este caso la onda se refleja totalmente sobre el medio mas denso

Angulo Critico

$$\theta_{ic} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

Analizar que sucede si la incidencia es perpendicular

81





Angulo Critico

Esto no quiere decir que haya ausencia de onda transmitida, sino que se genera una onda superficial con la siguiente característica

$$E_t = \tau E_0 e^{-i\beta_2 \left(x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_t\right) + z \cos(\pi - \theta_t) \right)}$$

$$E_t = \tau E_0 e^{-i\beta_2 (y \sin(\theta_t) - z \cos(\theta_t))} \quad \sin(\theta_t) = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin(\theta_i)$$

$$E_t = \tau E_0 e^{-i\beta_2 \left(y \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin(\theta_i) \right)} e^{i\beta_2 \left(z \sqrt{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2(\theta_i)} \right)}$$

Onda Progresiva
Onda Superficial

Como $\epsilon_1 > \epsilon_2$ la raíz es imaginaria y el producto \mathbb{R} y negativo atenuándose rápidamente

84



Angulo Critico

$$E_t = \tau E_0 e^{-i\beta_2 \left(y \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin(\theta_i) \right)} e^{i\beta_2 \left(z \sqrt{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2(\theta_i)} \right)}$$

Onda Progresiva
Onda Superficial

Como $\epsilon_1 > \epsilon_2$ la raíz es imaginaria y el producto \mathbb{R} y negativo atenuándose rápidamente, el signo del radicando se elige de manera que la onda se atenúe exponencialmente

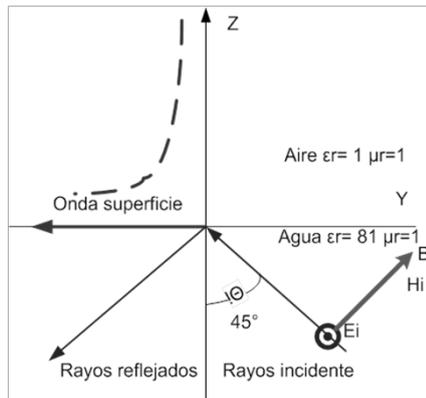
$$E_t = \tau E_0 e^{-i\beta_2 \left(y \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin(\theta_i) \right)} e^{-\beta_2 \left(z \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2(\theta_i) - 1} \right)}$$

85



Angulo Critico

Una onda plana linealmente polarizada, incide desde el agua en una superficie agua-aire a 45°



¿Cuál es el ángulo critico?

$$\theta_{ic} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad \theta_{ic} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1}{81}} = 6,38^\circ$$

¿Cuál es la situación entonces?

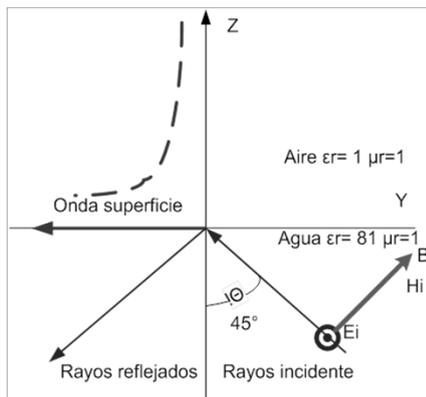
86



Angulo Critico

Si $E_i = 1V/m$, calcule E_t a) en la interface y b) a $\lambda/4$ de la superficie.

Necesitamos conocer α y τ



$$\tau = 1 + \Gamma$$

$$e^{-z\beta_2 \left(\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2(\theta_i)} - 1 \right)} = e^{-\alpha z}$$

$$\alpha = 39,5 \text{ Np/m} \quad \text{relativo a } \lambda$$

$$|E_t| = -85,75 \text{ db}$$

87



Problemas

Interface poliestireno-aire. Calcule el ángulo de transmisión suponiendo que se incide desde uno de los medios y repita invirtiendo los medios

$$\text{Interfase aire - poliestireno} \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{F}{m} \quad \varepsilon_2 = 2.7 \cdot \varepsilon_0 \quad \theta_i = \frac{\pi}{6}$$

89



Problemas

Una onda plana incide sobre un medio con $\varepsilon_r = 5$ y un ángulo de 30° , encontrar los ángulos de reflexión y transmisión y luego repetir intercambiando los medios

91



Problemas

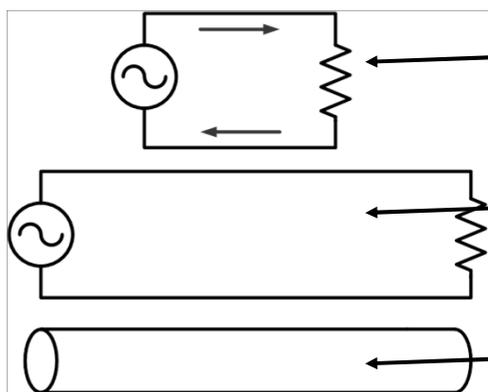
Una onda plana incide sobre un medio con $\epsilon_r = 5$ y un ángulo de 30° , encontrar el coeficiente de reflexión (E perpendicular)

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}$$

93



Guías de Onda



Teoría de Circuitos
Parámetros concentrados

Parámetros distribuidos

¿es posible?

Experimento: enrollar una hoja y cual pirata al acecho miremos hacia la luz.
¿Conclusiones?

94



Guías de Onda

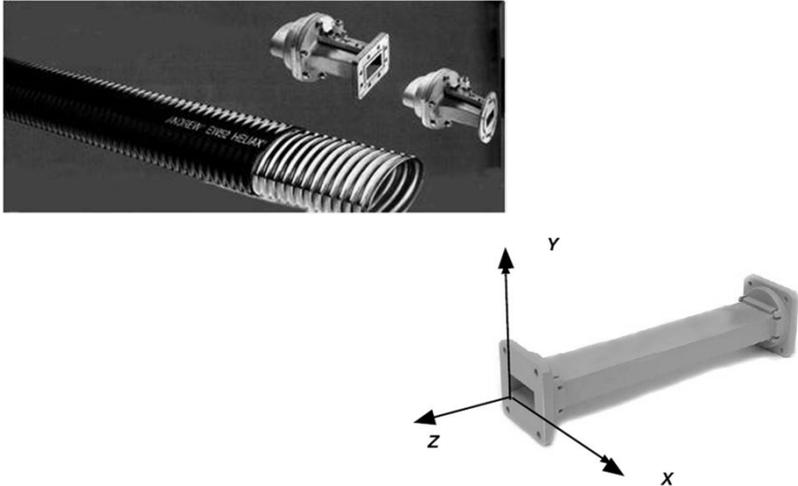


Figura 4.2: Las dimensiones X, Y, y Z de una guía de onda rectangular.

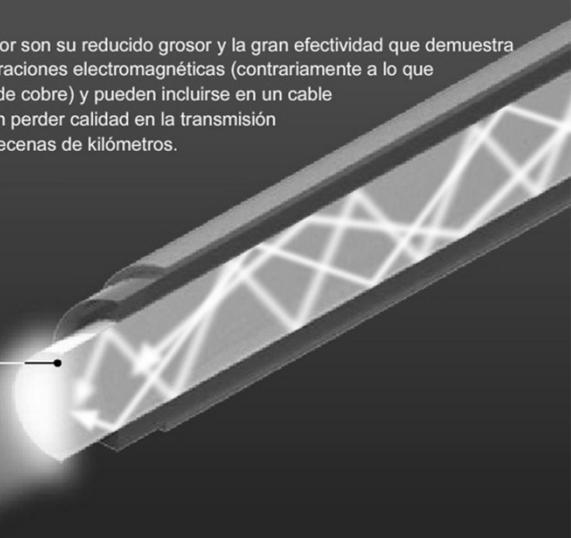
95



Guías de Onda

LA FIBRA ÓPTICA

Las principales ventajas de este conductor son su reducido grosor y la gran efectividad que demuestra en la transmisión de datos. No sufre alteraciones electromagnéticas (contrariamente a lo que les sucede a los cables convencionales de cobre) y pueden incluirse en un cable contenedor muchísimas fibras ópticas sin perder calidad en la transmisión aunque la conexión esté separada por decenas de kilómetros.



