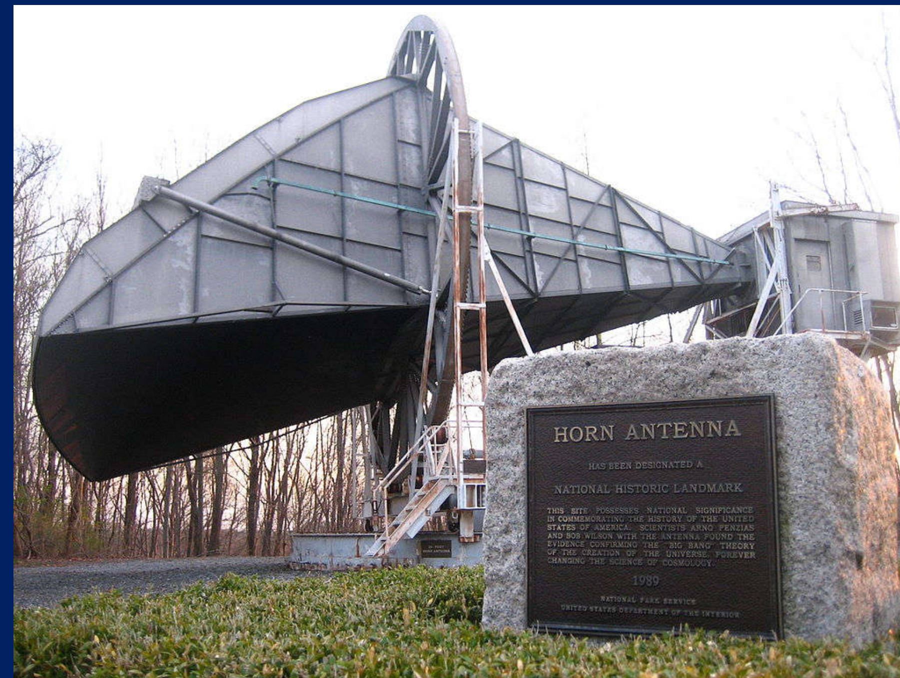
Laboratorio De Telecomunicaciones

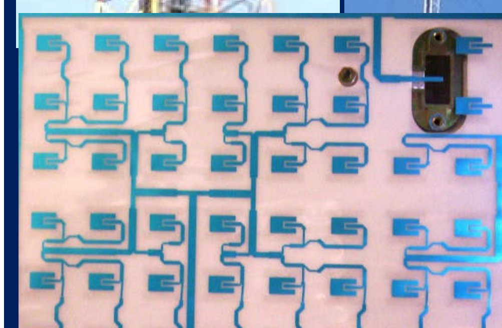
ELECTROMAGNETISMO 2

LABORATORIO DE TELECOMUNICACIONES
DEEC - FACET - UNT

! BIENVENIDOS !

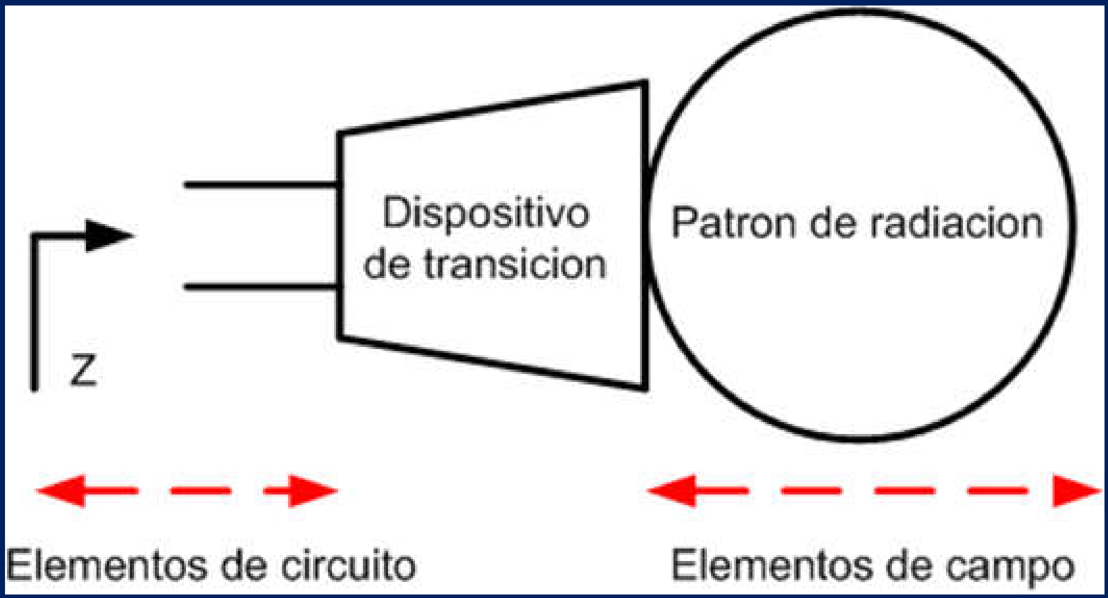
Antenas


HORN ANTENNA
HAS BEEN DESIGNATED A
NATIONAL HISTORIC LANDMARK
THIS SITE POSSESSES NATIONAL SIGNIFICANCE IN COMMEMORATING THE HISTORY OF THE UNITED STATES OF AMERICA. SCIENTISTS ARNO PENZIAS AND BOB WILSON WITH THE ANTENNA FOUND THE EVIDENCE CONFIRMING THE "BIG BANG" THEORY OF THE CREATION OF THE UNIVERSE, FOREVER CHANGING THE SCIENCE OF COSMOLOGY.
1989
NATIONAL PARK SERVICE
UNITED STATES DEPARTMENT OF THE INTERIOR

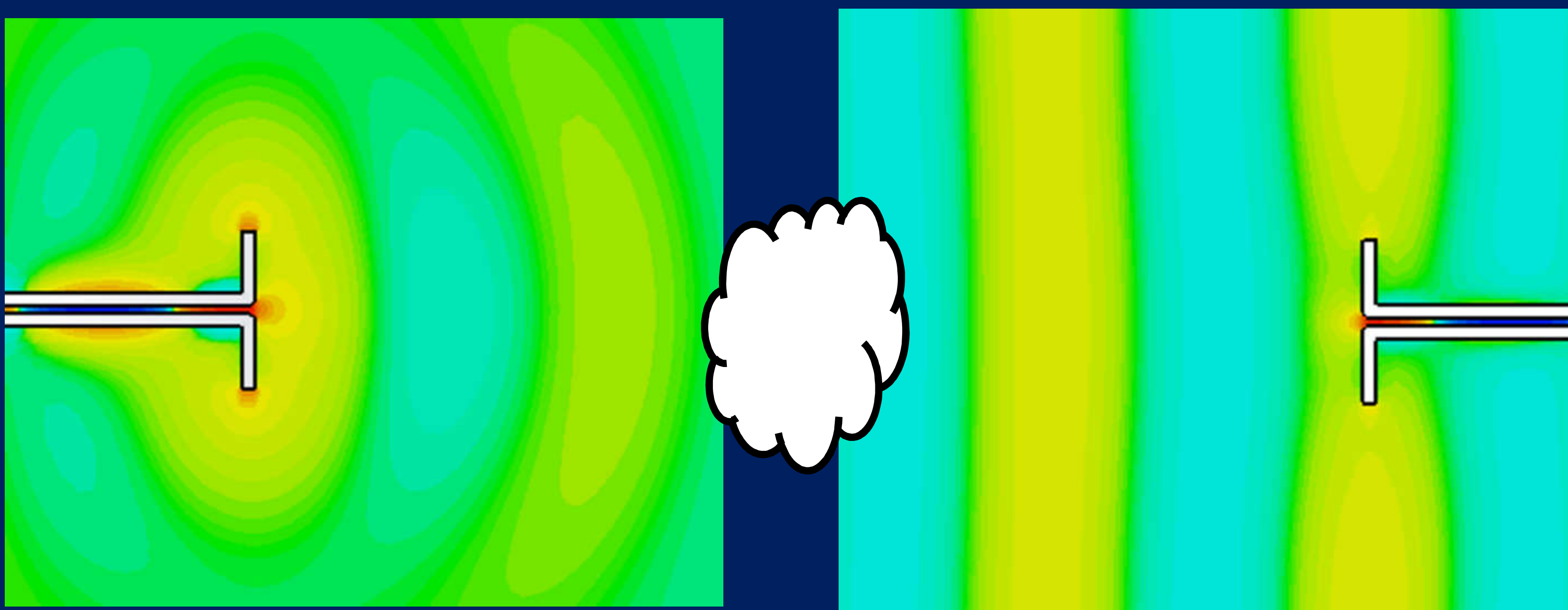


Antenas

- Una antena puede definirse como un dispositivo de transición entre una onda guiada y el espacio libre un conversor de electrones a fotones
- (o viceversa si se trata de una antena receptora)
- $\boldsymbol{Ecuacion\ basica\ de\ radiacion} \qquad \dot{I}L = Q\dot{v}$



Antenas



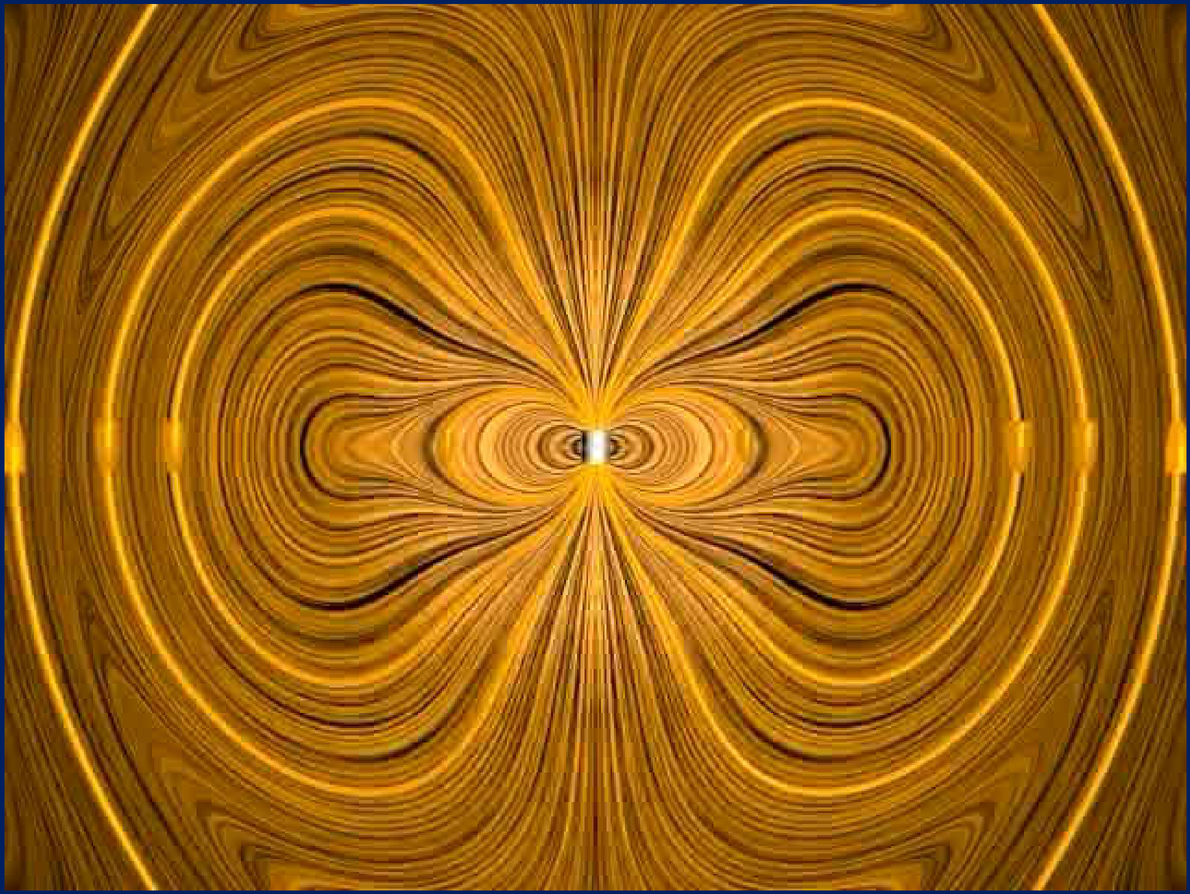
Antenas

- ***Ecuacion basica de radiacion*** $\dot{I}L = Q\dot{v}$

- I = corriente variable en el tiempo, A/s
- L = longitud de un elemento de corriente, m
- Q = carga, C
- v = velocidad variable en el tiempo (aceleración), m/s^2

- De este modo corrientes variables en el tiempo radian y cargas aceleradas también,
- para variaciones armónicas estacionarias nos enfocamos en la corriente y para situaciones pulsantes o transitorias en la carga

Antenas



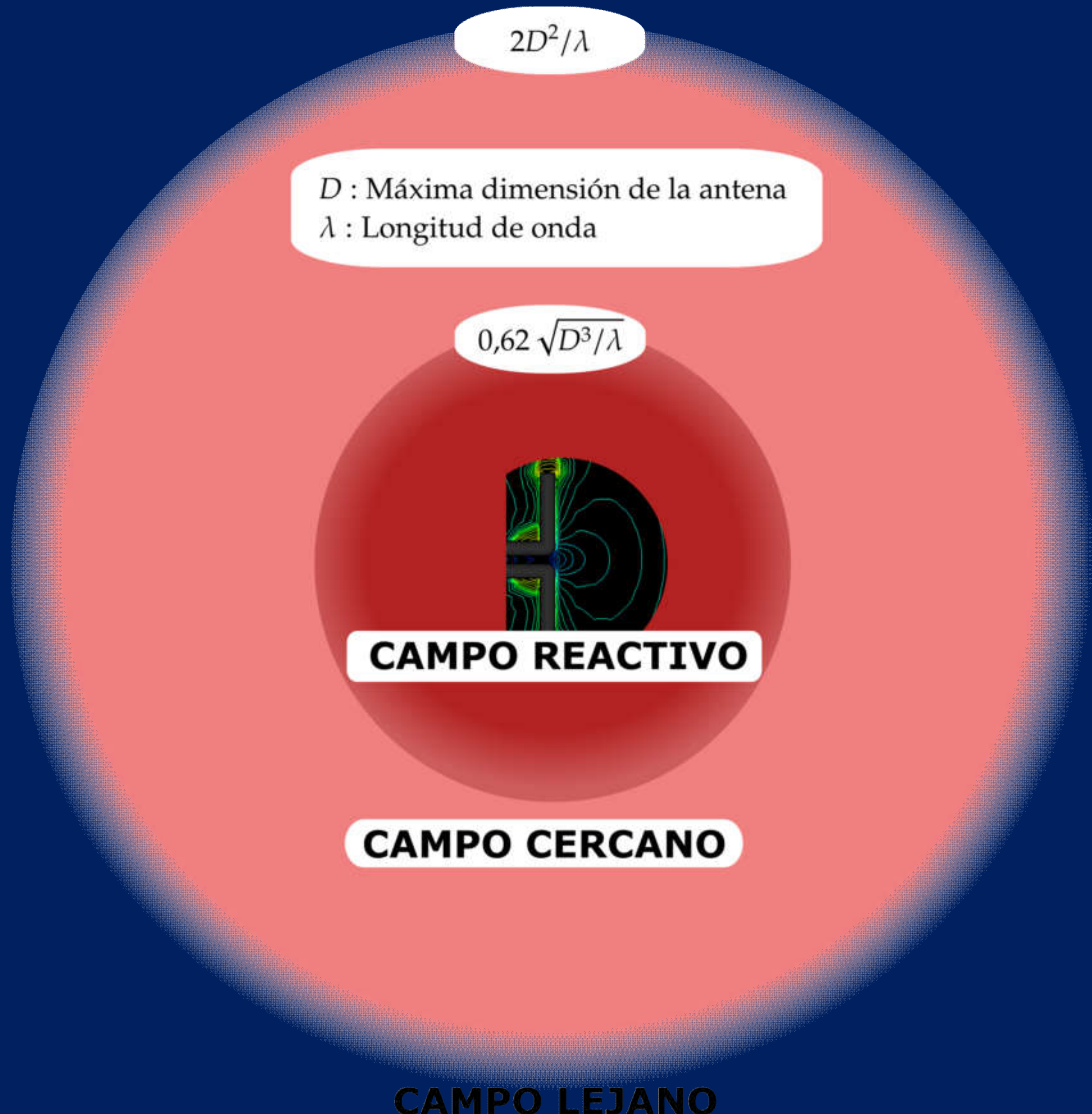
Campos cercanos y lejanos

- El campo de radiación que se encuentra cerca de una antena no es igual que el campo de radiación que se encuentra a gran distancia
- El término campo cercano se refiere al patrón de campo que está cerca de la antena, y el término campo lejano se refiere al patrón de campo que está a gran distancia

- Durante la mitad del ciclo, la potencia se irradia desde una antena, y parte de la misma se guarda temporalmente en el campo cercano. Durante la segunda mitad del ciclo, la potencia que está en el campo cercano regresa a la antena.
- Esta acción es similar a la forma en que un inductor guarda y suelta energía. Por tanto, el campo cercano se llama a veces campo de inducción ***(región de Fresnel)***.

Campos cercanos y lejanos

•



Campos cercanos y lejanos

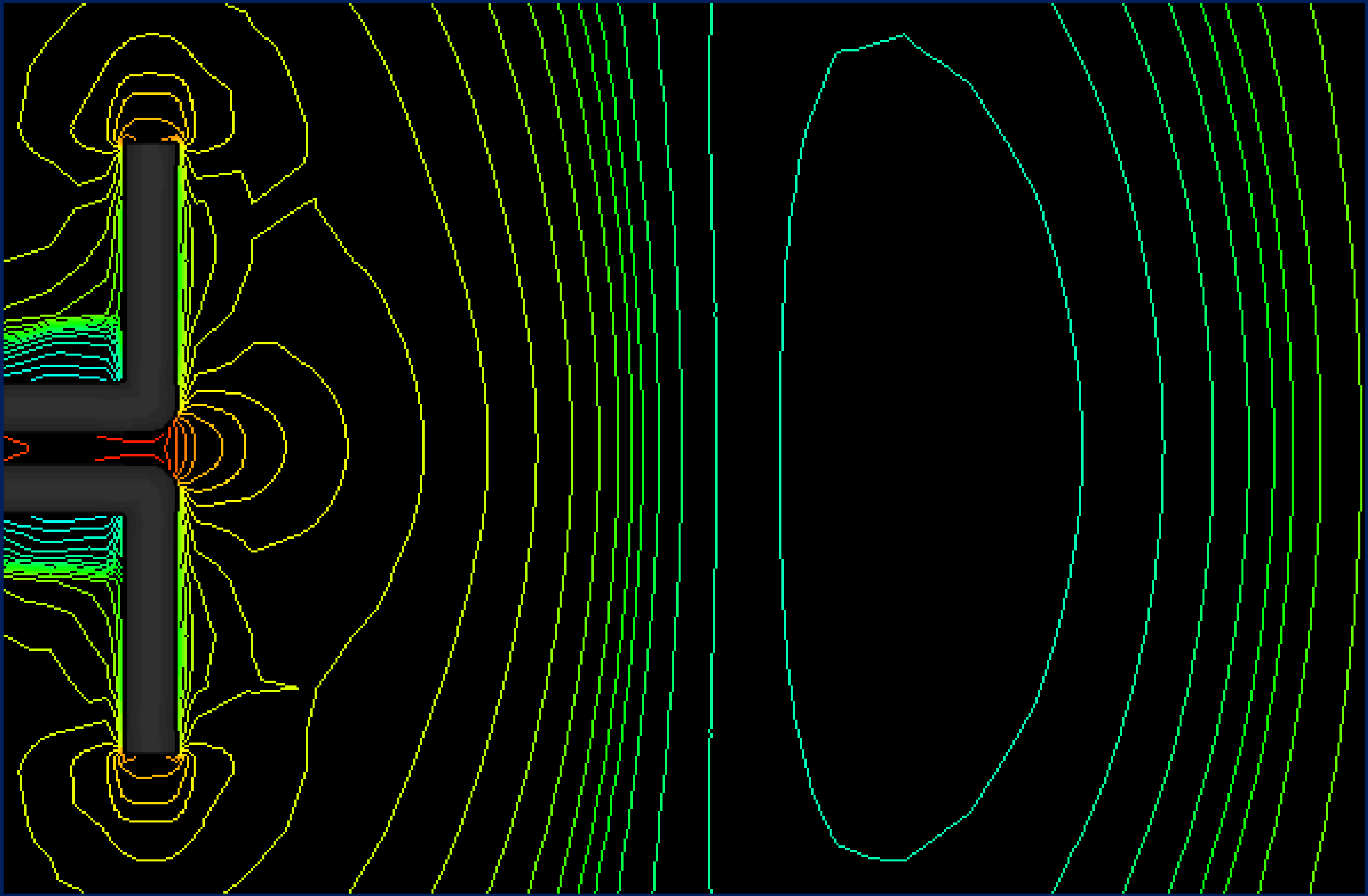
- La potencia que alcanza el campo lejano continúa irradiando lejos y nunca regresa a la antena. Por tanto, el campo lejano se llama campo de radiación ***(región de Fraunhofer)***.

- La potencia de radiación, por lo general, es la más importante de las dos; por consiguiente, los patrones de radiación de la antena, se dan para el campo lejano.

- La frontera entre los campos puede definirse, arbitrariamente, como el área dentro de una distancia R, de la antena (campo cercano), en donde λ es la longitud de onda y D el diámetro de la antena en las mismas unidades.

$$R = 2 * \frac{D^2}{\lambda}$$

Campos cercanos y lejanos



Pattern – Patrones de radiación

- La observación de los patrones de radiación se realiza en distancias lejanas (R>>λ) de modo que se puede considerar los *campos enteramente transversales, independientes de la distancia R siendo el flujo de potencia (vector de Poynting) radial*

- Al ser un plano TEM, R no influye en la forma, claro que si en la atenuación.

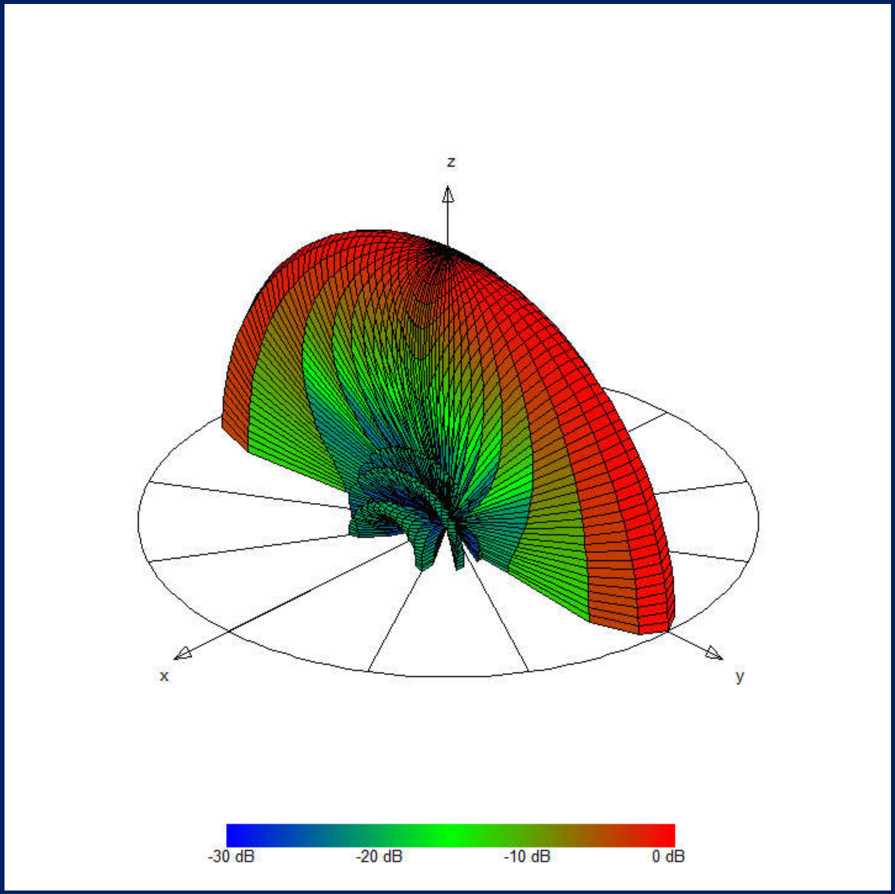
Patrón de radiación

Los patrones de radiación son tridimensionales y consideran las variaciones de campo (o potencia) en función de las coordenadas esféricas θ y Φ.

