



## ELECTROMAGNETISMO I

# **¡BIENVENIDOS A LA SEGUNDA PARTE DEL CURSO DE ELECTROMAGNETISMO I!**

1



## ELECTROMAGNETISMO I

### **Aquí aprenderemos...**

- Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell
- Ondas electromagnéticas, propiedades, propagación en distintos medios
- Líneas de transmisión

2



## Repasando conceptos

### Fasores

En general los campos eléctricos y magnéticos son función del espacio  $(x, y, z)$  y el tiempo  $t$ . Pudiéndose escribir como:

$$E(r, t) = E(x, y, z) * \cos(\omega t + \varphi)$$

Valor máximo  $(x, y, z)$

Variación temporal

3



## Repasando conceptos

### Fasores

Las funciones con variación armónica se pueden representar por medio de cantidades complejas, por medio de la identidad de Euler.

$$e^{j(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Donde solo la parte real o la imaginaria puede tener un sentido físico

$$E(r, t) = E(x, y, z) * \cos(\omega t + \varphi)$$

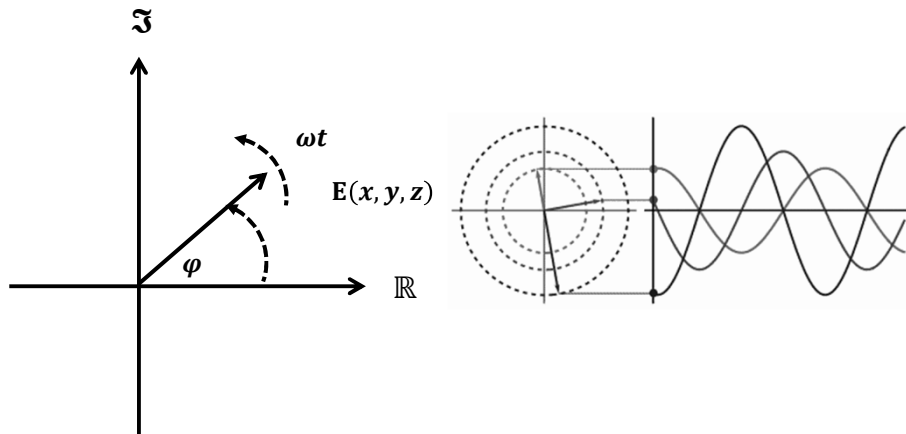
$$E(r, t) = \Re E(x, y, z) * e^{j(\omega t + \varphi)}$$

4



## Repasando conceptos: Fasores

$$E(r, t) = \Re E(x, y, z) * e^{j(\omega t + \varphi)}$$



5



## De Maxwell a la ecuación de onda

Un campo eléctrico variable, genera un campo magnético variable, el que a su vez produce un campo eléctrico y así sucesivamente se produce la propagación de la energía. (ecuaciones....)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Tenemos varios tipos de líneas de transmisión: cables coaxiales, líneas de electricidad, microstrip, guías de ondas rectangulares, fibra óptica y radio enlaces, y en cada una de ellas encontramos un modo particular de propagación.

6



## De Maxwell a la ecuación de onda

Podemos clasificarlas en:

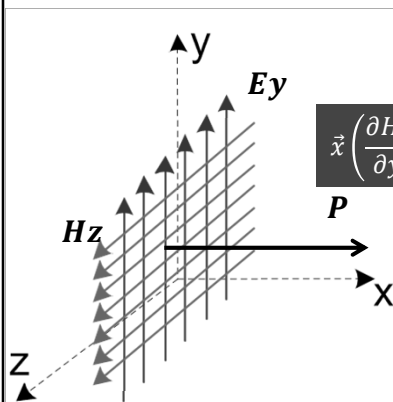
- ✓ TEM campos E y H transversales a la dirección de propagación
- ✓ Modos de orden superior Existen componentes E y/o H en la dirección de propagación (guías y FO)
- ✓ Ondas espaciales TEM

7



## Ecuaciones de onda en el espacio

Consideremos la ec. de Maxwell deducida a partir de la ley de Ampere



$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \text{ medio no conductor}$$

$$\vec{x} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{z} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) =$$

$$= \vec{x} \frac{\partial D_x}{\partial t} + \vec{y} \frac{\partial D_y}{\partial t} + \vec{z} \frac{\partial D_z}{\partial t}$$

Considerando las componentes Ey y Hz tendremos

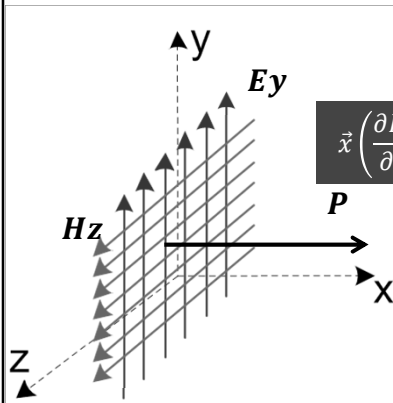
$$-\vec{y} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \vec{y} \frac{\partial D_y}{\partial t} = \vec{y} \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

8



## Ecuaciones de onda en el espacio

Consideremos la ec. de Maxwell deducida a partir de la ley de Faraday



$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\vec{x} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{y} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{z} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) =$$

$$= -\vec{x} \frac{\partial B_x}{\partial t} - \vec{y} \frac{\partial B_y}{\partial t} - \vec{z} \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Considerando las componentes  $E_y$  y  $H_z$  tendremos

$$\vec{z} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\vec{z} \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\vec{z} \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

9



## Ecuaciones de onda en el espacio

Tenemos un conjunto de ecuaciones que relacionan derivadas espaciales y temporales. Derivemos ambas con respecto al tiempo

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = -\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) = -\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = -\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}$$

10



## Ecuaciones de onda en el espacio

Esto es lo que se conoce como ecuación de onda de D'Alambert.

$E_y$  representa la magnitud escalar de la intensidad de campo de una onda que se propaga en la dirección  $x$ , función del tiempo y del espacio.

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}$$

Esta situación particular en donde  $E_y = f(x, t)$  (solo depende de  $x$  y  $t$ ) se conoce como Onda Plana Uniforme y representa un caso muy importante en la practica.

Notar que las componentes de campo son transversales a la dirección de propagación. Onda TEM

11

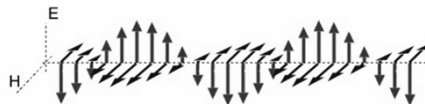


## Ecuaciones de onda en el espacio

Un onda puede definirse como un fenómeno físico que ocurre en un lugar del espacio en un determinado instante de tiempo, y luego se repite en otro lugar con un retardo de tiempo.

El delay temporal será proporcional a la diferencia espacial con respecto al origen.

Entonces el grupo de fenómenos constituye una onda.



*No debe ser necesariamente un fenómeno repetitivo  
(los sobrevivientes de un tsunami lo agradecen)  
Electromagnetic waves and radiating systems Jordan Balmain*

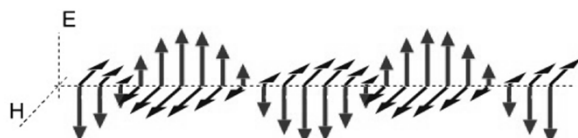
12



## Ecuaciones de onda en el espacio

### Onda electromagnética

¿Que es S ?



¿Que es  $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$  ?



AGA 2006, 101

13



## Ecuaciones de onda en el espacio

Hagamos un análisis dimensional de las expresiones

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{V}{m \cdot s^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{V}{m^3}$$

$$\frac{1}{\mu\epsilon} = \frac{m^2}{s^2}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{m}{s}$$

$v$  se denomina Velocidad de fase, depende del medio, y para el vacío...

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

14



## Ecuaciones de onda en el espacio

Tenemos una ecuación diferencial de segundo orden que admite una solución del tipo

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad E_y(x, t) = \text{sen}(\beta[x + m \cdot t])$$

Aplicando la solución en la ecuación podemos obtener el valor de "m"

$$-(\beta m)^2 \text{sen}(\beta[x + m \cdot t]) = -\frac{1}{\mu\epsilon} (\beta)^2 \text{sen}(\beta[x + m \cdot t])$$

$$m^2 = \frac{1}{\mu\epsilon} \quad m = \pm \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}} = \pm v$$

15



## Ecuaciones de onda en el espacio

Por lo tanto la solución completa será:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad E_y(x, t) = \text{sen}(\beta[x + v \cdot t]) + \text{sen}(\beta[x - v \cdot t])$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ Constante de fase } \text{ y } \lambda = \frac{v}{f} \text{ Longitud de onda}$$


$$\beta \cdot v = 2\pi \cdot f = \omega$$

$$E_y(x, t) = \text{sen}(\beta x + \omega \cdot t) + \text{sen}(\beta x - \omega \cdot t)$$

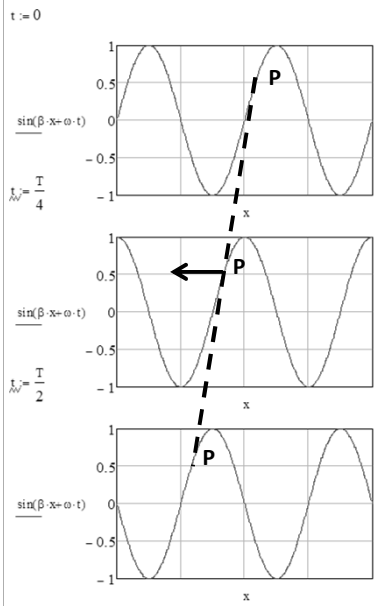
Cada termino por separado es una solución o bien la suma de los dos.

16





## Velocidad de fase



Consideremos la primera solución:  
 $E_y(x, t) = \text{sen}(\beta(x + v \cdot t))$


El punto P, a medida que transcurre el tiempo, se está desplazando hacia la izquierda

“P” es un punto de fase constante  
 $x + v \cdot t = \text{cte.}$

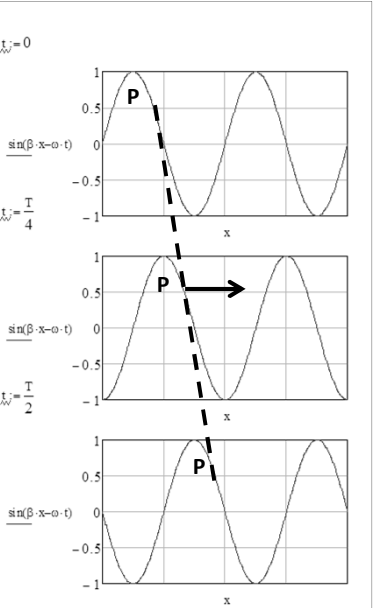
$$\frac{\partial(x + v \cdot t)}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -v$$

“v” es la velocidad de fase

17



## Velocidad de fase



Consideremos la segunda solución:  
 $E_y(x, t) = \text{sen}(\beta(x - v \cdot t))$

El punto P, a medida que transcurre el tiempo, se está desplazando hacia la derecha

“P” es un punto de fase constante  
 $x - v \cdot t = \text{cte.}$

$$\frac{\partial(x - v \cdot t)}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial t} = v$$

“v” es la velocidad de un punto de fase constante

18



## Velocidad de fase

Por lo tanto podemos interpretar la solución general como dos ondas desplazándose una hacia la derecha y otra hacia la izquierda.

Si no existiese una superficie reflectante tal que refleje la onda incidente hacia la fuente el segundo término de la expresión será cero.

¿Son buenas o malas las reflexiones?

Si no tenemos en cuenta el desplazamiento de fase también podemos representar la solución como:

$$E_y(x, t) = E_0(\cos(\beta[v \cdot t + x]) + \cos(\beta[v \cdot t - x]))$$

$$E_y(x, t) = E_0(\cos(\omega \cdot t + \beta x) + \cos(\omega \cdot t - \beta x))$$

19



## Velocidad de fase

Por lo tanto podemos interpretar la solución general como dos ondas desplazándose una hacia la derecha y otra hacia la izquierda.

$$E_y(x, t) = E_0(\cos(\omega \cdot t + \beta x) + \cos(\omega \cdot t - \beta x))$$

$$\beta x - \omega \cdot t = cte \quad \frac{\partial(\beta x - \omega \cdot t)}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial t} = v = \frac{\omega}{\beta}$$

También podemos expresar la solución a partir de la identidad de Euler

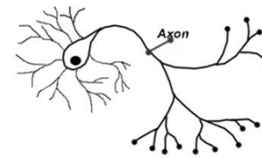
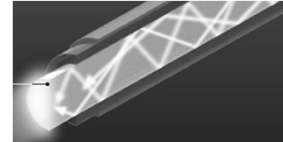
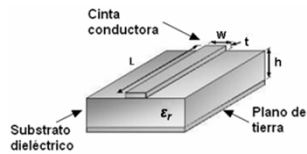
$$E_y(x, t) = \Re E_0(e^{j(\omega \cdot t + \beta x)} + e^{-j(\omega \cdot t + \beta x)})$$

20



## Líneas de transmisión

Llamamos *Líneas de Transmisión* a las interconexiones que transportan energía electromagnética de un punto a otro.

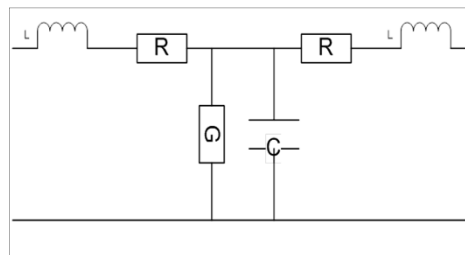
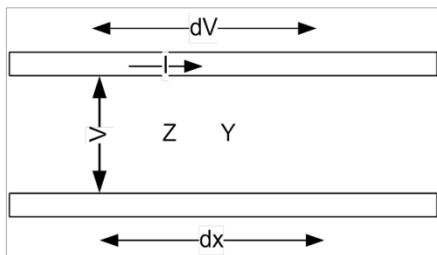


21



## Ecuación de onda en una línea uniforme

Consideremos una línea de transmisión uniforme infinita, caracterizada por valores de  $Z$  e  $Y$  por unidad de longitud



¿uniforme?

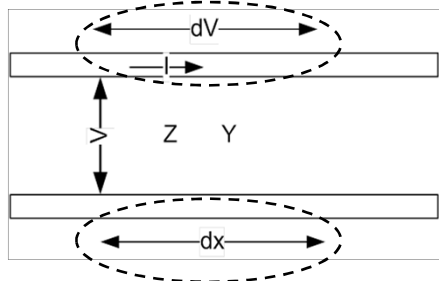
¿Cuáles son las unidades de  $L$ ,  $R$ ,  $G$ , y  $C$ ?

22



## Ecuación de onda en una línea uniforme

Consideremos la variación  $dV$  y  $dI$  que ocurre en un elemento  $dx$



$$dV = ?$$

$$dI = ?$$

$$dV = I * Z * dx$$

$$dI = V * Y * dx$$

$$\frac{dV}{dx} = I * Z$$

$$\frac{dI}{dx} = V * Y$$

23



## Ecuación de onda en una línea uniforme

Derivando nuevamente con respecto a  $x$  tendremos

$$\frac{dV}{dx} = I * Z$$

$$\frac{dI}{dx} = V * Y$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{dI}{dx} * Z + I * \frac{dZ}{dx}$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = \frac{dV}{dx} * Y + V * \frac{dY}{dx}$$

*por tratarse de una línea uniforme*

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{dI}{dx} * Z = V * Y * Z$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = I * Y * Z$$

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} - Z * Y * V = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2I}{dx^2} - Z * Y * I = 0}$$

24



## Ecuación de onda en una línea uniforme

Estas expresiones muestran la relación natural entre la tensión y la corriente en un circuito, pero no nos dicen nada sobre la distribución o variación de V o I a lo largo de la línea.

$$\frac{d^2V}{dx^2} - Z * Y * V = 0$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} - Z * Y * I = 0$$

El sistema constituye una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, podemos encontrar una solución del tipo

$$V = e^{\gamma x} \quad \text{Aplicando la solución encontramos el valor de } \gamma$$

$$\gamma^2 e^{\gamma x} - Z * Y * e^{\gamma x} = 0 \quad \gamma^2 = Z * Y$$

$$\gamma = \pm \sqrt{Z * Y}$$

25



## Ecuación de onda en una línea uniforme

Estas expresiones desarrolladas a través de un modelo circuito de constantes distribuidas se debe a Oliver Heaviside, y se conocen como *Ecuaciones del Telegrafista*

$$\frac{d^2V}{dx^2} - Z * Y * V = 0$$

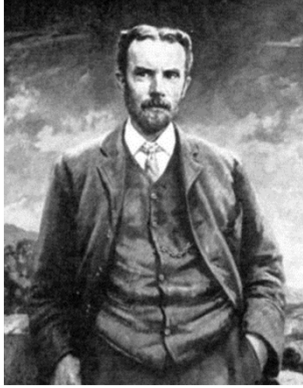
$$\frac{d^2I}{dx^2} - Z * Y * I = 0$$

Las mismas fueron consecuencia del análisis del funcionamiento del cable submarino entre Reino Unido y Dinamarca, los problemas detectados hacían inviable su operación y mucho menos la idea de tender un cable trasatlántico con América.

26



## Ecuación de onda en una línea uniforme



### Oliver Heaviside 1850 - 1925

...but his parents could not keep him at school after he was 16 so he continued studying for a year by himself and had no further formal education.

Heaviside's uncle was Sir Charles Wheatstone who took a strong interest in his nephew's education! Two years later he took a job as a telegraph operator with the Danish Great Northern Telegraph Company laying a cable from Newcastle to Denmark.

Heaviside continued to study while working, and by the age of 22 he published an article in the prestigious Philosophical Magazine. Doing research from home, he helped develop transmission line theory (also known as the "telegrapher's equations"). Heaviside showed mathematically that uniformly distributed inductance in a telegraph line would diminish both attenuation and distortion, and that, if the inductance were great enough

and the insulation resistance not too high, the circuit would be distortionless while currents of all frequencies would have equal speeds of propagation. Heaviside's equations helped further the implementation of the telegraph.

In 1880, Heaviside researched the skin effect in telegraph transmission lines. That same year he patented, in England, the coaxial cable.

In 1884 he recast Maxwell's mathematical analysis from its original cumbersome form to its modern vector terminology.