Las fibras tipo "multimodo" pueden transmitir varias señales en diferentes frecuencias. Éstas no pierden calidad ni velocidad.

96

Guías de Onda

Consideremos un 2º frente de onda TEM

¿Que podemos inferir de la onda resultante?

¿TEM?

Consideremos un frente de onda TEM propagándose

97

Guías de Onda

Podemos colocar dos laminas conductoras en las líneas donde los campos se anulan

Ambos frentes de onda se propagan a la derecha reflejándose en las laminas

La onda resultante ya no será de tipo TEM, sino de orden superior (TE o TM) y no se propagara si $\lambda_g > \lambda_c$

98

Guías de Onda

Recordemos como se propagaba una onda TEM

Si aumenta la frecuencia otro modo de propagación es posible

99

Guías de Onda

Para que haya propagación, las reflexiones deben estar en fase

La condición se cumple para valores discretos de θ

Un valor válido de θ , y una configuración de campo determinado, es lo que se define como Modo de la Guía

Cada *Modo* tendrá una frecuencia de corte asociada, por debajo de la cual no hay propagación

Si aumenta la frecuencia, aumentan los modos

100



Guías de Onda

El modo TEM no tiene frecuencia de corte

Las guías paralelas soportan dos modos de propagación, según sea el campo transversal al plano de incidencia E o H

Líneas de Transmisión: consisten de dos o mas conductores y como regla general soportan el modo TEM

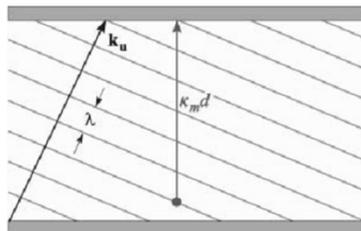
Guías de Onda: pueden tener uno o mas conductores o ninguno, soportan los modos TE, TM y pueden o no soportar el modo TEM

101



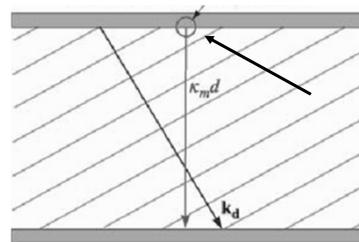
Resonancia Transversal

La condición de reflexión en fase se conoce como **Resonancia Transversal**



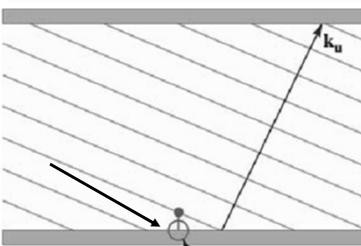
$$K_m = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} TE &= \pi \\ TM &= 0 \end{aligned}$$



$$K_m d + \Phi + K_m d + \Phi = 2\pi m$$

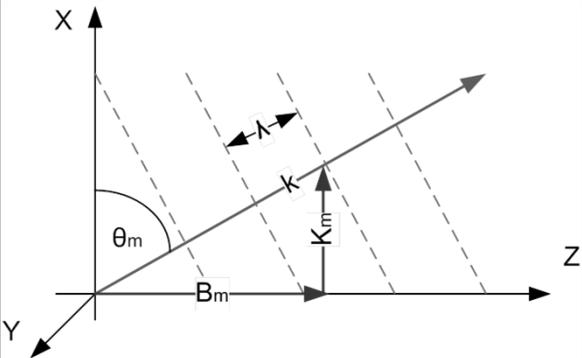
$$K_m = \frac{m\pi}{d}$$



102



Resonancia Transversal



$$\beta_m = \sqrt{k^2 - k_m^2}$$

$$k_m = \frac{m\pi}{d}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$$

$$\beta_m = k \sqrt{1 - \left(\frac{m\pi c}{d\omega\sqrt{\epsilon_r}}\right)^2}$$

defino $\omega_c = \frac{m\pi c}{d\sqrt{\epsilon_r}}$

$$\beta_m = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

103



Resonancia Transversal

$$\beta_m = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

A frecuencias mayores a las de corte, la constante de fase es real y existe propagación

También tenemos una longitud de onda de corte

$$\lambda_{cm} = \frac{2d\sqrt{\epsilon_r}}{m}$$

$$\beta_m = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cm}}\right)^2}$$

Longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f}$$

Longitud de onda en la guía

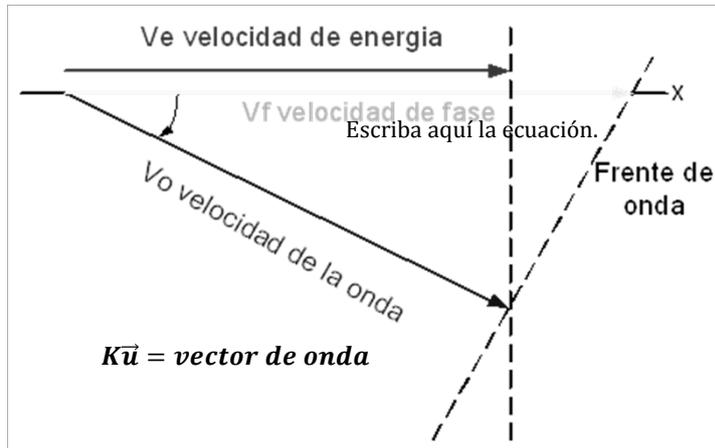
$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\beta_m} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cm}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_r} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cm}}\right)^2}}$$

104



Velocidad de fase y grupo

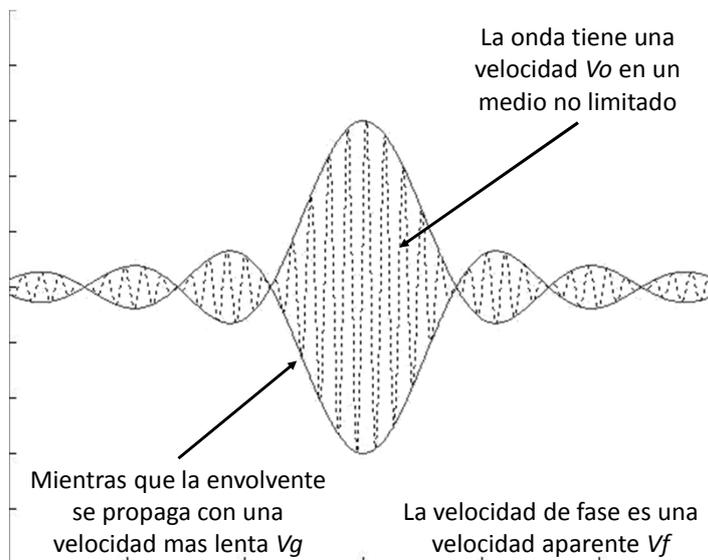
Podemos definir las velocidades en la guía del siguiente modo



105



Velocidad de fase y grupo



106



Velocidad de fase y grupo

Podemos definir las velocidades en la guía del siguiente modo

$$v_{pm} = \frac{\omega}{\beta_m} = \frac{\omega}{k \sin \theta_m} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} \sin \theta_m} \text{ velocidad de fase (definición)}$$