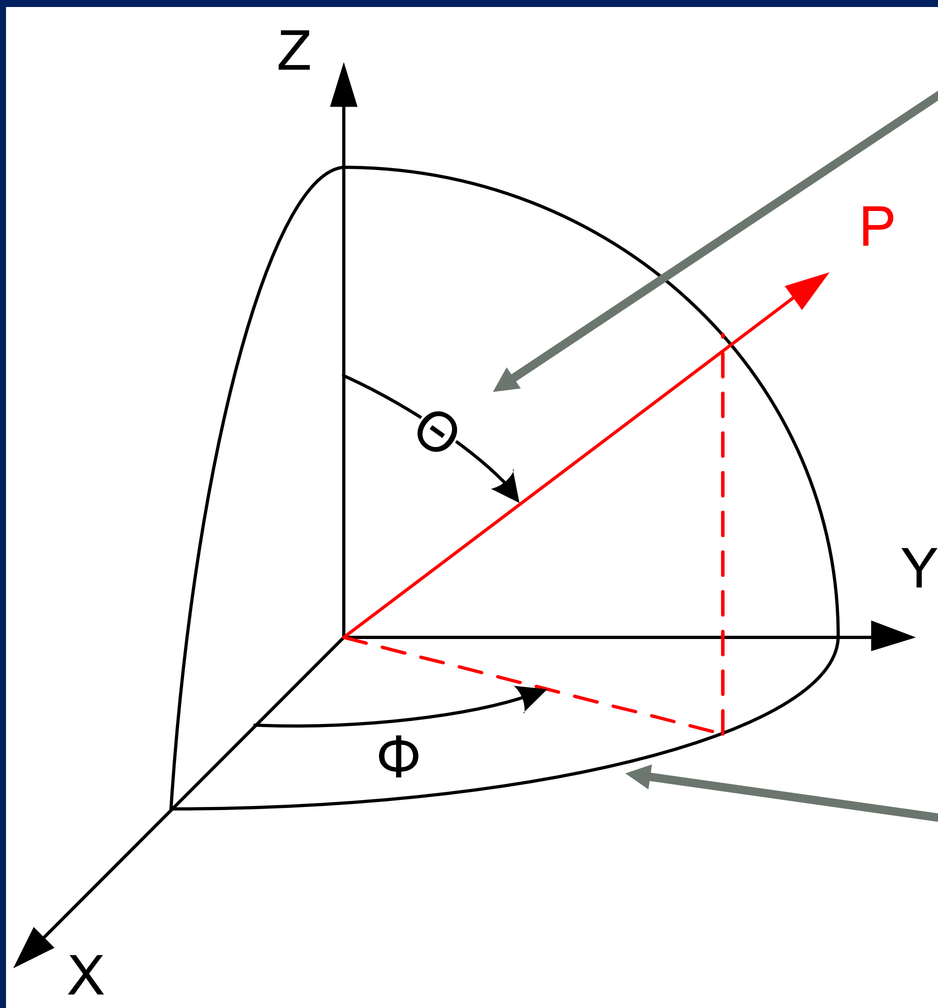
Para especificar completamente el patrón de radiación respecto a la intensidad de campo y la polarización se requiere definir:

$$\boldsymbol{E_\theta(\theta,\varphi)} \qquad \boldsymbol{E_\varphi(\theta,\varphi)} \qquad \boldsymbol{\delta_\theta(\theta,\varphi)} \qquad \boldsymbol{\delta_\varphi(\theta,\varphi)}$$

Pattern – Patrones de radiación



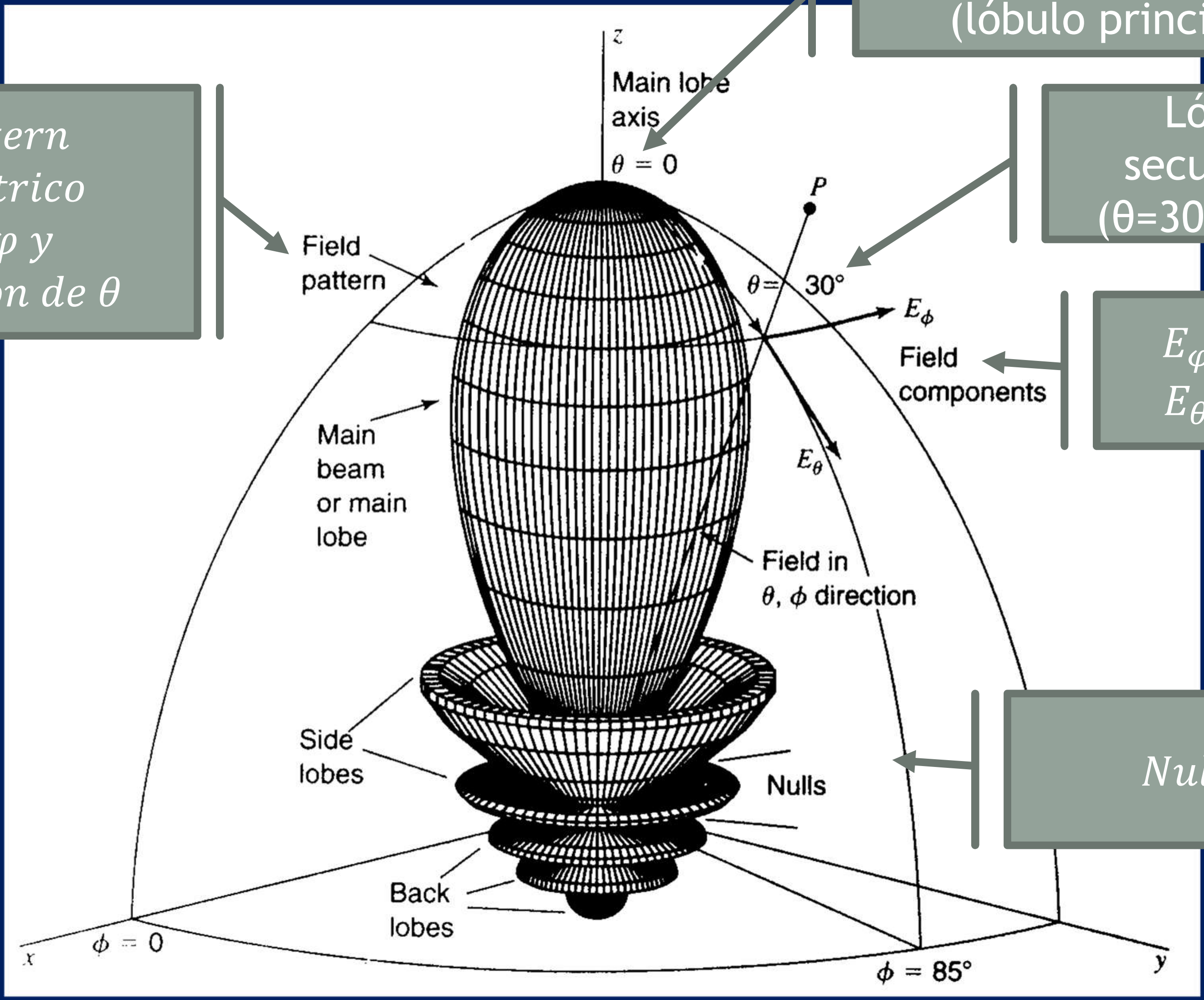
Sistema de coordenadas



Angulo de Elevación

Angulo de Azimuth

Patrón de radiación



Máximo de radiación (lóbulo principal)

Pattern simetrico en φ y funcion de θ

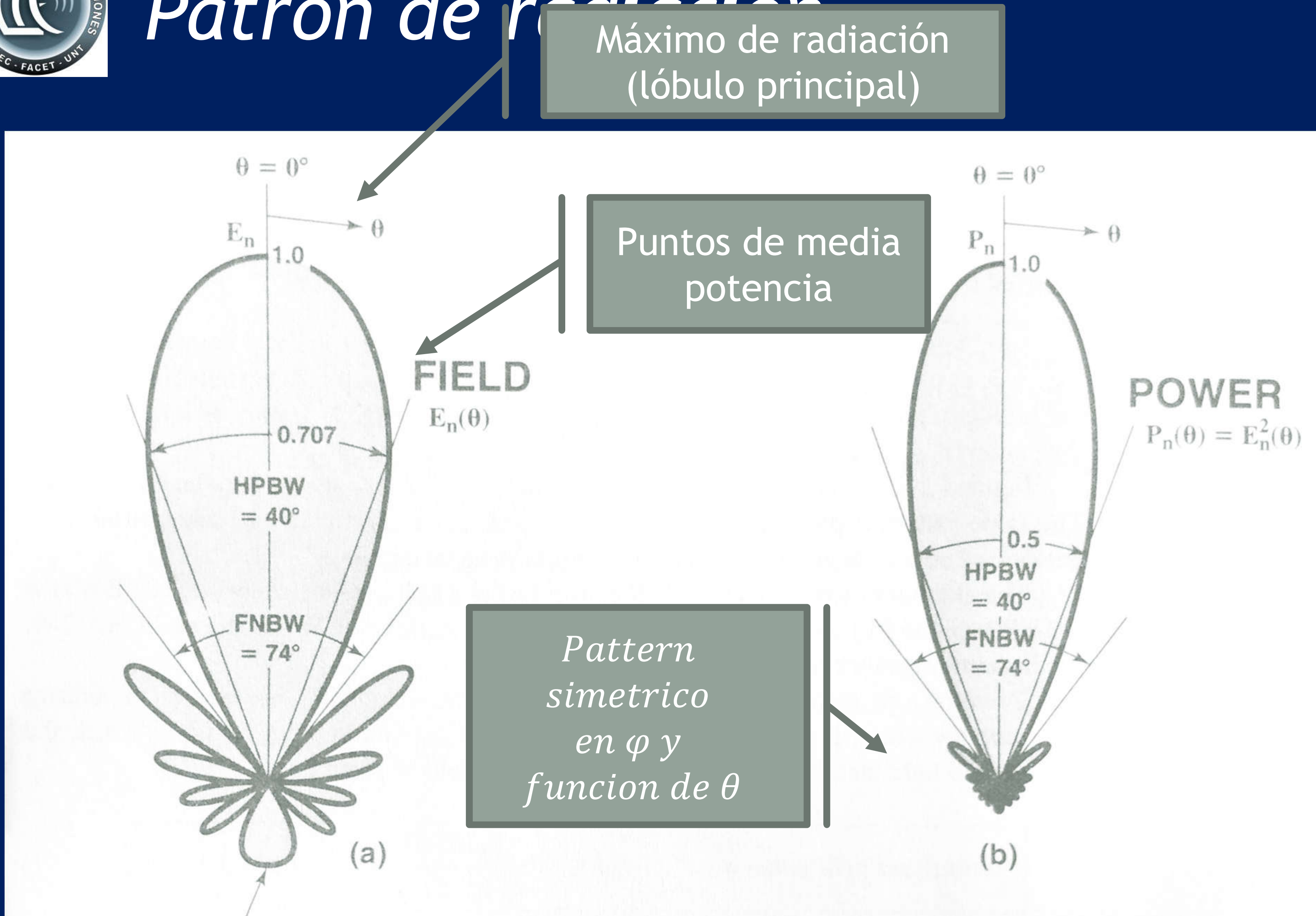
Lóbulos secundarios (θ=30° Φ=85°)

$E_\varphi = f(\theta, \varphi)$

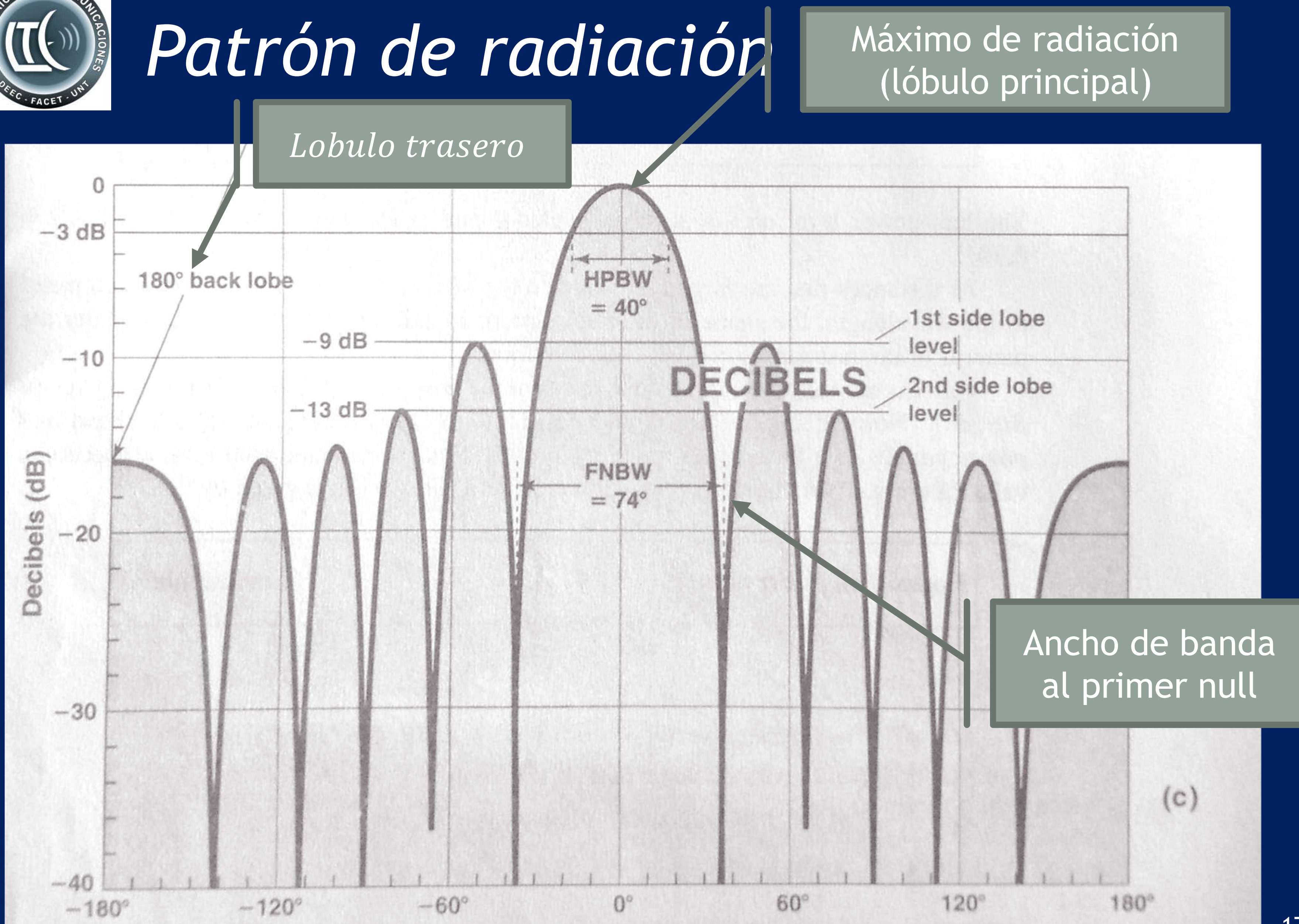
$E_\theta = f(\theta, \varphi)$

Nulls

Patrón de radiación

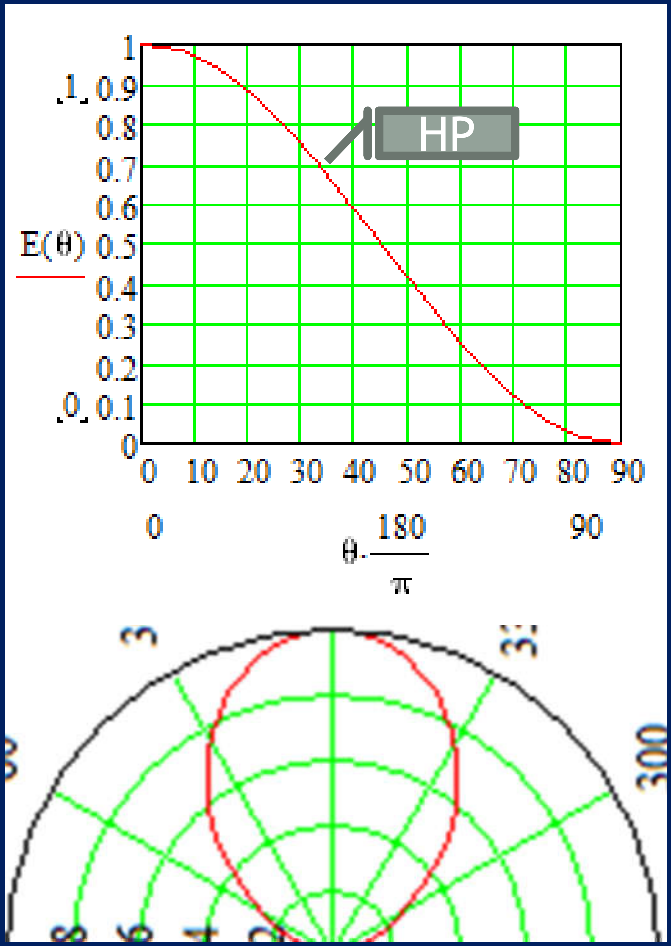


Patrón de radiación



Patrón de radiación

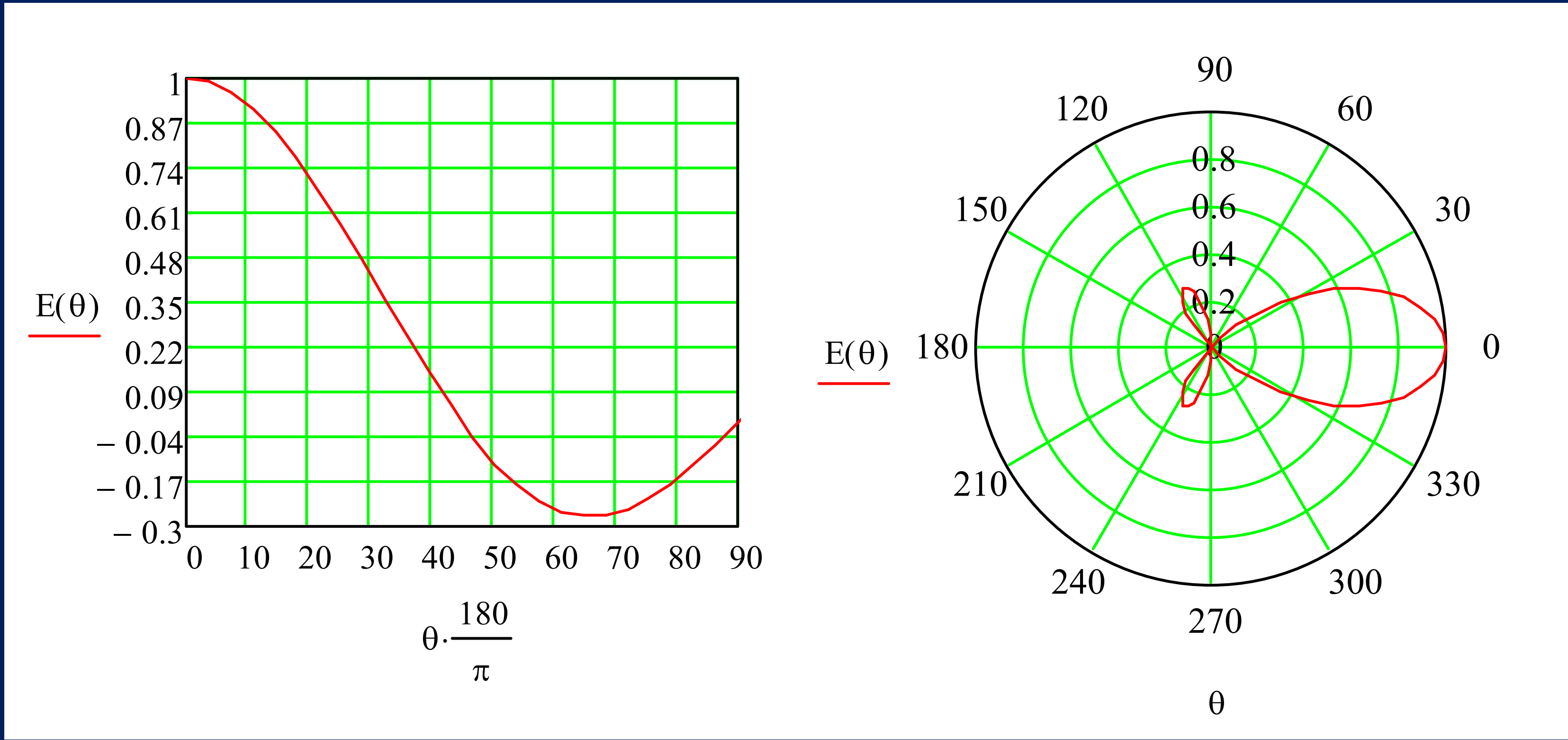
Una antena tiene un diagrama de radiación $E_\theta = cos^2\theta$, encontrar el ancho de banda de media potencia 0° < θ < 90°. (Utilizar mathlab, mathcad o similar)



¿Cómo será el patrón de radiación 3D?

Patrón de radiación

Una antena tiene un diagrama de radiación $E_\theta = cos\theta cos2\theta$, encontrar el ancho de banda de media potencia y el ancho de banda entre nulls 0° < θ < 90°



Patrón de radiación

Aunque las características de radiación de una antena implican campos vectoriales en tres dimensiones, varias magnitudes escalares nos proporcionan información útil

Ángulos de media potencia

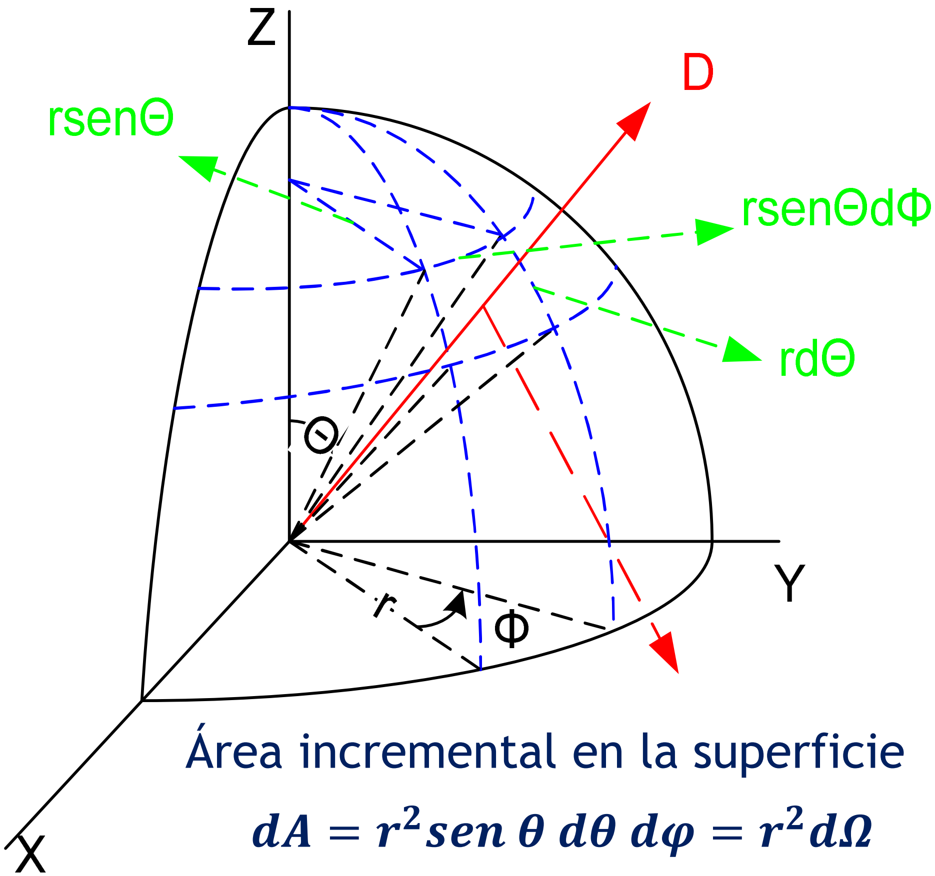
Área del haz Ω_A

Eficiencia del haz E_M

Directividad D o Ganancia G

Apertura efectiva A_e

Ω_A *área del haz*



Área incremental en la superficie

$$dA = r^2 sen\,\theta\; d\theta\; d\varphi = r^2 d\Omega$$

$d\Omega$ es el ángulo solido subtendido por el área *d*A (estereoradián)

$$1\;rad^2 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 = 3283\;deg^2$$

$$4\pi\;sr = 4\pi * 3283 = 41253\;deg^2$$

Angulo solido de una esfera

Ω_A área del haz

Ω_A ángulo solido de una antena, esta dado por la integral del patrón de potencia normalizado sobre una esfera

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_n(\theta, \phi) sen\theta \, d\theta d\phi \quad \text{(sr)}$$

$$Potencia\ radiada\ por\ la\ antena\ = \Omega_A P(\theta, \phi) \quad \text{W}$$

$$Si\ el\ haz\ esta\ concentrado\ una\ buena\ aproximacion\ es$$

$$\Omega_A \cong \theta_{HP} \phi_{HP}$$

Ω_A *área del haz*

Calcular el ángulo solido de una antena Ω_A si el patrón de radiación es $E_\theta = cos^2\theta$ si 0° < θ < 90°

$$E(\theta) = \cos^2(\theta) \qquad \Omega_A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(\theta)\sin(\theta)\,d\theta d\phi \qquad \Omega_A = 1.257\ sr$$

Aproximar con los ángulos de media potencia

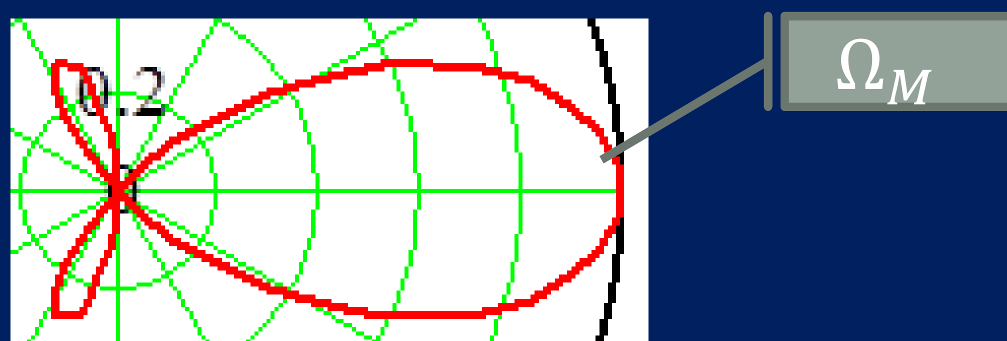
6% de diferencia

$$HP_\theta = 66º \qquad \Omega_A = (HP_\theta)^2 \qquad \Omega_A = 4.356 * 10^3 \qquad \frac{\Omega_A}{3283} = 1.327\ sr$$

Eficiencia del haz

Sera la razón del ángulo solido del haz principal Ω_M al Ω_A de la antena

$$\text{Eficiencia del haz} = \frac{\Omega_M}{\Omega_A}$$



Directividad

$$Directividad\ es\ la\ razon\ de\ la\ maxima\ densidad\ de\ potencia\ al\ valor\ promedio\ observado\ sobre\ una\ esfera\ en\ condiciones\ de\ campo\ lejano$$

$$D = \frac{P(\theta,\phi)_{max}}{P(\theta,\phi)_{av}}$$

$$Densidad\ de\ potencia\ promedio\ P(\theta,\phi)_{av} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P(\theta,\phi) sen\theta\ d\theta d\phi\ \frac{w}{sr}$$

$$D = \frac{P(\theta,\phi)_{max}}{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P(\theta,\phi) sen\theta\ d\theta d\phi} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{P(\theta,\phi)}{P(\theta,\phi)_{max}} sen\theta\ d\theta d\phi}$$

$$\boxed{D = \frac{4\pi}{\Omega_A}}$$

$$¿Cuanto\ vale\ la\ directividad\ de\ una\ fuente\ que\ radia\ en\ un\ solo\ hemisferio?$$