27



## Ecuación de onda en una línea uniforme

Tenemos dos soluciones para el Factor de Propagación  $\gamma = \pm\sqrt{Z * Y}$ , que nos permiten conformar la siguiente ecuación auxiliar

$$V = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}$$

$$\frac{dV}{dx} = A\gamma e^{\gamma x} - B\gamma e^{-\gamma x} \quad \text{como} \quad \frac{dV}{dx} = Z * I$$

Podemos escribir una solución para I

$$I = \frac{\gamma}{Z} Ae^{\gamma x} - \frac{\gamma}{Z} Be^{-\gamma x} \quad I = \sqrt{\frac{Y}{Z}} Ae^{\gamma x} - \sqrt{\frac{Y}{Z}} Be^{-\gamma x}$$

28



## Ecuación de onda en una línea uniforme

Si bien  $A$  y  $B$  son constantes con respecto a  $x$ , en general serán variables con respecto a  $t$

$$A = V_1 e^{j\omega t} \quad y \quad B = V_2 e^{j\omega t}$$

$$V = V_1 e^{j\omega t} e^{\gamma x} + V_2 e^{j\omega t} e^{-\gamma x} \quad I = \sqrt{\frac{Y}{Z}} V_1 e^{j\omega t} e^{\gamma x} - \sqrt{\frac{Y}{Z}} V_2 e^{j\omega t} e^{-\gamma x}$$

El factor de propagación  $\gamma$  será, en general, un valor complejo

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \text{constante de atenuacion} \frac{np}{m} \quad \beta = \text{constante de fase} \frac{rad}{m}$$

29



## Factor de Propagación $\gamma$ - dB - Neper

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \text{constante de atenuacion} \frac{np}{m} \quad \beta = \text{constante de fase} \frac{rad}{m}$$

¿Qué es un db?, ¿Qué es un neper?

$$\alpha = \ln\left(\frac{V_i}{V_r}\right) \text{ neper} \quad \frac{V_i}{V_r} = e^\alpha \quad \log_{10} \frac{V_i}{V_r} = \log_{10} e^\alpha$$

$$20 \log_{10} \frac{V_i}{V_r} = \alpha * 20 * \log_{10} e \quad 20 \log_{10} \frac{V_i}{V_r} = 8,686 \alpha$$

Equivalencia entre neper y db 1 Np = 8,686 db

30



## Ecuación de onda en una línea uniforme

Partiendo de las expresiones de V e I

$$\frac{d^2V}{dx^2} - Z * Y * V = 0$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} - Z * Y * I = 0$$

Llegamos a estas ecuaciones, que nos proporcionan información sobre la variación de V e I a lo largo de la línea

$$V = V_1 e^{j(\omega t + \beta X)} e^{\alpha x} + V_2 e^{j(\omega t - \beta X)} e^{-\alpha x}$$

$$I = \sqrt{\frac{Y}{Z}} V_1 e^{j(\omega t + \beta X)} e^{\alpha x} - \sqrt{\frac{Y}{Z}} V_2 e^{j(\omega t - \beta X)} e^{-\alpha x}$$

31

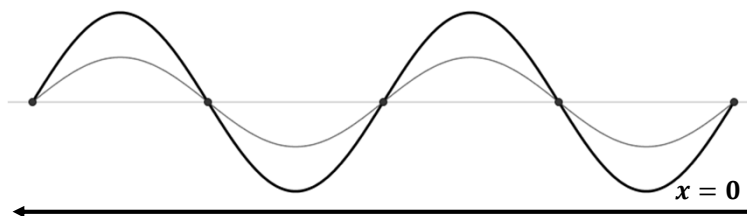


## Ecuación de onda en una línea uniforme

¿Qué nos dicen estas expresiones?

$$V = V_1 e^{j(\omega t + \beta X)} e^{\alpha x} + V_2 e^{j(\omega t - \beta X)} e^{-\alpha x}$$

$$I = \sqrt{\frac{Y}{Z}} V_1 e^{j(\omega t + \beta X)} e^{\alpha x} - \sqrt{\frac{Y}{Z}} V_2 e^{j(\omega t - \beta X)} e^{-\alpha x}$$



La solución muestra que hay ondas propagándose en sentido opuesto. En todo lugar la tensión o corriente total será la suma de las dos componentes de ondas viajeras.

32





## Impedancia Característica

Si observamos la expresión para la corriente en la línea, resalta el término  $\sqrt{\frac{Y}{Z}}$

$$I = \left( \sqrt{\frac{Y}{Z}} V_1 \right) e^{j(\omega t + \beta X)} e^{\alpha x} - \left( \sqrt{\frac{Y}{Z}} V_2 \right) e^{j(\omega t - \beta X)} e^{-\alpha x}$$

$Z_0$  es la **Impedancia Característica** del medio, y es función de los parámetros distribuidos de la línea

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$Z_0 = \frac{V_i}{I_i} = \frac{V_r}{I_r}$$

*Línea de baja pérdida*

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

33



## Impedancia Característica

Si  $R$  y  $G$ , son pequeños pero no despreciables, se puede escribir la expresión de  $Z_0$  como:


$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \left[ 1 + j \left( \frac{G}{2\omega C} - \frac{R}{2\omega L} \right) \right]$$

*Si se cumple la siguiente condición*


$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L} \quad Z_0 \text{ vuelve a ser real}$$

***esto se conoce como Condición de Heaviside***

34



## Impedancia Característica



**TFC Coaxial Cable Product Information Sheet**  
Type: T10500J

Electrical Specifications		
Impedance, $\Omega$	75 $\pm$ 2	
Velocity of Propagation, %	87	
Capacitance, Nominal	15.6 pF/ft	51.2 pF/m
DC Resistance	$\Omega$ / kft	$\Omega$ / km
Inner Conductor	1.34	4.40
Outer Conductor	0.36	1.18
Loop	1.70	5.58


Zo

Velocidad de propagación

Capacidad F/m

La velocidad de fase esta expresada como un porcentaje de la velocidad de la luz

35



## Ecuación de onda en una línea uniforme

Hora de hacer problemas, encendiendo las calculadoras...

Una línea de transmisión tiene constantes R, G, L y C, si la frecuencia es f= 7 KHz, encontrar:

$$R = 12 * 10^{-3} \frac{\Omega}{m} \quad G = 1,4 * 10^{-6} \frac{1}{\Omega m} \quad L = 1,5 * 10^{-6} \frac{Hy}{m} \quad C = 1,4 * 10^{-9} \frac{F}{m}$$

a) encontrar Zo

b) atenuación en db/km

$$|Z_0| = 33 \Omega \quad \varphi = -4,5^\circ$$

$$\alpha = 1,78 \frac{db}{km}$$

36



### Ecuación de onda en una línea uniforme

Una línea de transmisión tiene constantes R, G, L y C, si la frecuencia es  $f = 5 \text{ KHz}$ , encontrar:

$$R = 12 * 10^{-3} \frac{\Omega}{m} \quad G = 0,8 * 10^{-6} \frac{1}{\Omega m} \quad L = 1,3 * 10^{-6} \frac{Hy}{m} \quad C = 0,7 * 10^{-9} \frac{F}{m}$$

- encontrar  $Z_0$
- la razón de velocidades  $v/c$
- atenuación en db a 2 km

$ Z_0  = 44 \Omega$	$\varphi = -7,14^\circ$
$\frac{v}{c} = 0,11$	$\alpha = 2,7 \frac{db}{km}$

38



### Ecuación de onda en una línea uniforme

Una línea de transmisión tiene constantes R, G, L y C.  
Encontrar la atenuación en db/km a 10 KHz, 10 Mhz y 10 Ghz

$$R = 1 * 10^{-3} \frac{\Omega}{m} \quad G = 2,5 * 10^{-6} \frac{1}{\Omega m} \quad L = 15 * 10^{-6} \frac{Hy}{m} \quad C = 25 * 10^{-9} \frac{F}{m}$$

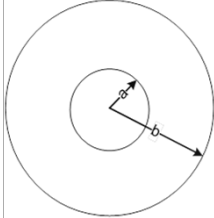
$f = 10 \text{ KHz} \quad \alpha = 0,44 \frac{db}{km}$	$; f = 10 \text{ Mhz} \quad \alpha = 0,44 \frac{db}{km}$	$; f = 10 \text{ Ghz} \quad \alpha = 0,44 \frac{db}{km}$
--	--	--

40



## Impedancia $Z_0$ de líneas conocidas

### Línea Coaxial



Linea coaxial

$$Z_0 := \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{si no hay materiales ferromagneticos} \quad \mu = \mu_0$$

$$Z_0 := \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad Z_0 := \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad Z_0 := \frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo: En una línea coaxial llena de aire con  $b/a = 2$  ¿cuanto vale  $Z_0$ ?

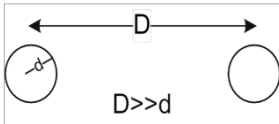
$$Z_0 = 41,5 \text{ ohm}$$

42



## Impedancia $Z_0$ de líneas conocidas

### Línea Bifilar



Linea bifilar

$$Z_0 := \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right) \quad \text{si no hay materiales ferromagneticos} \quad \mu = \mu_0$$

$$Z_0 := \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right) \quad Z_0 := \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right) \quad Z_0 := \frac{276}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \log\left(\frac{D}{d}\right)$$

Ejemplo: En una línea bifilar llena en aire con  $D/d = 12$  ¿cuanto vale  $Z_0$ ?

$$Z_0 = 297,85 \text{ ohm}$$

43



## Impedancia $Z_0$ de líneas conocidas

### **Pregunta de examen:**

¿Por qué se popularizaron los valores de 50 y 75 ohm en líneas coaxiales?

44



## Aprendiendo sobre Líneas

Para las próximas clases deberemos contar con lo siguiente:

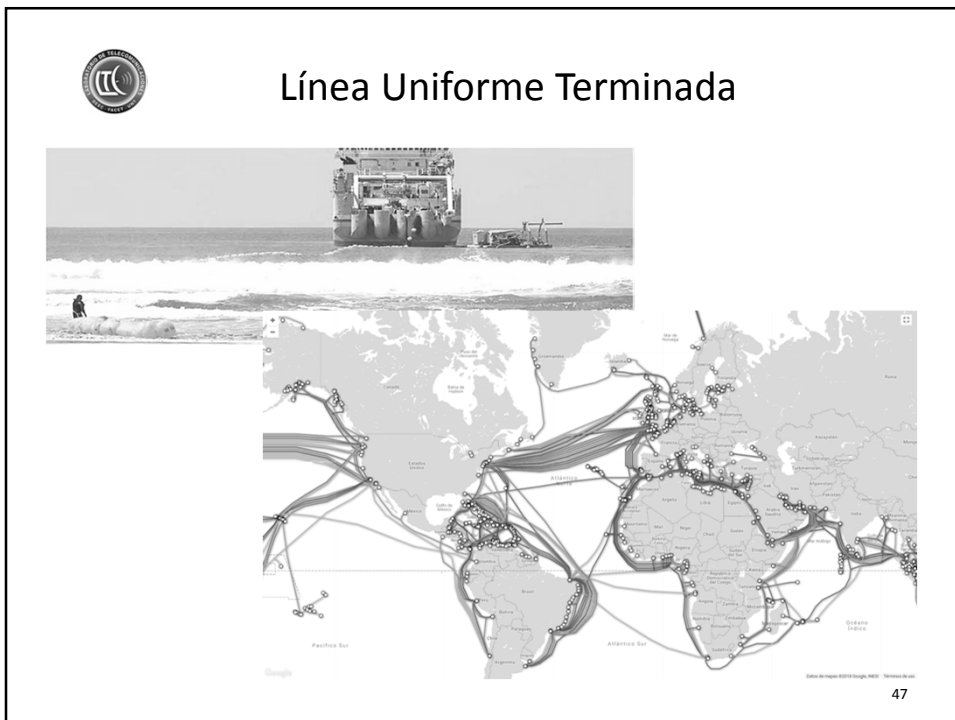
Ábacos de Smith, varias copias

Compas

Escuadra

Goma de borrar

45





## Línea Uniforme Terminada

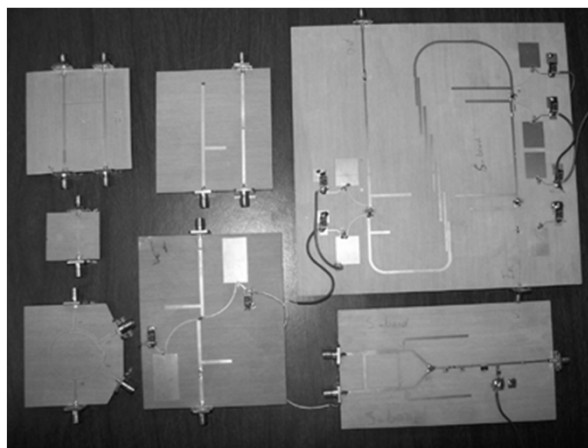


<https://www.infobae.com/2014/10/13/1601116-el-cable-que-las-toninas-conecta-internet-toda-la-argentina/>

48



## Línea Uniforme Terminada



49



## Línea Uniforme Terminada



50



## Línea Uniforme Terminada



- By Przemysław Frasunek User:Venglin - Own work, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1073236>

51





## Línea Uniforme Terminada

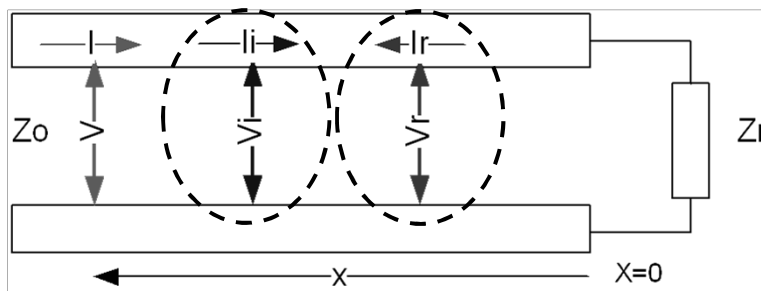


52




## Línea Uniforme Terminada

Consideremos una línea uniforme terminada en una impedancia  $Z_r$  y definimos el origen del eje  $X$  en la carga.



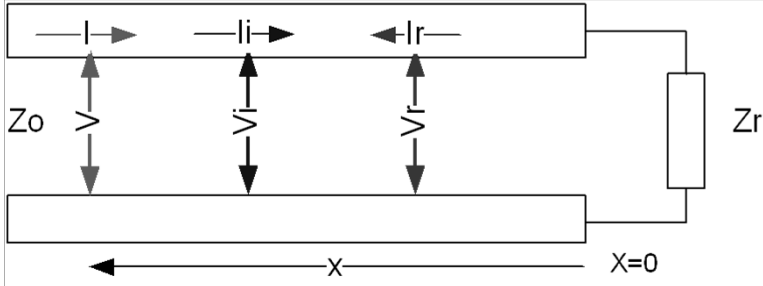
Entonces podemos hablar de dos ondas una Incidente (hacia la carga) y otra Reflejada (desde la carga).

53



### Línea Uniforme Terminada


La solución general para la línea esta dada por:



$$V = A * e^{\gamma x} + B * e^{-\gamma x} \quad I = \left(\frac{Y}{Z}\right) * A * e^{\gamma x} - \left(\frac{Y}{Z}\right) * B * e^{-\gamma x} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

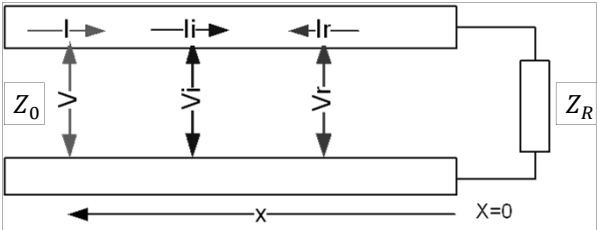
$$V = V_i * e^{\gamma x} + V_r * e^{-\gamma x} \quad I = \frac{V_i}{Z_0} * e^{\gamma x} - \frac{V_r}{Z_0} * e^{-\gamma x}$$

54



### Línea Uniforme Terminada

$V_i$  y  $V_r$  pueden determinarse a partir de las condiciones de borde en  $x = 0$




$$V_i = ? \quad V_r = ?$$

$$\begin{cases} V_i \\ V_r \end{cases} = \begin{cases} V_i e^{j\omega t} \\ V_r e^{j\omega t} \end{cases}$$

Tenemos dos incógnitas, por lo que necesitamos dos ecuaciones

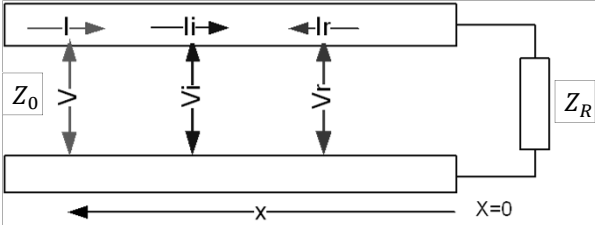
$$V = V_i * e^{\gamma x} + V_r * e^{-\gamma x} \quad I = \frac{V_i}{Z_0} * e^{\gamma x} - \frac{V_r}{Z_0} * e^{-\gamma x}$$

55



## Línea Uniforme Terminada

Entonces en  $x = 0$  tendremos...




**¿Conclusiones?**

$$V = V_i * e^{\gamma x} + V_r * e^{-\gamma x} \quad I = \frac{V_i}{Z_0} * e^{\gamma x} - \frac{V_r}{Z_0} * e^{-\gamma x}$$

$$V_R = V_i + V_r \quad I_R = \frac{V_i}{Z_0} - \frac{V_r}{Z_0} \quad V_R * \frac{Z_0}{Z_R} = V_i - V_r$$

despejando ...  $V_i = \frac{V_R}{2} \left( 1 + \frac{Z_0}{Z_R} \right)$   $V_r = \frac{V_R}{2} \left( 1 - \frac{Z_0}{Z_R} \right)$

56



## Coeficiente de Reflexión

Definimos el coeficiente de reflexión, de tensión o corriente, como el cociente de la onda reflejada sobre la incidente.

¿?


$$\Gamma_v = \frac{V_r e^{-\gamma x}}{V_i e^{\gamma x}} = \frac{V_r e^{-2\gamma x}}{V_i}$$

$$\Gamma_v = \frac{V_r e^{-2(\alpha + j\beta)x}}{V_i}$$

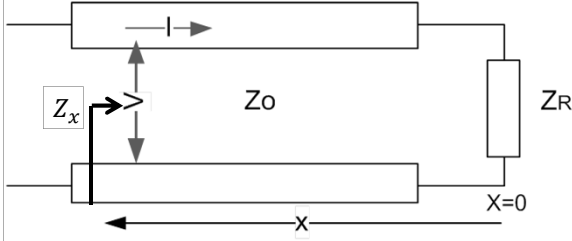
$$\Gamma_v = \frac{V_r e^{-2\alpha x} e^{-2j\beta x}}{V_i} \quad |\Gamma_v| = \frac{V_r}{V_i} e^{-2\alpha x} \quad \Gamma_v = |\Gamma_v| e^{-2j\beta x}$$

$$\Gamma_i = ? \quad \Gamma_i = -\Gamma_v$$

57

 **Impedancia de una línea de transmisión**

La impedancia en cualquier parte de la línea será el cociente de V/I




¿Lo deducimos?

$$V = V_i * e^{\gamma x} + V_r * e^{-\gamma x} \quad I = \frac{V_i}{Z_0} * e^{\gamma x} - \frac{V_r}{Z_0} * e^{-\gamma x} \quad Z_x = \frac{V}{I}$$

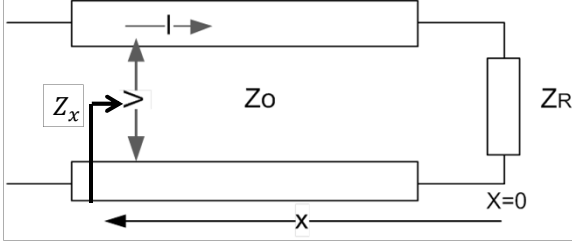
$$Z_x = \frac{V_i * e^{\gamma x} + V_r * e^{-\gamma x}}{\frac{V_i}{Z_0} * e^{\gamma x} - \frac{V_r}{Z_0} * e^{-\gamma x}}$$

$$Z_x = Z_0 \frac{V_i * e^{\gamma x} + V_r * e^{-\gamma x}}{V_i * e^{\gamma x} - V_r * e^{-\gamma x}}$$

58

 **Impedancia de una línea de transmisión**

La impedancia en cualquier parte de la línea será el cociente de V/I




$\Gamma_v$

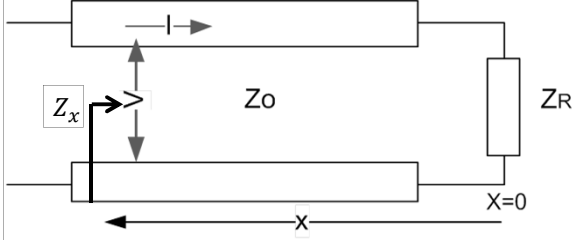
$$Z_x = Z_0 \frac{V_i * e^{\gamma x} + V_r * e^{-\gamma x}}{V_i * e^{\gamma x} - V_r * e^{-\gamma x}}$$

$$Z_x = Z_0 \frac{1 + \frac{V_r * e^{-\gamma x}}{V_i * e^{\gamma x}}}{1 - \frac{V_r * e^{-\gamma x}}{V_i * e^{\gamma x}}}$$

$$Z_x = Z_0 \frac{1 + \Gamma_v}{1 - \Gamma_v}$$

59

 **Relación entre la impedancia  $Z_x$  y  $\Gamma_v$**



$$Z_x = Z_0 \frac{1 + \Gamma_v}{1 - \Gamma_v}$$

Despejemos ahora el coeficiente de reflexión


$$\Gamma_v = \frac{Z_x - Z_0}{Z_x + Z_0}$$

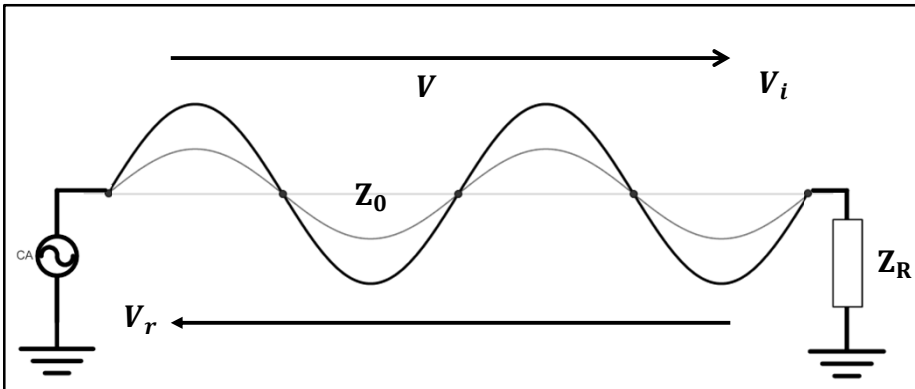
¿Qué tipo de variable será el coeficiente de reflexión?