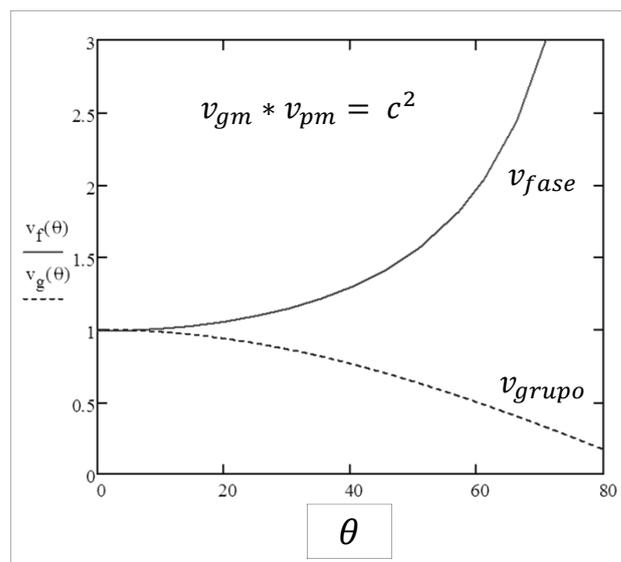
$$v_{gm} = \frac{d\omega}{d\beta_m} = \frac{c \sin \theta_m}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ velocidad de grupo (definición)}$$

$$v_{gm} * v_{pm} = \frac{c \sin \theta_m}{\sqrt{\epsilon_r}} * \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} \sin \theta_m} = \frac{c^2}{\epsilon_r} = v^2$$

107



Velocidad de fase y grupo



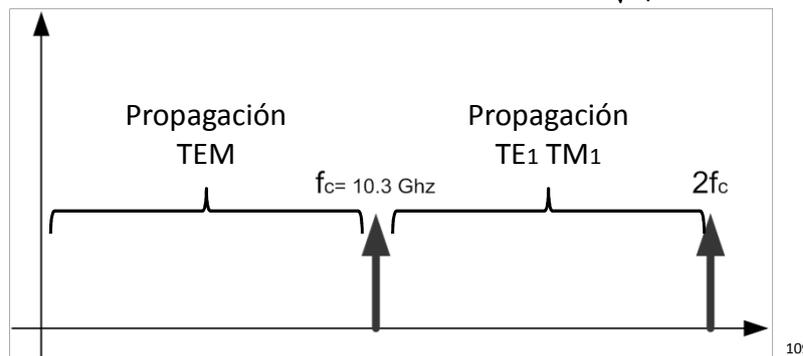
108



Guías de Onda

Problema: En una guía de placas paralelas determinar la máxima frecuencia de operación para que solo se propague el modo TEM. ¿Cual es el rango de frecuencias para que solo se propaguen los modos TE_1 y TM_1 ?

$$d = 1 \text{ cm} \quad \epsilon_r = 2,1 \quad f_c = \frac{mc}{2d\sqrt{\epsilon_r}}$$



Guías de Onda

Problema: En la misma guía de placas paralelas determinar cuantos modos se pueden propagar si la longitud de onda de operación es $\lambda = 2 \text{ mm}$

$$d = 1 \text{ cm} \quad \lambda = 2 \text{ mm} \quad \epsilon_r = 2,1$$

¿Cual condicion debe cumplirse para que haya propagacion?

$$\lambda < \lambda_c$$

$$\lambda_c = \frac{2d\sqrt{\epsilon_r}}{m} \quad m < \frac{2d\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda} \quad m < 14,5$$

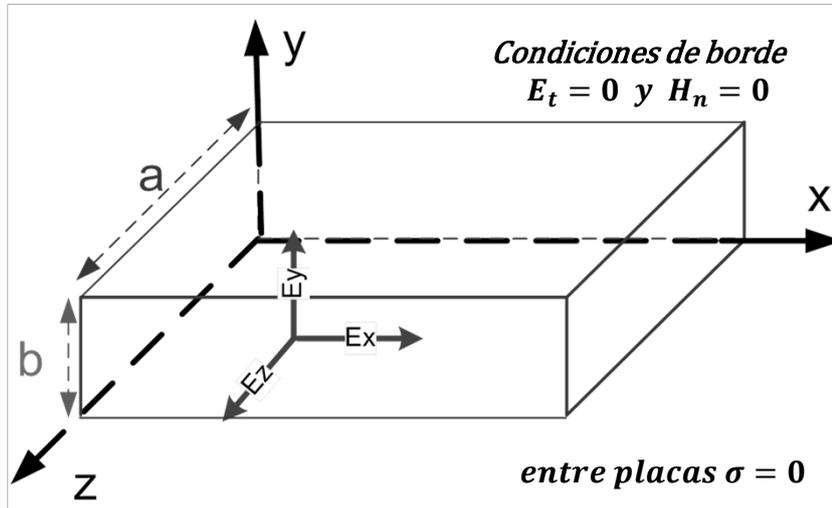
Se propagaran 14 modos de orden superior, 14 TE + 14 TM, en total 28 modos de orden superior

111



Guías de Onda Rectangular

Consideremos entonces el caso de una guía rectangular



115



Guías de Onda Rectangular

Planteamos las ecuaciones de Maxwell para esta configuración

$$\mathbf{E} = E_0 e^{j\omega t} \quad \mathbf{H} = H_0 e^{j\omega t} \quad E \text{ y } H \text{ varían armónicamente}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E} \quad \text{Ec de Maxwell a partir de la ley de Ampere}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad \text{Ec de Maxwell a partir de la ley de Faraday}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \text{Ec de Maxwell de Divergencia}$$

$$\gamma^2 = (\sigma + j\omega\epsilon)(j\omega\mu) \quad \text{Factor de propagación}$$

116



Guías de Onda Rectangular

Paso 1 Ecuaciones de Maxwell : *Rotor de H y E*

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix} = ? = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

117



Guías de Onda Rectangular

Paso 1 Ecuaciones de Maxwell : *Rotor de H y E*

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (\sigma + j\omega\epsilon)E_x = 0 \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - (\sigma + j\omega\epsilon)E_y = 0 \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu H_y = 0$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (\sigma + j\omega\epsilon)E_z = 0 \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + j\omega\mu H_z = 0$$

118



Guías de Onda Rectangular

Paso 1 Ecuaciones de Maxwell : *Ecuaciones de divergencia*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

notar que son ecuaciones escalares

119



Guías de Onda Rectangular

Paso 2 E y H varían armónicamente y se propagan en la dirección de X

$$\mathbf{E} = E_0 e^{j\omega t} \quad \mathbf{H} = H_0 e^{j\omega t}$$

$$\gamma^2 = (\sigma + j\omega\epsilon)(j\omega\mu) \quad \text{Factor de propagacion}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad \alpha = \text{cte. de atenuacion} \quad \beta = \text{cte. de fase}$$

$$\mathbf{E} = E_0 e^{j\omega t - \gamma x} \quad \mathbf{H} = H_0 e^{j\omega t - \gamma x}$$

Aplicamos esto en el juego de ecuaciones de rotor y divergencia....