Ganancia

Ganancia será igual al producto de la directividad por el factor de eficiencia de la antena

$$G = k * D$$

Suele expresarse como referida a la ganancia de una antena de referencia, por lo general el radiador isotrópico o el dipolo de media onda

$$db_i \; o \; db_d$$

Ganancia

Calcular la directividad de una antena cuyo pattern es:

$$E_{(\theta,\phi)} = sen\,\theta\; sen\,\phi \qquad 0 < \theta, \phi < \pi$$

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin^3(\theta)\sin^2(\phi)d\theta d\phi} \qquad\qquad D = 6$$

Calcular la directividad a partir de los ángulos de media potencia y evaluar la diferencia

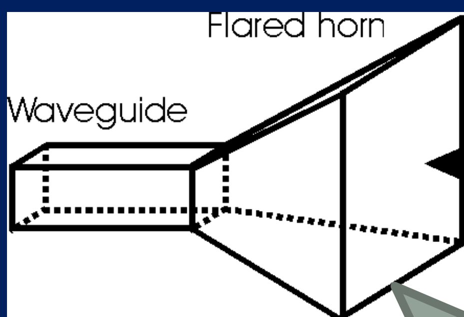
Patrón de radiación

Investigar tipos de antenas y sus especificaciones

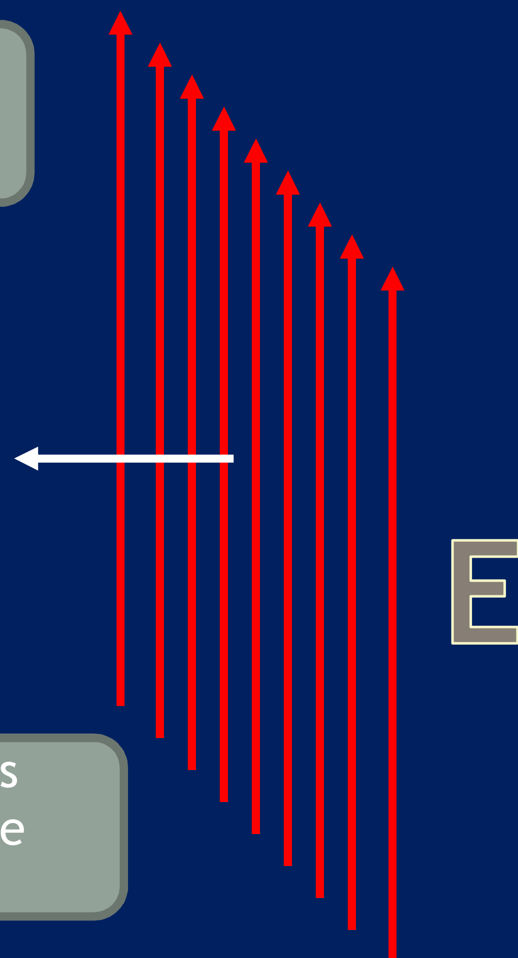
Antena como apertura

Supongamos una antena inmersa en el campo de una onda plana uniforme

Si el área de la antena es A
¿cual es la potencia capturada?



$$P = \frac{E^2}{\eta} A$$



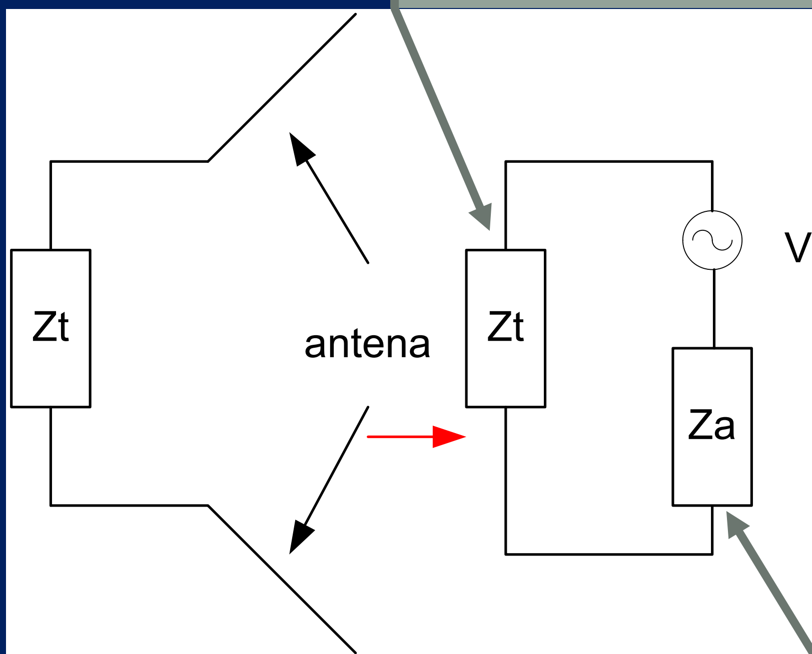
Considerando que el campo se anula en los bordes, entonces habrá un área efectiva de captura menor a la física

Antena como apertura

Definimos el siguiente modelo circuital:

La antena colecta energía y la entrega en Zt

Impedancia de terminación



Impedancia de antena

$$Z_t = R_T + jX_T$$

$$Z_a = R_A + jX_A$$

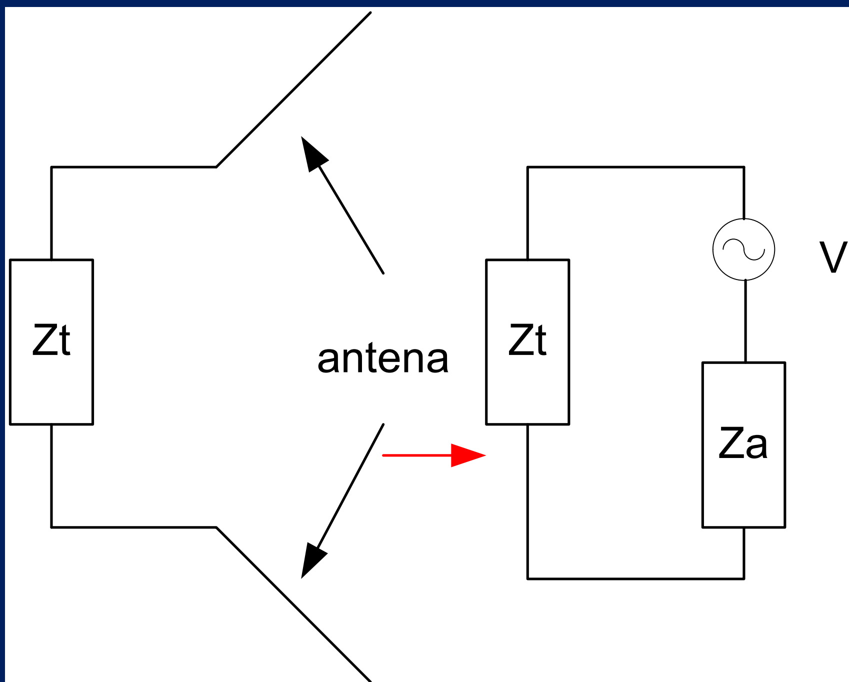
$$R_A = R_r + R_L$$

Resistencia de radiación

Resistencia de perdidas

Antena como apertura

La antena desarrollara una potencia en la carga: $W = I^2 R_T$



$$I = \frac{V}{\sqrt[2]{(R_T + R_r + R_L)^2 + (X_A + X_T)^2}}$$

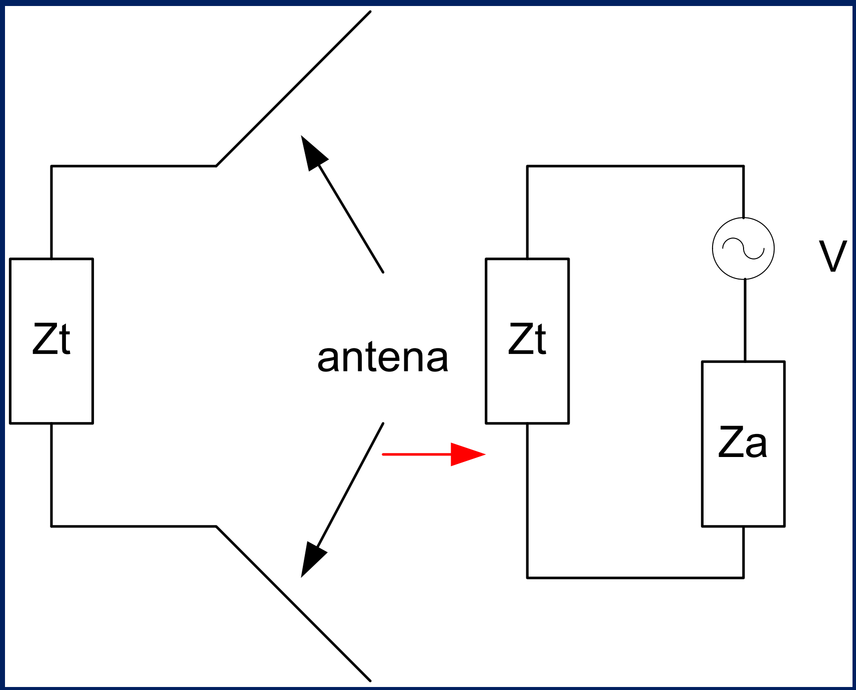
$$W = \frac{V^2 * R_T}{(R_T + R_r + R_L)^2 + (X_A + X_T)^2}$$

La relación entre la potencia incidente P y la desarrollada en la carga W será la Apertura efectiva

Antena como apertura

Apertura efectiva

$$A_{ef} = \frac{W}{P}$$



Consideremos las condiciones para desarrollar la máxima potencia en la carga

$$R_L = 0 \;;\; R_T = R_r \;;\; X_A = \overline{X_T}$$

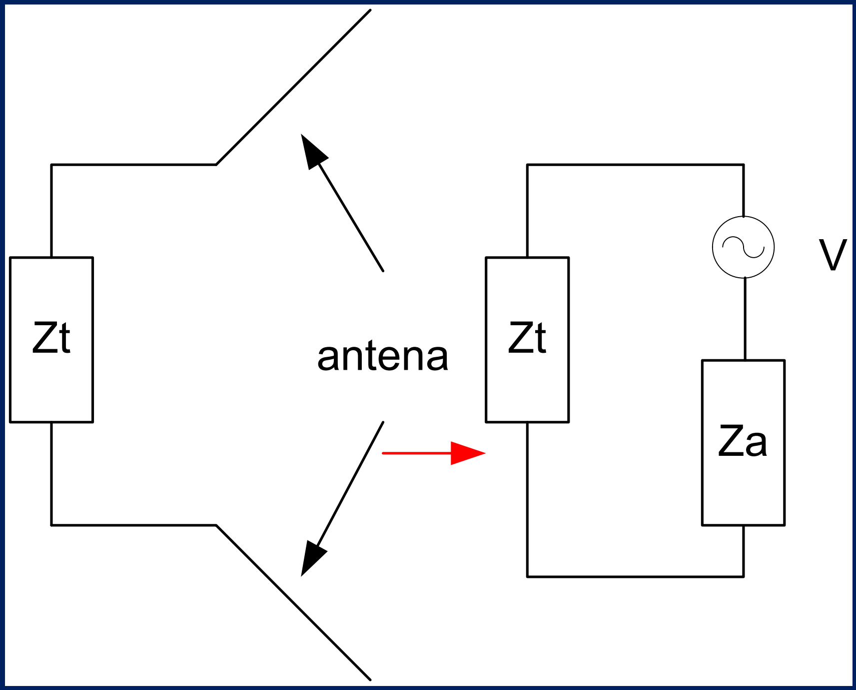
$$W_{max} = \frac{V^2}{4R_r} = \frac{V^2}{4R_T}$$

Podemos definir una Apertura efectiva máxima $$A_{efm} = \frac{V^2}{4PR_r}$$

Antena como apertura

Apertura Scattering

Parte de la potencia incidente se disipa como perdidas y parte se radia nuevamente al espacio



$$W_s = I^2 * R_r$$

$$W_s = \frac{V^2 * R_r}{(R_T + R_r + R_L)^2 + (X_A + X_T)^2}$$

Podemos definir una Apertura Scattering

$$A_s = \frac{W_s}{P} = \frac{V^2 * R_r}{P[(R_T + R_r + R_L)^2 + (X_A + X_T)^2]}$$

Antena como apertura

Si analizamos la Apertura Scattering vemos lo siguiente :

$$suponemos\ las\ perdidas\ despreciables\ R_L = 0$$

$$A_s = \frac{V^2 * R_r}{P[(R_T + R_r + R_L)^2 + (X_A + X_T)^2]}$$

Cortocircuito resonante

$$R_T = 0\ ;\ X_A = \overline{X_T}$$

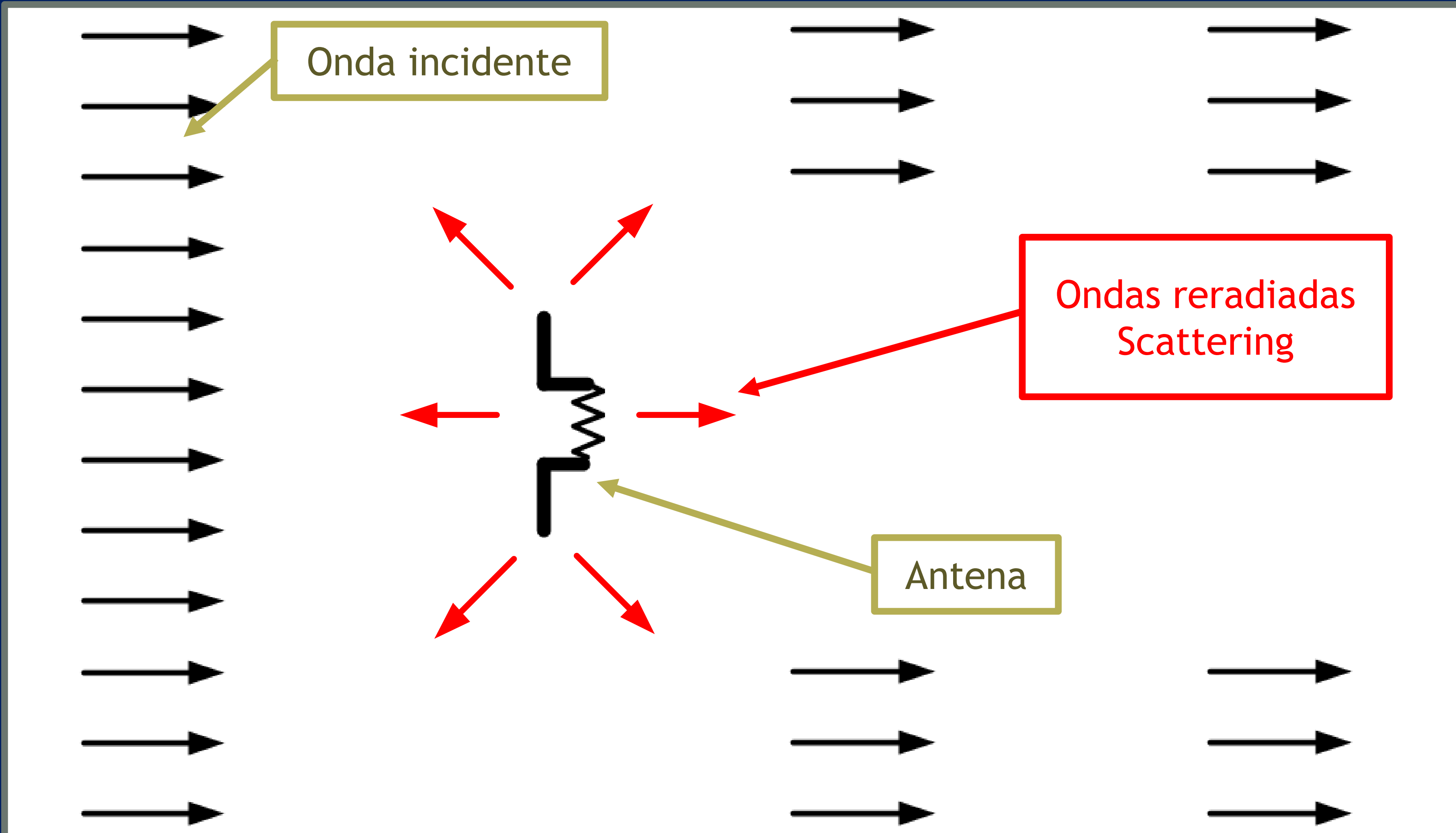
$$A_s = \frac{V^2}{PR_r}$$

Máxima Transferencia

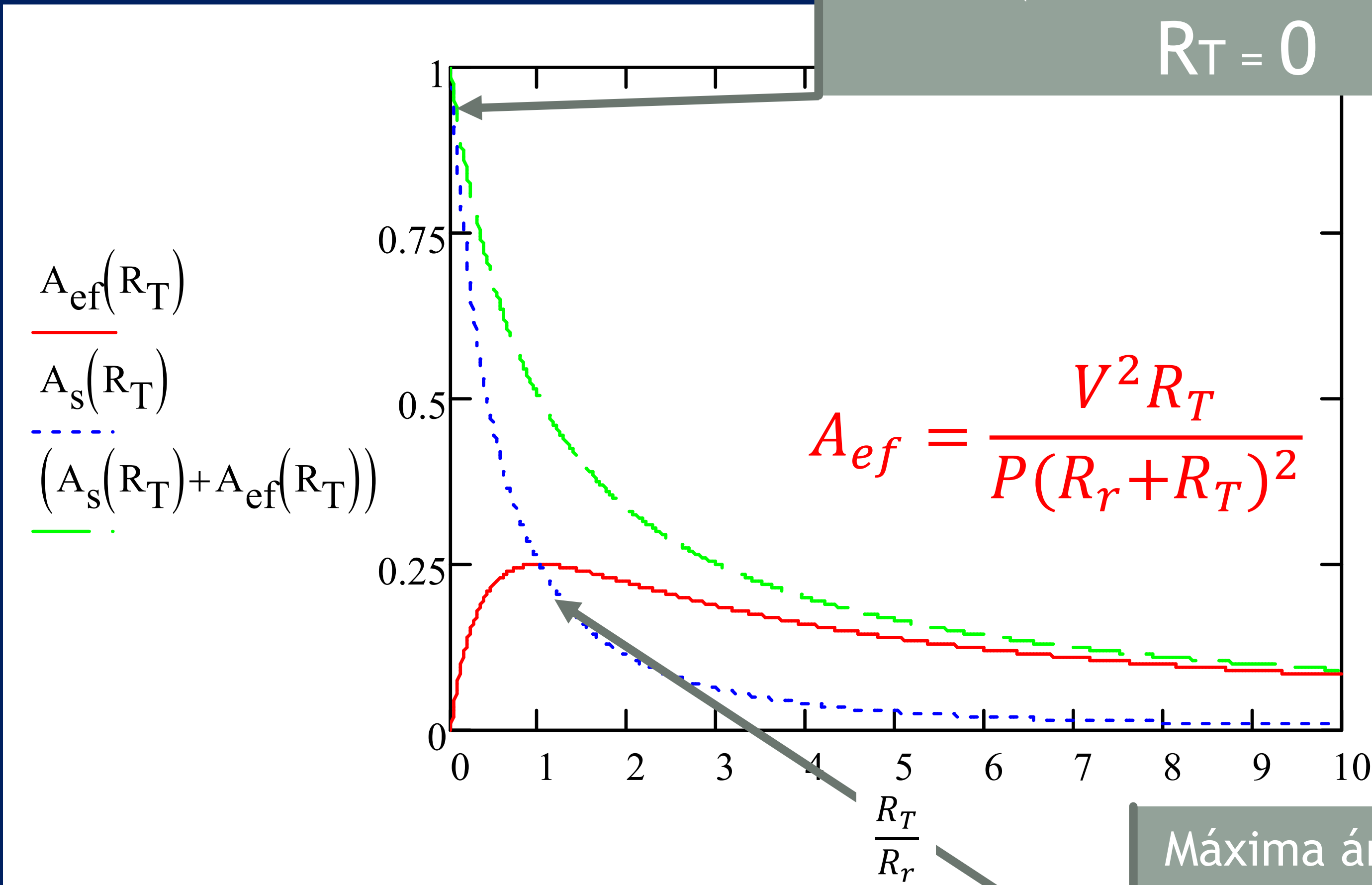
$$R_T = R_r;\ X_A = \overline{X_T}$$

$$A_s = \frac{V^2}{4PR_r} = A_{efmax}$$

Antena como apertura



Antena como apertura



Antena re radia toda la energía (director o reflector)

$R_T = 0$

$$A_{ef} = \frac{V^2 R_T}{P(R_r+R_T)^2}$$

Máxima área efectiva

$R_T = R_r$

Antena como apertura

Estas tres formas de apertura están relacionadas con las tres formas en que la energía captada por la antena puede ser dividida

En la carga

Disipada como calor en la antena

Re radiándose al espacio


RADIO MIRRORS
Passive Microwave Repeaters
Can Have Over 125-dB Gain

Antena como apertura

Ganancia y Área efectiva se relacionan de tal manera que:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{A_{efm1}}{A_{efm2}}$$

A mayor Área efectiva, mayor potencia disipada en R_t, mayor Ganancia

Antena como apertura

Consideremos un Dipolo Corto $(\lambda \gg L)$

$$A_{efmDC} = \frac{3}{8\pi}\lambda^2 \qquad G_{DC} = \frac{3}{2}$$

Entonces podemos determinar el área efectiva de una Radiador isotrópico $G_{RI} = 1$

$$\frac{G_{RI}}{G_{DC}} = \frac{A_{efRI}}{A_{efDC}} \qquad A_{efRI} = \frac{G_{RI}}{G_{DC}} * A_{efDC} \qquad \boxed{A_{efRI} = \frac{1}{4\pi}\lambda^2}$$

Antena como apertura

Entonces podemos calcular la ganancia de una antena con respecto al RI, a partir del A_{ef}

$$\boxed{G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{ef}}$$

¿Cuál es la apertura efectiva máxima de una antena de microondas con D=900, si la frecuencia es de 3 Ghz?

$$A_{efm} = 0{,}716\ m^2$$

Antena como apertura

Calculo del enlace, Ecuación de Friis

Un RI genera un vector de Poynting $P = \frac{W_{tx}}{4\pi R^2}$

Considerando la ganancia de la antena Tx $P = \frac{W_{tx} \cdot G_{tx}}{4\pi R^2}$

La potencia en el Rx sera: $W_{rx} = P \cdot A_{efrx} = \frac{W_{tx} \cdot G_{tx}}{4\pi R^2} \cdot A_{efrx}$

$Si \quad A_{efrx} = \frac{\lambda^2 \cdot G_{rx}}{4\pi} \qquad entonces \quad W_{rx} = \frac{W_{tx} \cdot G_{tx}}{(4\pi R)^2} \cdot \lambda^2 G_{rx}$

Antena como apertura

Calculo del enlace, Ecuación de Friis

$$W_{rx} = \frac{W_{tx} \cdot G_{tx}}{(4\pi R)^2} \cdot \lambda^2 G_{rx}$$

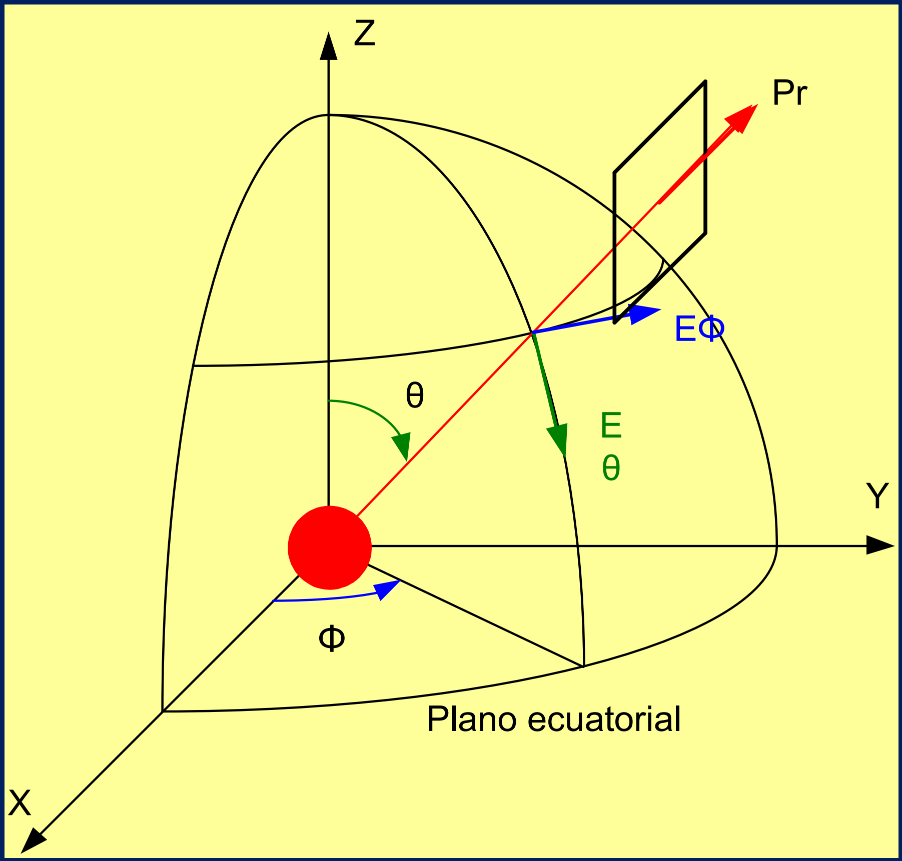
$$W_{rxdb} = W_{txdb} + G_{txdb} + G_{rxdb} + 20 \cdot \log(\lambda) - 20 \cdot log(4\pi R)$$

Tomando la frecuencia en Mhz y la distancia en Km, tenemos la ecuación de enlace

$$\boxed{W_{rxdb} = W_{txdb} + G_{txdb} + G_{rxdb} - 20 \cdot \log(f) - 20 \cdot log(R) - 32.44}$$

Fuentes puntuales

Consideremos el campo lejano generado por una fuente puntual situada en el origen de coordenadas, vemos que el campo generado a una distancia R se puede considerar enteramente transversal y el flujo de potencia radial.