¿Cual es el valor deseado?

¿Cual es el rango de variación?

60

 **Reflexiones en una línea de transmisión**



$0 < Z_x < \infty \quad -1 < \Gamma_v < 1$  rango de variación de  $\Gamma_v$   
 si  $Z_x = Z_0 \quad \Gamma_v = 0$  se dice que la línea está ADAPTADA

61



## Coeficiente de Reflexión

El coeficiente de reflexión es en general complejo. Es útil definirlo en función del valor que tiene este en la carga.

$$\Gamma_v = \frac{V_r e^{-2\gamma x}}{V_i}$$

$e^{j\omega t}$

$$V_i = \frac{V_R}{2} \left( 1 + \frac{Z_0}{Z_R} \right) \quad V_r = \frac{V_R}{2} \left( 1 - \frac{Z_0}{Z_R} \right)$$

$$\Gamma_v = \frac{\frac{V_R}{2} \left( 1 - \frac{Z_0}{Z_R} \right)}{\frac{V_R}{2} \left( 1 + \frac{Z_0}{Z_R} \right)} e^{-2\gamma x}$$

$$\Gamma_v = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} e^{-2\gamma x} \quad -1 < \Gamma_v < 1$$

$$\text{en } x = 0 \quad \Gamma_R = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}$$

$$\Gamma_R = |\Gamma_R| e^{j\theta} \quad |\Gamma_R| = \left| \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} \right|$$

62



## Coeficiente de Reflexión

Expresión general  $\Gamma_v$

$$\Gamma_v = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} e^{-2(\alpha + j\beta)x}$$

$\Gamma_v$  en la carga

$$\Gamma_R = |\Gamma_R| e^{j\theta_R} \quad |\Gamma_R| = \left| \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} \right|$$

En el caso de una línea de baja pérdida  $\alpha \sim 0 \Rightarrow \gamma = j\beta$

$$\Gamma_v = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} e^{-2j\beta x} \quad \text{coeficiente de reflexión en línea de baja pérdida}$$

$$\Gamma_v = \Gamma_R e^{-2j\beta x}$$

$$\Gamma_v = |\Gamma_R| e^{j(\theta_R - 2\beta x)}$$

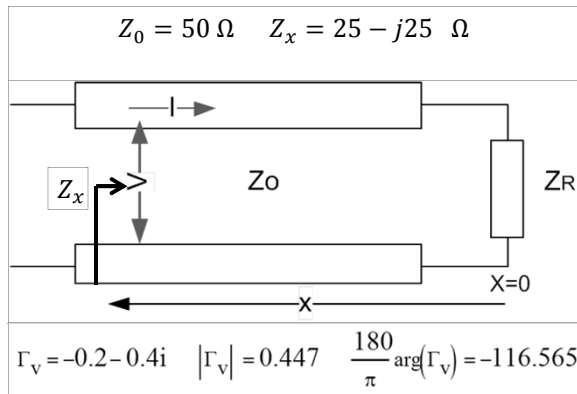
**Vemos que el coeficiente de reflexión en cualquier punto de la línea tiene como valor el coeficiente en la carga afectado por un factor de fase, que depende de "x".**

63



## Coeficiente de Reflexión

Hagamos algunos cálculos :¿Cuánto vale el coeficiente de reflexión en la posición «x» de la línea?



64



## Líneas de bajas perdidas

Aplicando la definición del coeficiente de reflexión a líneas de baja pérdida

$$V = V_i * e^{\gamma x} + V_r * e^{-\gamma x} \quad \Gamma_v = \frac{V_r e^{-2(\alpha + j\beta)x}}{V_i}$$


$$V = V_i * e^{\gamma x} + \Gamma_v V_i * e^{\gamma x} \quad V = V_i * e^{\gamma x} (1 + \Gamma_v)$$

$$\text{si } \alpha = 0 \quad V = V_i * e^{j\beta x} (1 + |\Gamma_v| e^{-j2\beta x})$$

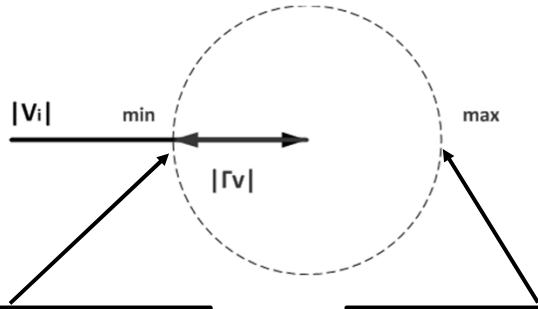
¿Qué nos sugiere la expresión obtenida?

¿Qué podemos decir sobre la forma de onda de la tensión en la línea?

65

 **Onda Estacionaria**

Podemos considerar a  $\Gamma_v$  como un fasor que esta «modulando» a la tensión incidente  $V_i$




Cuando  $\Gamma$  está en contrafase tenemos un MIN

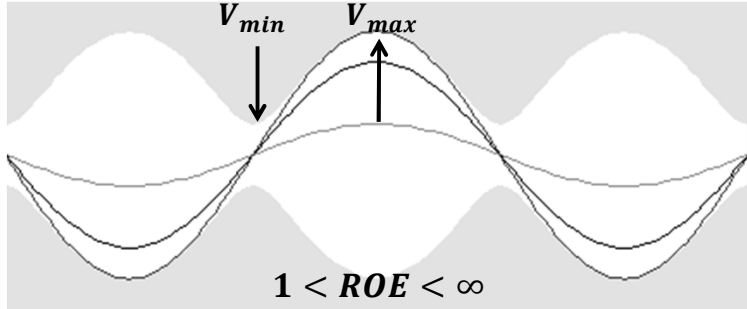
Cuando  $\Gamma$  está en fase tenemos un MAX

Esto produce un fenómeno de *ondas estacionarias* a lo largo de la línea, con máximos y mínimos

66

 **Onda Estacionaria**

Definimos la relación de onda estacionaria ROE, como el cociente entre el  $V_{max}$  y el  $V_{min}$  en la línea

$$ROE = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{|V_i| + |V_r|}{|V_i| - |V_r|} = \frac{1 + |\Gamma_v|}{1 - |\Gamma_v|} \quad 1 < ROE < \infty$$


67





## Onda Estacionaria

$$ROE = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{|V_i| + |V_r|}{|V_i| - |V_r|} = \frac{1 + |\Gamma_v|}{1 - |\Gamma_v|}$$

¿Cuál es el valor de ROE deseable?

El ROE es particularmente perjudicial en líneas de potencia de RF donde las sobretensiones pueden dañar las etapas de salida a transistores.

Además una ROE alta indica que la potencia se está consumiendo en la línea y no está siendo radiada.

68



## Ondas Estacionarias

Estos máximos y mínimos se pueden medir con una **Línea Ranurada** Y a partir de estas mediciones determinar la R de carga.



69



### Líneas de bajas pérdidas

Una señal  $V_0 = 10\text{ V}$  se aplica a una línea coaxial con  $Z_0 = 50\ \Omega$  esta terminada en una carga de  $Z_R = 200\ \Omega$ .

- A) Encontrar el coeficiente de reflexión en la carga.
- B) Encontrar magnitud de tensión y corriente reflejadas en la carga

70



### Líneas de bajas pérdidas

Una línea sin pérdida de  $75\ \Omega$  esta terminada en una carga de  $350\ \Omega$ .

- A) Graficar  $V$  en función de  $X$ .  $V_0 = 1\text{ V}$  es la tensión de entrada.
- B) Determinar el ROE.

$$V = V_i * e^{j\beta x} (1 + |\Gamma_v| e^{-j2\beta x})$$

72



## Líneas de bajas pérdidas

Una línea de transmisión con  $Z_0 = 100 \Omega$  esta terminada en una carga de  $Z_R = 50 + j75 \Omega$ .

Determinar el coeficiente de reflexión y el ROE

74



## Ecuación de la línea de transmisión

Habíamos visto que se podía determinar  $V_i$  y  $V_r$  a partir de la impedancia de carga  $Z_R$

$$\text{en } x = 0 \quad V_R = V_i + V_r \quad I_R = \frac{V_i}{Z_0} - \frac{V_r}{Z_0}$$

$$V_i = \frac{V_R + Z_0 I_R}{2} \quad V_r = \frac{V_R - Z_0 I_R}{2}$$

$$V = \frac{V_R + Z_0 I_R}{2} e^{\gamma x} + \frac{V_R - Z_0 I_R}{2} e^{-\gamma x} \quad I = \frac{V_R + Z_0 I_R}{2Z_0} e^{\gamma x} - \frac{V_R - Z_0 I_R}{2Z_0} e^{-\gamma x}$$

$$V = V_R \left( \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) + Z_0 I_R \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right)$$

$$I = \frac{V_R}{Z_0} \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) + I_R \left( \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right)$$

76



## Ecuación de la línea de transmisión

Expresión general para V e I

$$V = V_R \left( \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) + Z_0 I_R \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) \quad I = \frac{V_R}{Z_0} \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) + I_R \left( \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right)$$

$$V = V_R \cosh \gamma x + Z_0 I_R \sinh \gamma x \quad I = \frac{V_R}{Z_0} \sinh \gamma x + I_R \cosh \gamma x$$

Expresiones que describen como varían V e I a lo largo de la línea.

77



## Ecuación de la línea de transmisión

Si la línea es de baja pérdida  $\gamma = j\beta$ , y aplicando propiedades de funciones hiperbólicas

$$V = V_R \cosh \gamma x + Z_0 I_R \sinh \gamma x \quad I = \frac{V_R}{Z_0} \sinh \gamma x + I_R \cosh \gamma x$$



$$\cosh j\beta x = \cos \beta x$$

$$\sinh j\beta = j \sin \beta x$$

$$V = V_R \cos \beta x + jZ_0 I_R \sin \beta x \quad I = j \frac{V_R}{Z_0} \sin \beta x + I_R \cos \beta x$$

Expresiones que describen como varían V e I a lo largo de una línea de bajas pérdidas

78



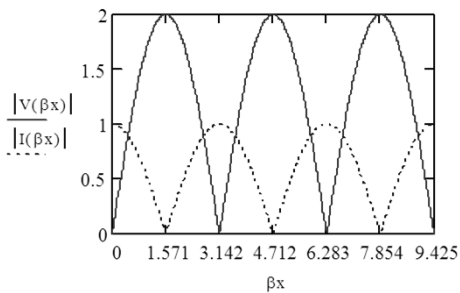
## Onda estacionaria

Análisis para el caso de cortocircuito  $Z_R = 0$

$$V = V_R \cos \beta x + jZ_0 I_R \sin \beta x \quad I = j \frac{V_R}{Z_0} \sin \beta x + I_R \cos \beta x$$

$$Z_R := 0 \quad V(\beta x) := j \cdot I_R \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta x) \quad I(\beta x) := I_R \cdot \cos(\beta x)$$

$$\frac{V(\beta x)}{I(\beta x)} := V_m \cdot \sin(\beta x) \quad I(\beta x) := I_m \cdot \cos(\beta x)$$



$$V = jI_R Z_0 \sin \beta x$$

$$I = I_R \cos \beta x$$

¿  $\Gamma_v$ , ROE ?

$$V_r = -V_i \quad \Gamma_v = -1$$

$$|\Gamma_v| = 1 \quad \arg(\Gamma_v) = 180^\circ$$

79



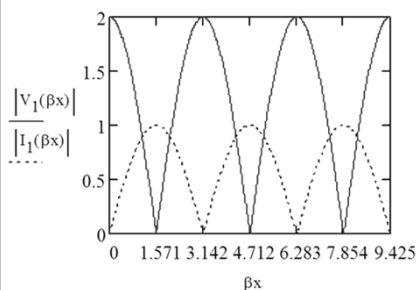
## Onda estacionaria

Análisis para el caso de circuito abierto  $Z_R = \infty$

$$V = V_R \cos \beta x + jZ_0 I_R \sin \beta x \quad I = j \frac{V_R}{Z_0} \sin \beta x + I_R \cos \beta x$$

$$Z_R := \infty \quad V(\beta x) := V_R \cdot \cos(\beta x) \quad I(\beta x) := j \cdot \frac{V_R}{Z_0} \cdot \sin(\beta x)$$

$$V_1(\beta x) := V_m \cdot \cos(\beta x) \quad I_1(\beta x) := I_m \cdot \sin(\beta x)$$



$$V = V_R \cos \beta x$$


$$I = j \frac{V_R}{Z_0} \sin \beta x$$

¿  $\Gamma_v$ , ROE ?

$$V_r = V_i \quad \Gamma_v = 1$$

$$|\Gamma_v| = 1 \quad \arg(\Gamma_v) = 0^\circ$$

80



## Onda estacionaria

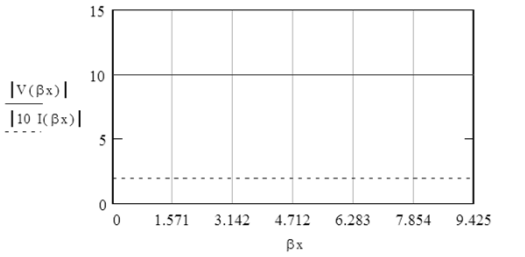
Análisis para el caso de circuito adaptado  $Z_R = Z_0$

$$V = V_R \cos \beta x + jZ_0 I_R \sin \beta x \quad I = j \frac{V_R}{Z_0} \sin \beta x + I_R \cos \beta x$$

$V_R := 10 \quad Z_{0R} := 50$


$Z_{Rv} := Z_0 \quad \underline{V}(\beta x) := V_R \cdot (\cos(\beta x) + j \cdot \sin(\beta x))$

$\underline{I}(\beta x) := \frac{V_R}{Z_R} \cdot (\cos(\beta x) + j \cdot \sin(\beta x))$



$\dot{\iota} \Gamma_v, ROE ?$

81

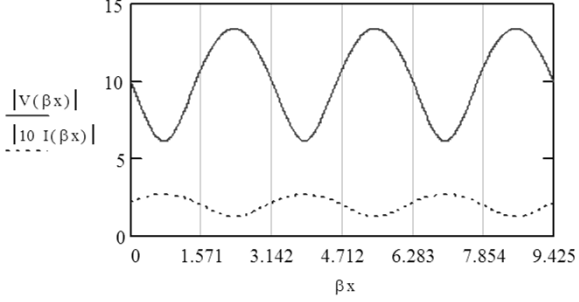


## Onda estacionaria


Análisis para el caso de una carga cualquiera  $Z_R = 35 - j30$

$Z_{Rv} := 35 - j \cdot 30 \quad \underline{V}(\beta x) := V_R \cdot \cos(\beta x) + j \cdot \frac{V_R}{Z_R} \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta x)$

$|Z_R| = 46.098 \quad \underline{I}(\beta x) := \frac{V_R}{Z_R} \cdot \cos(\beta x) + j \cdot \frac{V_R}{Z_0} \cdot \sin(\beta x)$



82




## Onda Estacionaria

En general tendremos que  $Z_R$  será complejo y diferente de  $Z_0$ , pero por el momento consideremos solo valores reales

$$V = V_R \cos \beta x + jZ_0 I_R \sin \beta x \quad I = j \frac{V_R}{Z_0} \sin \beta x + I_R \cos \beta x$$

Escribamos las expresiones de los módulos de V e I


$$|V| = V_R \sqrt{(\cos \beta x)^2 + \left(\frac{Z_0}{Z_R} \sin \beta x\right)^2} \quad |I| = I_R \sqrt{(\cos \beta x)^2 + \left(\frac{Z_R}{Z_0} \sin \beta x\right)^2}$$



Vemos dos situaciones para analizar

$Z_R < Z_0$  y  $Z_R > Z_0$

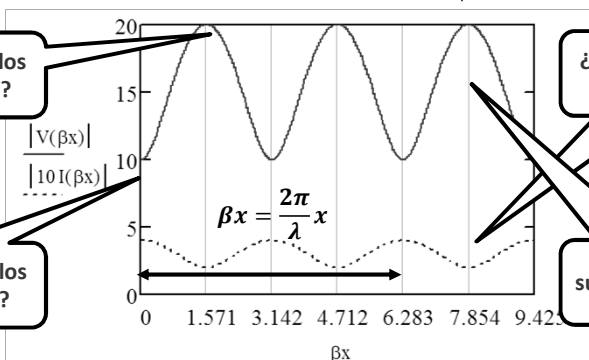
83



## Onda Estacionaria $Z_R < Z_0$

$$|V| = V_R \sqrt{(\cos \beta x)^2 + \left(\frac{Z_0}{Z_R} \sin \beta x\right)^2} \quad |I| = I_R \sqrt{(\cos \beta x)^2 + \left(\frac{Z_R}{Z_0} \sin \beta x\right)^2}$$

¿Donde se dan los máximos de V?



¿Donde se dan los máx y min de I?


¿Donde se dan los mínimos de V?

¡Los máximos superan el valor de Vfuente!

Para V  $Z_R < Z_0$  maximos  $\Rightarrow \sin(\beta x) = 1 \quad x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad n = 0,1,2, \dots$

Para V  $Z_R < Z_0$  minimos  $\Rightarrow \sin(\beta x) = 0 \quad x = n \frac{\lambda}{2} \quad n = 0,1,2, \dots$

84



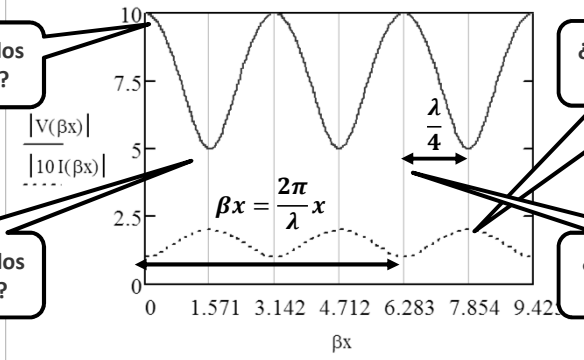
### Onda Estacionaria $Z_R > Z_0$

$$|V| = V_R \sqrt{(\cos \beta x)^2 + \left(\frac{Z_0}{Z_R} \sin \beta x\right)^2}$$

$$|I| = I_R \sqrt{(\cos \beta x)^2 + \left(\frac{Z_R}{Z_0} \sin \beta x\right)^2}$$

¿Donde se dan los máximos de V?


¿Donde se dan los max y min de I?