120



Guías de Onda Rectangular

Paso 2 Considerando la propagación en «X» en las ecuaciones de rotor

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (\sigma + j\omega\epsilon)E_x = 0 \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\omega\mu H_x = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - (\sigma + j\omega\epsilon)E_y = 0 \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z + j\omega\mu H_y = 0$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (\sigma + j\omega\epsilon)E_z = 0 \quad -\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} + j\omega\mu H_z = 0$$

121



Guías de Onda Rectangular

Paso 2 Considerando la propagación en las ecuaciones de divergencia

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad -\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

Consideremos introducir los siguientes conceptos y reemplazamos...

$$Z = -j\omega\mu \frac{\Omega}{m} \quad Y = \sigma + j\omega\epsilon \frac{1}{\Omega m}$$

122



Guías de Onda Rectangular

Paso 3 Ecuaciones generales para una onda viajera en la dirección X, en estado estacionario

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - Y E_x = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - Z H_x = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - Y E_y = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma E_z - Z H_y = 0$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - Y E_z = 0$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} - Z H_z = 0$$

$$-\gamma E_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

123



Guías de Onda Rectangular

Paso 4 Selección del modo de transmisión TE o TM

TE $E_x = 0$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - Y E'_x = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - Z H_x = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - Y E_y = 0$$

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z} + \gamma E_z - Z H_y = 0$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - Y E_z = 0$$

$$-\gamma E_y - \frac{\partial E'_x}{\partial y} - Z H_z = 0$$

$$-\gamma E'_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

124



Guías de Onda Rectangular

Paso 4 Ecuaciones para el modo de transmisión TE

$$TE \quad E_x = 0$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - ZH_x = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - YE_y = 0$$

$$\gamma E_z - ZH_y = 0$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - YE_z = 0$$

$$-\gamma E_y - ZH_z = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

125



Guías de Onda Rectangular

Definimos la impedancia transversal

$$\gamma E_z - ZH_y = 0$$

$$\gamma E_z = ZH_y$$

$$\frac{E_z}{H_y} = \frac{Z}{\gamma}$$

$$-\gamma E_y - ZH_z = 0$$

$$-\gamma E_y = ZH_z$$

$$-\frac{E_y}{H_z} = \frac{Z}{\gamma}$$

Impedancia de onda transversal $Z_{yz} = -\frac{E_z}{H_y} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$

126



Guías de Onda Rectangular

Paso 5 Reescribimos las ecuaciones en función de H_x

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} - Y E_z = 0$$

$$Z_{yz} = -\frac{E_z}{H_y} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{Z}{\gamma}$$

$$-\gamma H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} + Y Z_{yz} H_y = 0$$

$$H_y = \frac{-1}{\gamma - Y Z_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - Y Z_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$



127



Guías de Onda Rectangular

Paso 5 Reescribimos las ecuaciones en función de H_x

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - Y E_y = 0$$

$$Z_{yz} = -\frac{E_z}{H_y} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{Z}{\gamma}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \gamma H_z - Y Z_{yz} H_z = 0$$

$$H_z = \frac{-1}{\gamma - Y Z_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - Y Z_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

128



Guías de Onda Rectangular

Paso 6 Encontrar una expresión de H_x

$$H_y = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$H_z = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

Para esto utilizamos las ecuaciones de divergencia....

129



Guías de Onda Rectangular

Paso 6 Encontrar una expresión de H_x

$$\nabla H = 0$$

$$-\gamma H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad H_y = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad H_z = \frac{-1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

$$-\gamma H_x - \frac{1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = 0$$

$$-\gamma H_x - \frac{1}{\gamma - YZ_{yz}} \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$-\gamma(\gamma - YZ_{yz})H_x - \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = 0 \quad k^2 = \gamma(\gamma - YZ_{yz})$$

130



Guías de Onda Rectangular

Paso 6 *Encontrar una expresión de H_x*

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0 \quad k^2 = \gamma(\gamma - YZ_{yz})$$

Ecuación diferencial parcial de segundo orden y primer grado, valida para una onda de modo TE en una guía de cualquier forma de sección transversal

Debemos buscar una solución para H_x

131



Guías de Onda Rectangular

Paso 7 *Encontrar una solución de H_x que satisfaga las condiciones de borde*

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0 \quad k^2 = \gamma(\gamma - YZ_{yz})$$

Utilizando el método de separación de variables

$H_x = Y_{(y)}Z_{(z)}$ $Y_{(y)}$ funcion solo de y $Z_{(z)}$ funcion solo de z

$$Z_{(z)} \frac{\partial^2 Y_{(y)}}{\partial y^2} + Y_{(y)} \frac{\partial^2 Z_{(z)}}{\partial z^2} + k^2 Y_{(y)}Z_{(z)} = 0$$

$$\frac{1}{Y_{(y)}} \frac{\partial^2 Y_{(y)}}{\partial y^2} + \frac{1}{Z_{(z)}} \frac{\partial^2 Z_{(z)}}{\partial z^2} = -k^2$$

132



Guías de Onda Rectangular

Paso 7 Encontrar una solución de H_x que satisfaga las condiciones de borde

$$\frac{1}{Y_{(y)}} \frac{\partial^2 Y_{(y)}}{\partial y^2} + \frac{1}{Z_{(z)}} \frac{\partial^2 Z_{(z)}}{\partial z^2} = -k^2 \quad \text{Cte.}$$

$$\frac{1}{Y_{(y)}} \frac{\partial^2 Y_{(y)}}{\partial y^2} = -A_1 \quad \frac{1}{Z_{(z)}} \frac{\partial^2 Z_{(z)}}{\partial z^2} = -A_2 \quad A_1 + A_2 = k^2$$

$Y_{(y)} = c_1 \sin(b_1 y)$ es una solución de donde sale que $b_1 = \sqrt{A_1}$

$Y_{(y)} = c_2 \cos(b_1 y)$ es otra solución, ... y también la suma

$$Y_{(y)} = c_1 \sin(\sqrt{A_1} y) + c_2 \cos(\sqrt{A_1} y)$$

133



Guías de Onda Rectangular

Paso 7 Encontrar una solución de H_x , hacemos lo mismo para $Z(z)$

$$Y_{(y)} = c_1 \sin(\sqrt{A_1} y) + c_2 \cos(\sqrt{A_1} y)$$

$$Z_{(z)} = c_3 \sin(\sqrt{A_2} z) + c_4 \cos(\sqrt{A_2} z)$$

Ya tenemos la solución para H_x

$$H_x = (c_3 \sin(\sqrt{A_2} z) + c_4 \cos(\sqrt{A_2} z))(c_1 \sin(\sqrt{A_1} y) + c_2 \cos(\sqrt{A_1} y))$$

$$H_x = c_1 c_3 \sin(\sqrt{A_1} y) \sin(\sqrt{A_2} z) + c_2 c_3 \cos(\sqrt{A_1} y) \sin(\sqrt{A_2} z) + \\ + c_1 c_4 \sin(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z) + c_2 c_4 \cos(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z)$$

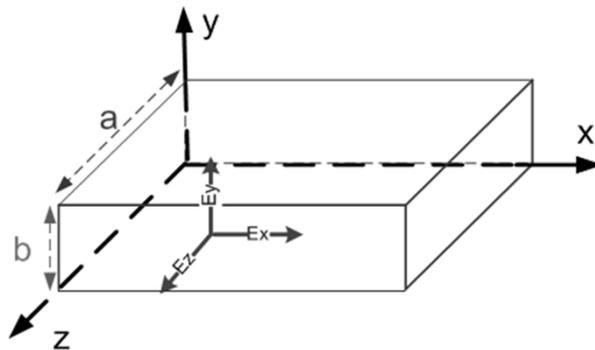
134



Guías de Onda Rectangular

Paso 7 Encontrar una solución de H_x , para encontrar el valor de las constantes hacemos cumplir las condiciones de borde

$$H_x = c_1 c_3 \sin(\sqrt{A_1} y) \sin(\sqrt{A_2} z) + c_2 c_3 \cos(\sqrt{A_1} y) \sin(\sqrt{A_2} z) + c_1 c_4 \sin(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z) + c_2 c_4 \cos(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z)$$



$$E_y = 0 \quad z = 0$$

$$E_y = 0 \quad z = a$$

$$E_z = 0 \quad y = 0$$

$$E_z = 0 \quad y = b$$

135



Guías de Onda Rectangular

Paso 7 Encontrar una solución de H_x , para encontrar el valor de las constantes hacemos cumplir las condiciones de borde