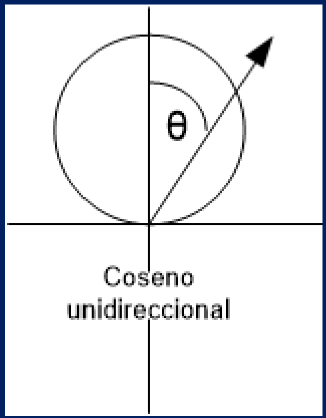


Fuentes puntuales

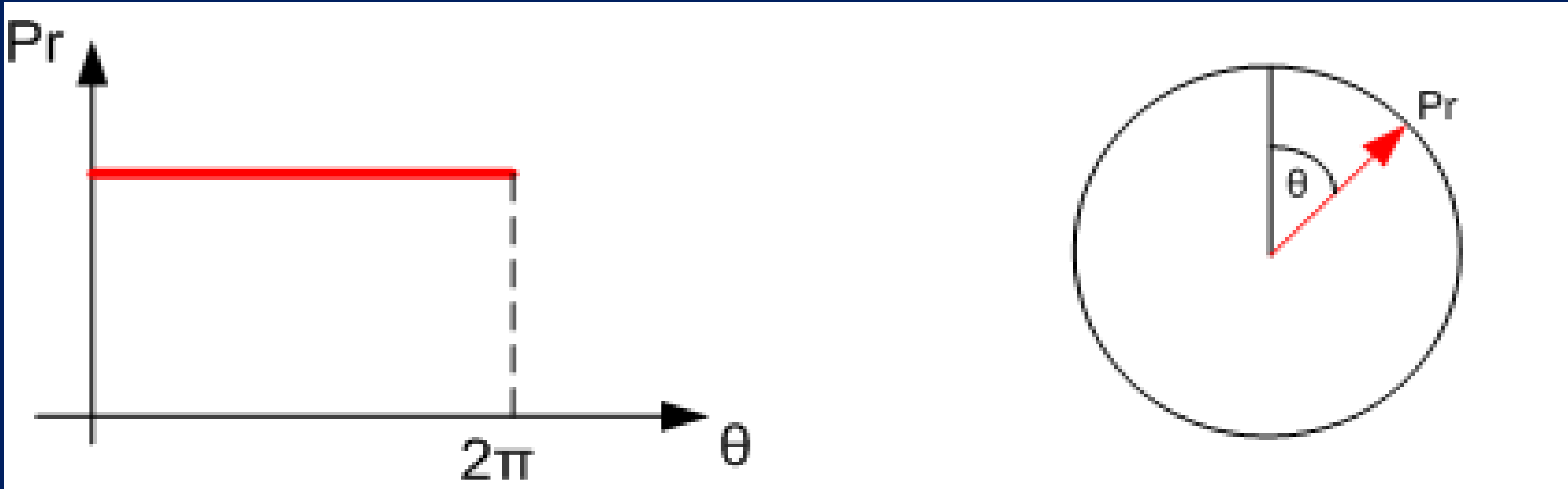
Una descripción completa del campo generado requiere el conocimiento del campo eléctrico como una función del tiempo y el espacio

$$E = f(\theta, \varphi, t)$$

Sin embargo será suficiente conocer la variación de la densidad de potencia con el ángulo desde la antena, simplificando la naturaleza vectorial del campo para expresar la radiación en función del ángulo de manera escalar.



Fuentes puntuales



Plano ZY pattern rectangular (Φ=+- 90°)

Plano ZY pattern pollar (Φ=+- 90°)

Fuentes puntuales

Teorema de fuentes puntuales

Si se conoce el vector de Poynting en todos los puntos de una superficie esférica de radio r, generado por una fuente puntual, entonces la potencia radiada será:

$$W = \oiint P ds \qquad W = \oiint P\, r^2 sin\theta d\theta d\varphi \qquad W = P\, r^2\, 4\pi$$

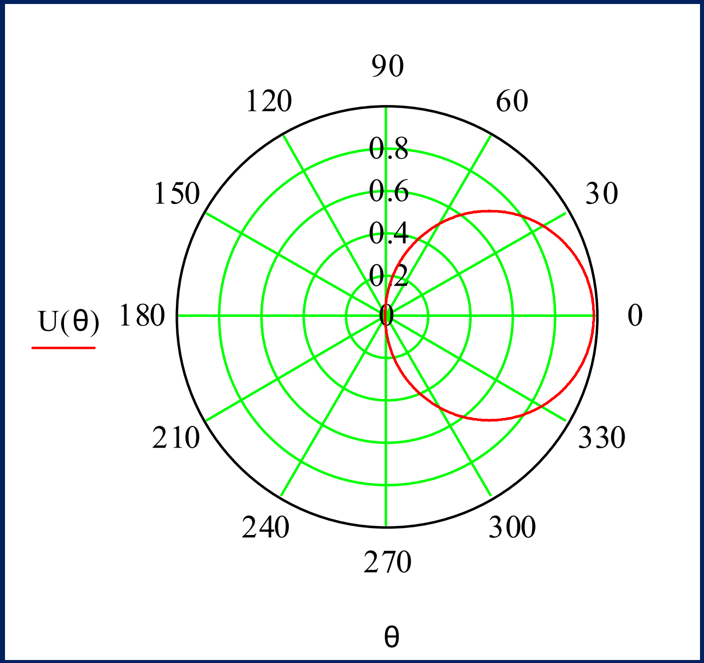
Vemos la relación cuadrática entre densidad de potencia y distancia

Fuentes puntuales

¿dimensiones?

Calcular la directividad de una fuente con un patrón de radiación

$$U = U_m \cos(\theta) \quad con \quad 0 < \theta < \pi/2 \qquad \frac{w}{sr}$$



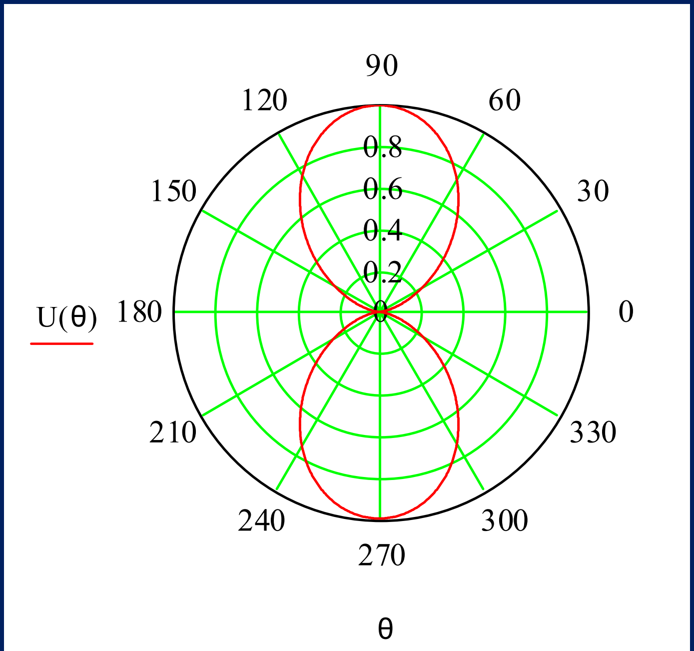
$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(\theta)sen(\theta)d\theta d\phi}$$

$$D = 4$$

Fuentes puntuales

Calcular la directividad de una fuente con un patrón de radiación:

$$\mathrm{U} = U_m \sin(\theta)^2 \quad con \quad 0 < \theta < \pi \qquad \frac{w}{sr}$$



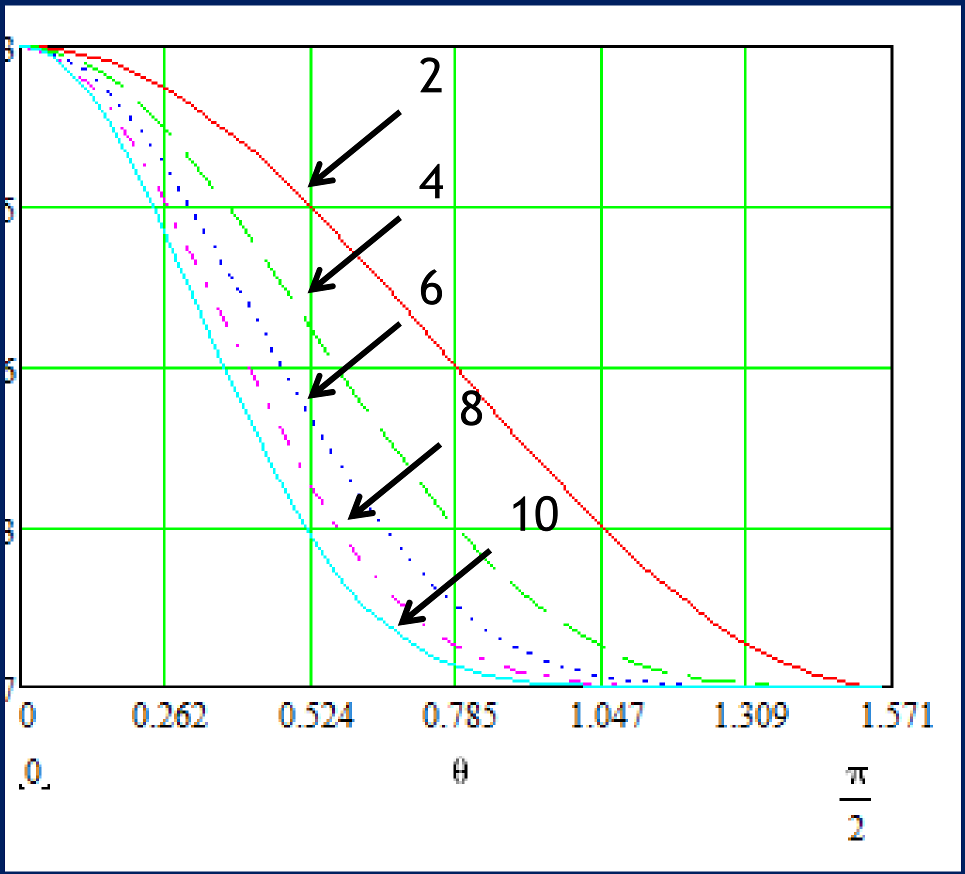
$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sen^3(\theta)d\theta d\phi}$$

$$D = 1.5$$

Fuentes puntuales

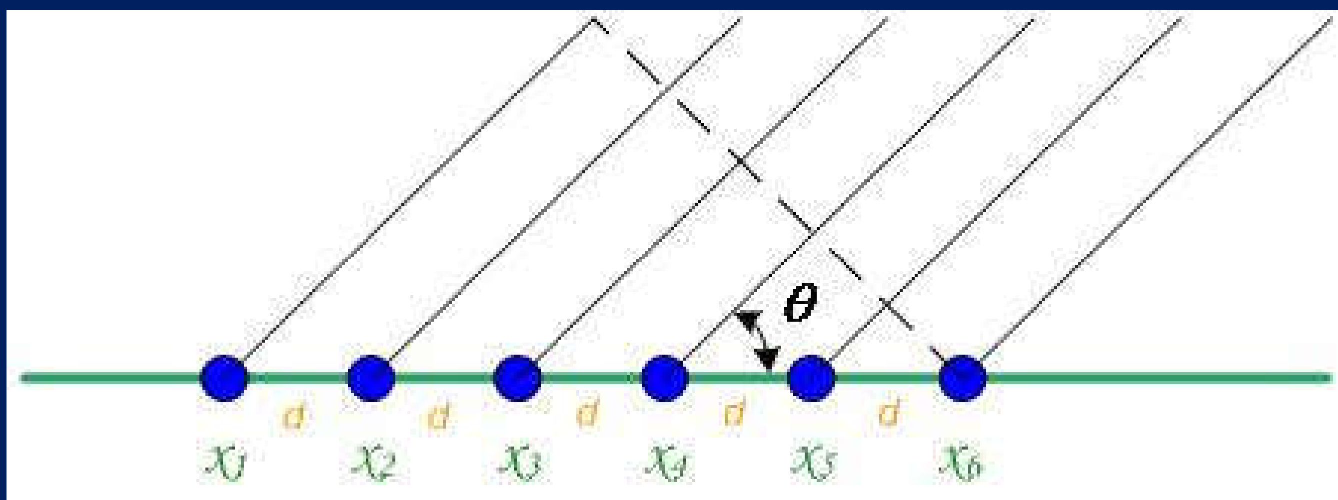
Características de una patrón coseno elevado

$$U = U_m \cos(\theta)^n \quad con \quad 0 < \theta < \pi/2 \qquad \frac{w}{sr}$$

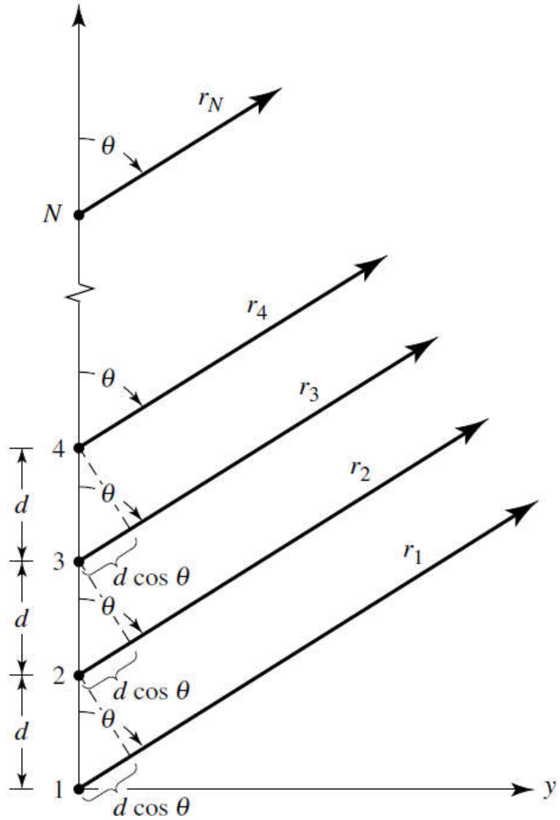


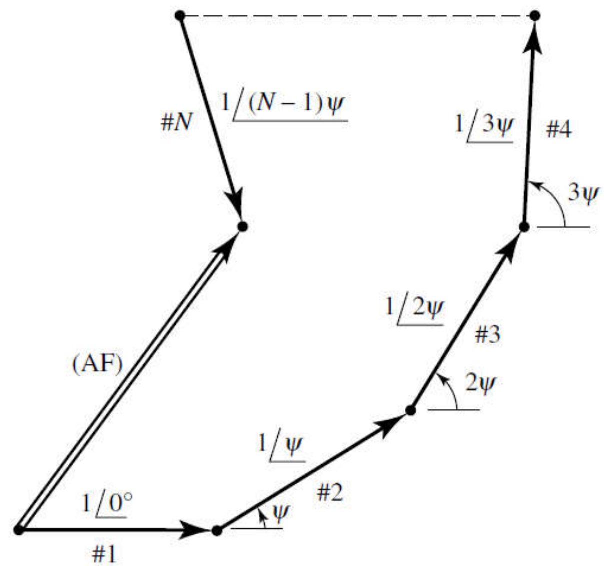
Arreglos de fuentes puntuales

Conjunto de antenas que emite o recibe señales coherentes.



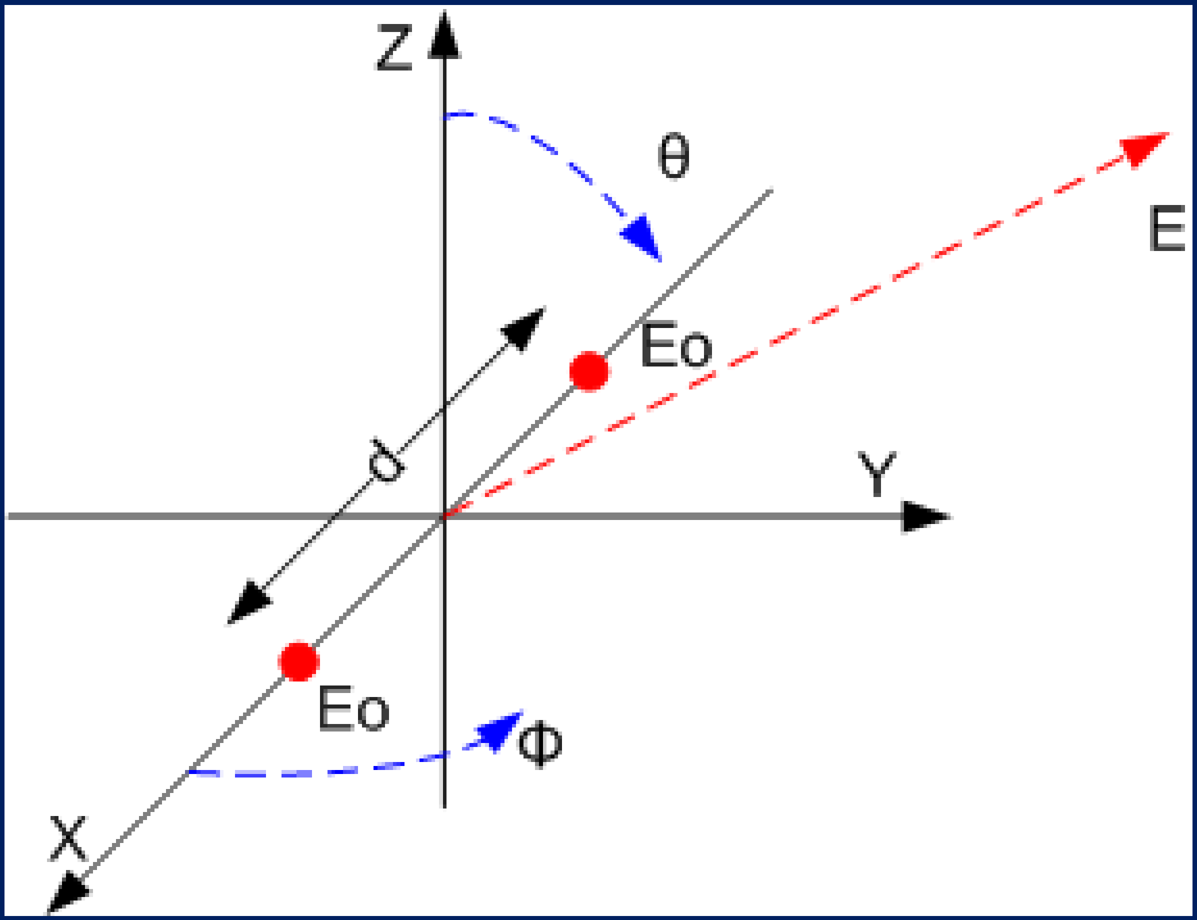
Arreglos de fuentes puntuales





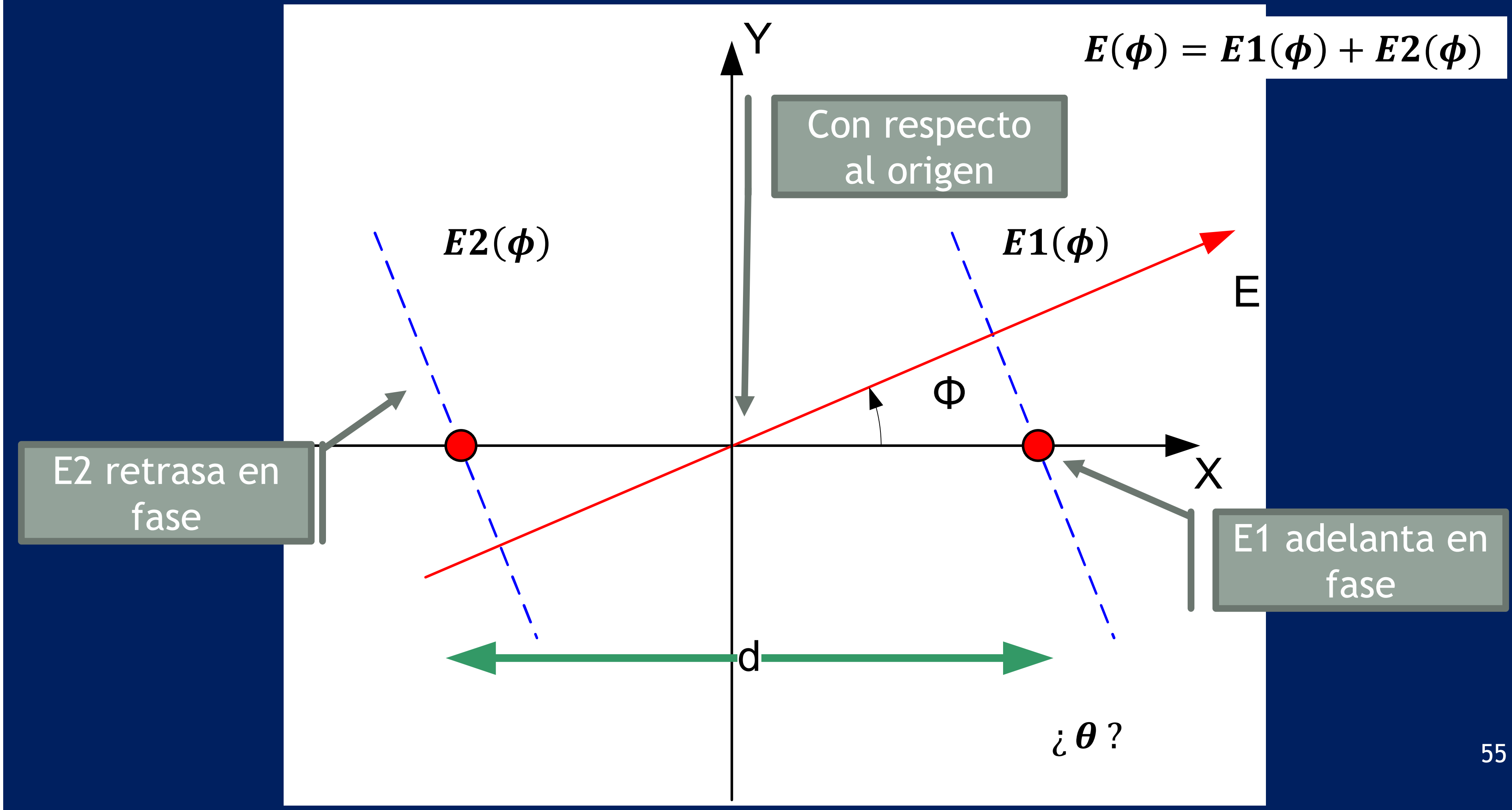
Arreglos de fuentes puntuales

Consideremos el arreglo de dos RI excitados con la misma amplitud y fase



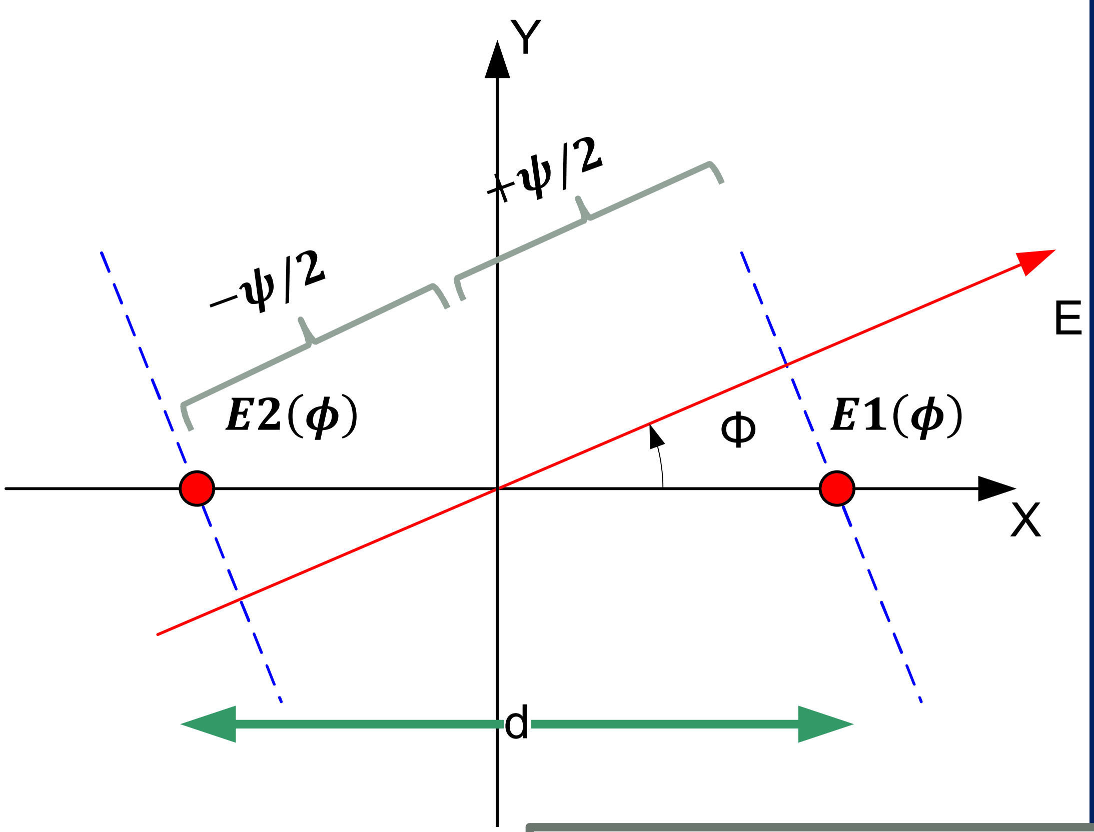
Arreglos de fuentes puntuales

Análisis según los distintos planos: Plano XY
¿Cuánto vale el campo E en un punto lejano de las fuentes?