Para  $V$   $Z_R < Z_0$  minimos  $\Rightarrow \sin(\beta x) = 1$   $x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$   $n = 0,1,2, \dots$

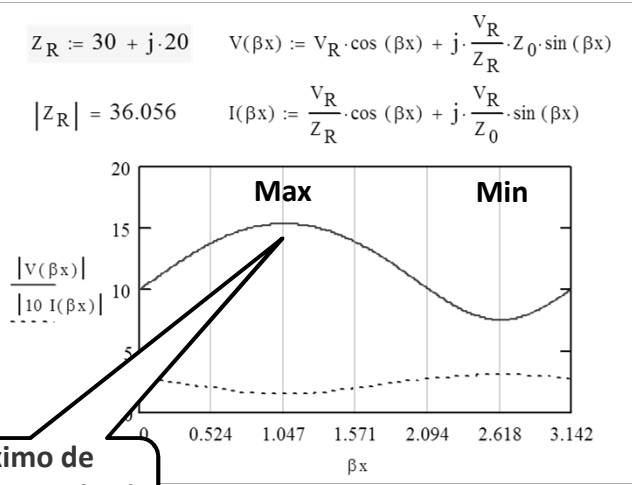
Para  $V$   $Z_R < Z_0$  maximos  $\Rightarrow \sin(\beta x) = 0$   $x = n \frac{\lambda}{2}$   $n = 0,1,2, \dots$

85



### Onda Estacionaria, Carga inductiva

$Z_R := 30 + j \cdot 20$ 
 $V(\beta x) := V_R \cdot \cos(\beta x) + j \cdot \frac{V_R}{Z_R} \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta x)$ 
 $|Z_R| = 36.056$ 
 $I(\beta x) := \frac{V_R}{Z_R} \cdot \cos(\beta x) + j \cdot \frac{V_R}{Z_0} \cdot \sin(\beta x)$



86

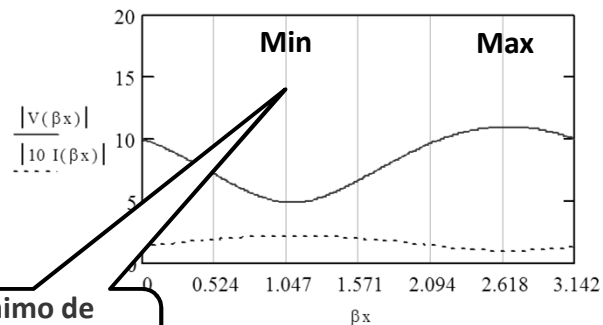




## Onda Estacionaria, Carga capacitiva

$$Z_R := 60 - j \cdot 45 \quad V(\beta x) := V_R \cdot \cos(\beta x) + j \cdot \frac{V_R}{Z_R} \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta x)$$

$$|Z_R| = 75 \quad I(\beta x) := \frac{V_R}{Z_R} \cdot \cos(\beta x) + j \cdot \frac{V_R}{Z_0} \cdot \sin(\beta x)$$



El mínimo de tensión antecede al máximo

87



## Relaciones de Impedancia

La impedancia en cualquier parte de la línea será el cociente de V/I

$$V = V_R \cosh \gamma x + Z_0 I_R \sinh \gamma x \quad I = \frac{V_R}{Z_0} \sinh \gamma x + I_R \cosh \gamma x$$

$$Z_x = \frac{V}{I} = Z_0 \frac{V_R \cosh \gamma x + Z_0 I_R \sinh \gamma x}{V_R \sinh \gamma x + Z_0 I_R \cosh \gamma x} = Z_0 \frac{Z_R + Z_0 \tanh \gamma x}{Z_R \tanh \gamma x + Z_0}$$

*Impedancia en la línea a una distancia x de la carga*

$$Z_x = Z_0 \frac{Z_R + Z_0 \tanh \gamma x}{Z_0 + Z_R \tanh \gamma x}$$

88



## Relaciones de Impedancia

Para una línea de baja pérdida tendremos:

***Impedancia en la línea a una distancia  $x$  de la carga***

$$Z_x = Z_0 \frac{Z_R + jZ_0 \tan \beta x}{Z_0 + jZ_R \tan \beta x}$$

Habíamos establecido una expresión en función del coeficiente de reflexión

$$Z_x = Z_0 \frac{1 + \Gamma_v}{1 - \Gamma_v}$$

89



## Relaciones de impedancia

PROBLEMA: ¿Cuál es la impedancia vista en una línea si  $x = 0,3$  mt y  $f = 300$  Mhz?.  $Z_0 = 50 \Omega$  y  $Z_r = 30 - j20 \Omega$

$$Z_x = Z_0 \frac{Z_R + jZ_0 \tan \beta x}{Z_0 + jZ_R \tan \beta x}$$

90



## Líneas de transmisión

Pregunta de examen:

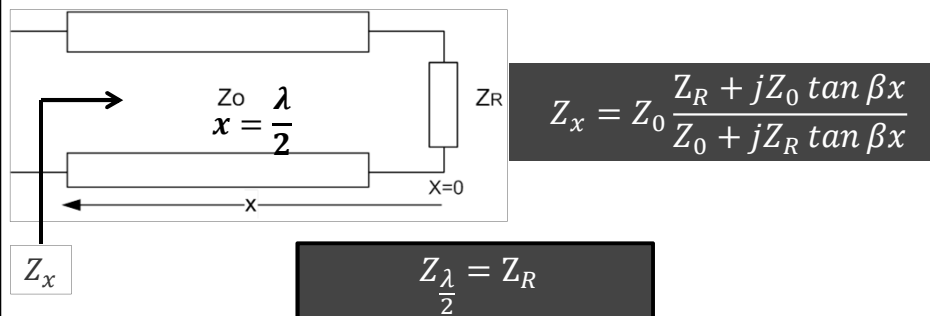
¿Cuál es el valor de la impedancia vista en un máximo o en un mínimo de tensión?  
!Demuéstrelo!

92




## Relaciones de Impedancia

Casos particulares: Línea de media longitud de onda



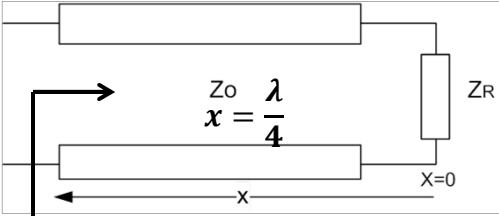
La línea de  $\frac{\lambda}{2}$  refleja en su extremo la impedancia de carga. ¿Utilidad?

93



## Relaciones de Impedancia

Casos particulares: Línea de cuarto de longitud de onda




$$Z_x = Z_0 \frac{Z_R + jZ_0 \tan \beta x}{Z_0 + jZ_R \tan \beta x}$$

$Z_x$

$$Z_{\lambda/4} = \frac{Z_0^2}{Z_R}$$

La línea de  $\frac{\lambda}{4}$  permite hacer transformaciones de impedancia. ¿Utilidad?

94

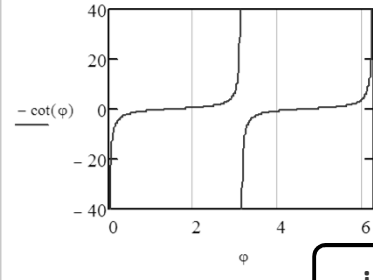


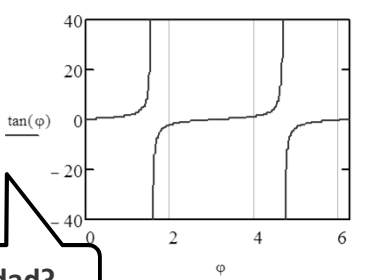
## Stubs

STUBS: Son de particular interés las líneas terminadas en un cortocircuito o en un circuito abierto.

$$Z_x = Z_0 \frac{Z_R + jZ_0 \tan \beta x}{Z_0 + jZ_R \tan \beta x}$$

$Z_R = \infty \quad Z_x = -jZ_0 \cot \beta x$ 
 $Z_R = 0 \quad Z_x = jZ_0 \tan \beta x$



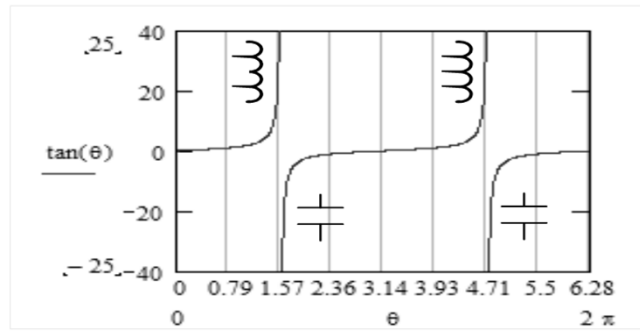


**¿Utilidad?**

95



### Stubs



¿Cuánto vale el producto de  $Z_{cc} * Z_{ca}$ ?

¿Utilidad?

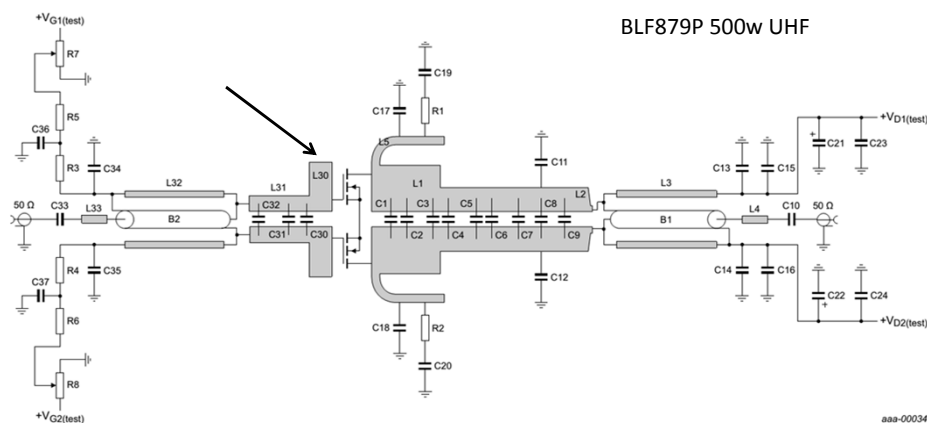
$$Z_{cc} * Z_{ca} = (jZ_0 \tan(\beta x)) * (-jZ_0 \cot(\beta x)) = Z_0^2$$

96



### Stubs

BLF879P 500w UHF



aaa-000342

97



## Stubs

PROBLEMA: Construir una inductancia de 50 nH a partir de un stub en cc  $f = 300$  Mhz.  $Z_0 = 50 \Omega$

Repetir para un stub en ca. ¿Cuál es la diferencia con el stub en cc?

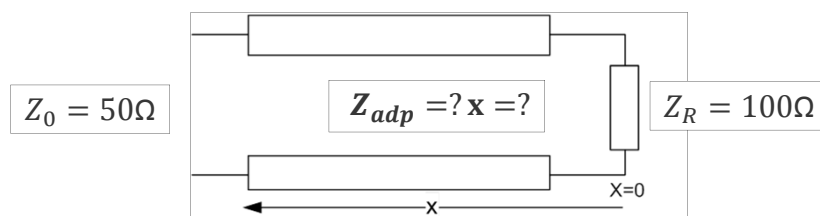
Calcular nuevamente considerando  $\epsilon_r = 2$

98



## Stubs

PROBLEMA: Elegir el valor de  $Z_0$  para adaptar una carga de  $100 \Omega$  a una línea de transmisión con impedancia característica de  $50 \Omega$

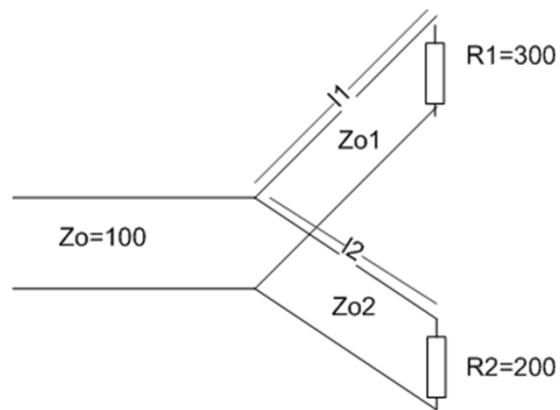


101



## Stubs

Divisor de potencia: Alimentar en fase para que  $R_1$  reciba el doble de potencia de  $R_2$



103



## Líneas de transmisión

Una línea de transmisión sin pérdida tiene una  $Z_0 = 50 \Omega$  y esta terminada en  $Z_R = 35 + j65 \Omega$ .

- Encontrar  $\Gamma_v$
- ROE
- $Z_x$  en  $x = 0,35 \lambda$  mts
- la longitud mas corta a la cual  $Z_x$  es real
- el valor de la impedancia en este punto.

$V_0 = 10 \text{ V}$ .

105



### Líneas de transmisión

$$\Gamma_{vR} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}$$

$$\Gamma_{vR} = 0,258 + j0.568$$

$$|\Gamma_{vR}| = 0,623 \quad \arg(\Gamma_{vR}) = 65,59^\circ$$

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma_v|}{1 - |\Gamma_v|}$$

$$\rho = 4,311$$

$$Z_x = Z_0 \frac{Z_R + jZ_0 \tan \beta x}{Z_0 + jZ_R \tan \beta x}$$

$$\beta x = \frac{2\pi}{\lambda} * 0,35\lambda = 0,7\pi$$

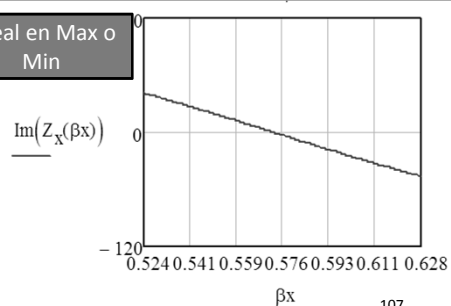
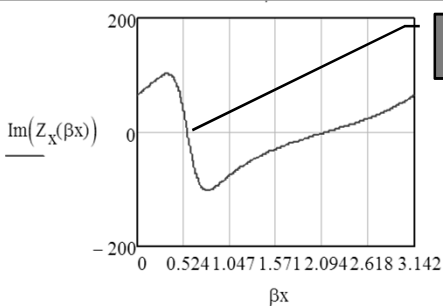
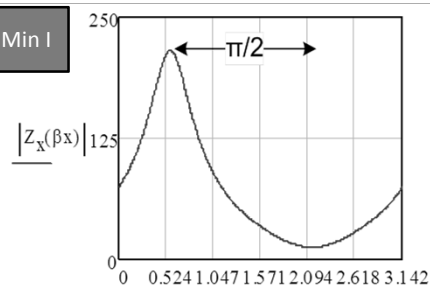
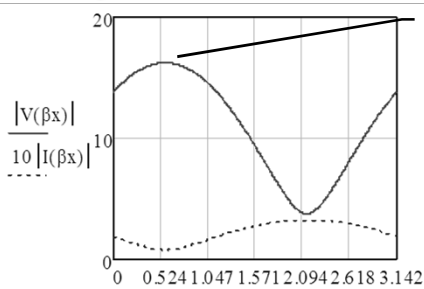
$$Z_x = 11,63 + j2,65 \Omega$$

$$|Z_x| = 11,93 \quad \arg(Z_x) = 12,83^\circ$$

106




### Líneas de transmisión

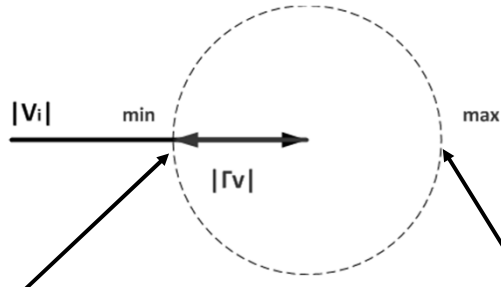


107



 **Líneas de Transmisión**

Podemos considerar a  $\Gamma_v$  como un fasor que esta «modulando» a la tensión incidente  $V_i$




Cuando  $\Gamma$  esta en contrafase tenemos un MIN

Cuando  $\Gamma$  esta en fase tenemos un MAX

Esto produce un fenómeno de *ondas estacionarias* a lo largo de la línea, con máximos y mínimos

108

 **Líneas de transmisión**

$$\Gamma_v = |\Gamma_{vR}| e^{j(\theta_R - 2\beta x)} \quad (\theta_R - 2\beta x) = 2n\pi \quad n = 0,1,2, \dots$$

¿...?

$$x_{max} = \frac{\lambda}{4\pi} (\theta_R - 2n\pi) \quad x_{max} = 0,091\lambda$$

$$Z_{max} = Z_0 \frac{Z_R + jZ_0 \tan \beta x_{max}}{Z_0 + jZ_R \tan \beta x_{max}} \quad Z_{max} = 215,55 \Omega$$

¿Cuál es la relación entre  $Z_{max}$  y ROE

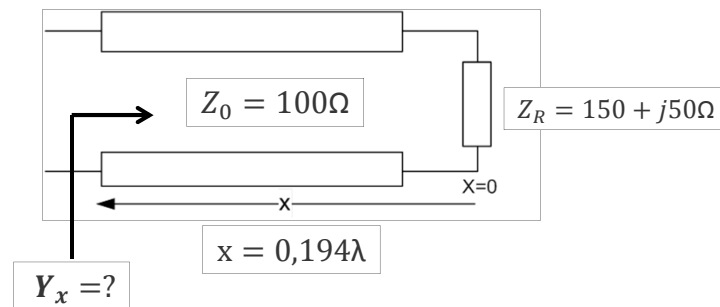
109



## Líneas de transmisión

PROBLEMA: Una línea de transmisión uniforme  $Z_0 = 100 \Omega$  esta terminada en  $Z_R = 150 + j50 \Omega$ .

- Calcular  $Y_x$  ( $x = 0,194\lambda$ )
- ¿Cómo podría adaptarse la línea?



110



## Carta de Smith

Es posible utilizar procedimientos gráficos con un buen grado de precisión para resolver problemas de líneas de transmisión.

La carta de Smith es un tipo de nomograma, que muestra cómo varía la impedancia compleja de una línea de transmisión a lo largo de su longitud.

Se usa frecuentemente para simplificar la adaptación de la impedancia de una línea de transmisión con su carga.

Fue inventada por Phillip Smith en 1939 mientras trabajaba para RCA, aunque el ingeniero japonés Kurakawa inventó un dispositivo similar un año antes.

El motivo que tenía Smith para hacer este diagrama era representar gráficamente las relaciones matemáticas que se podían obtener con una regla de cálculo.

112



## Carta de Smith

Historia RCA Radio Corporation of America



RCA is an icon of American innovation. We popularized the radio in the 1920s, developed television in the 1930s, created color TV standards in the 1950s, and became a computer innovator in the 1960s. Today, the RCA brand is working to attract a new generation of families to RCA—establishing the brand as a clear choice for electronics. We create emotional connections with products that have and always will deliver innovation, quality and value.

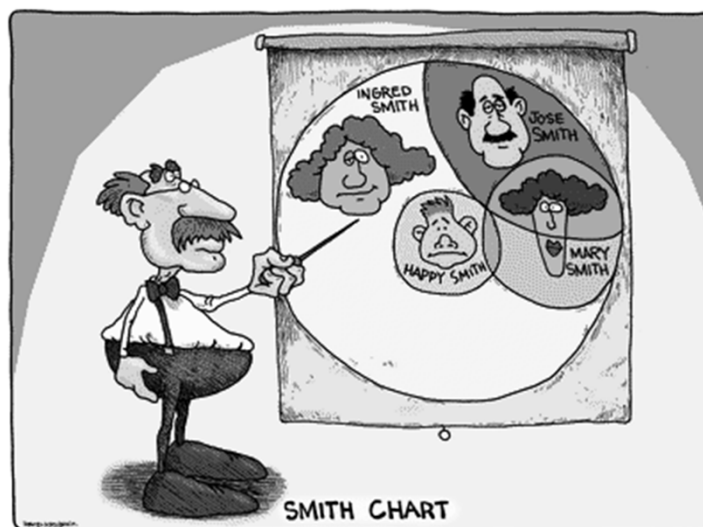
Now, as always, RCA is made for moments.