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z} \quad E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$H_x = c_1 c_3 \sin(\sqrt{A_1} y) \sin(\sqrt{A_2} z) + c_2 c_3 \cos(\sqrt{A_1} y) \sin(\sqrt{A_2} z) + c_1 c_4 \sin(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z) + c_2 c_4 \cos(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z)$$

$$E_y = 0 \quad z = 0$$

$$E_y = 0 \quad z = a$$

$$E_z = 0 \quad y = 0$$

$$E_z = 0 \quad y = b$$

136



Guías de Onda Rectangular

Paso 7 Encontrar una solución de H_x , para encontrar el valor de las constantes hacemos cumplir las condiciones de borde

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} (c_1 c_3 \sqrt{A_2} \sin(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z) + c_2 c_3 \sqrt{A_2} \cos(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z) - c_1 c_4 \sqrt{A_2} \sin(\sqrt{A_1} y) \sin(\sqrt{A_2} z) - c_2 c_4 \sqrt{A_2} \cos(\sqrt{A_1} y) \sin(\sqrt{A_2} z))$$

$$E_y = 0 \quad z = 0$$

$$c_1 c_3 \sqrt{A_2} \sin(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z) + c_2 c_3 \sqrt{A_2} \cos(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z)$$

$$C_3 = 0$$

137



Guías de Onda Rectangular

Paso 7 Encontrar una solución de H_x , para encontrar el valor de las constantes hacemos cumplir las condiciones de borde

$$E_z = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} (c_1 c_3 \sqrt{A_1} \cos(\sqrt{A_1} y) \sin(\sqrt{A_2} z) - c_2 c_3 \sqrt{A_1} \sin(\sqrt{A_1} y) \sin(\sqrt{A_2} z) + c_1 c_4 \sqrt{A_1} \cos(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z) - c_2 c_4 \sqrt{A_1} \sin(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z))$$

$$E_z = 0 \quad y = 0$$

$$c_1 c_3 \sqrt{A_1} \cos(\sqrt{A_1} y) \sin(\sqrt{A_2} z) + c_1 c_4 \sqrt{A_1} \cos(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z)$$

$$C_1 = 0$$

138



Guías de Onda Rectangular

Paso 7 Encontrar una solución de H_x , con $C_1 = C_3 = 0$ tenemos...

$$H_x = c_2 c_4 \cos(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z) = H_0 \cos(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z)$$

$$H_0 = c_2 c_4$$

Hay que hacer cumplir las condiciones en $z = a$ e $y = b$...

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z} \qquad E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

139



Guías de Onda Rectangular

Paso 7 Encontrar una solución de H_x , en $z=a$ $E_y=0$

$$H_x = H_0 \cos(\sqrt{A_1} y) \cos(\sqrt{A_2} z) \qquad E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

$$E_y = \frac{-Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} H_0 z \sqrt{A_2} \cos(\sqrt{A_1} y) \sin(\sqrt{A_2} z)$$

$$z = a \quad E_y = 0 \quad \sin(\sqrt{A_2} z) = 0 \quad \sqrt{A_2} = \frac{m\pi}{a}$$

140



Guías de Onda Rectangular

Paso 7 Encontrar una solución de H_x , en $y=b$ $E_z=0$

$$H_x = H_0 \cos(\sqrt{A_1}y) \cos(\sqrt{A_2}z) \quad E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$E_z = \frac{Z_{yz}}{\gamma - YZ_{yz}} H_0 \sqrt{A_1} \sin(\sqrt{A_1}y) \cos(\sqrt{A_2}z)$$

$$y = b \quad E_z = 0 \quad \sin(\sqrt{A_1}b) = 0 \quad \sqrt{A_1} = \frac{n\pi}{b}$$

Con esto ya tenemos resuelto el conjunto de ecuaciones

141



Guías de Onda Rectangular

Ecuaciones para el modo TE_{mn} en una guía rectangular

$$H_x(y, z, x, t) = H_0 \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}z\right) e^{j\omega t - \gamma x} \quad \mathbf{E}_x = \mathbf{0}$$

$$H_y(y, z, x, t) = \frac{H_0}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}z\right) e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$H_z(y, z, x, t) = \frac{H_0}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right) e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$E_z(y, z, x, t) = \frac{-Z_{yz}H_0}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}z\right) e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$E_y(y, z, x, t) = \frac{Z_{yz}H_0}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right) e^{j\omega t - \gamma x}$$

142



Guías de Onda Rectangular

Caso 1 $m = 1$ $n = 0$ TE_{10}

$$H_x(y, z) = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)$$

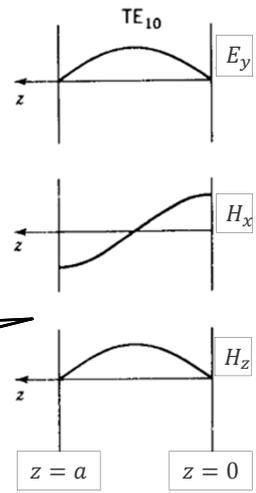
$$H_y(y, z) = 0$$

$$H_z(y, z) = \frac{H_0}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)$$

$$E_z(y, z) = 0$$

$$E_y(y, z) = \frac{Z_{yz}H_0}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)$$

¿Como es el campo H?



143



Guías de Onda Rectangular

Caso 1 $m = 1$ $n = 0$ TE_{10}

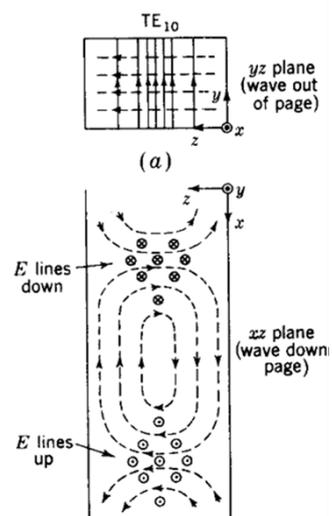
$$H_x(y, z) = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)$$