Arreglos de fuentes puntuales

¿Cuánto vale el retraso / adelanto de fase de cada fuente?



$$E_{xy}(\phi) = E1(\phi) + E2(\phi)$$

$$E_{xy}(\phi) = E_0 e^{j\frac{\psi}{2}} + E_0 e^{-j\frac{\psi}{2}}$$

$$d_r = \frac{2\pi}{\lambda} d \ \ rad$$

$$\psi = d_r cos(\phi) \ \ rad$$

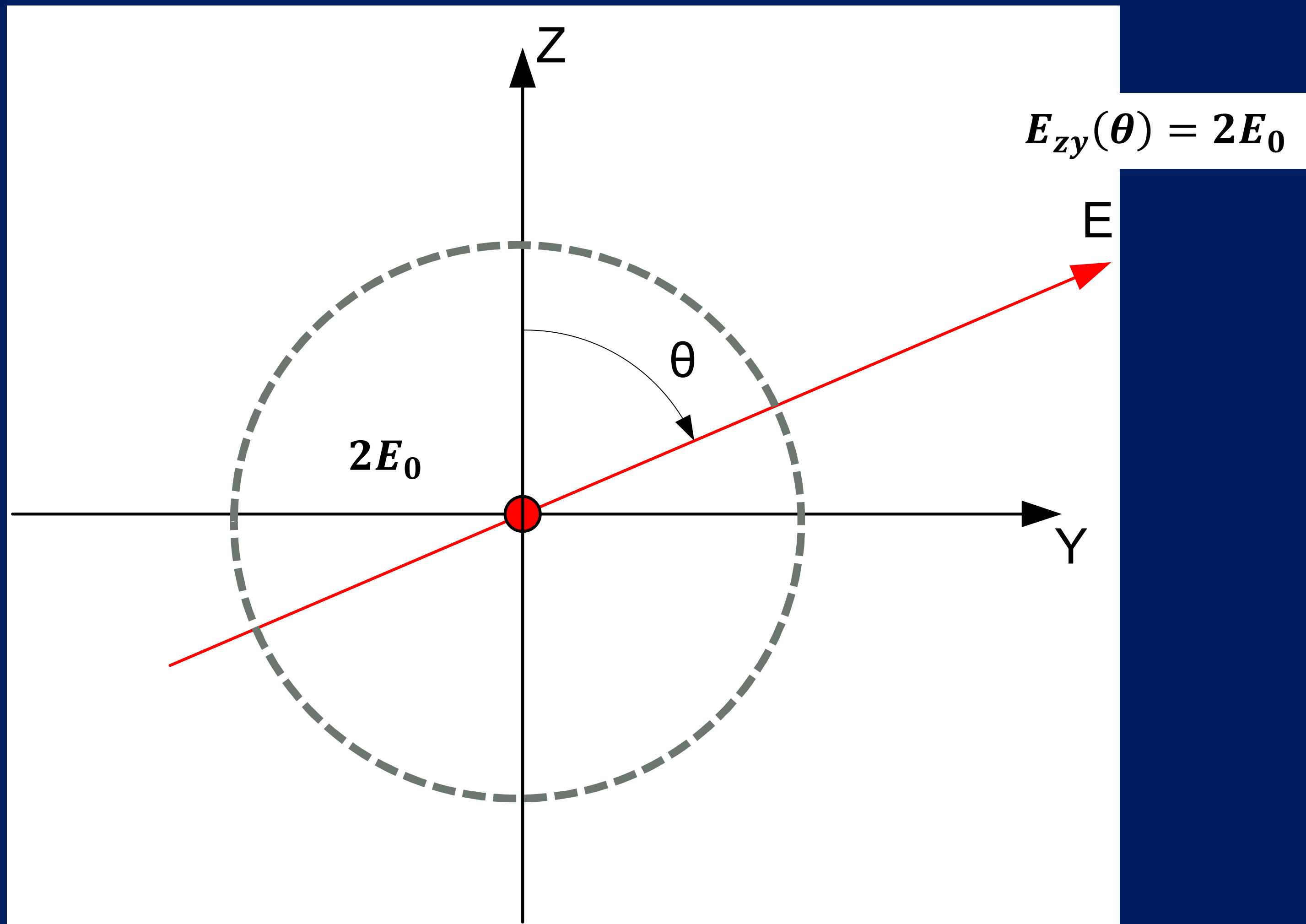
$$E_{xy}(\phi) = E_0\left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}}\right)$$

$$E_{xy}(\phi) = 2E_0 cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$\boxed{E_{xy}(\phi) = 2E_0 cos\left(\frac{\pi}{\lambda} d cos(\phi)\right)}$$

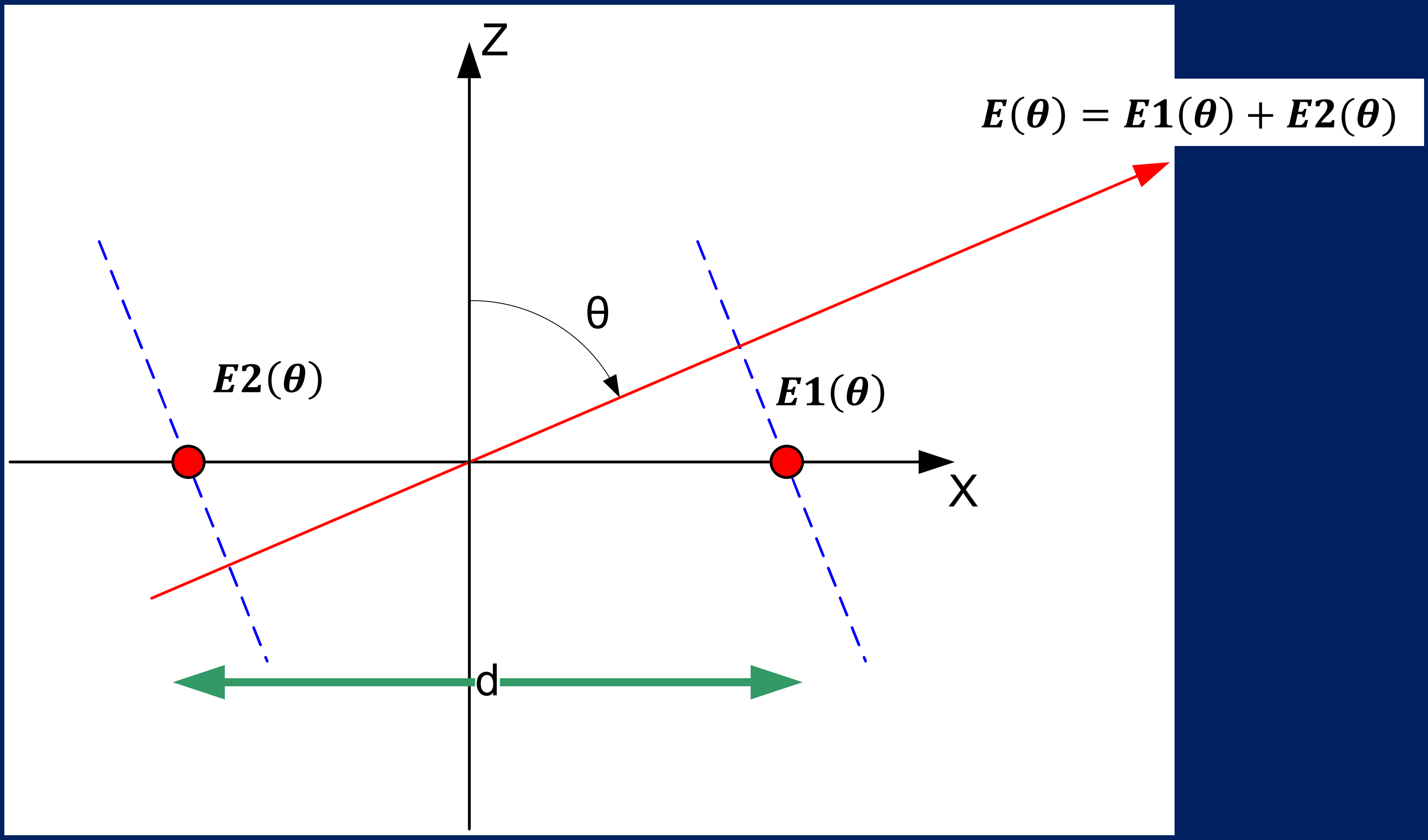
Arreglos de fuentes puntuales

Análisis según los distintos planos: Plano ZY ¿ ?



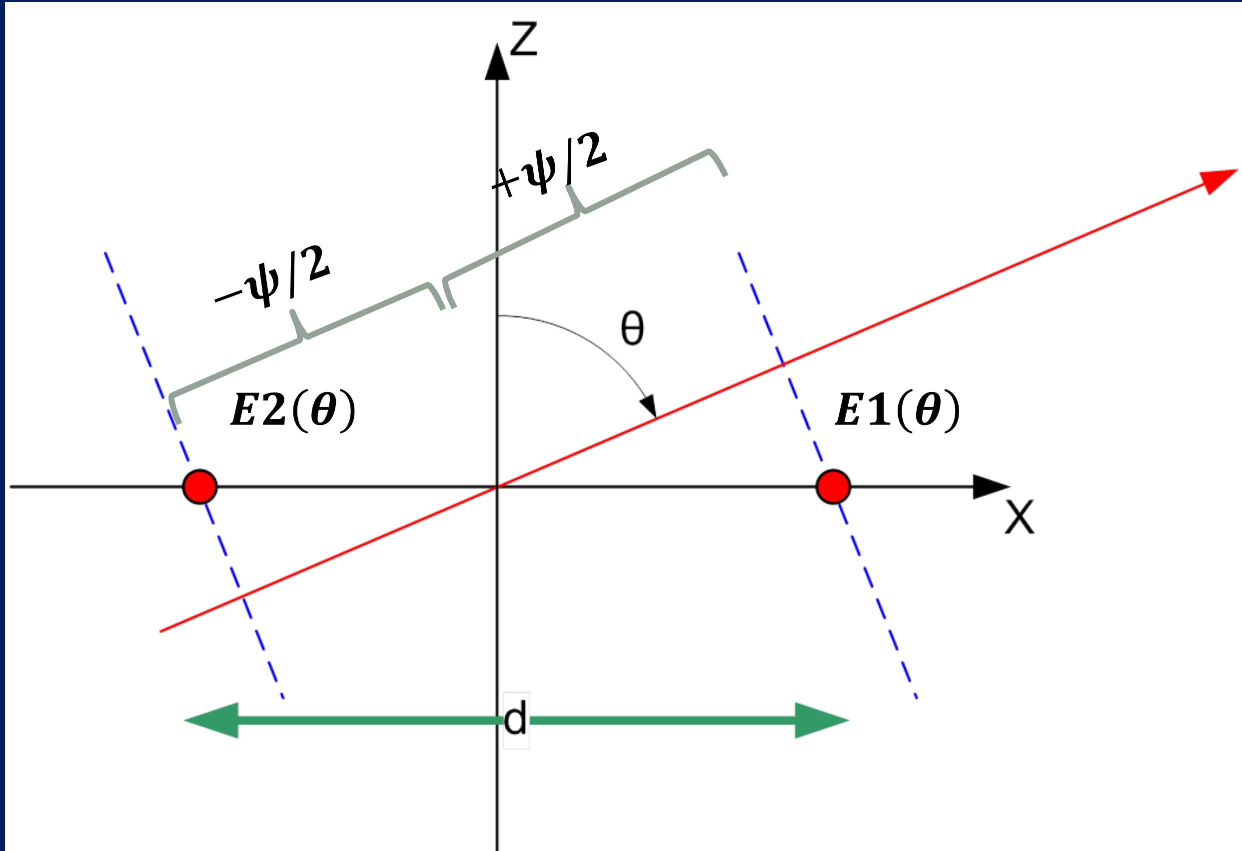
Arreglos de fuentes puntuales

Análisis según los distintos planos: Plano ZX ¿ ?



Arreglos de fuentes puntuales

¿Cuánto vale el retraso / adelanto de fase de cada fuente?



$$E_{zx}(\theta) = E1(\theta) + E2(\theta)$$

$$E_{zx}(\theta) = E_0 e^{j\frac{\psi}{2}} + E_0 e^{-j\frac{\psi}{2}}$$

$$d_r = \frac{2\pi}{\lambda} d \ \ rad$$

$$\psi = d_r cos(90 - \theta) \ \ rad$$

$$E_{zx}(\theta) = E_0 \left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}}\right)$$

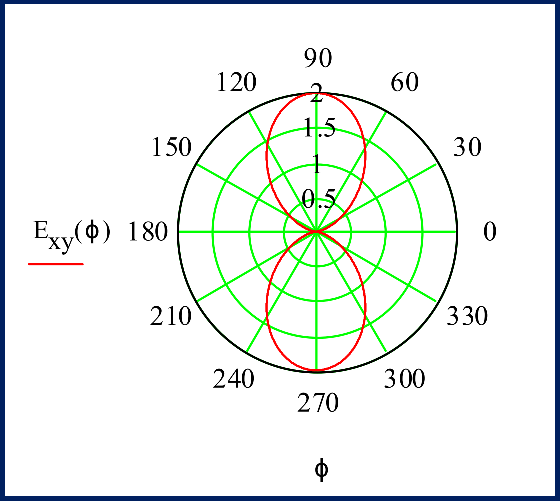
$$E_{zx}(\theta) = 2E_0 cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$\boxed{E_{zx}(\theta) = 2E_0 cos\left(\frac{\pi}{\lambda} dsen(\theta)\right)}$$

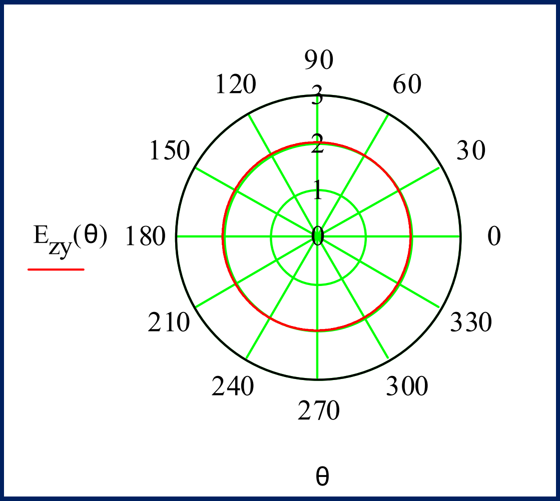
Arreglos de fuentes puntuales

$$Para\ el\ caso\ d = \frac{\lambda}{2}$$

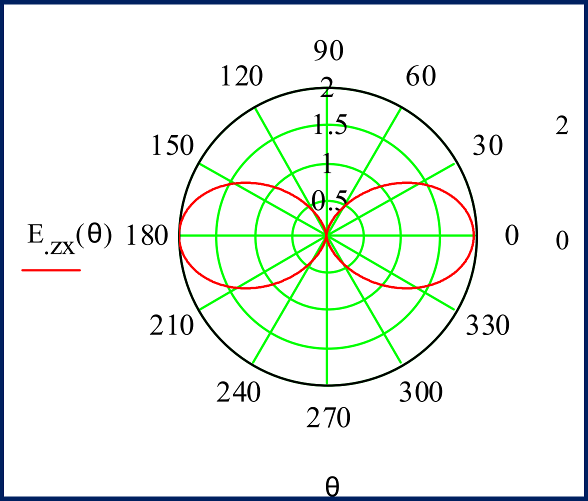
Plano XY	Plano ZY	Plano ZX



$$E_{xy}(\phi) = 2E_0 cos\left(\frac{\pi}{\lambda} dcos(\phi)\right)$$



$$E_{zy}(\theta) = 2E_0$$

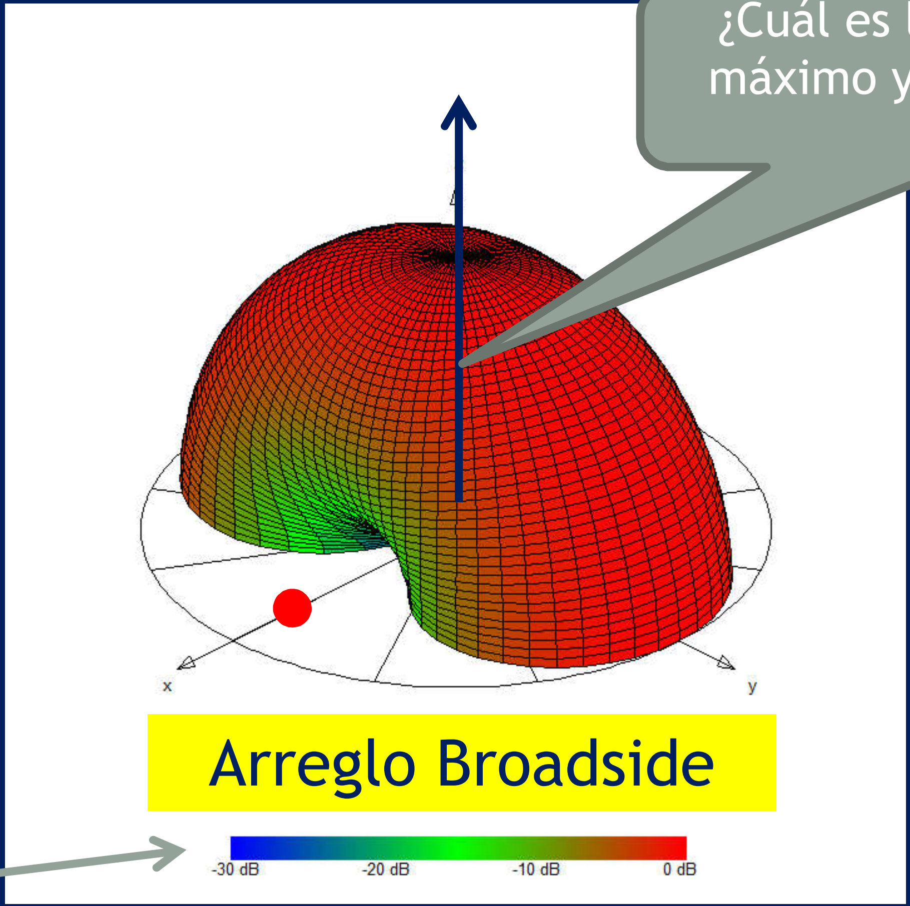


$$E_{zx}(\theta) = 2E_0 cos\left(\frac{\pi}{\lambda} dsen(\theta)\right)$$

¿Cómo será el patrón 3D

Arreglos de fuentes puntuales

$Para\ el\ caso\ d = \frac{\lambda}{2}$



¿Cuál es la relación entre el máximo y la ubicación de las fuentes?

Arreglo Broadside

Arreglos de fuentes puntuales

$$Para\ el\ caso\ d = \frac{\lambda}{2}$$

La directividad del arreglo será:

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} cos^2\left(\pi \cdot \frac{d}{\lambda}\cos(\theta)\right)\sin(\theta)d\theta d\phi}$$

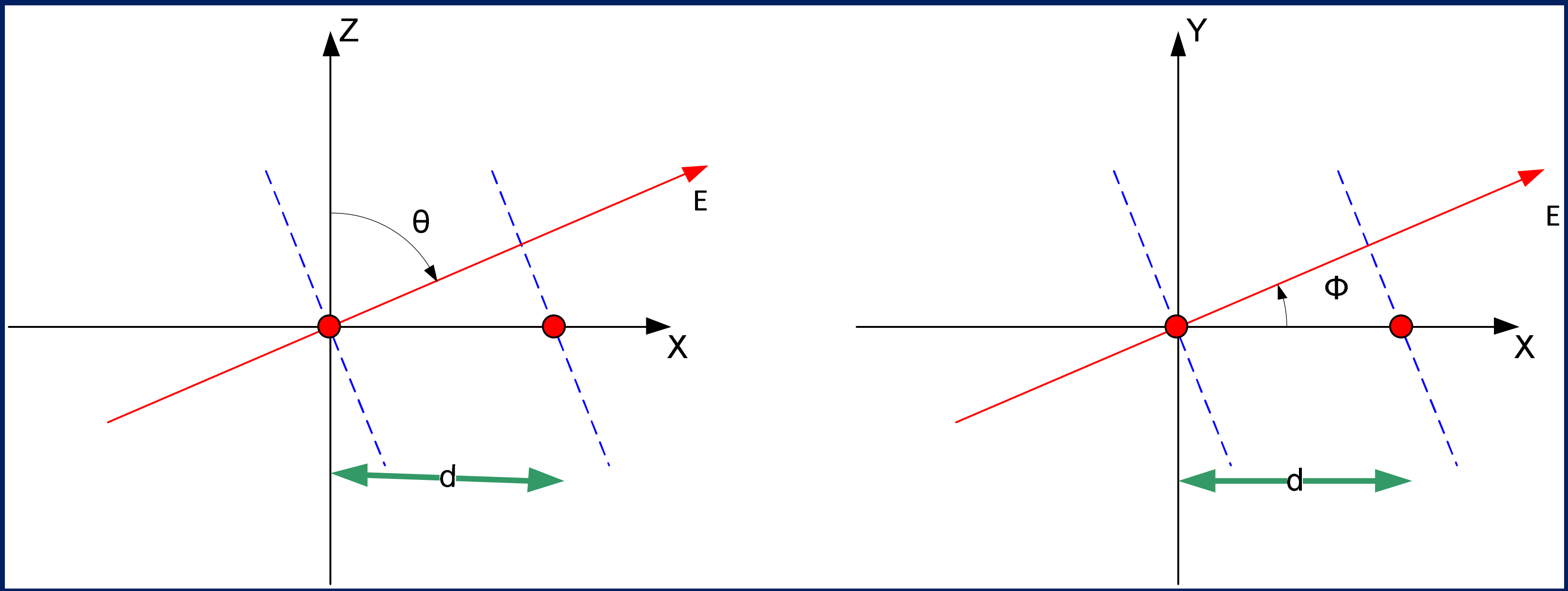
$$D = 2$$

$$D_{dbi} = 3\ db$$

Para el calculo de la directividad suponemos que el arreglo esta sobre el eje Z, de ese modo la figura tiene simetría sobre el eje Z, y puede aplicarse la integral

Arreglos de fuentes puntuales

¿Qué pasa si tomamos como referencia una de las fuentes en lugar del origen de coordenadas?



$$E_{zx}(\theta) = E_0 + E_0 e^{j\psi}$$

$$E_{xy}(\varphi) = E_0 + E_0 e^{j\psi}$$

Escribamos las expresiones

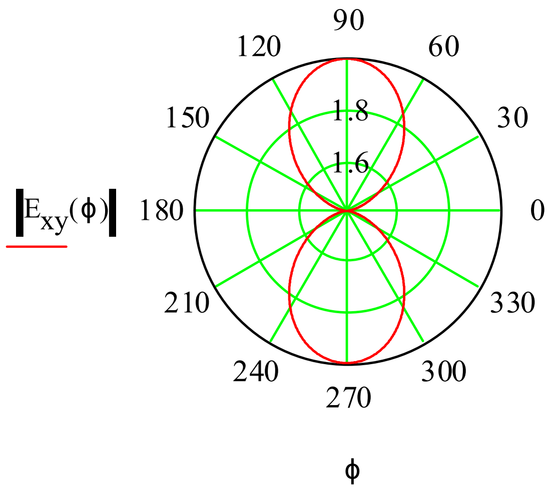
Arreglos de fuentes puntuales

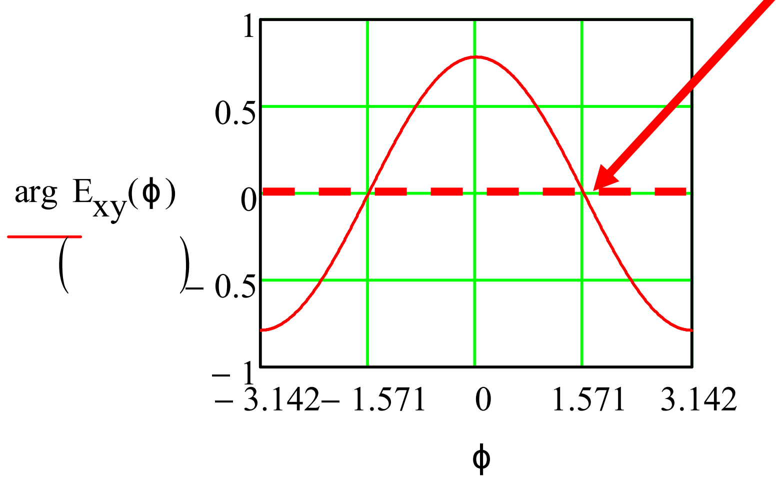
$$E_{zx}(\theta) = E_0 + E_0 e^{j\psi}$$

$$E_{xy}(\varphi) = E_0 + E_0 e^{j\psi}$$

$$E_{zx}(\theta) = E_0 + E_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda} d\sin(\theta)}$$

$$E_{xy}(\varphi) = E_0 + E_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda} d\cos(\varphi)}$$