<http://www.rca.com/about>

113



## Carta de Smith

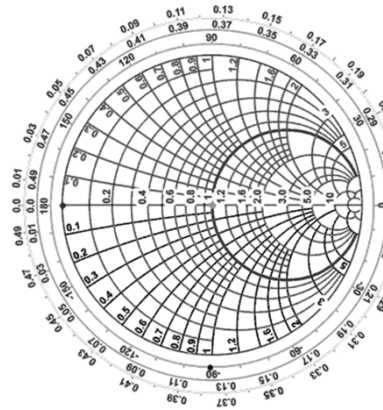
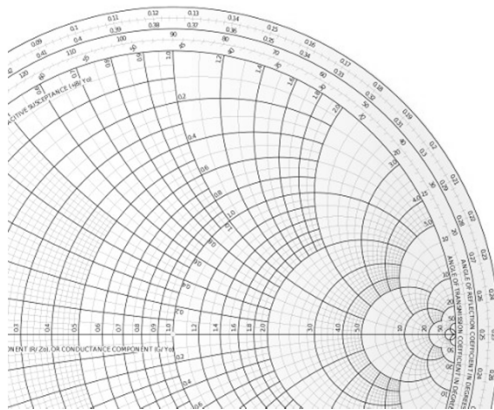


114



## Carta de Smith

La carta de Smith representa el diagrama del coeficiente de reflexión. Por correspondencia entre planos podemos mostrar simultáneamente impedancias. También se puede construir una carta de admitancias



115



## Carta de Smith

Habíamos visto que la  $Z_x$  impedancia a una distancia  $x$  de la carga

$$Z_x = Z_0 \frac{V_i * e^{\gamma x} + V_r * e^{-\gamma x}}{V_i * e^{\gamma x} - V_r * e^{-\gamma x}} \quad Z_x = Z_0 \frac{1 + \frac{V_r * e^{-\gamma x}}{V_i * e^{\gamma x}}}{1 - \frac{V_r * e^{-\gamma x}}{V_i * e^{\gamma x}}} \quad Z_x = Z_0 \frac{1 + \Gamma_v}{1 - \Gamma_v}$$

$$\text{Definimos la impedancia normalizada } Z_n = \frac{Z_x}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma_v}{1 - \Gamma_v}$$

$$\text{en general tendremos } Z_n = r_n + jx_n \quad \text{y} \quad \Gamma_v = u + jv$$

116



## Carta de Smith

Vemos que existe una relación fundamental entre la impedancia normalizada y el coeficiente de reflexión.

Dibujando ambos en sus respectivos planos complejos “r” y “x”, “u” y “v”, es posible establecer una correspondencia entre los puntos de ambos planos.

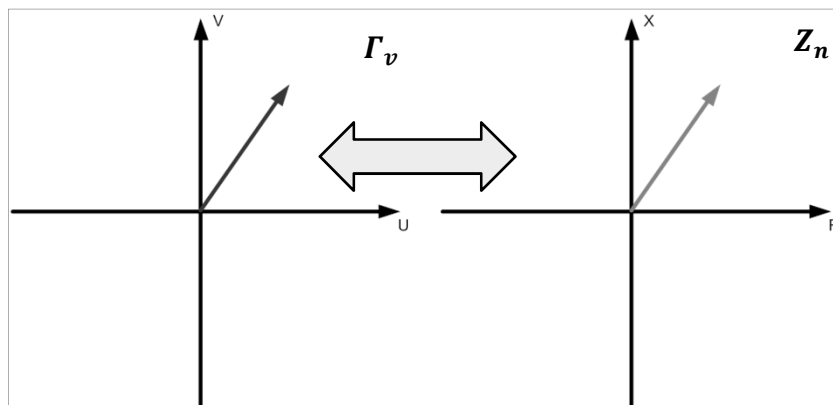
117



## Carta de Smith

Es una *transformación bilineal* los círculos en un plano se corresponden con los círculos en el otro.

Es una *transformación conforme* porque un ángulo entre dos segmentos se conserva entre las líneas correspondientes en el otro plano.



118



## Carta de Smith

$$Z_n = r_n + jx_n = \frac{1 + \Gamma_v}{1 - \Gamma_v} = \frac{1 + u + jv}{1 - u - jv}$$

$$\frac{1 + u + jv}{1 - u - jv} = \frac{(1 + u) + jv}{(1 - u) - jv} = \frac{[(1 + u) + jv] * [(1 - u) + jv]}{(1 - u)^2 + v^2}$$

$$r_n + jx_n = \frac{[(1 + u)(1 - u) + jv(1 + u) + jv(1 - u) - v^2]}{(1 - u)^2 + v^2}$$

$$r_n + jx_n = \frac{(1 - u^2) + j2v - v^2}{(1 - u)^2 + v^2}$$

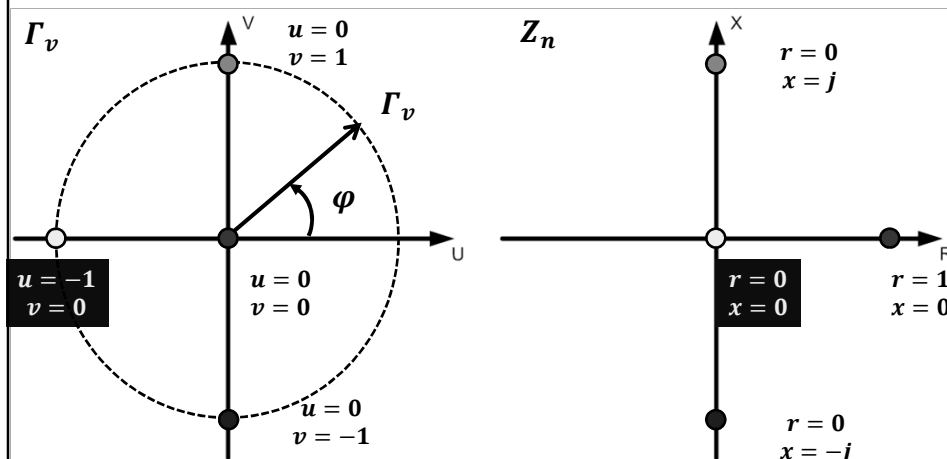
$$r_n = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} \quad x_n = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}$$

119




## Carta de Smith

$$r_n = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} \quad x_n = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}$$



120



## Carta de Smith

$$r := \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2}$$

$$(1 - u)^2 + v^2 + \frac{u^2}{r} + \frac{v^2}{r} = \frac{1}{r}$$

$$1 - 2u + u^2 + v^2 + \frac{u^2}{r} + \frac{v^2}{r} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{u^2 \cdot (1+r)}{r} + \frac{v^2 \cdot (1+r)}{r} - 2u = \frac{1}{r} - 1$$

$$\frac{u^2 \cdot (1+r)}{r} + \frac{v^2 \cdot (1+r)}{r} - 2u = \frac{1-r}{r}$$

$$u^2 + v^2 - 2u \cdot \frac{r}{1+r} = \frac{1-r}{1+r}$$

$$u^2 + v^2 - 2u \cdot \frac{r}{1+r} + \left(\frac{r}{1+r}\right)^2 - \left(\frac{r}{1+r}\right)^2 = \frac{1-r}{1+r}$$

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \frac{1-r}{1+r} + \left(\frac{r}{1+r}\right)^2$$


$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{1+r} \left(1 - r + \frac{r^2}{1+r}\right)$$

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{1+r} \cdot \left(\frac{1-r^2+r^2}{1+r}\right)$$

Lo que tenemos son las ecuaciones de 2 círculos con centros en:

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \quad y \quad (u - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

121




## Carta de Smith

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2$$

	$u(r) := \frac{r}{r+1}$	$v := 0$	$R_1(r) := \frac{1}{r+1}$
$r := .1$	$u(r) = 0.091$	$v := 0$	$R_1(r) = 0.909$
$r := .5$	$u(r) = 0.333$	$v := 0$	$R_1(r) = 0.667$
$r := 1$	$u(r) = 0.5$	$v := 0$	$R_1(r) = 0.5$
$r := 2$	$u(r) = 0.667$	$v := 0$	$R_1(r) = 0.333$
$r := 10$	$u(r) = 0.909$	$v := 0$	$R_1(r) = 0.091$
$r := 50$	$u(r) = 0.98$	$v := 0$	$R_1(r) = 0.02$

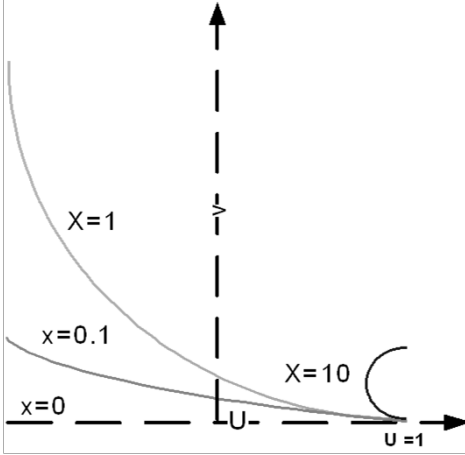
122



## Carta de Smith


$$(u - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

	$u := 1$	$v(x) := \frac{1}{x}$	$R_2(x) := \frac{1}{x}$
$x := 0.1$	$u := 1$	$v(x) = 10$	$R_2(x) = 10$
$x := .5$	$u := 1$	$v(x) = 2$	$R_2(x) = 2$
$x := 1$	$u := 1$	$v(x) = 1$	$R_2(x) = 1$
$x := 2$	$u := 1$	$v(x) = 0.5$	$R_2(x) = 0.5$
$x := 10$	$u := 1$	$v(x) = 0.1$	$R_2(x) = 0.1$
$x := 50$	$u := 1$	$v(x) = 0.02$	$R_2(x) = 0.02$



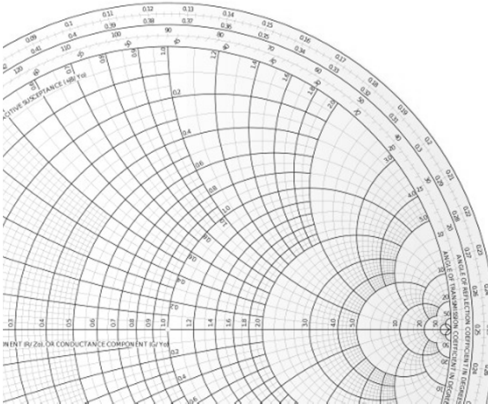
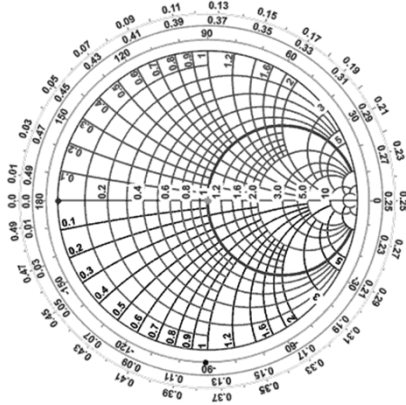
De forma simétrica se grafican las reactancias negativas hacia abajo.

123



## Carta de Smith

La carta de Smith representa el diagrama del coeficiente de reflexión. Por correspondencia entre planos podemos mostrar simultáneamente impedancias.

También se puede construir una carta de admitancias

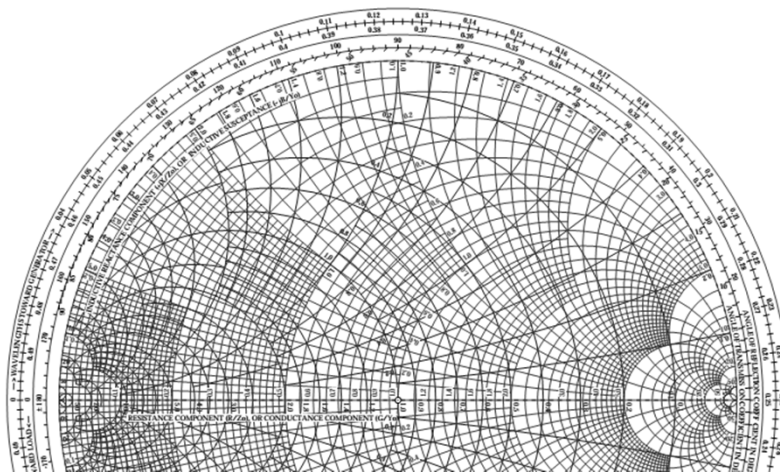
124





## Carta de Smith

Carta de Smith Impedancia Admitancia



125



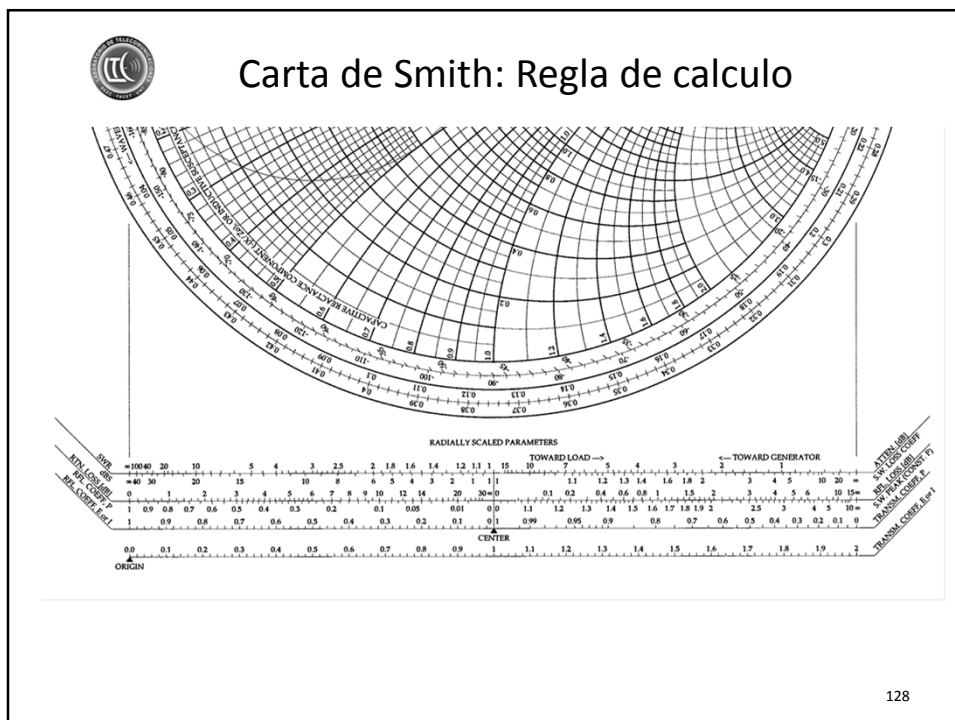
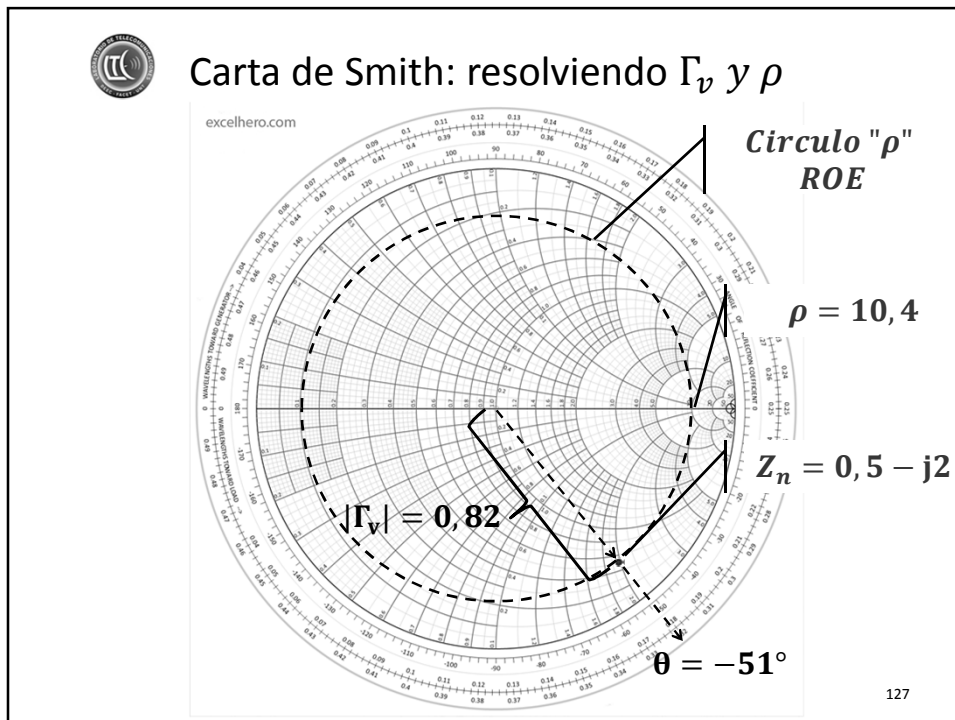
## Carta de Smith: resolviendo $\Gamma_v$ y $\rho$

Conocida la impedancia de carga, encontrar :  $\Gamma_v$  y  $\rho$

$$Z_0 = 50 \Omega \quad Z_L = 25 - j100 \Omega \quad Z_n = 0,5 - j2$$

Resolvemos analíticamente:

126





## Carta de Smith: Conversión Z->Y Y->Z

Conversión de Z - Y , Y - Z . Calcular la admitancia Y de  $Z_L$

$$Z_0 = 50 \Omega \quad Z_L = 25 - j100 \Omega \quad Z_n = 0,5 - j2$$

$$Z_n = \frac{1 + \Gamma_v}{1 - \Gamma_v} \quad Y_n = \frac{1}{Z_n} \quad Y_n = \frac{1 - \Gamma_v}{1 + \Gamma_v}$$

Reemplazando  $\Gamma_v$  por  $-\Gamma_v$

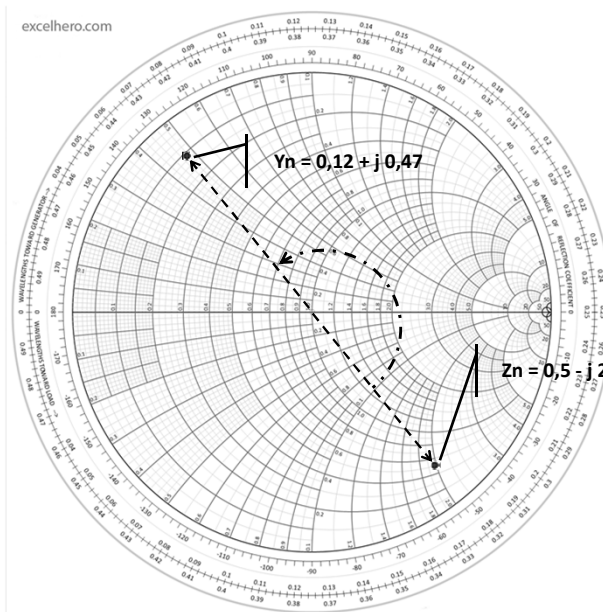
$$Y_n = \frac{1 + \Gamma_v}{1 - \Gamma_v}$$

Para pasar de Z a Y o de Y a Z, debemos girar 180°


129



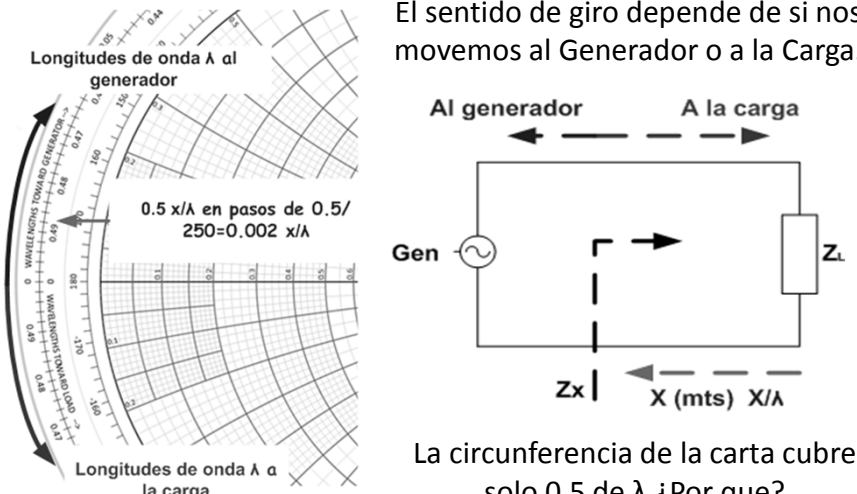
## Carta de Smith: Conversión Z->Y Y->Z



130

 Carta de Smith: Transformación de impedancia

El sentido de giro depende de si nos movemos al Generador o a la Carga.