$$H_y(y, z) = 0$$

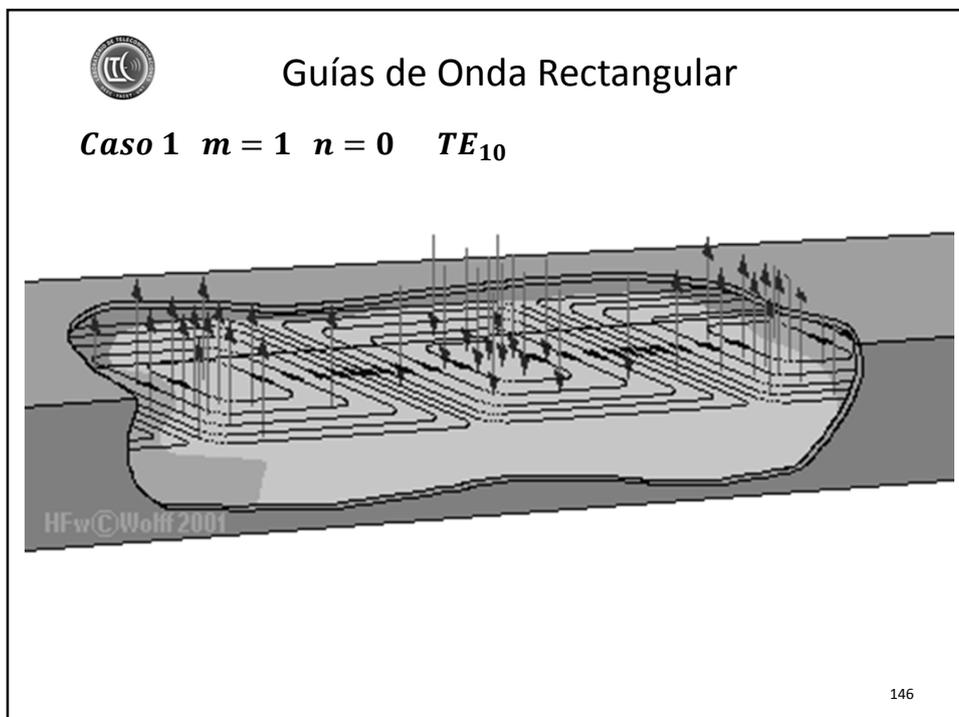
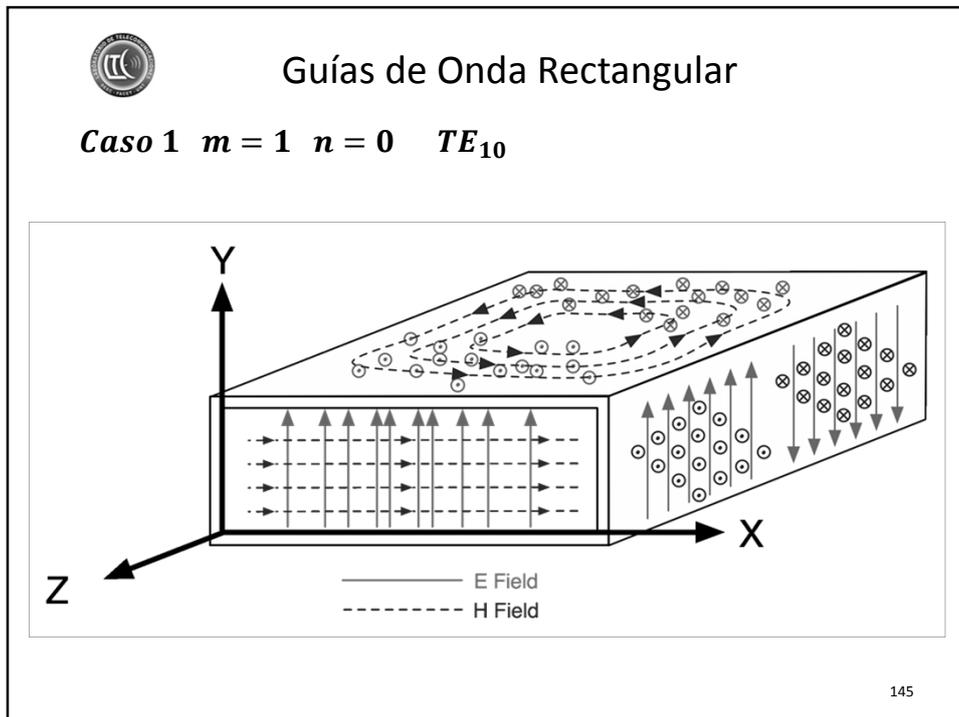
$$H_z(y, z) = \frac{H_0}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)$$

$$E_z(y, z) = 0$$

$$E_y(y, z) = \frac{Z_{yz}H_0}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)$$



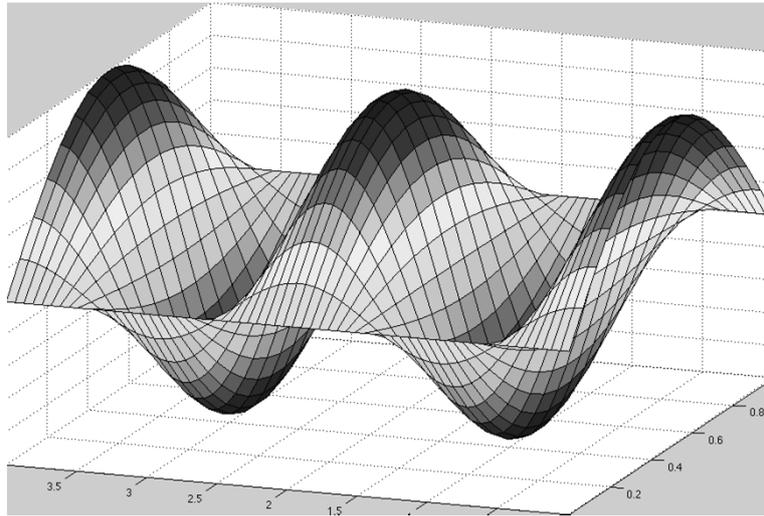
144





Guías de Onda Rectangular

Caso 1 $m = 1$ $n = 0$ TE_{10}

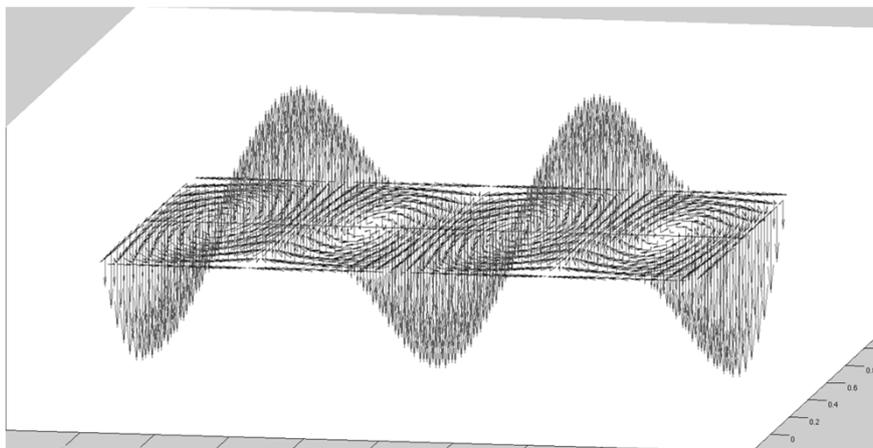


147



Guías de Onda Rectangular

Caso 1 $m = 1$ $n = 0$ TE_{10}

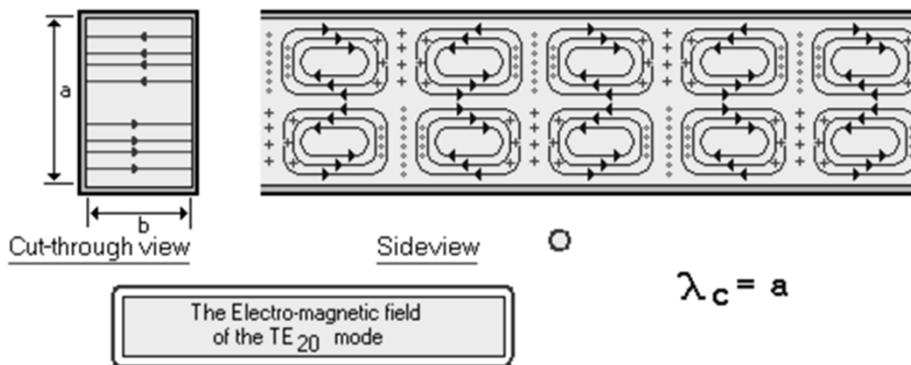


148



Guías de Onda Rectangular

Caso 2 $m = 2$ $n = 0$ TE_{20}



149



Guías de Onda Rectangular

Caso 3 $m = 1$ $n = 1$ TE_{11}

$$H_x(y, z) = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)$$

$$H_y(y, z) = \frac{H_0}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)$$

$$H_z(y, z) = \frac{H_0}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)$$

$$E_z(y, z) = \frac{-Z_{yz}H_0}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)$$

$$E_y(y, z) = \frac{Z_{yz}H_0}{\gamma - YZ_{yz}} \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)$$