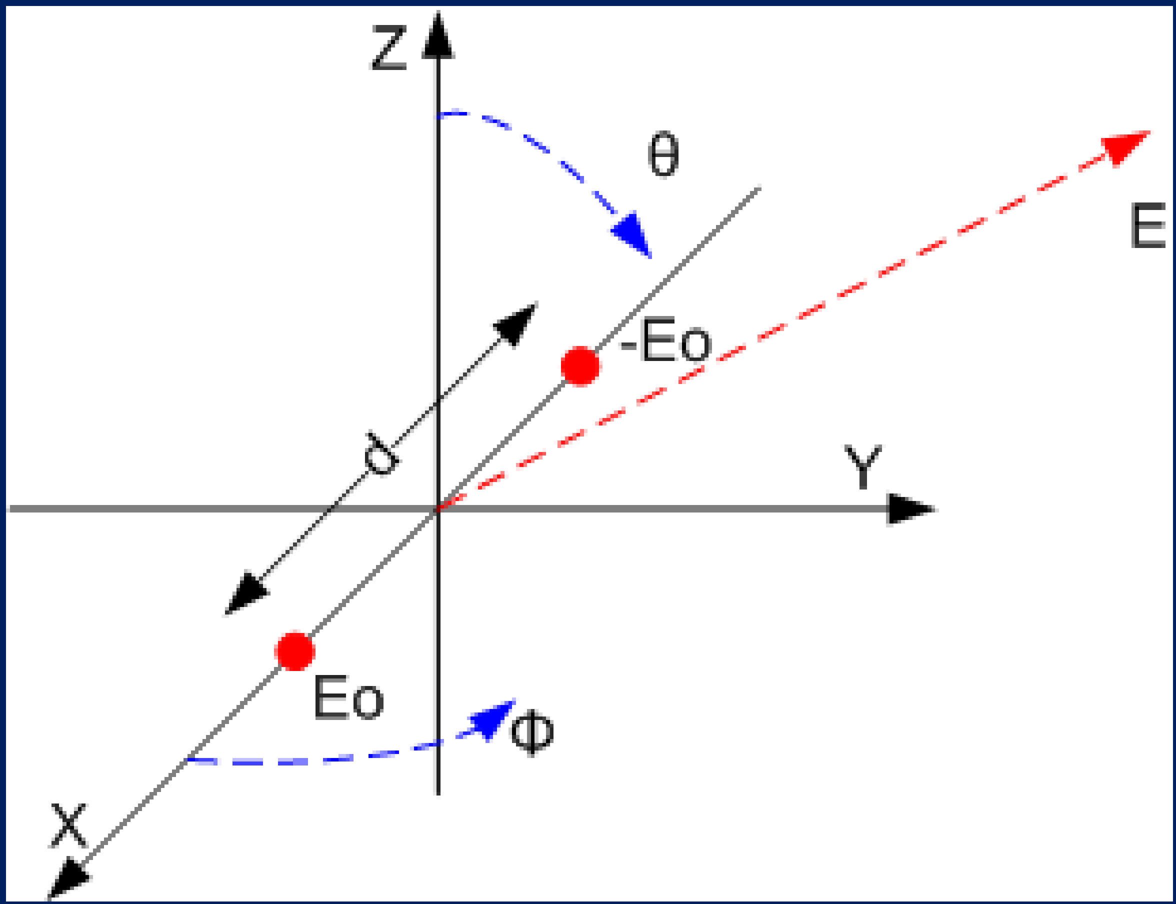


Fase con fuentes simétricas con respecto al origen

$$d = \frac{\lambda}{2}$$

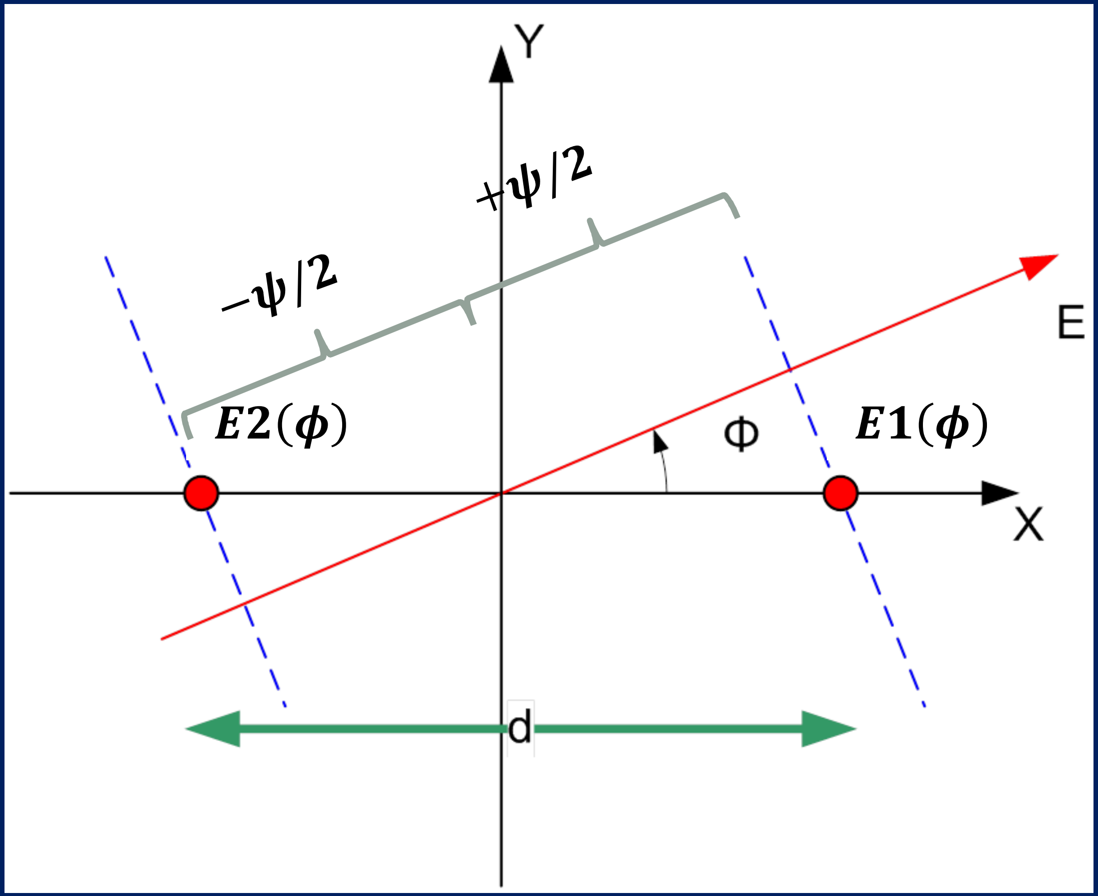
Arreglos de fuentes puntuales

Consideremos el arreglo de dos RI excitados con la misma amplitud y en contrafase



Arreglos de fuentes puntuales

Plano XY



$$E_{xy}(\phi) = E1(\phi) + E2(\phi)$$

$$E_{xy}(\phi) = E_0 e^{j\frac{\psi}{2}} - E_0 e^{-j\frac{\psi}{2}}$$

$$d_r = \frac{2\pi}{\lambda} d \ \ rad$$

$$\psi = d_r cos(\phi) \ \ rad$$

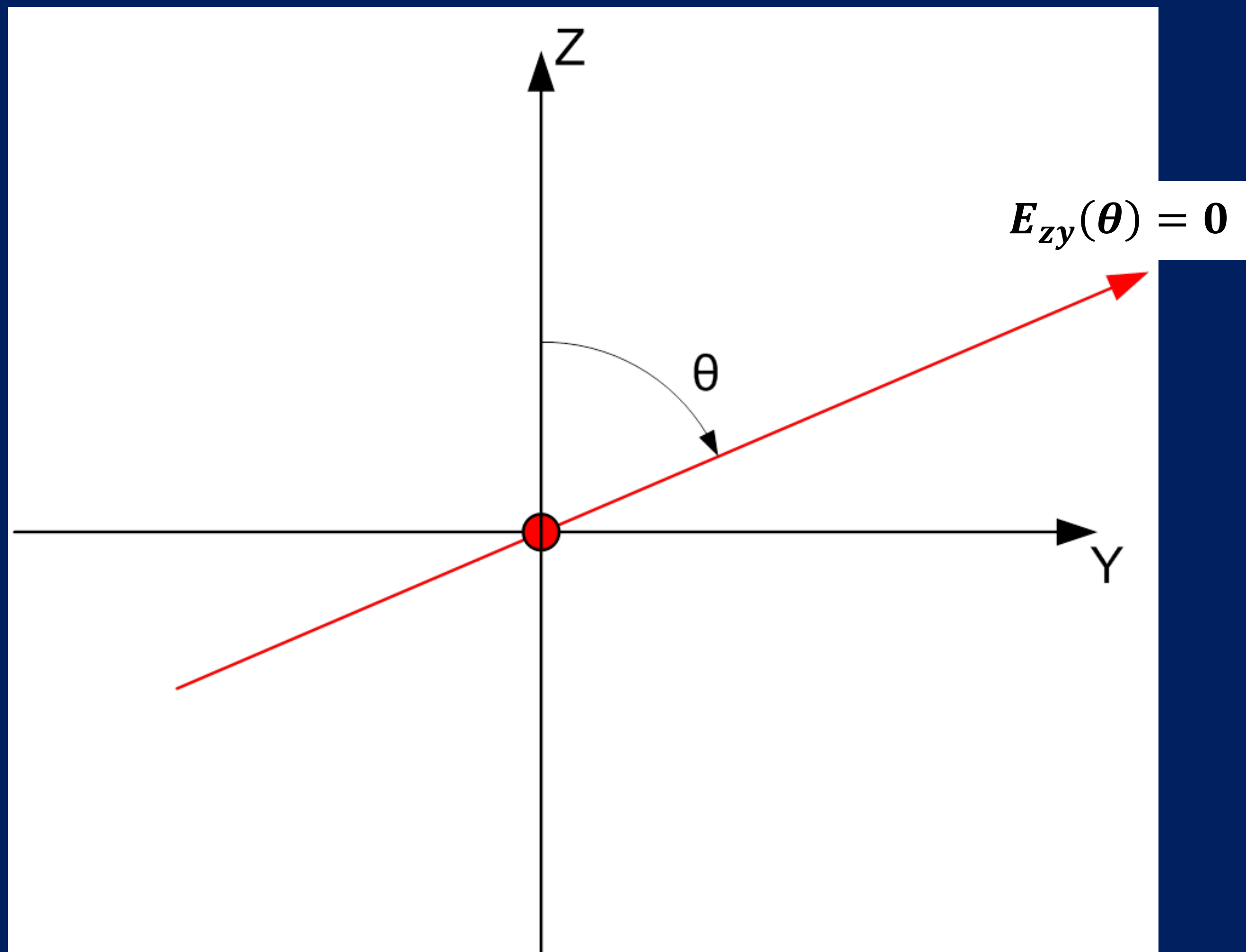
$$E_{xy}(\phi) = E_0 \left(e^{j\frac{\psi}{2}} - e^{-j\frac{\psi}{2}}\right)$$

$$E_{xy}(\phi) = 2jE_0 sen\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$\boxed{E_{xy}(\phi) = 2jE_0 sen\left(\frac{\pi}{\lambda} dcos(\phi)\right)}$$

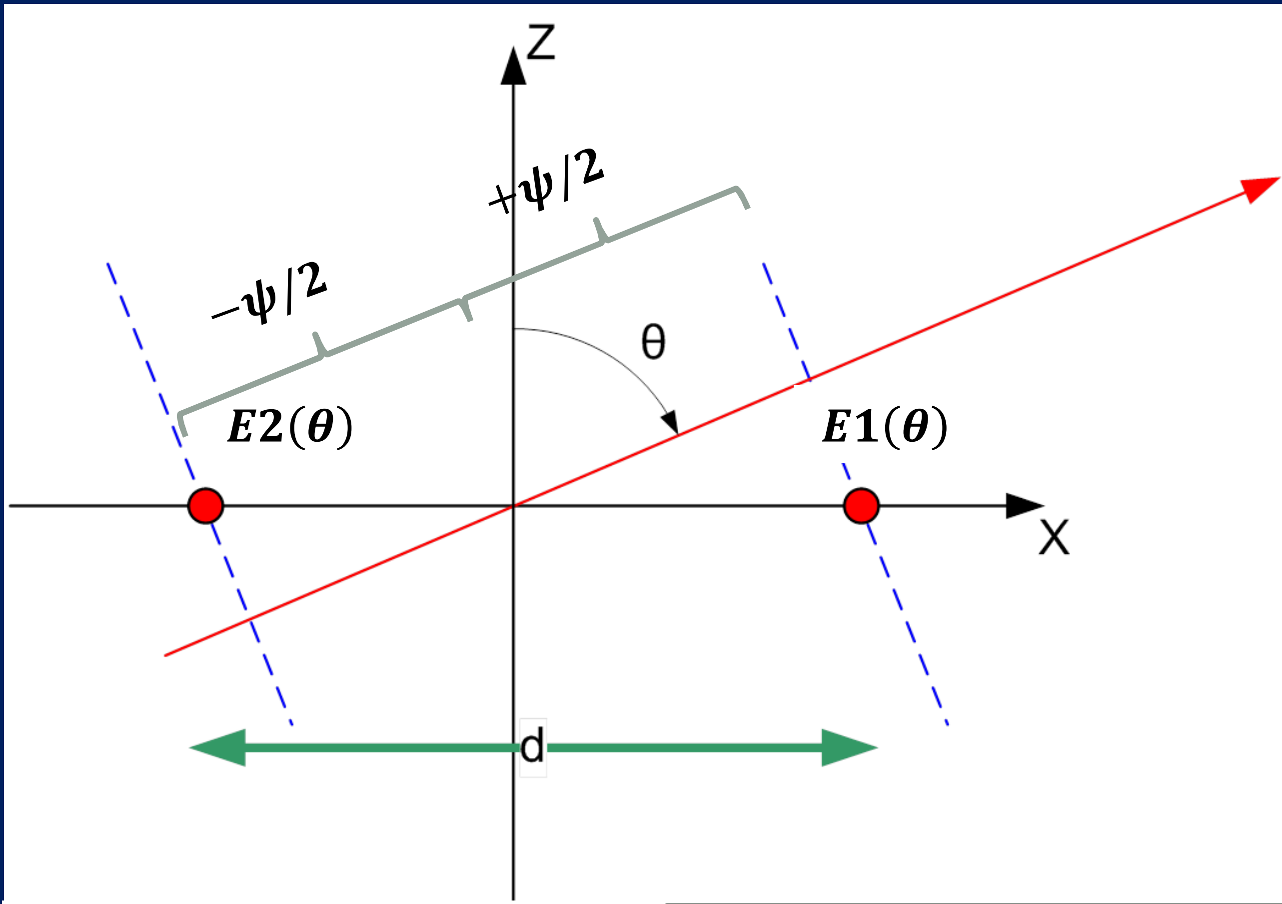
Arreglos de fuentes puntuales

Análisis según los distintos planos: Plano ZY ¿ ?



Arreglos de fuentes puntuales

Plano ZX



$$E_{zx}(\theta) = E1(\theta) + E2(\theta)$$

$$E_{zx}(\theta) = E_0 e^{j\frac{\psi}{2}} - E_0 e^{-j\frac{\psi}{2}}$$

$$d_r = \frac{2\pi}{\lambda} d \;\; rad$$

$$\psi = d_r cos(90 - \theta) \;\; rad$$

$$E_{zx}(\theta) = E_0\left(e^{j\frac{\psi}{2}} - e^{-j\frac{\psi}{2}}\right)$$

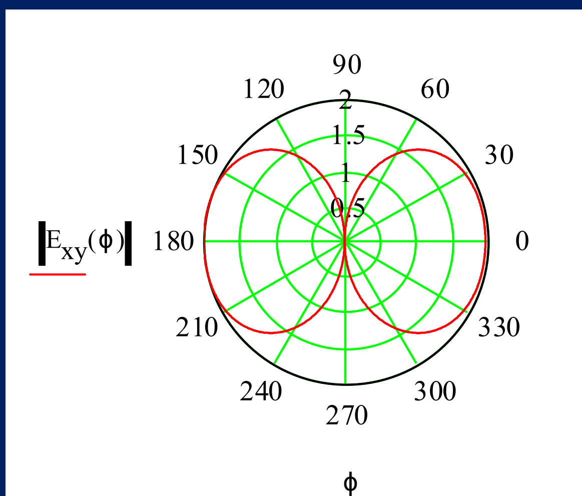
$$E_{zx}(\theta) = 2jE_0 sen\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

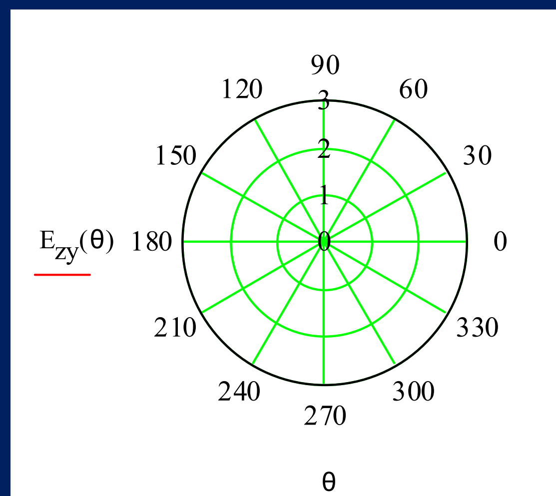
$$\boxed{E_{zx}(\theta) = 2jE_0 sen\left(\frac{\pi}{\lambda} dsen(\theta)\right)}$$

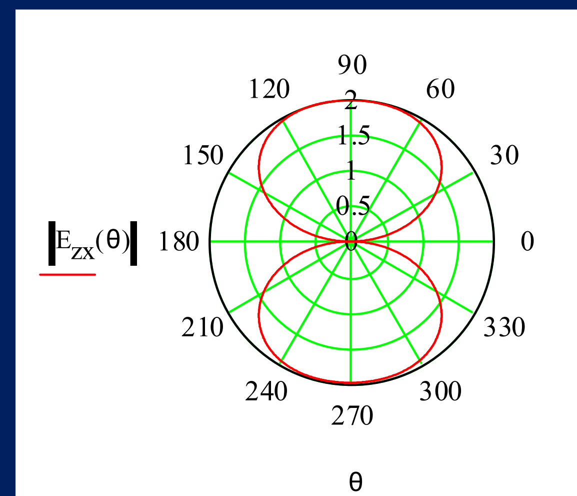
Arreglos de fuentes puntuales

$$Para\ el\ caso\ d = \frac{\lambda}{2}$$

Plano XY	Plano ZY	Plano ZX







$$E_{xy}(\phi) = 2jE_0 sen\left(\frac{\pi}{\lambda} d\cos(\phi)\right)$$

$$E_{zy}(\theta) = 0$$

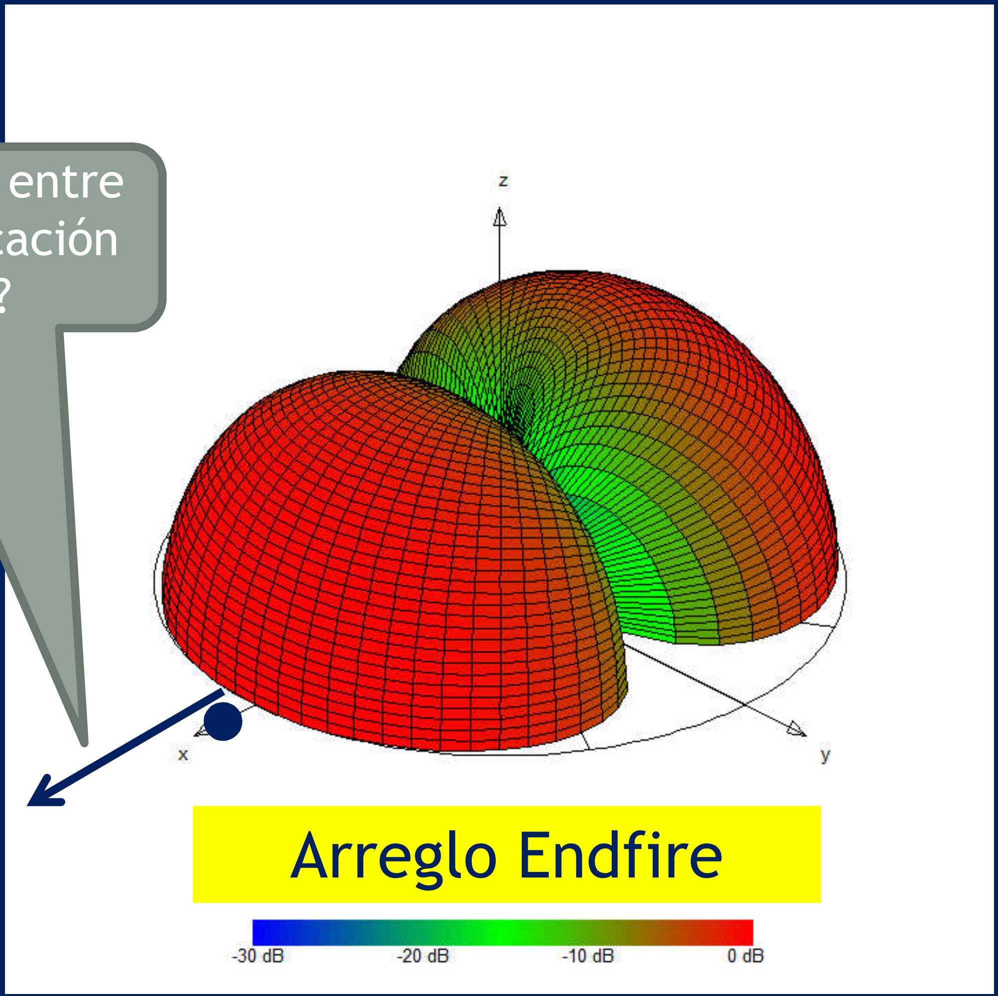
$$E_{zx}(\theta) = 2jE_0 sen\left(\frac{\pi}{\lambda} d\,sen(\theta)\right)$$

¿Cómo será el patrón 3D?

Arreglos de fuentes puntuales

$$Para\ el\ caso\ d = \frac{\lambda}{2}$$

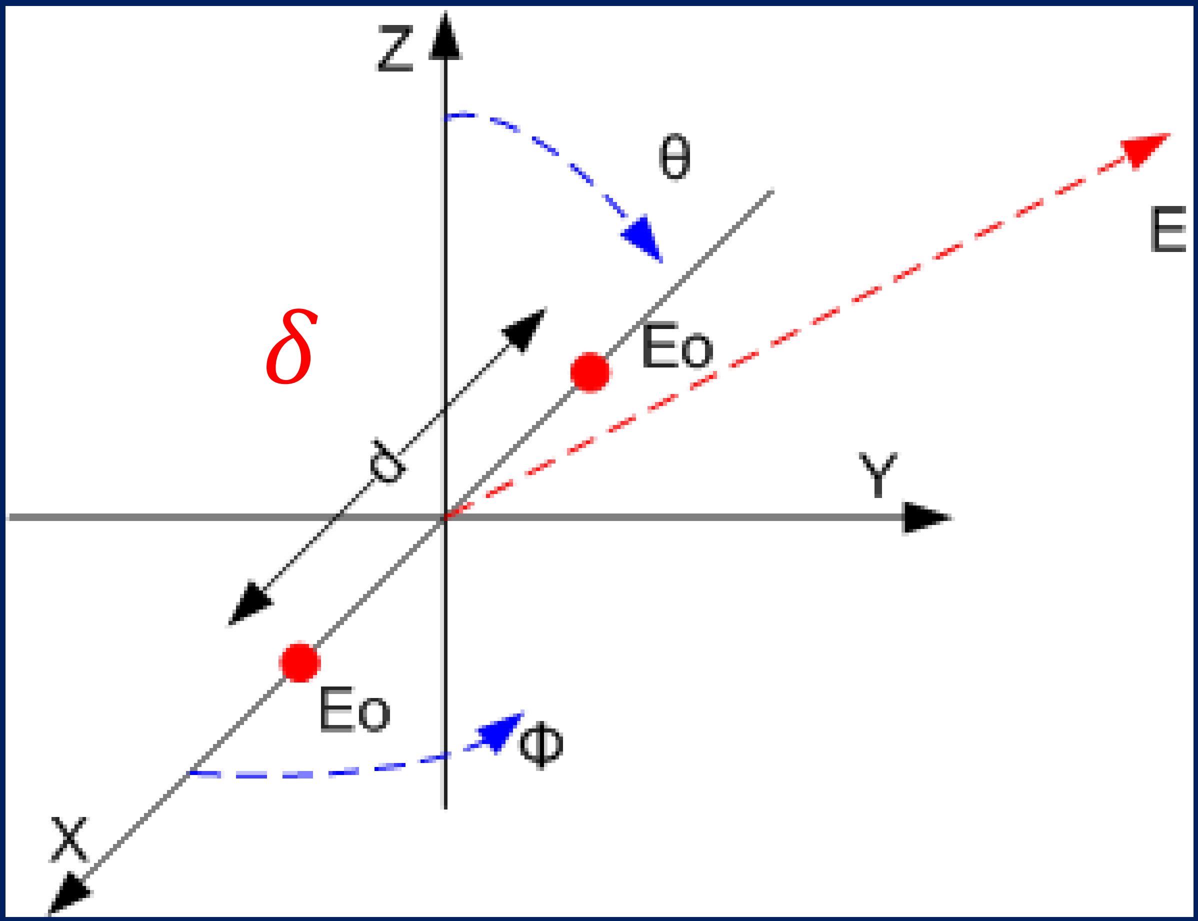
¿Cuál es la relación entre el máximo y la ubicación de las fuentes?



¿D?