Longitudes de onda  $\lambda$  al generador

Longitudes de onda  $\lambda$  a la carga

0.5  $\lambda$  en pasos de 0.5/250=0.002  $\lambda/\lambda$


Al generador      A la carga

Gen      Z<sub>L</sub>

Z<sub>x</sub> |      X (mts) X/ $\lambda$

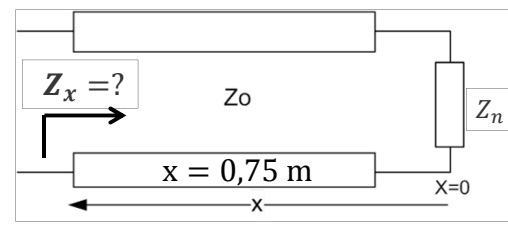
La circunferencia de la carta cubre solo 0,5 de  $\lambda$  ¿Por que?

131

 Carta de Smith: Transformación de impedancia

Encontrar el valor de la impedancia en la línea a una distancia "x" de la carga

$\epsilon_r = 1$      $f = 100 \text{ Mhz}$      $x = 0,75 \text{ m}$      $Z_n = 0,5 - j2$      $Z_x = ?$

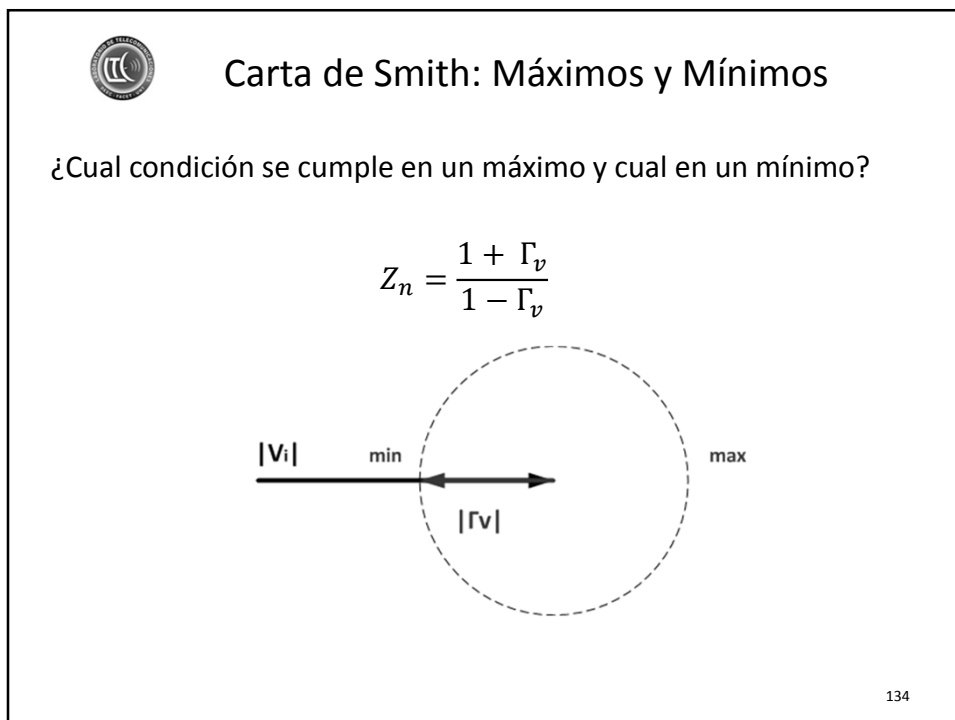
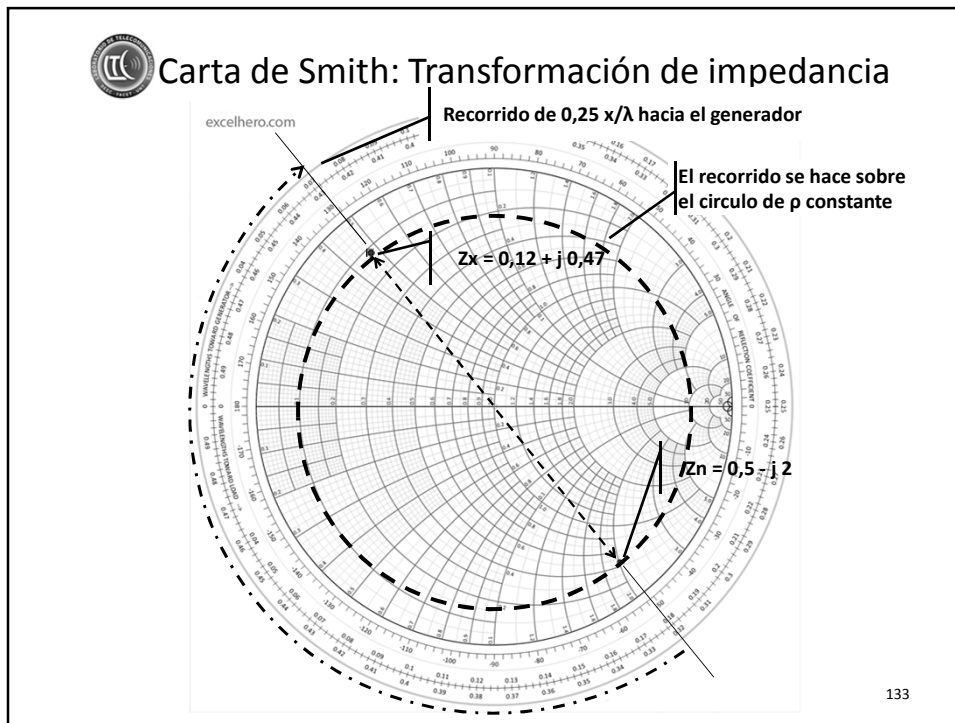


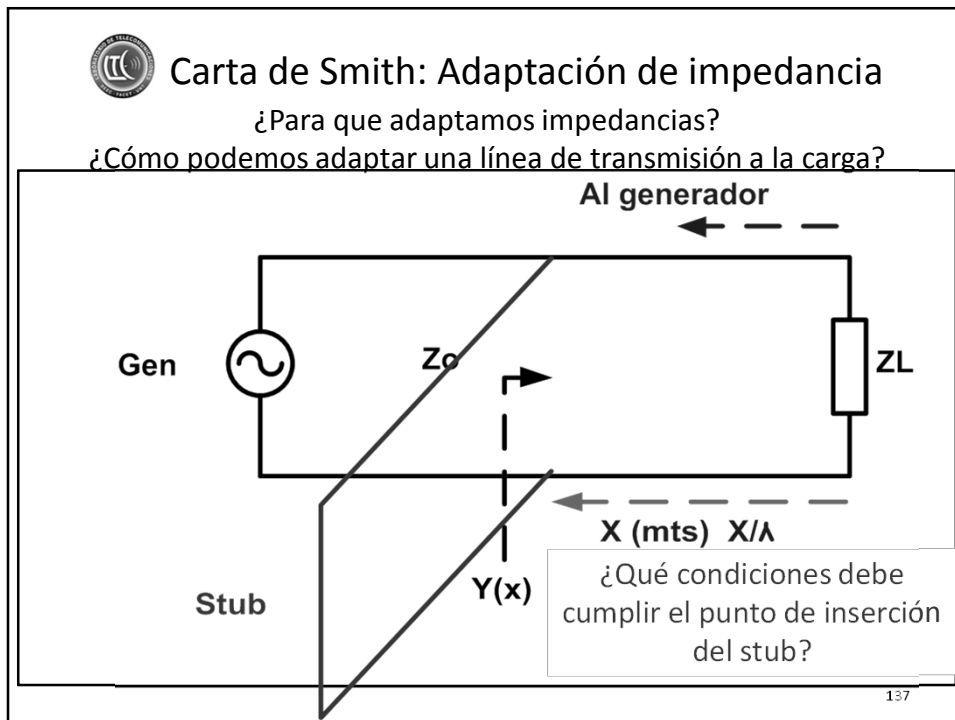
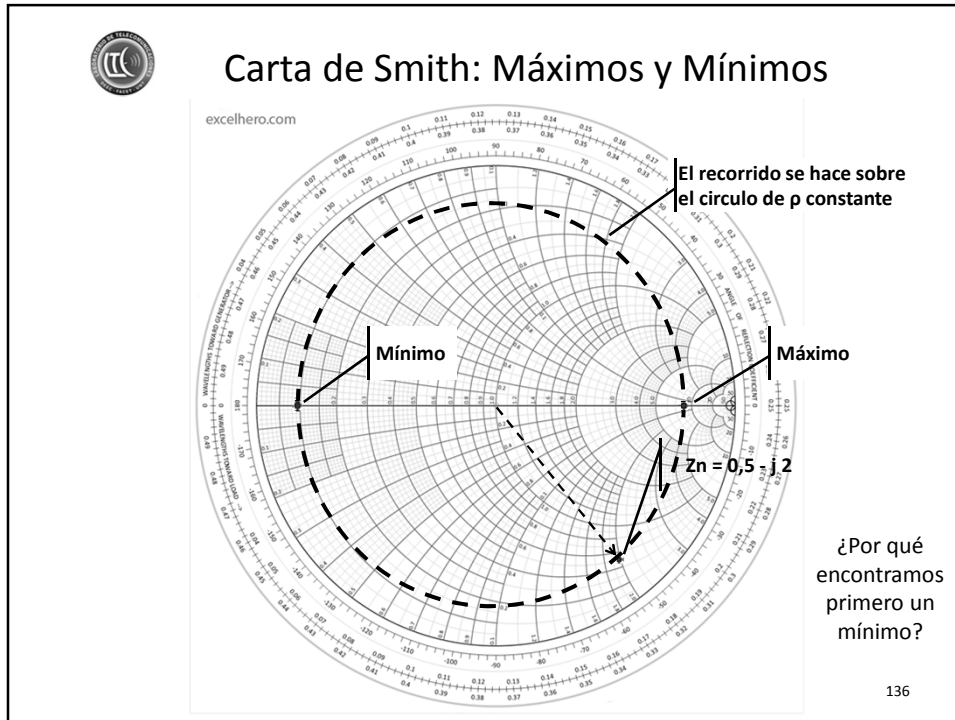
$Z_x = ?$        $Z_o$        $Z_n$

$x = 0,75 \text{ m}$        $X=0$

$\lambda = \frac{v}{f} \text{ m}$      $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$      $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

132







Carta de Smith: Adaptación de impedancias

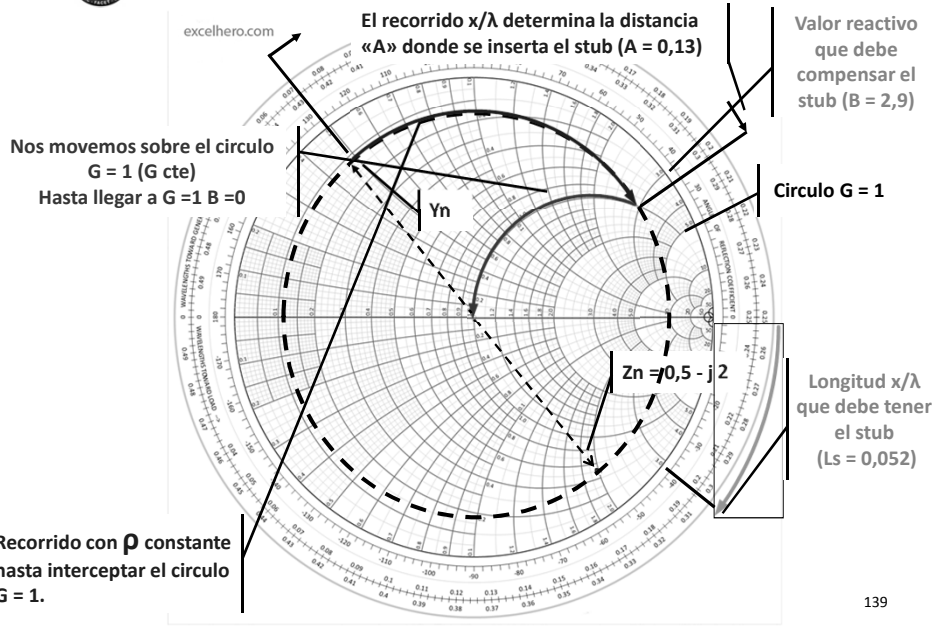
Adaptar impedancias con la carta de Smith  
 es un juego donde para ganar hay que llegar a la casilla del medio  
 $G = 1 \quad B = 0$



¿Jugamos?



Carta de Smith: Adaptación de impedancias



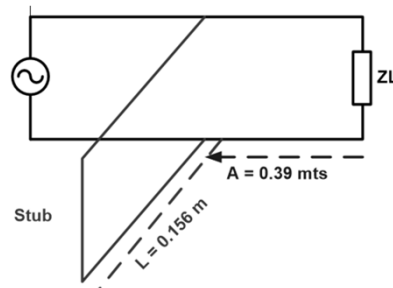


### Carta de Smith: Transformación de impedancia

$$\epsilon_r = 1 \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad f = 100 \cdot 10^6 \text{ Hz} \quad \lambda = \frac{c}{f} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$Z_n = 0,5 - j2 \quad x = 0,75 \text{ m} \quad \lambda = \frac{c}{f} = 3 \text{ m} \quad \frac{x}{\lambda} = 0,25$$

$$A = 0,13 \quad \lambda * A = 0,39 \text{ m} \quad L_s = 0,052 \quad \lambda * L_s = 0,156 \text{ m}$$



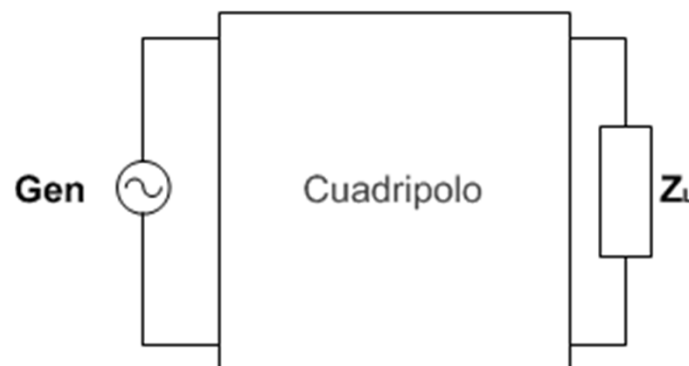
140



### Carta de Smith: Parámetros concentrados

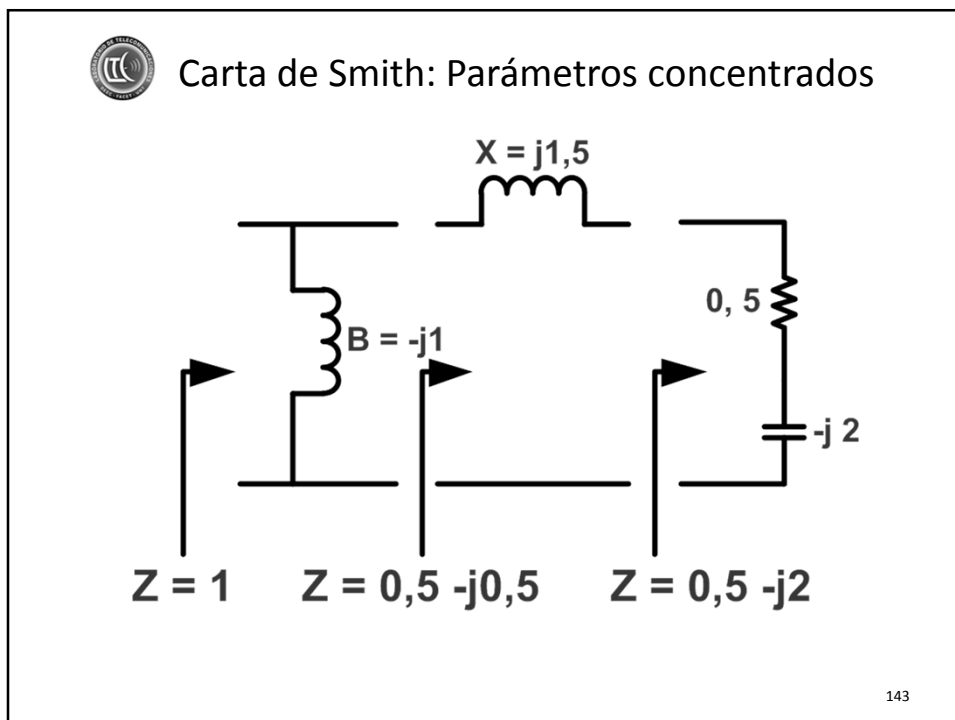
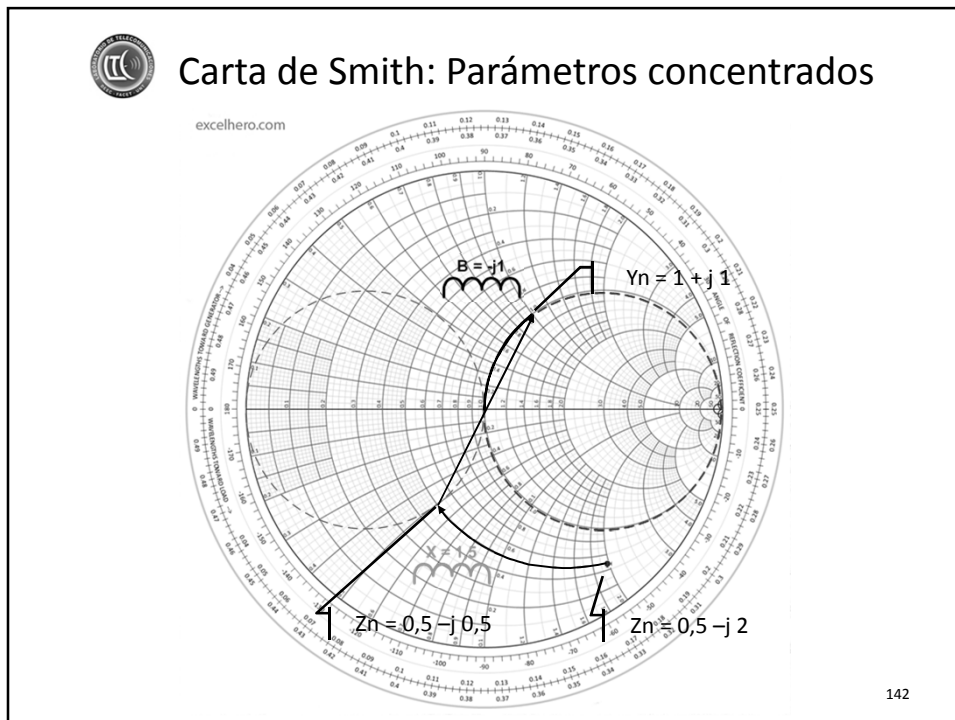
Podemos utilizar la carta de Smith para resolver problemas de adaptación con parámetros concentrados.

El objetivo sigue siendo el mismo...



141







## Carta de Smith: Parámetros concentrados

¿Existen otras soluciones posibles?



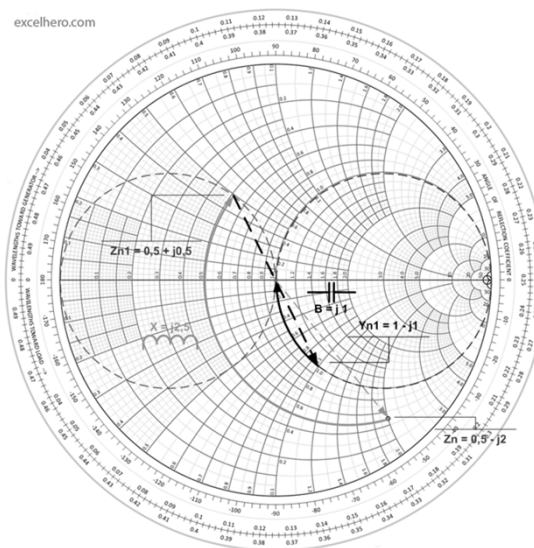
Hay cuatro soluciones posibles!