150



Guías de Onda Rectangular

Caso 3 $m = 1$ $n = 1$ TE_{11}

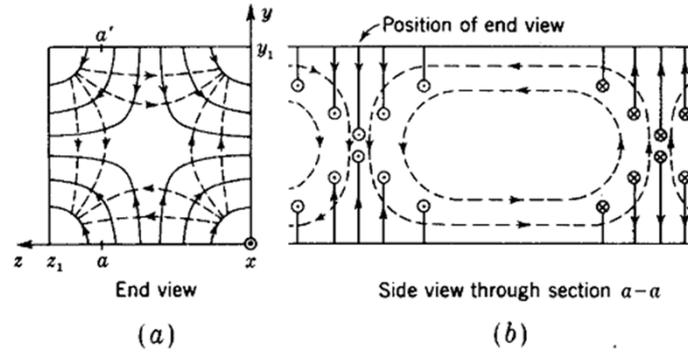


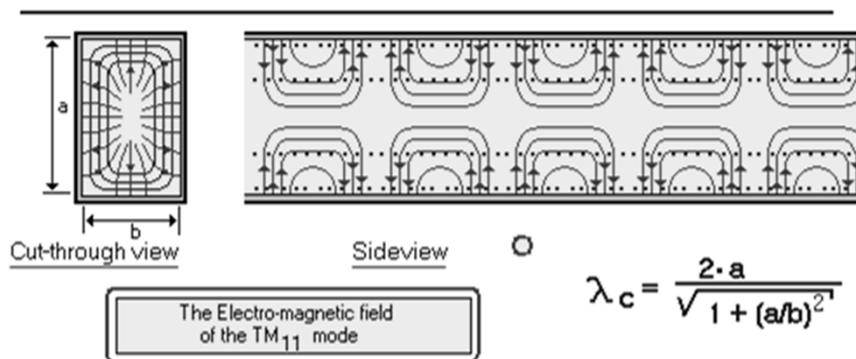
FIGURE 13-39 Field configurations for TE_{11} mode in a square waveguide. **E** lines are solid, and **H** lines are dashed.

151



Guías de Onda Rectangular

Caso 4 $m = 1$ $n = 1$ TM_{11}



152



Parámetros en Guías de Onda

Factor de propagación

$$\gamma^2 = (\sigma + j\omega\epsilon)(j\omega\mu) \quad \text{si } \sigma = 0 \quad \gamma^2 = -\omega^2\mu\epsilon$$

Expresión definida en la ecuación de Hx

$$k^2 = \gamma(\gamma - YZ_{yz}) \quad Z_{yz} = \frac{-j\omega\mu}{\gamma} \quad Y = \sigma + j\omega\epsilon$$

$$k^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

De la solución de la ecuación diferencial

$$k^2 = A_1 + A_2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad \boxed{\gamma^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

153

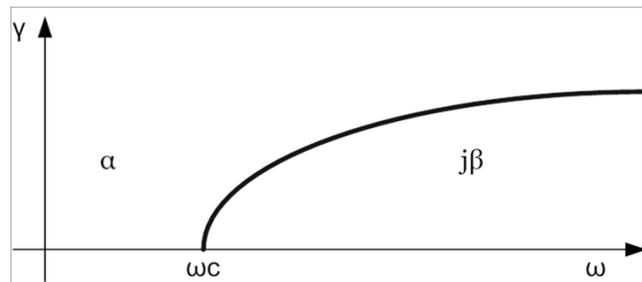


Parámetros en Guías de Onda

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \quad \text{Factor de propagación}$$

Si $\omega \rightarrow \downarrow$ $\gamma = \alpha$, γ es real y la onda se atenúa sin propagarse

Si $\omega \rightarrow \uparrow$ $\gamma = j\beta$, γ es imaginario y la onda se propaga



154



Parámetros en Guías de Onda

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \text{ Hz}$$

Frecuencia de corte

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \text{ m}$$

Longitud de onda de corte

Si TE_{10} $\lambda_c = 2a$ $m = 1$ $n = 0$

155



Parámetros en Guías de Onda

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \frac{\text{rad}}{\text{m}} \text{ para } \omega > \omega_c$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Velocidad de fase

$$v_f = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = \frac{v^2}{v_f} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Velocidad de grupo

156



Parámetros en Guías de Onda

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \frac{\text{rad}}{\text{m}} \text{ para } \omega > \omega_c$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} \Rightarrow \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \text{ m} \quad \text{Longitud de onda en la guía}$$

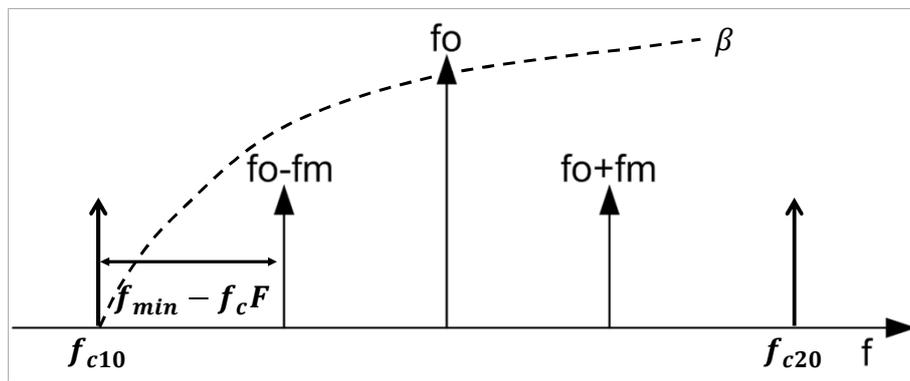
$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \text{ m} \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}$$

157



Diseñando con guías de onda

Diseñar el sistema para que opere solo en el modo TE_{10}



$$f_c = \frac{f_{min}}{F}$$

158

 Diseñando con guías de onda

$m = 1$ y $n = 0$
 $f_{c10} = \frac{f_{min}}{F}$ $f_{c20} > f_{max}?$

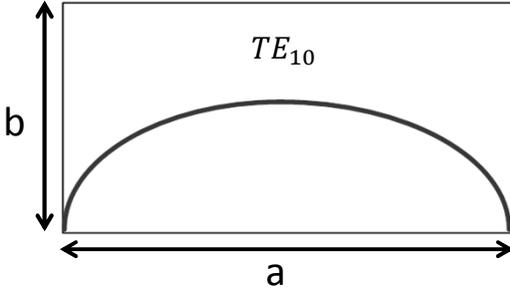
$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \text{ Hz}$

$f_{c10} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{a}$ $f_{c20} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{2}{a} \text{ Hz}$

159

 Diseñando con guías de onda

$m = 1$ y $n = 0$
 $\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \text{ m}$ $\lambda_{c10} = 2a \Rightarrow a = \frac{\lambda_{c10}}{2} \text{ m}$



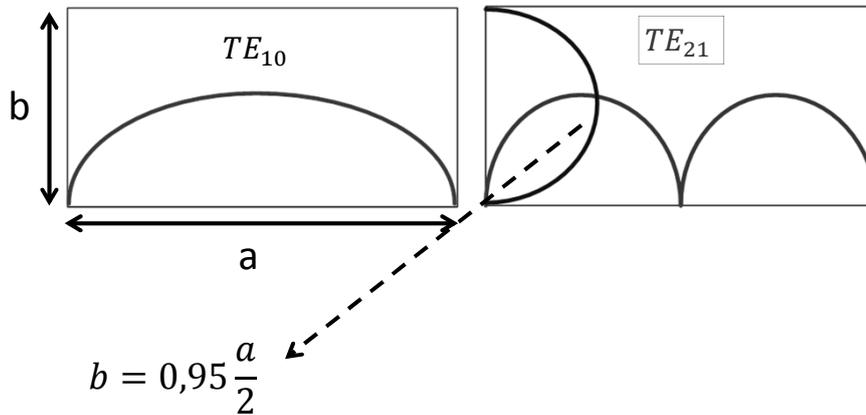
¿Definido «a», como puedo determinar «b»?