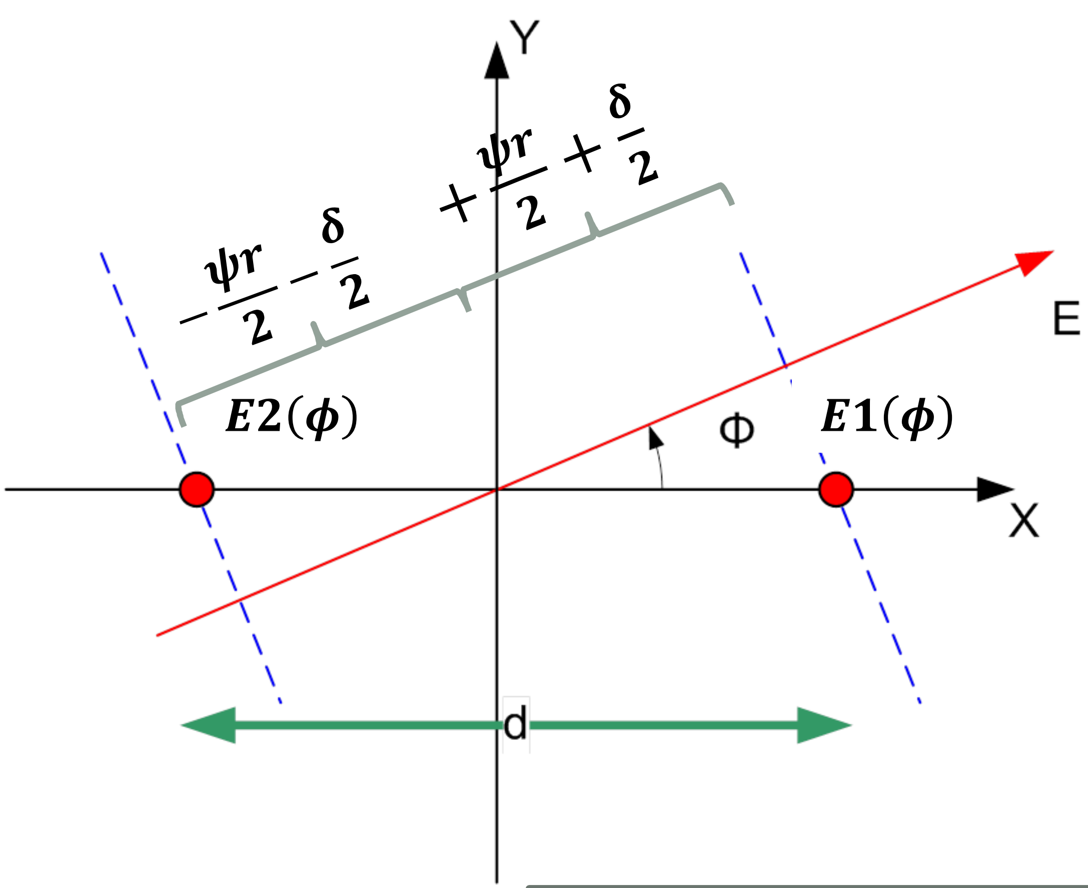
Arreglos de fuentes puntuales

Consideremos el arreglo de dos RI excitados con la misma amplitud y fase arbitraria



Arreglos de fuentes puntuales

¿Cuánto vale el retraso / adelanto de fase de cada fuente?



$$E_{xy}(\phi) = E1(\phi) + E2(\phi)$$

$$E_{xy}(\phi) = E_0 e^{j\frac{\psi r+\delta}{2}} + E_0 e^{-j\frac{\psi r+\delta}{2}}$$

$$d_r = \frac{2\pi}{\lambda} d \ rad$$

$$\psi = d_r cos(\phi) + \delta \ rad$$

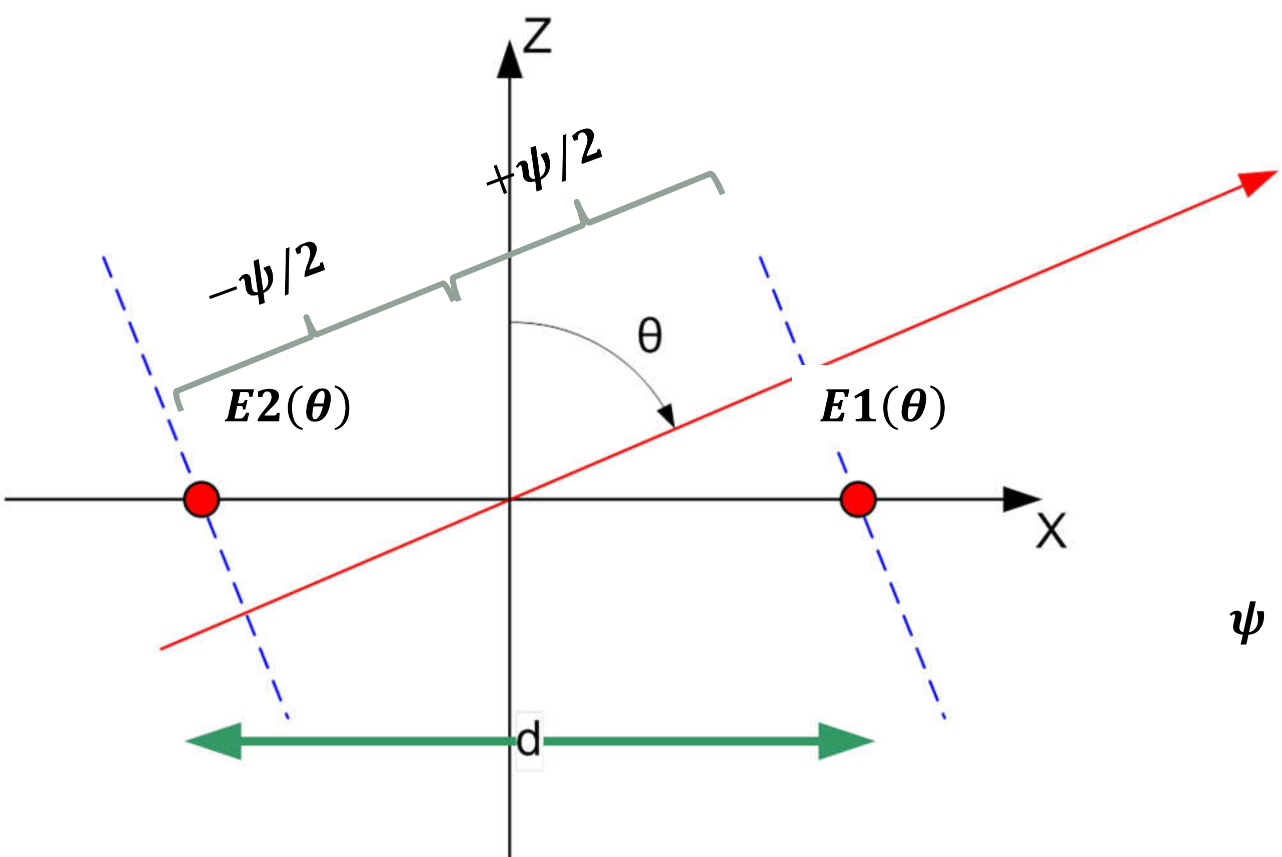
$$E_{xy}(\phi) = E_0\left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}}\right)$$

$$E_{xy}(\phi) = 2E_0 cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$\boxed{E_{xy}(\phi) = 2E_0 cos\left(\frac{\pi}{\lambda} d cos(\phi) + \frac{\delta}{2}\right)}$$

Arreglos de fuentes puntuales

¿Cuánto vale el retraso / adelanto de fase de cada fuente?



$$E_{zx}(\theta) = E1(\theta) + E2(\theta)$$

$$E_{zx}(\theta) = E_0 e^{j\frac{\psi}{2}} + E_0 e^{-j\frac{\psi}{2}}$$

$$d_r = \frac{2\pi}{\lambda} d \;\; rad$$

$$\psi = d_r cos(90 - \theta) + \delta \;\; rad$$

$$E_{zx}(\theta) = E_0 \left(e^{j\frac{\psi}{2}} + e^{-j\frac{\psi}{2}}\right)$$

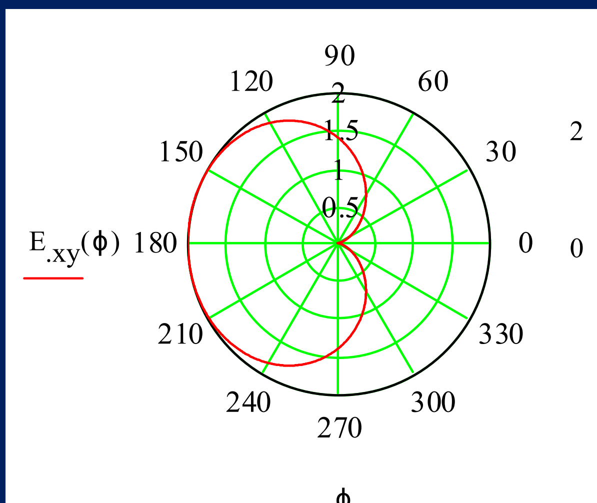
$$E_{zx}(\theta) = 2E_0 cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$\boxed{E_{zx}(\theta) = 2E_0 cos\left(\frac{\pi}{\lambda} dsen(\theta) + \frac{\delta}{2}\right)}$$

Arreglos de fuentes puntuales

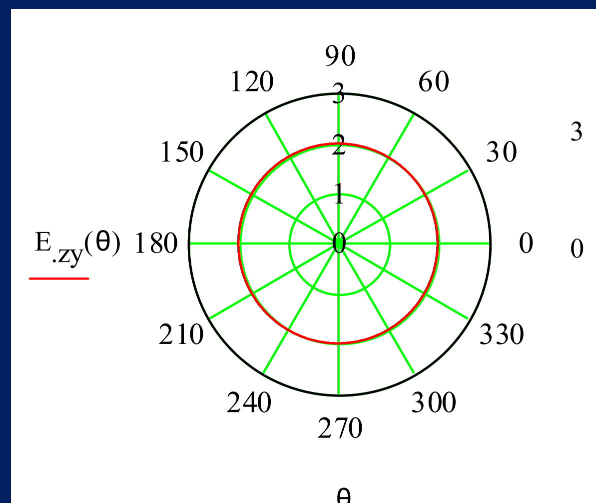
$$Para\ el\ caso\ d = \frac{\lambda}{4}\quad y\quad \delta = \frac{\pi}{2}$$

Plano XY

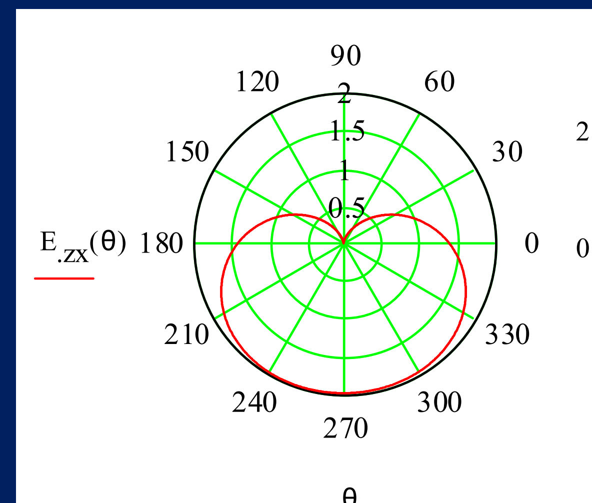


$$E_{xy}(\phi) = 2E_0 cos\left(\frac{\pi}{\lambda} dcos(\phi) + \frac{\delta}{2}\right)$$

Plano ZY



Plano ZX



$$E_{zx}(\theta) = 2E_0 cos\left(\frac{\pi}{\lambda} dsen(\theta) + \frac{\delta}{2}\right)$$

¿Cómo será el patrón 3D

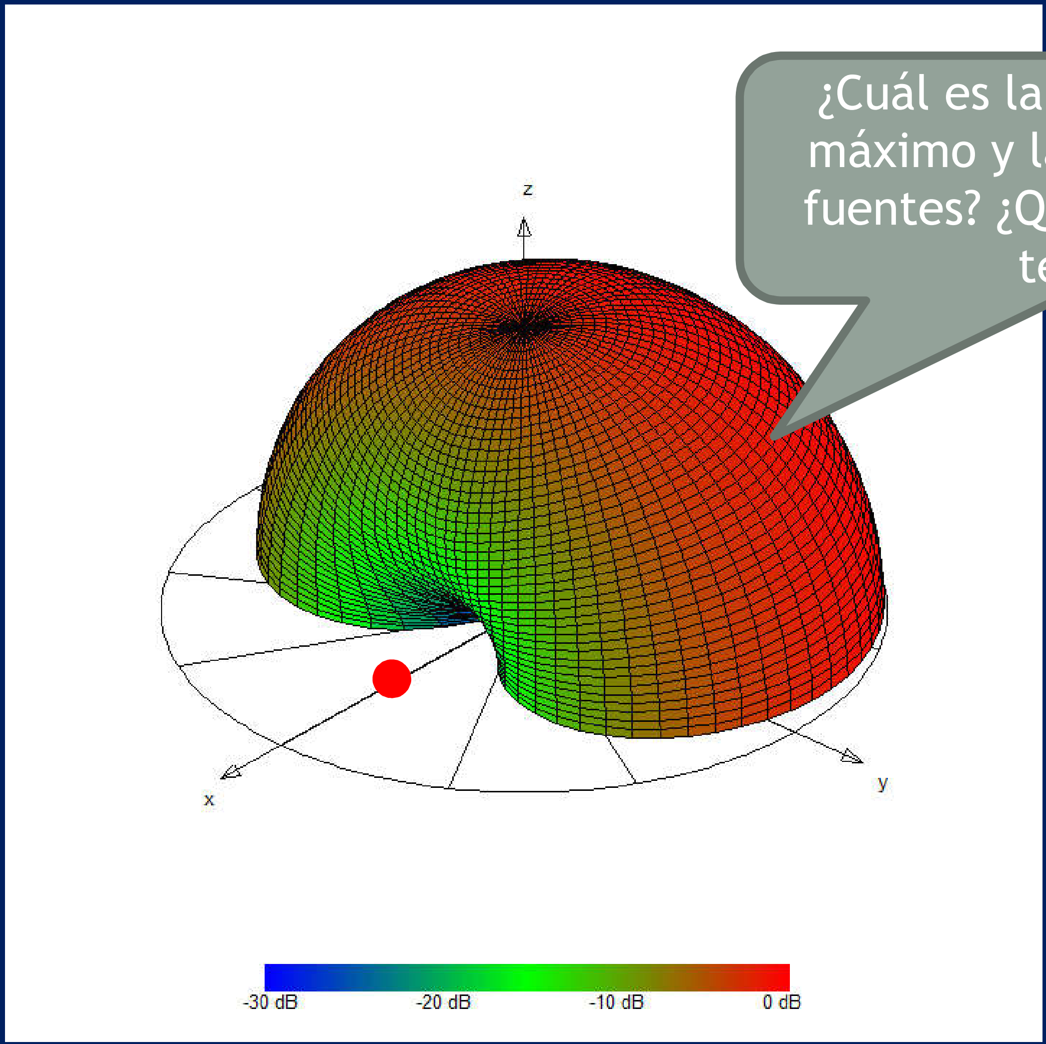
Arreglos de fuentes puntuales

Para el caso

$$d = \frac{\lambda}{4}$$

y

$$\delta = \frac{\pi}{2}$$



¿Cuál es la relación entre el máximo y la ubicación de las fuentes? ¿Qué tipo de arreglo tenemos?

Arreglos de fuentes

Hasta ahora estuvimos analizando arreglos de fuentes isotrópicas

¿Que podemos decir de arreglos de fuentes no isotrópicas?

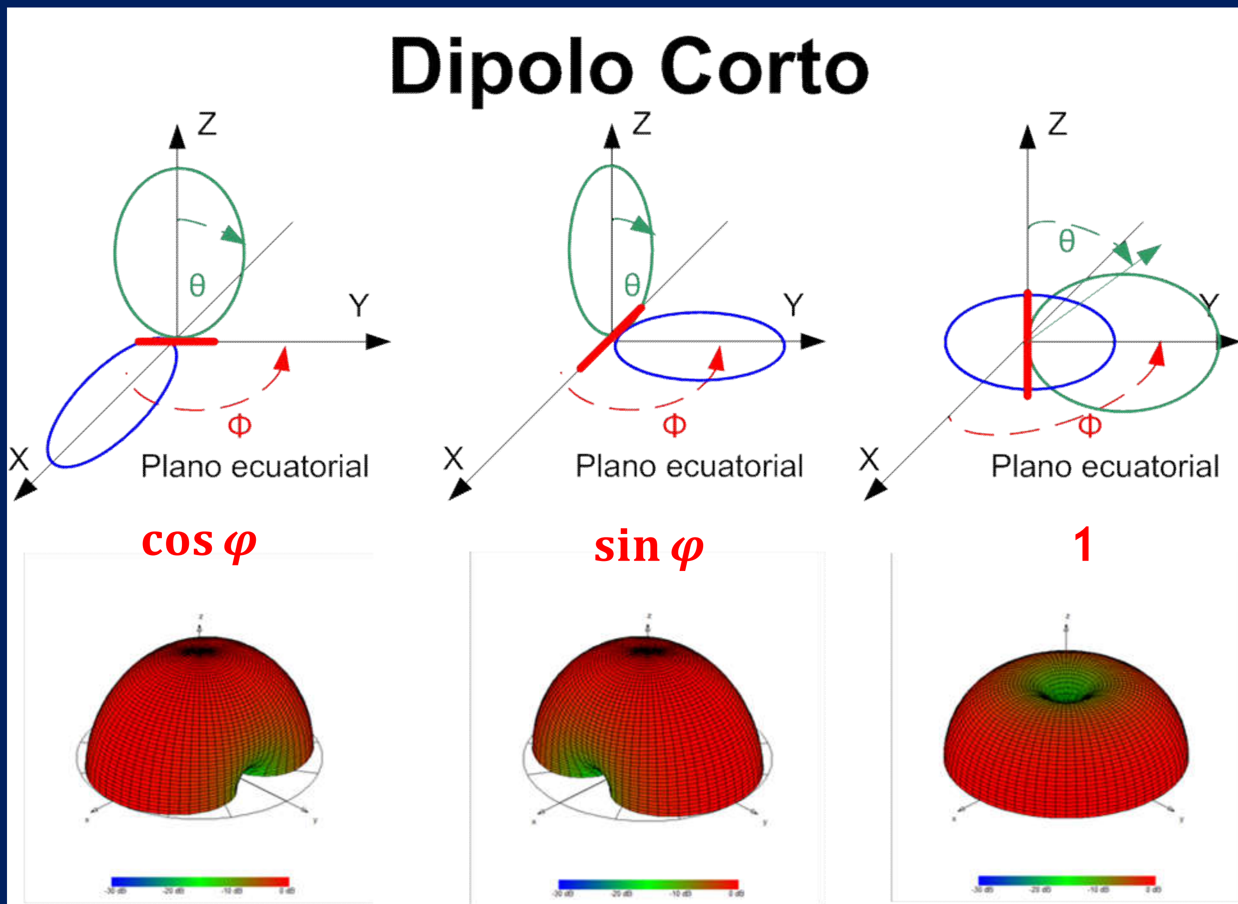
Podemos generalizar el método para el caso de fuentes NO isotrópicas, pero SIMILARES

Por SIMILAR entendemos que la variación de amplitud y fase con φ es la misma

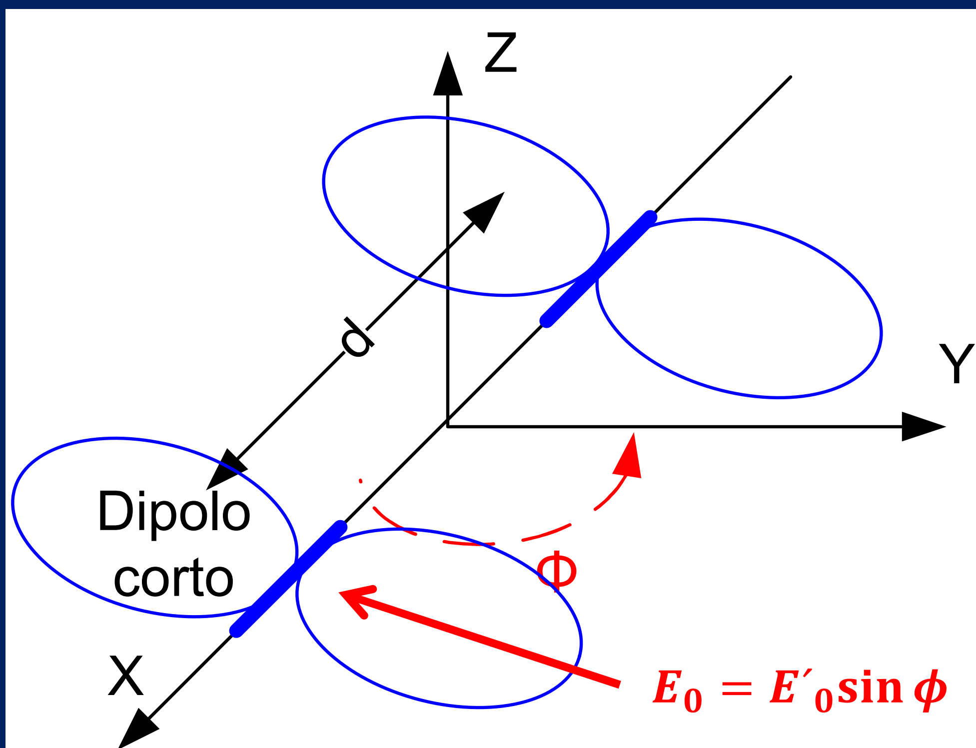
Y están orientados en la misma dirección

Arreglos de fuentes

Consideremos el caso de un dipolo corto



Principio de Superposición



$$E = E_0 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad fuentes\ puntuales$$

$$E_0 = E'_0 \sin\phi \quad dipolo\ corto$$

$$E_n = \sin(\phi)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad normalizando$$

El resultado es equivalente a multiplicar el patrón del array isotrópico por el patrón de las fuentes individuales

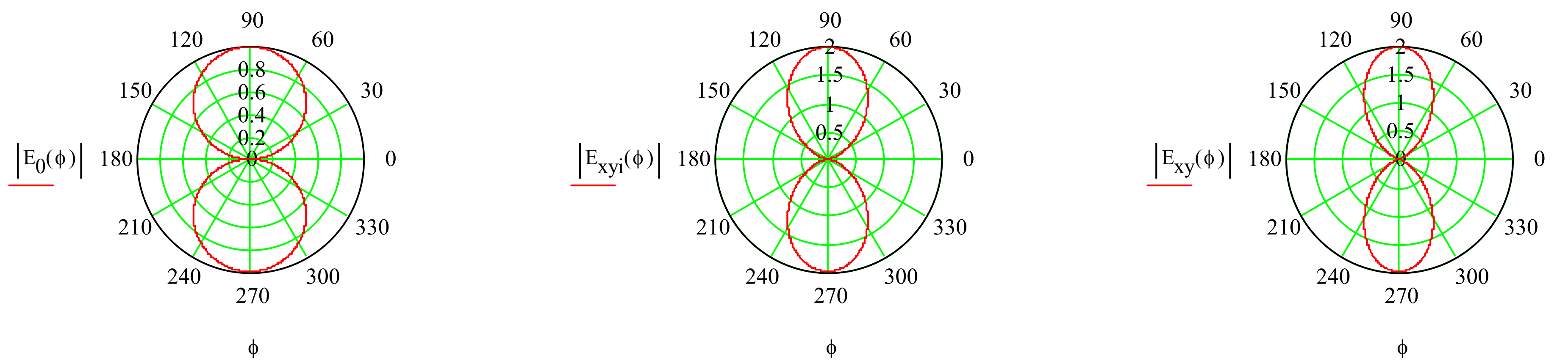
Principio de Superposición

El patrón de campo de un arreglo de fuentes no isotrópicas, pero similares, es igual al producto del patrón de las fuentes individuales y el patrón del arreglo de fuentes isotrópicas que tienen la misma localización, amplitudes relativas y fase que las fuentes no isotrópicas.