144

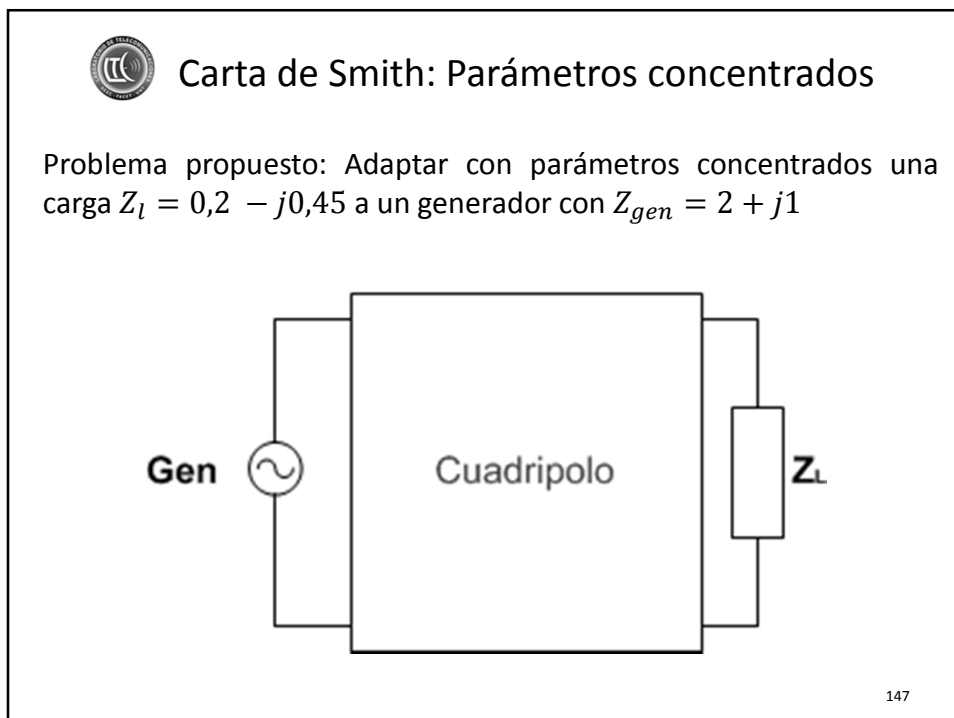
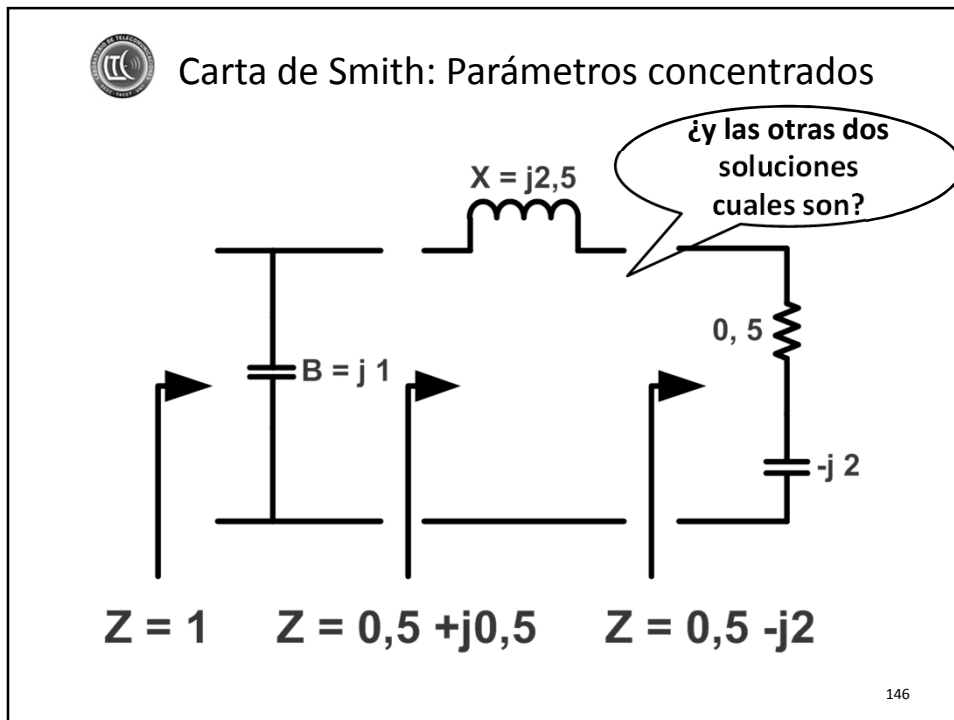


## Carta de Smith: Parámetros concentrados

excelhero.com

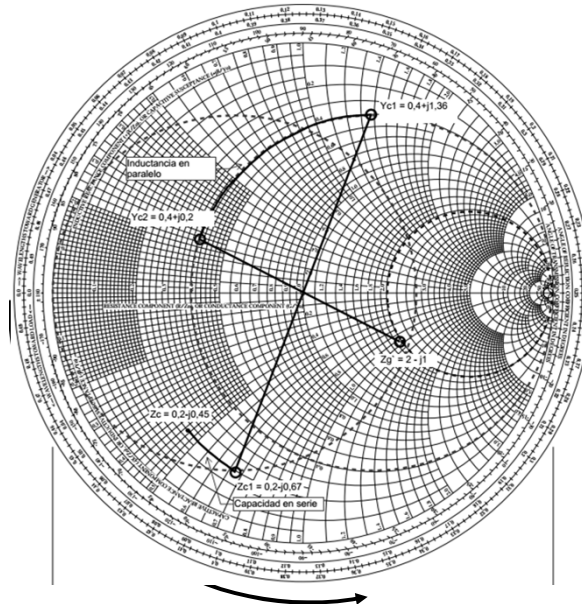


145





## Carta de Smith: Parámetros concentrados



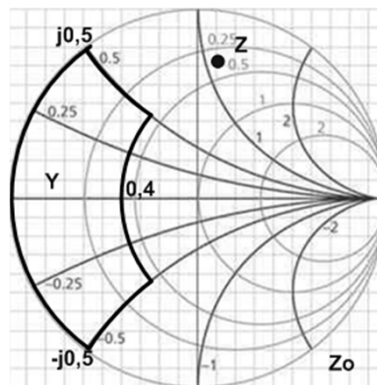
148



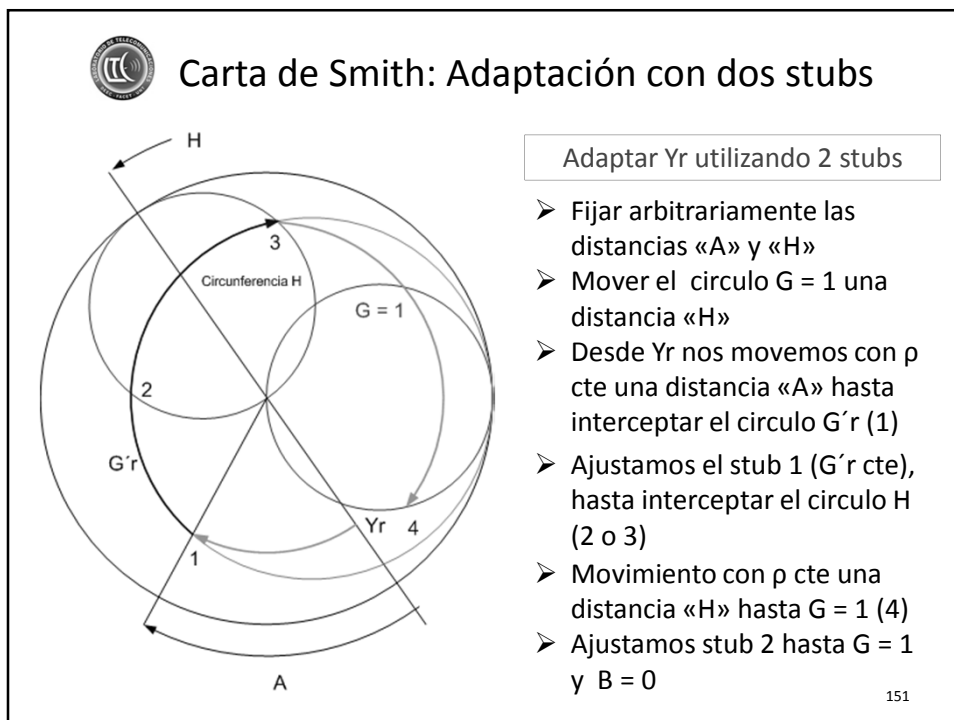
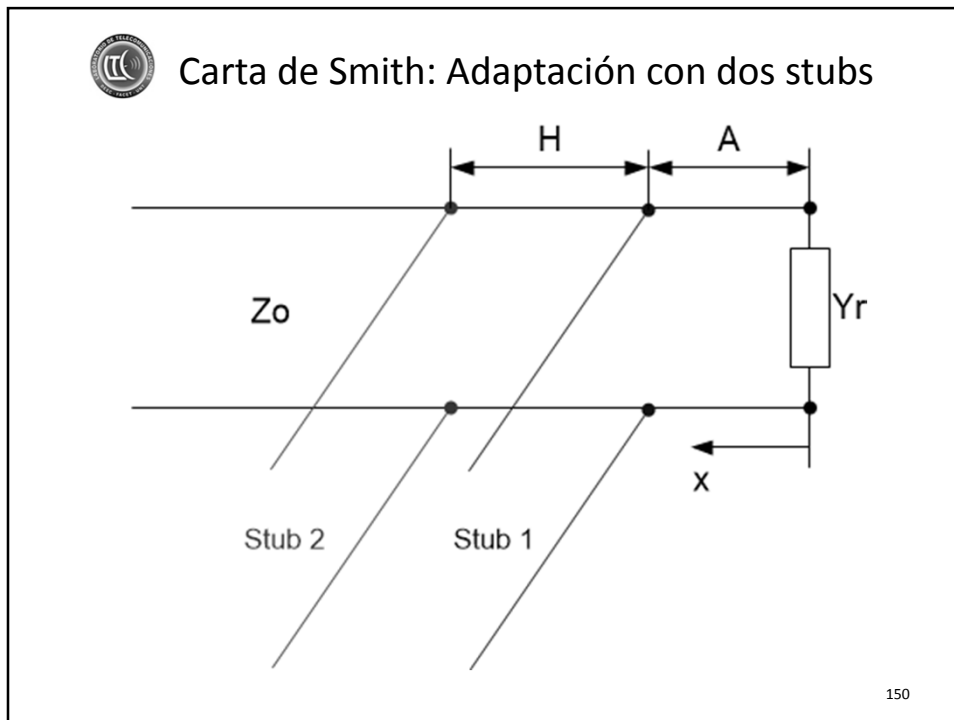
## Carta de Smith: Adaptación con dos stubs

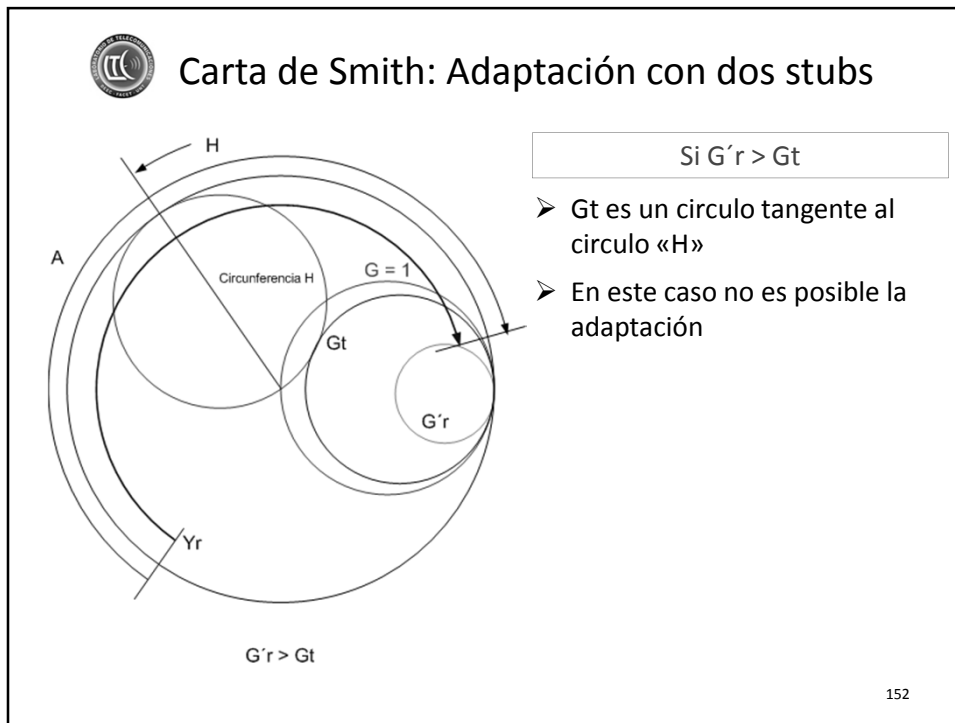
Adaptación con 2 stubs

- Permite adaptar un conjunto de impedancias
- Los puntos de inserción de los stubs se mantienen constantes

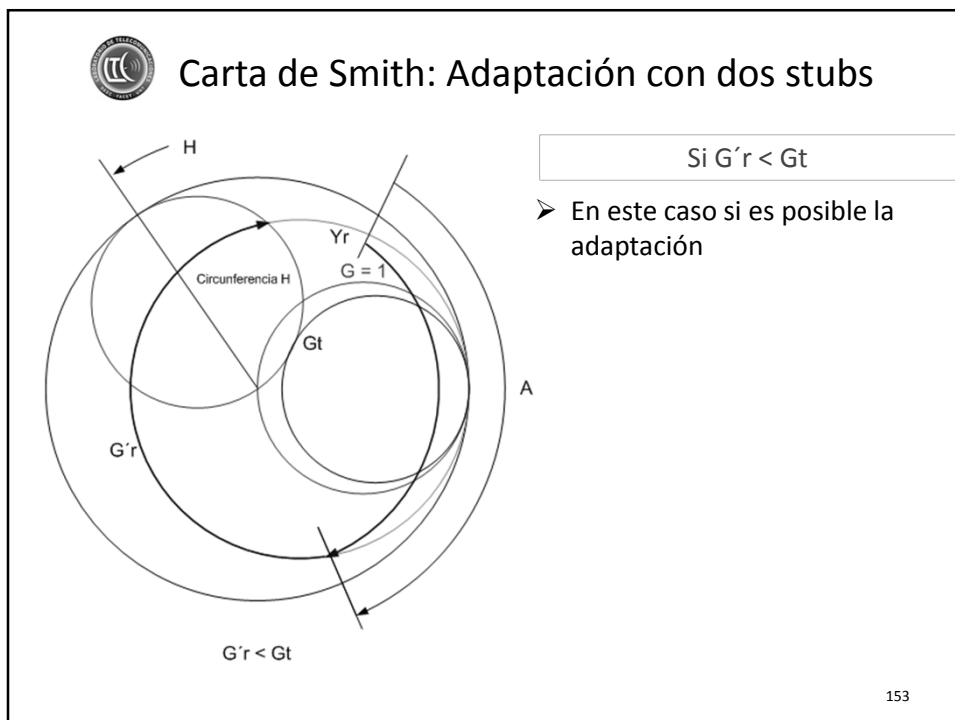


149




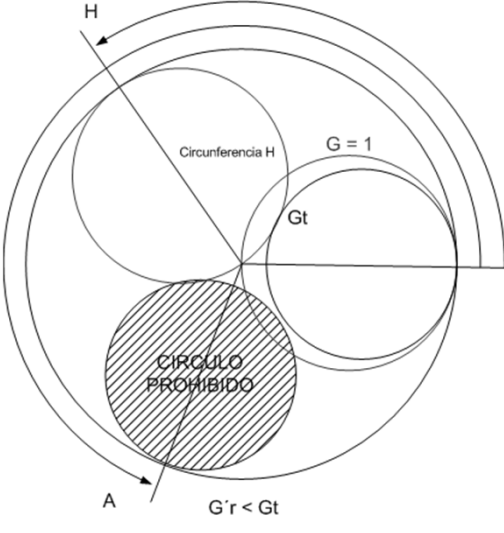


152



153


 Carta de Smith: Adaptación con dos stubs

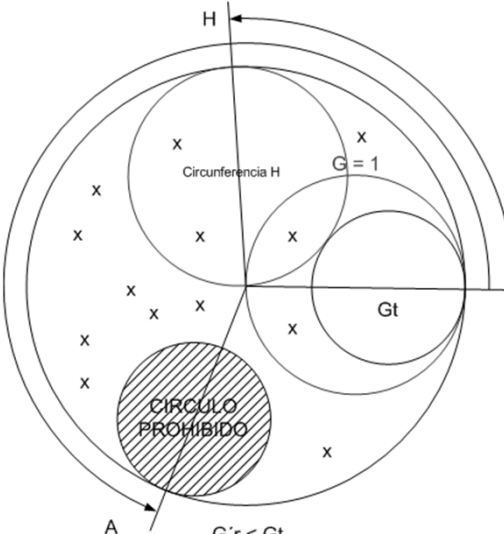


Si  $G'r < G_t$

- El círculo  $G_t$  desplazado una distancia «A» define el conjunto de todas las admitancias que no tienen adaptación.

154

 Carta de Smith: Adaptación con dos stubs



Método propuesto

- Determinar el círculo prohibido tal que no incluya ninguna de las admitancias a adaptar.
- Esto fija la distancia «A»
- Con el radio del círculo prohibido se traza el círculo  $G_t$ .
- Entonces se dibuja el círculo «H» tangente a  $G_t$ , quedando fija la distancia «H».