160



Diseñando con guías de onda

¿Definido «a», como puedo determinar «b»?



161



Diseñando con guías de onda

Definidas las dimensiones de la guía solo resta calcular las velocidades y longitudes de onda

Conocemos λ y λ_c entonces podemos calcular λ_g desde $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}$

Calcular v_f y v_g para cada frecuencia del sistema

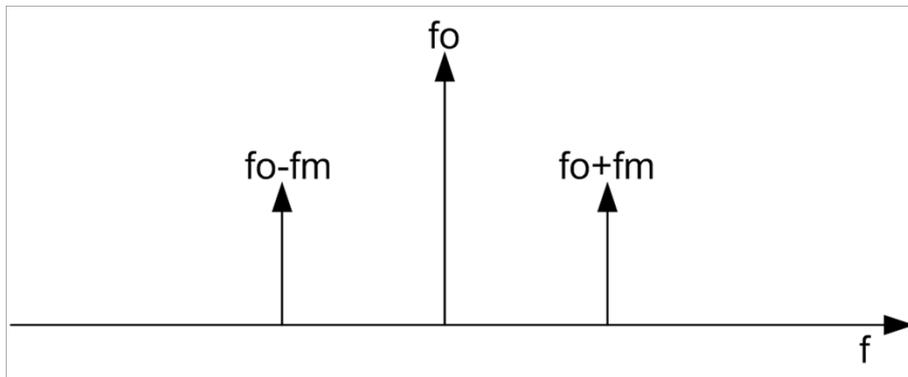
$$v_f = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad \frac{m}{s}$$

162



Diseñando con guías de onda

Problema 1: Si $f_0 = 1 \text{ Ghz}$ y $f_m = 200 \text{ Mhz}$ diseñar el sistema para operar en modo TE_{10}



163



Diseñando con guías de onda

Problema 2: Si $f_0 = 0,6 \text{ Ghz}$ y $f_m = 200 \text{ Mhz}$ diseñar el sistema para que opere en modo TE_{10}

Problema 3: ¿Qué sucede en el sistema del Problema 1 si el interior de la guía se llena de una sustancia con $\epsilon_r = 4$?

164



Guías de Onda Rectangular

Ecuaciones para el modo TM_{mn} en una guía rectangular

$$E_x(y, z, x, t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right) e^{j\omega t - \gamma x} \quad \mathbf{H_x = 0}$$

$$H_y(y, z, x, t) = \frac{-j\omega\epsilon E_0}{\gamma^2 - \omega^2\mu\epsilon} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}z\right) e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$H_z(y, z, x, t) = \frac{-j\omega\epsilon E_0}{\gamma^2 - \omega^2\mu\epsilon} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right) e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$E_z(y, z, x, t) = \frac{-j\beta E_0}{\gamma^2 - \omega^2\mu\epsilon} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}z\right) e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$E_y(y, z, x, t) = \frac{-j\beta E_0}{\gamma^2 - \omega^2\mu\epsilon} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right) e^{j\omega t - \gamma x}$$

165



Impedancia en guías de onda

Interesa la impedancia que se ve en la dirección de propagación, habíamos definido para el modo TE

$$\text{Impedancia de onda transversal} \quad Z_{yz} = -\frac{E_z}{H_y} = \frac{E_y}{H_z} = -\frac{Z}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

$$\gamma = j\beta = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad \frac{\text{rad}}{\text{m}} \text{ para } \omega > \omega_c$$

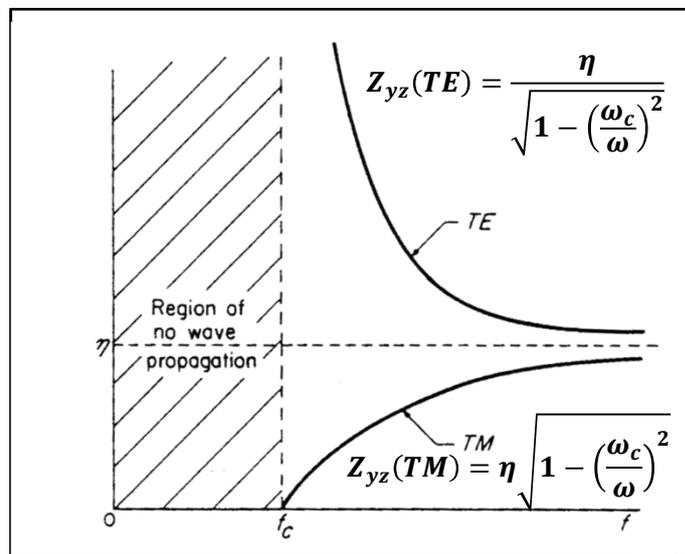
Impedancia de onda transversal

$$Z_{yz}(TE) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \quad Z_{yz}(TM) = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

166



Impedancia en guías de onda



Atenuación en guías de onda

Atenuación a frecuencias menores que la de corte

$$\gamma = \alpha = \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2 - 1} \quad \frac{np}{m} \text{ para } \omega < \omega_c$$

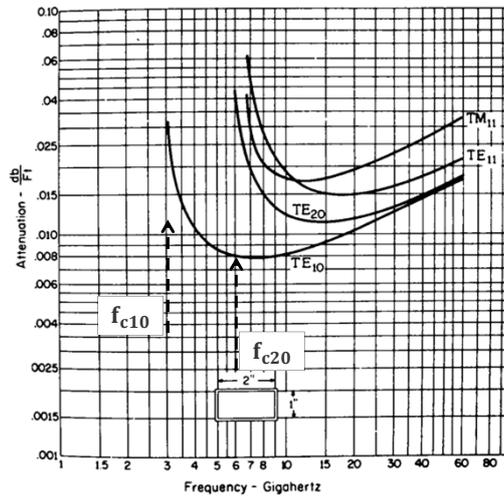
$$\text{para } \omega \ll \omega_c \quad \alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad \frac{np}{m} \quad \alpha \approx \frac{54,6}{\lambda_c} \quad \frac{db}{m}$$

Atenuación a frecuencias mayores que la de corte, debemos considerar las pérdidas en las paredes de la guía, ya que no son conductores ideales



Atenuación en guías de onda

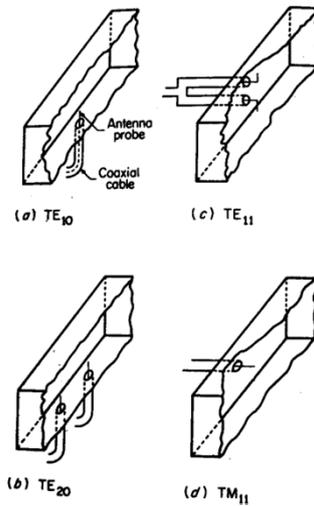
Atenuación en guías de onda rectangulares para distintos modos de operación



169



Excitación de guías de onda



170



ELECTROMAGNETISMO I

**¡Hemos llegado al fin del curso!
Gracias por haber compartido este
camino electromagnético con nosotros,
esperamos haber sido de ayuda, pedimos
disculpas si algo no salió bien
y les deseamos el mejor de los éxitos.**

**¡Sean buenos ingenieros y mejores
personas, que Dios los bendiga!**

171