155



## Carta de Smith: Adaptación con dos stubs

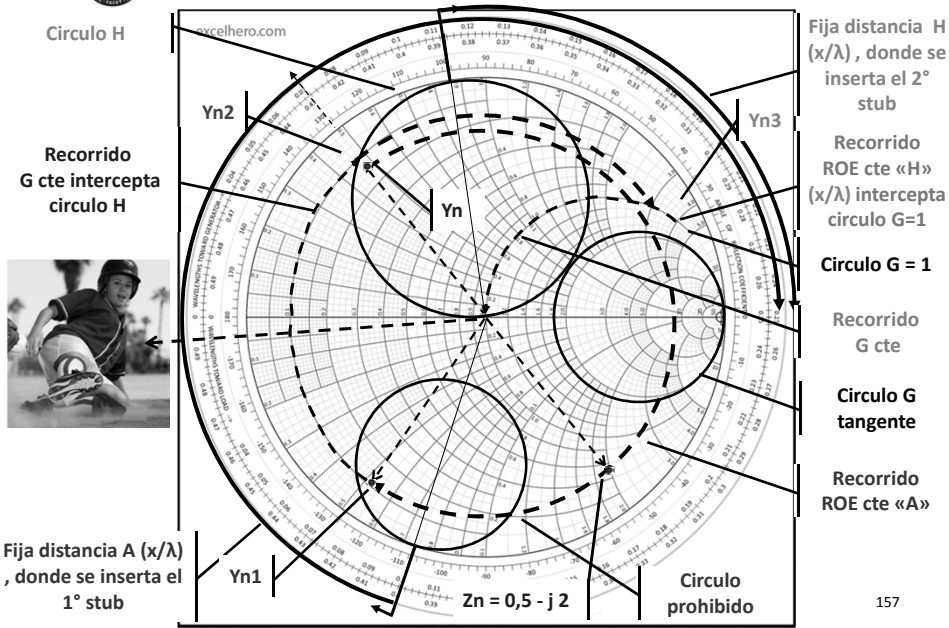
Determinación del entorno de admitancias de carga que no tienen adaptación en un sistema de dos stubs

Ing. Néstor Arias

156

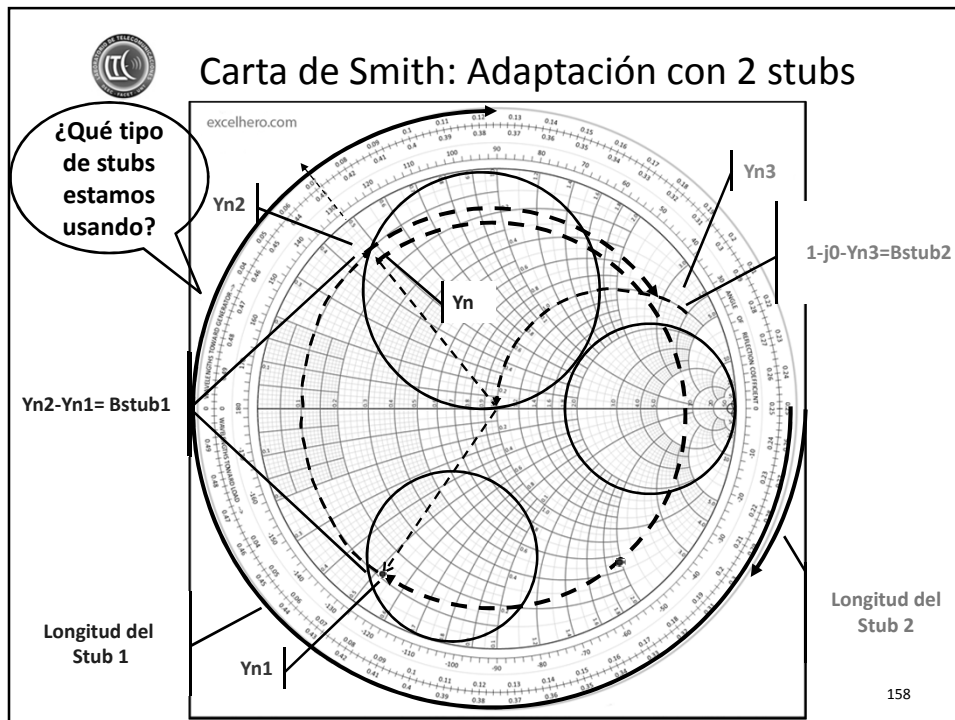


## Carta de Smith: Adaptación con 2 stubs



157





### Resolviendo problemas con la Carta de Smith

En una línea de transmisión se mide lo siguiente:

$$\rho = 3,3 \quad x_{min} = 0,42 \text{ mts}$$

- 1) Calcular analíticamente el valor de  $Z_R$
- 2) ¿Cuánto vale  $\Gamma_v$  en la carga y en el punto  $x_{min}$ ?
- 3) Hacer lo mismo con la carta de Smith

$$\epsilon_r = 1 \quad f = 100 \text{ Mhz} \quad Z_0 = 50 \Omega$$



### Resolviendo problemas con la Carta de Smith

$$\rho = 3,3 \quad x_{min} = 0,42 \text{ mts} \quad \varepsilon_r = 1 \quad f = 100 \text{ Mhz} \quad Z_0 = 50 \Omega$$

$$Z_x = Z_0 \frac{Z_R + jZ_0 \tan \beta x}{Z_0 + jZ_R \tan \beta x}$$

$$Z_x = Z_0 \frac{1 + \Gamma_v}{1 - \Gamma_v}$$

$$Z_{x_{min}} = Z_0 \frac{Z_R + jZ_0 \tan \beta x_{min}}{Z_0 + jZ_R \tan \beta x_{min}}$$

$$Z_{x_{min}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_{v_{min}}}{1 - \Gamma_{v_{min}}}$$

$$Z_{x_{min}} = \frac{Z_0}{\rho} = Z_0 \frac{Z_R + jZ_0 \tan \beta x_{min}}{Z_0 + jZ_R \tan \beta x_{min}}$$

$$Z_R = Z_0 \frac{\frac{1}{\rho} - j \tan \beta x_{min}}{1 - j \frac{1}{\rho} \tan \beta x_{min}}$$

$$Z_R = 32,88 - j48,39 \Omega$$

$$Z_{Rn} = 0,66 - j0,97$$

160



### Resolviendo problemas con la Carta de Smith

$$\rho = 3,3 \quad x_{min} = 0,42 \text{ mts} \quad \varepsilon_r = 1 \quad f = 100 \text{ Mhz} \quad Z_0 = 50 \Omega$$

$$Z_R = 32,88 - j48,39 \Omega$$

$$\Gamma_{v_R} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}$$

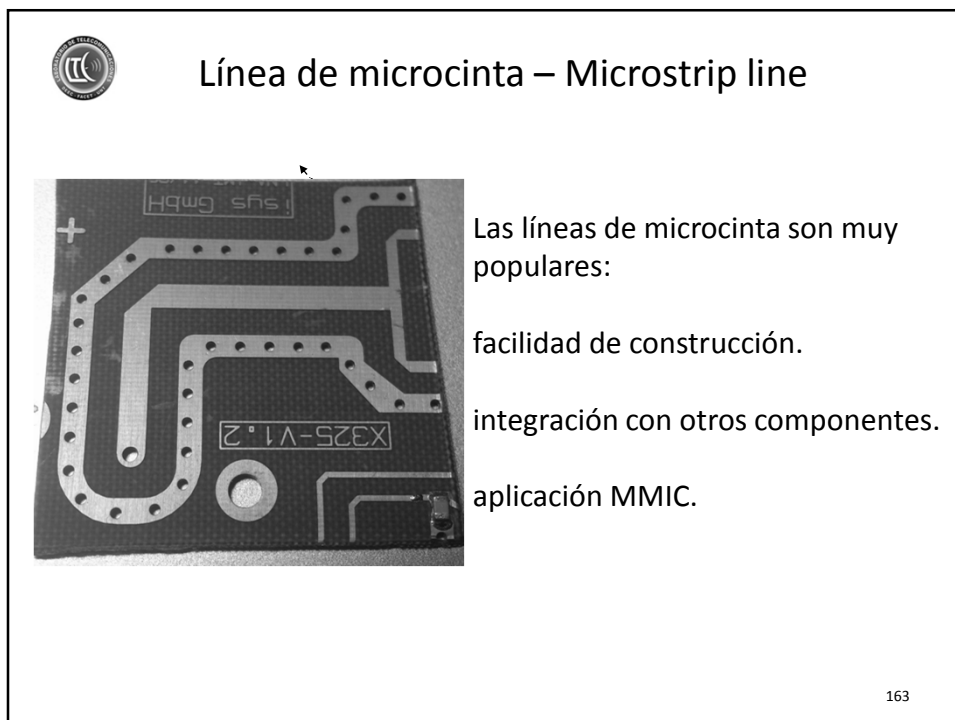
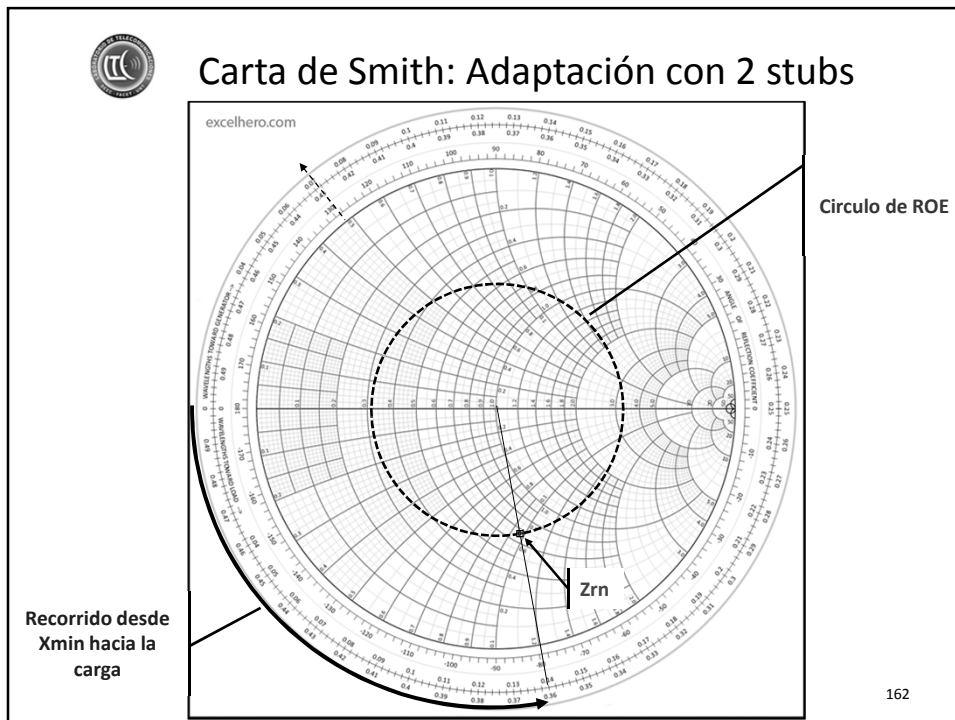
$$\Gamma_{v_R} = 0,1 - j0,525$$


$$|\Gamma_{v_R}| = 0,53 \quad \arg(\Gamma_{v_R}) = -79^\circ$$

$$\Gamma_{v_{min}} = -0,53$$


$$|\Gamma_{v_{min}}| = 0,53 \quad \arg(\Gamma_{v_{min}}) = 180^\circ$$

161



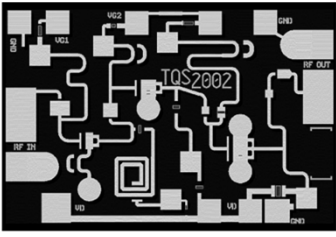


## Línea de microcinta – Microstrip line



### TGA4506


### K Band Low Noise Amplifier



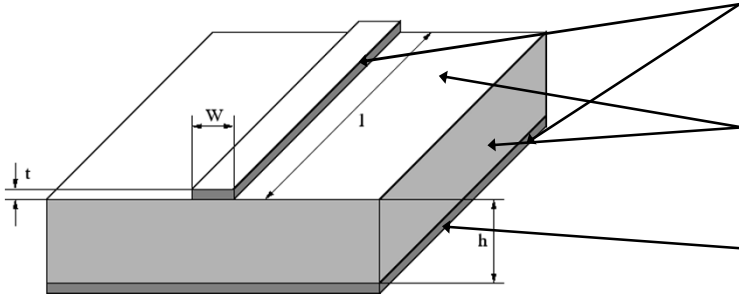
**Key Features**

- Typical Frequency Range: 20 - 27 GHz
- 21 dB Nominal Gain
- 2.2 dB Nominal Noise Figure
- 12 dBm Nominal P1dB
- Bias 3.5 V, 60 mA
- 0.15 um 3MI pHEMT Technology
- Chip Dimensions 1.2 x 0.8 x 0.1 mm  
(0.047 x 0.031 x 0.004) in

164



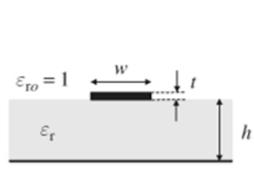
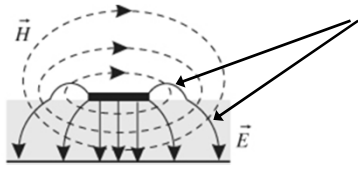
## Línea de microcinta – Microstrip line



Línea de dos conductores

Dos dieléctricos

Plano de tierra

Las líneas de campo atraviesan dos regiones distintas

$$v_1 = \frac{c}{f}$$

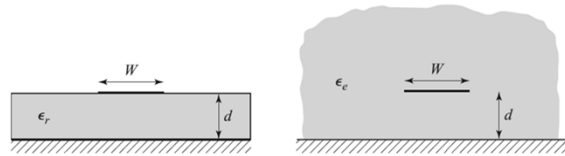
$$v_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} f}$$

Por lo tanto no tendremos un modo TEM de propagación

165



## Línea de microcinta – Microstrip line



Dado que la altura « $d$ » es pequeña podemos suponer que los campos son muy similares a los del modo TEM (Modo Quasi TEM). Entonces definimos una permitividad efectiva  $\epsilon_e$  tal que:

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_e}} \quad \text{donde } 1 < \epsilon_e < \epsilon_r$$

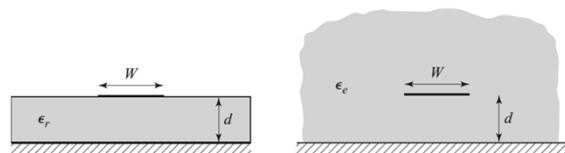
$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{12d}{w}}}$$

Referencia: Microwave Engineering David M. Pozar

166



## Línea de microcinta – Microstrip line



Siguiendo este mismo modelo, podemos establecer que la impedancia característica  $Z_0$  puede evaluarse como sigue:

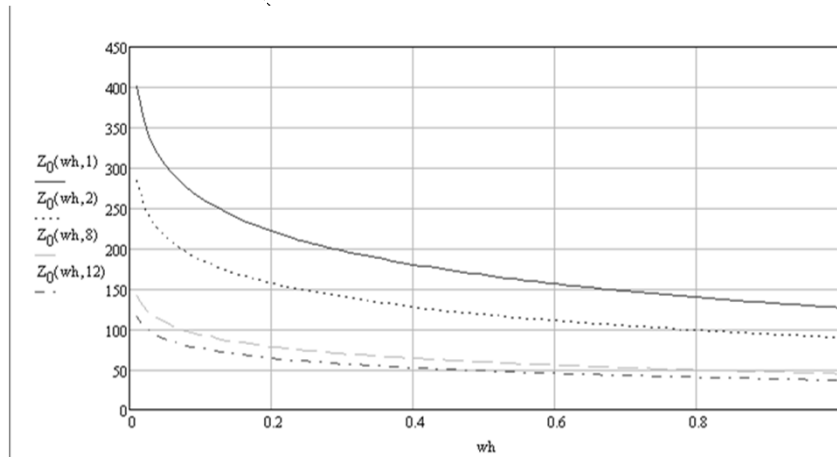
$$Z_0 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_e}} \ln \left( \frac{8h}{w} + \frac{w}{4d} \right) \quad \text{para } \frac{w}{d} \leq 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_e} \left[ \frac{w}{d} + 1.393 + 0.667 \ln \left( \frac{w}{d} + 1.444 \right) \right]} \quad \text{para } \frac{w}{d} \geq 1 \end{array} \right\}$$

167



### Línea de microcinta – Microstrip line

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_e}} \ln \left( \frac{8h}{w} + \frac{w}{4d} \right) \quad \text{para } \frac{w}{d} \leq 1$$

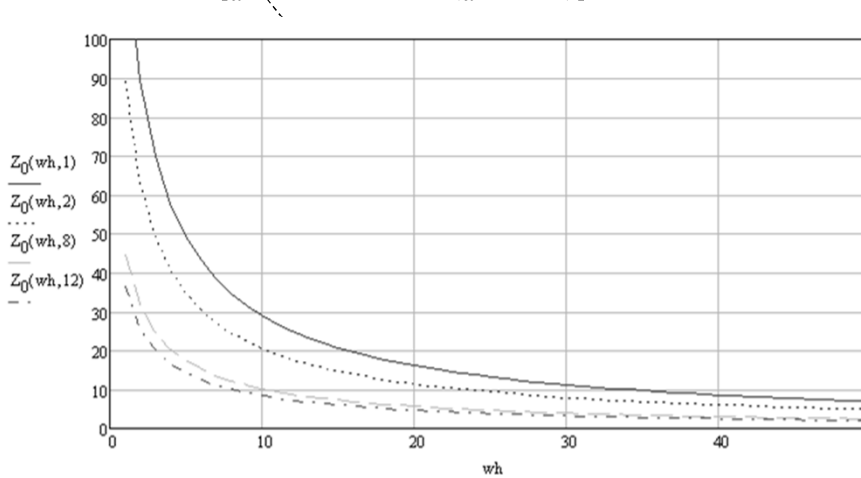


168



### Línea de microcinta – Microstrip line

$$Z_0 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_e} \left[ \frac{w}{d} + 1.393 + 0.667 \ln \left( \frac{w}{d} + 1.444 \right) \right]} \quad \text{para } \frac{w}{d} \geq 1$$



169



### Línea de microcinta – Microstrip line

Para una dada impedancia característica  $Z_0$  y constante dieléctrica  $\epsilon_r$  puede encontrarse la relación  $\frac{w}{d}$ :

$$\frac{w}{d} = \begin{cases} \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} & \text{para } \frac{w}{d} < 2 \\ \frac{2}{\pi} \left[ B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left\{ \ln(B - 1) + 0,39 - \frac{0,61}{\epsilon_r} \right\} \right] & \text{para } \frac{w}{d} > 2 \end{cases}$$

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left( 0,23 + \frac{0,11}{\epsilon_r} \right) \quad B = \frac{377\pi}{2Z_0\sqrt{\epsilon_r}}$$

170



### Línea de microcinta – Microstrip line

Las pérdidas en la línea, considerando el modelo quasi TEM, donde las líneas de campo se encuentran parcialmente en el aire y en el dieléctrico, pueden estimarse como sigue:

$$\alpha_d = \frac{k_0 \epsilon_r (\epsilon_e - 1) \tan \delta}{2\sqrt{\epsilon_e} (\epsilon_r - 1)} \frac{N_p}{m} \quad \text{pérdidas en el dielectrico}$$

$$\alpha_c = \frac{R_s}{Z_0 w} \frac{N_p}{m} \quad R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \quad \text{pérdidas en el cobre}$$

171



## Línea de microcinta – Microstrip line

Ejemplo: Diseñar una línea microstrip de  $Z_0 = 50 \Omega$  y encontrar la longitud de la misma para producir un retardo de fase de  $270^\circ$  a 10 Ghz. Utilizaremos un sustrato de aluminio. Calcular las pérdidas.

$$\epsilon_r = 9,9 \quad \tan\delta = 0.001 \quad d = 0.5 \text{ mm}$$

$$\frac{w}{d} = \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} \quad \text{para } \frac{w}{d} < 2 \quad A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}} \left( 0,23 + \frac{0,11}{\epsilon_r} \right)$$

$$\frac{w}{d} = 0,966 \quad \text{cumple con la relacion } \frac{w}{d} < 2 \text{ por lo tanto } w = 0,483 \text{ mm}$$

Ahora debemos determinar la longitud  $l$  de la línea

$$\beta * l = 270^\circ \quad \beta = \sqrt{\epsilon_e} \beta_0 \quad l = 8,716 \text{ mm}$$

172



## Línea de microcinta – Microstrip line

Calculo de las pérdidas

$$\alpha_d = \frac{k_0 \epsilon_r (\epsilon_r - 1) \tan\delta}{2\sqrt{\epsilon_e} (\epsilon_r - 1)} \frac{N_p}{m} \quad \text{pérdidas en el dielectrico}$$

$$\alpha_d = 0.256 \frac{N_p}{m} \quad \alpha_d = 0,022 \frac{db}{cm}$$

$$\alpha_c = \frac{R_s}{Z_0 w} \frac{N_p}{m} \quad R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \quad \text{pérdidas en el cobre}$$


$$\alpha_c = 0.011 \frac{N_p}{cm} \quad \alpha_c = 0,093 \frac{db}{cm}$$

Por lo general pérdidas en el cobre son superiores a las del dieléctricos

$$\alpha = 0,105 \frac{db}{cm} \quad \text{pérdidas totales}$$

173



 Línea de microcinta – Microstrip line

TX Line

TXLINE 2003 - Microstrip

Microstrip | Stripline | CPW | CPW Ground | Round Coaxial | Slotline | Coupled MSLine | Coupled Stripline

Material Parameters:

Dielectric: Alumina  
 Dielectric Constant: 9.9  
 Loss Tangent: 0.001

Conductor: Copper  
 Conductivity: 5.88E+07 S/m

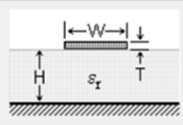
AWR

Electrical Characteristics:


Impedance: 50 Ohms  
 Frequency: 10 GHz  
 Electrical Length: 270 deg  
 Phase Constant: 31495.9 deg/m  
 Effective Diel. Const.: 6.87929  
 Loss: 0.0857532 dB/cm

Physical Characteristic:

Physical Length (L): 8.57256 mm  
 Width (W): 0.483754 mm  
 Height (H): 0.5 mm  
 Thickness (T): 0.001 mm



174

 Línea de microcinta – Microstrip line

Felicitaciones llegaste al fin de la segunda parte!

175