Principio de Superposición

Caso de dos dipolos cortos orientados en el eje X, Plano XY $\quad d = \frac{\lambda}{2}$

$E_0(\phi) := \sin(\phi)$ $\quad E_{xyi}(\phi) := 2\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{d}{\lambda}\cdot\cos(\phi)\right)$ $\quad E_{xy}(\phi) := E_0(\phi)\cdot E_{xyi}(\phi)$



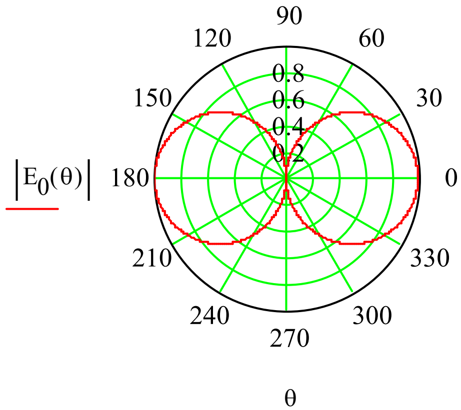
Principio de Superposición

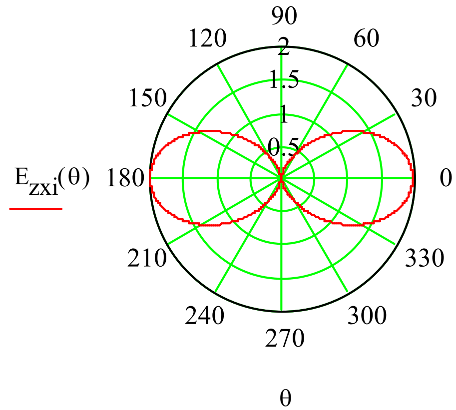
Caso de dos dipolos cortos orientados en el eje X, Plano ZX

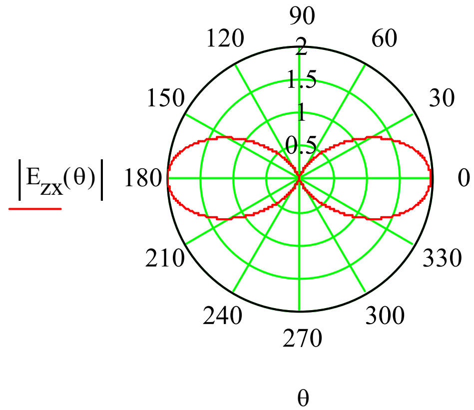
$E_0(\theta) := \cos(\theta)$

$E_{zxi}(\theta) := 2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot d}{\lambda}\cdot\sin(\theta)\right)$

$E_{zx}(\theta) := E_0(\theta)\cdot E_{zxi}(\theta)$



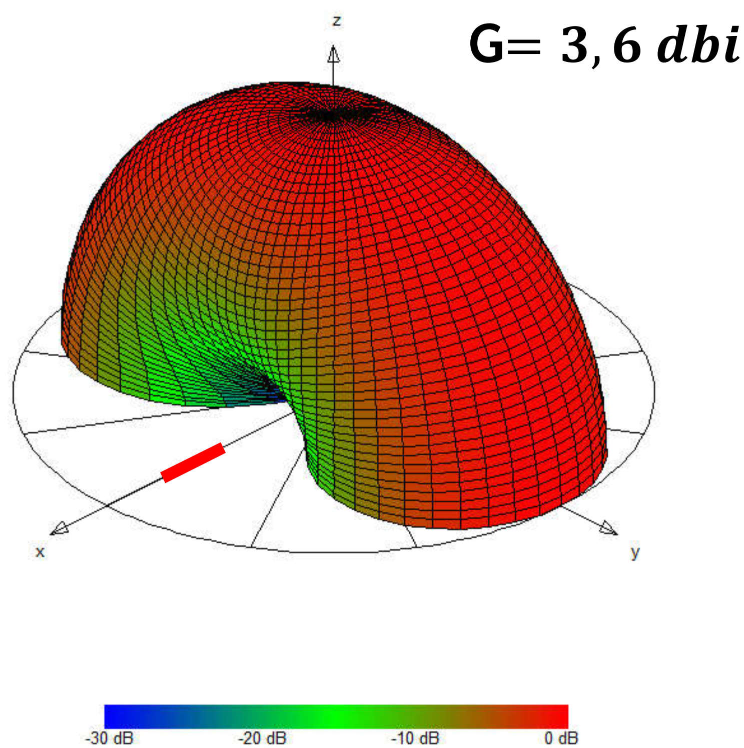




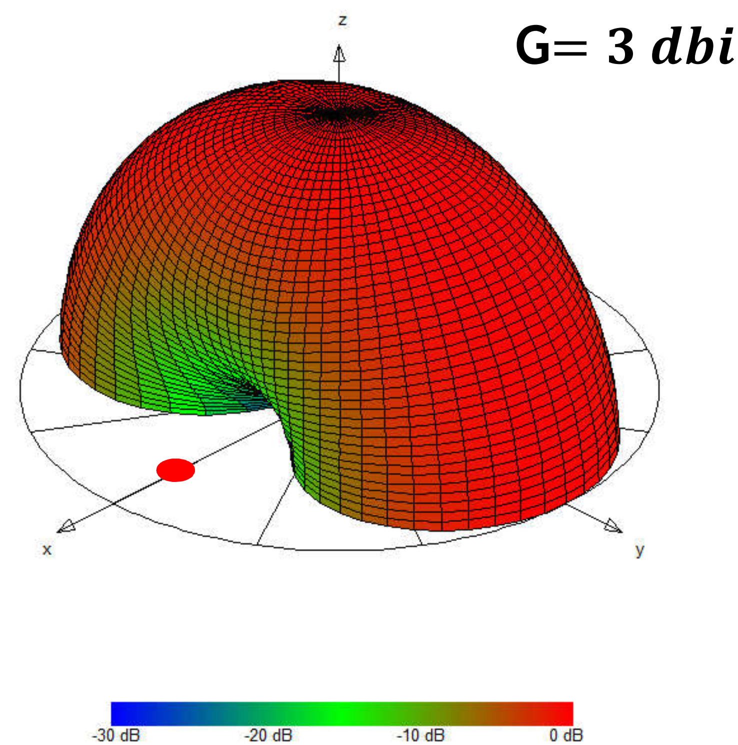
Principio de Superposición

Caso de dos dipolos cortos orientados en el eje X

2 dipolos cortos



2 RI

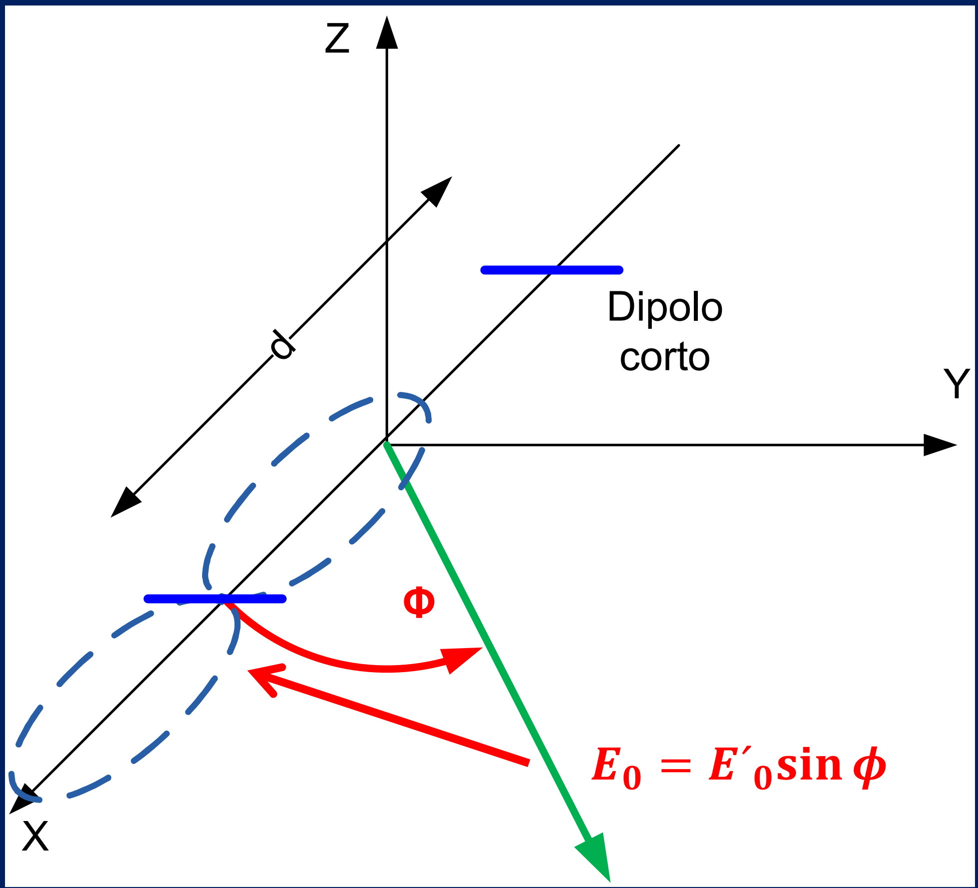


Principio de Superposición

Consideremos el caso de un array con dos dipolos cortos, según:

$E_0 = E'_0 \cos\phi \quad dipolo\ corto$

¿Cómo están orientados los dipolos?



$$E = E_0 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad fuentes\ puntuales$$

$$E = \cos(\phi)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad normalizando$$

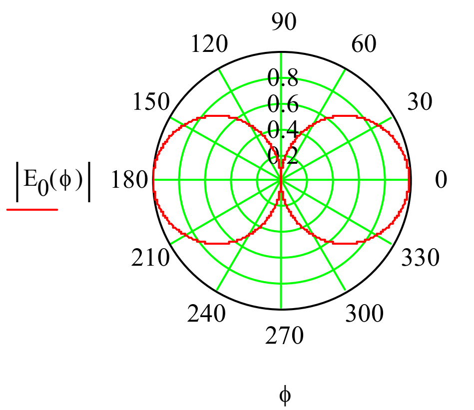
Principio de Superposición

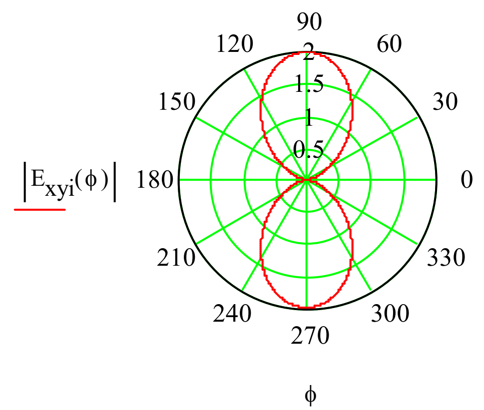
Array con dos dipolos cortos sobre el eje X, orientados según Y, Plano XY

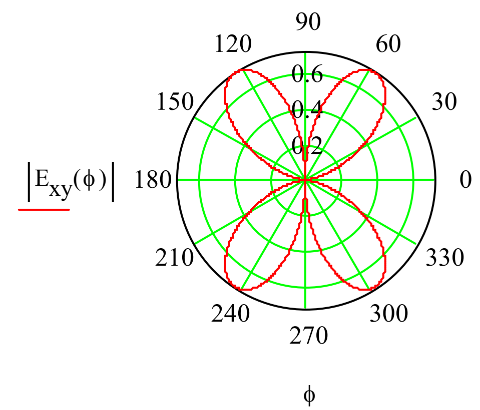
$$E_{0(\phi)} = \cos(\phi)$$

$$E_{xyi(\phi)} = 2\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\cos(\phi)\right)$$

$$E_{xy(\phi)} = E_{0(\phi)} E_{xyi(\phi)}$$







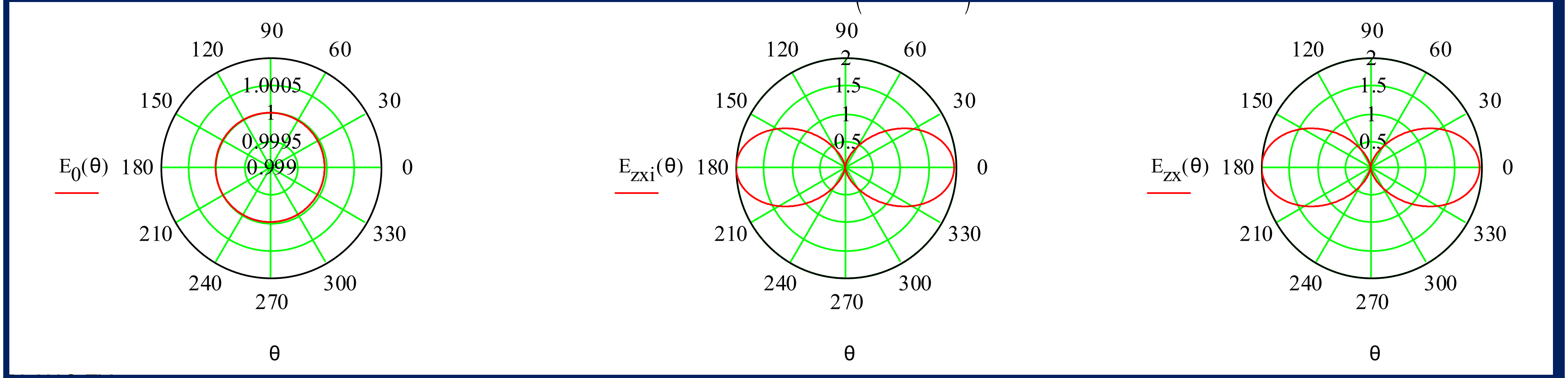
Principio de Superposición

Array con dos dipolos cortos sobre el eje X, orientados según Y, Plano ZX

$$E_{0(\theta)} = 1$$

$$E_{zxi(\theta)} = 2\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin(\theta)\right)$$

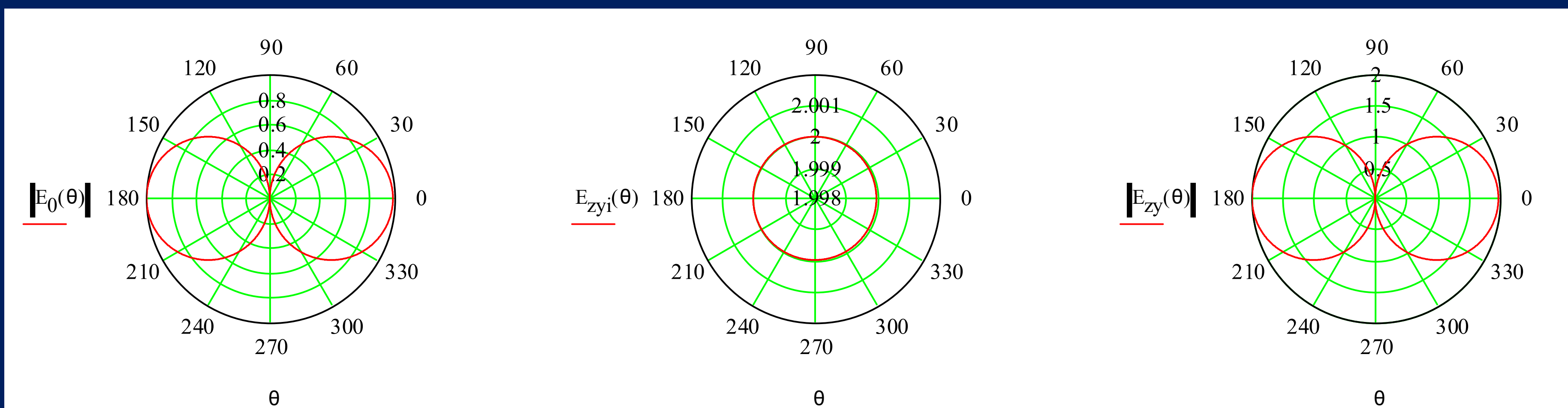
$$E_{zx(\theta)} = E_{0(\theta)} E_{zxi(\theta)}$$



Principio de Superposición

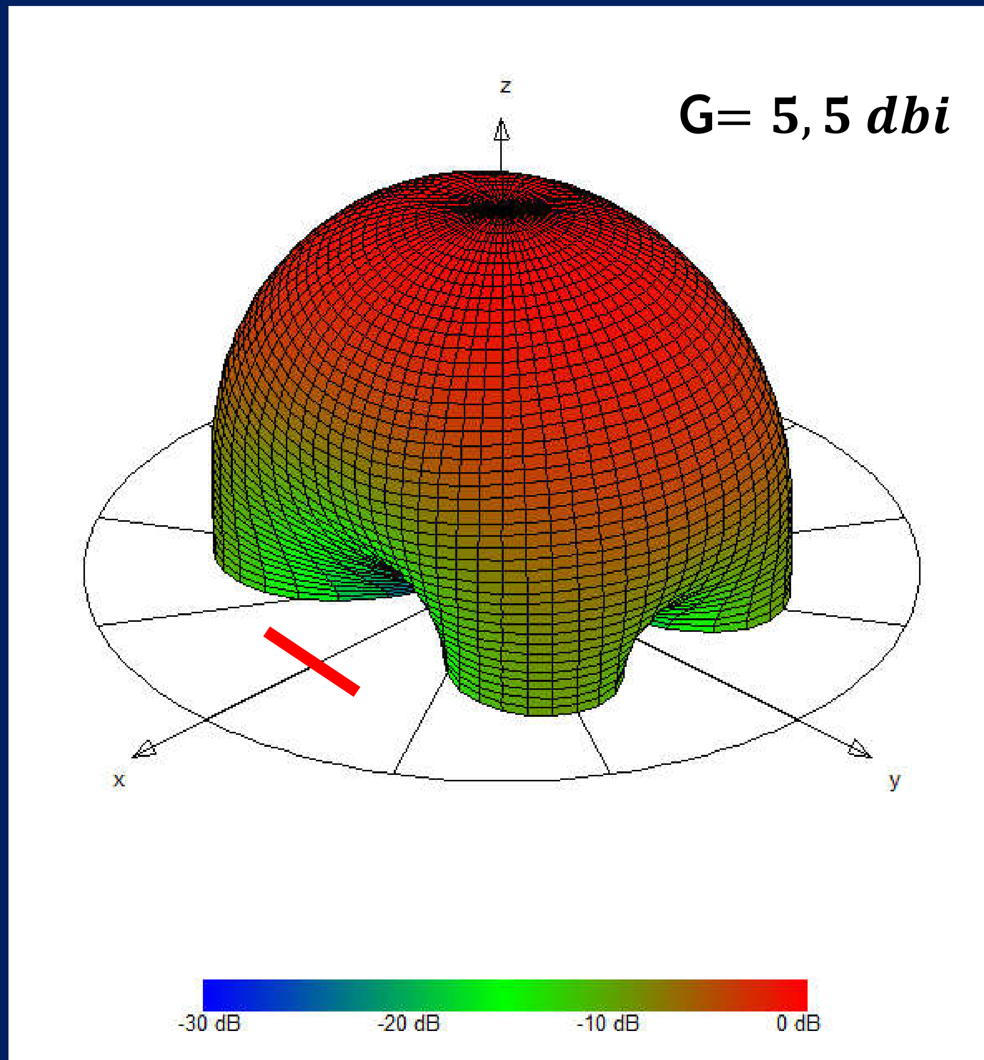
Array con dos dipolos cortos sobre el eje X, orientados según Y, Plano ZY

$$E_{0(\theta)} = \cos(\theta) \qquad E_{zyi(\theta)} = 2 \qquad E_{zy(\theta)} = E_{0(\theta)} E_{zyi(\theta)}$$



Principio de Superposición

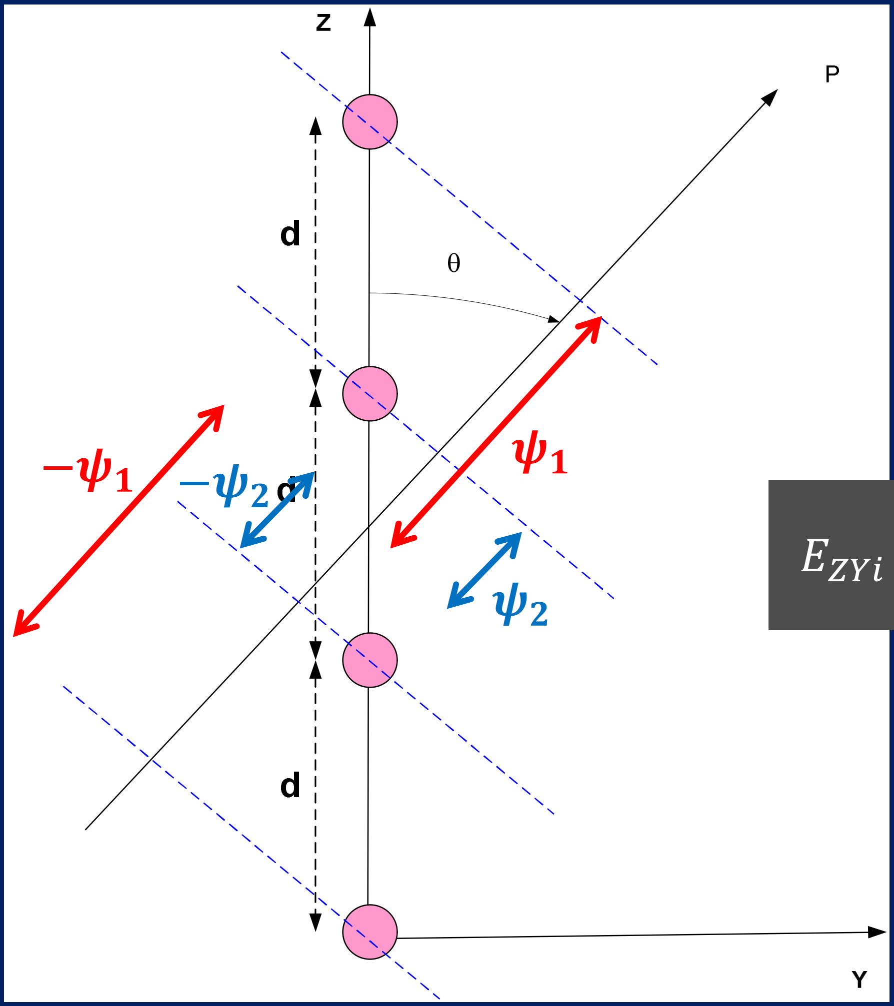
Array con dos dipolos cortos sobre el eje X, orientados según Y $d = \frac{\lambda}{2}$



¿tipo de arreglo?

Arreglos de antenas

Array con cuatro elementos en el eje Z



$$E_{ZYi} = E_0 e^{j\psi_1} + E_0 e^{j\psi_2} + E_0 e^{-j\psi_1} + E_0 e^{-j\psi_2}$$

$$\psi_{1(\theta)} = \frac{2\pi}{\lambda} 3 \frac{d}{2} \cos(\theta) = \frac{3\pi d}{\lambda} \cos(\theta)$$

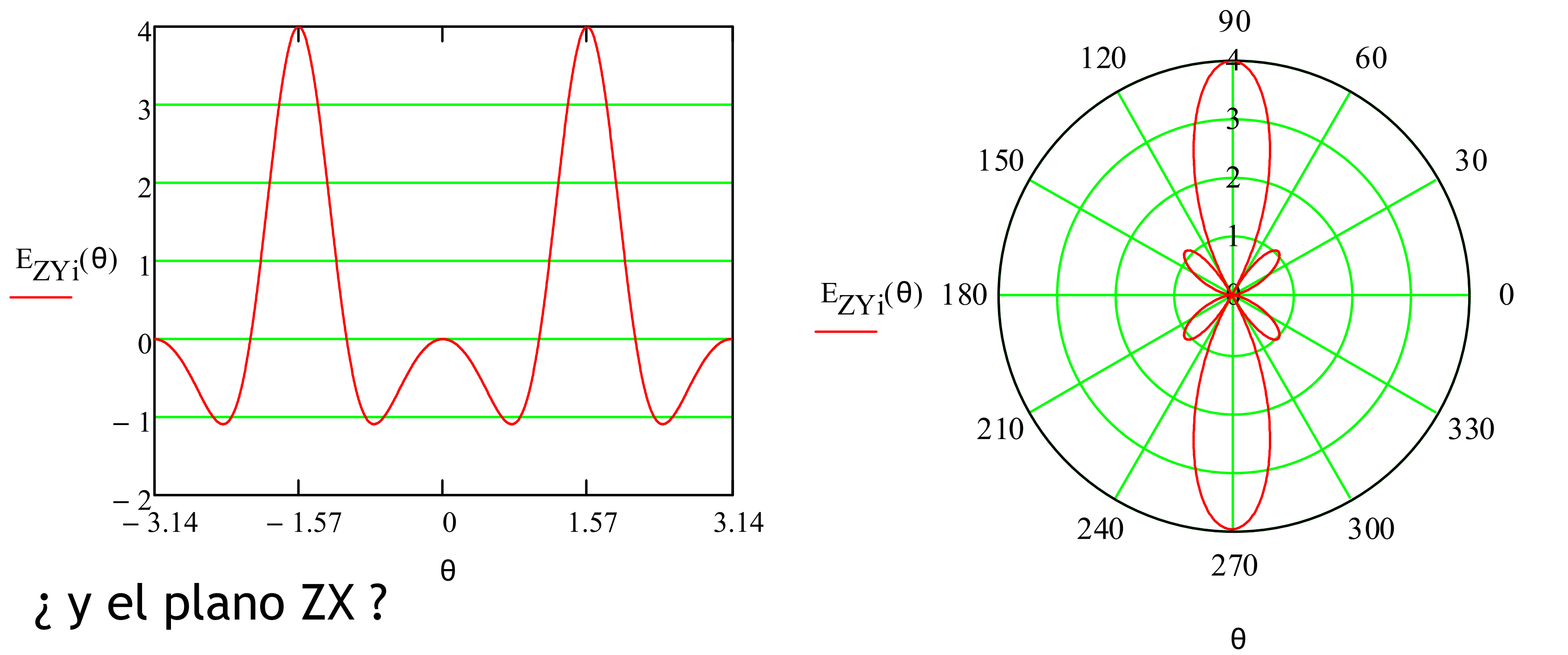
$$\psi_{2(\theta)} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{2} \cos(\theta) = \frac{\pi d}{\lambda} \cos(\theta)$$

$$E_{ZYi} = 2E_0 \left(\cos\left(\frac{3\pi d}{\lambda} \cos(\theta) \right) + \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda} \cos(\theta) \right) \right)$$

Arreglos de antenas

Array con cuatro elementos en el eje Z, Plano ZY

$$E_{ZYi} = 2E_0\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos(\theta)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)\right) \; para \; d = \frac{\lambda}{2}$$



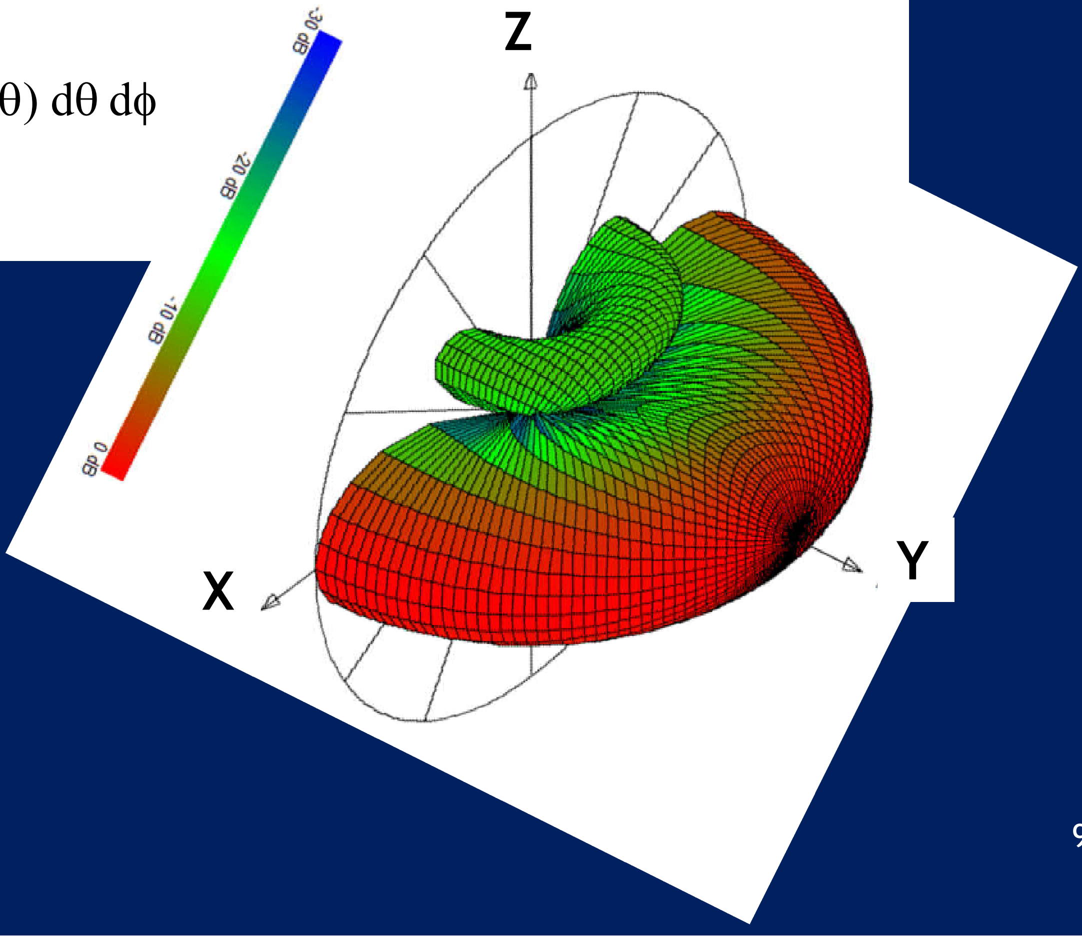
¿ y el plano ZX ?

Arreglos de antenas

Array con cuatro elementos en el eje Z, $d = \frac{\lambda}{2}$

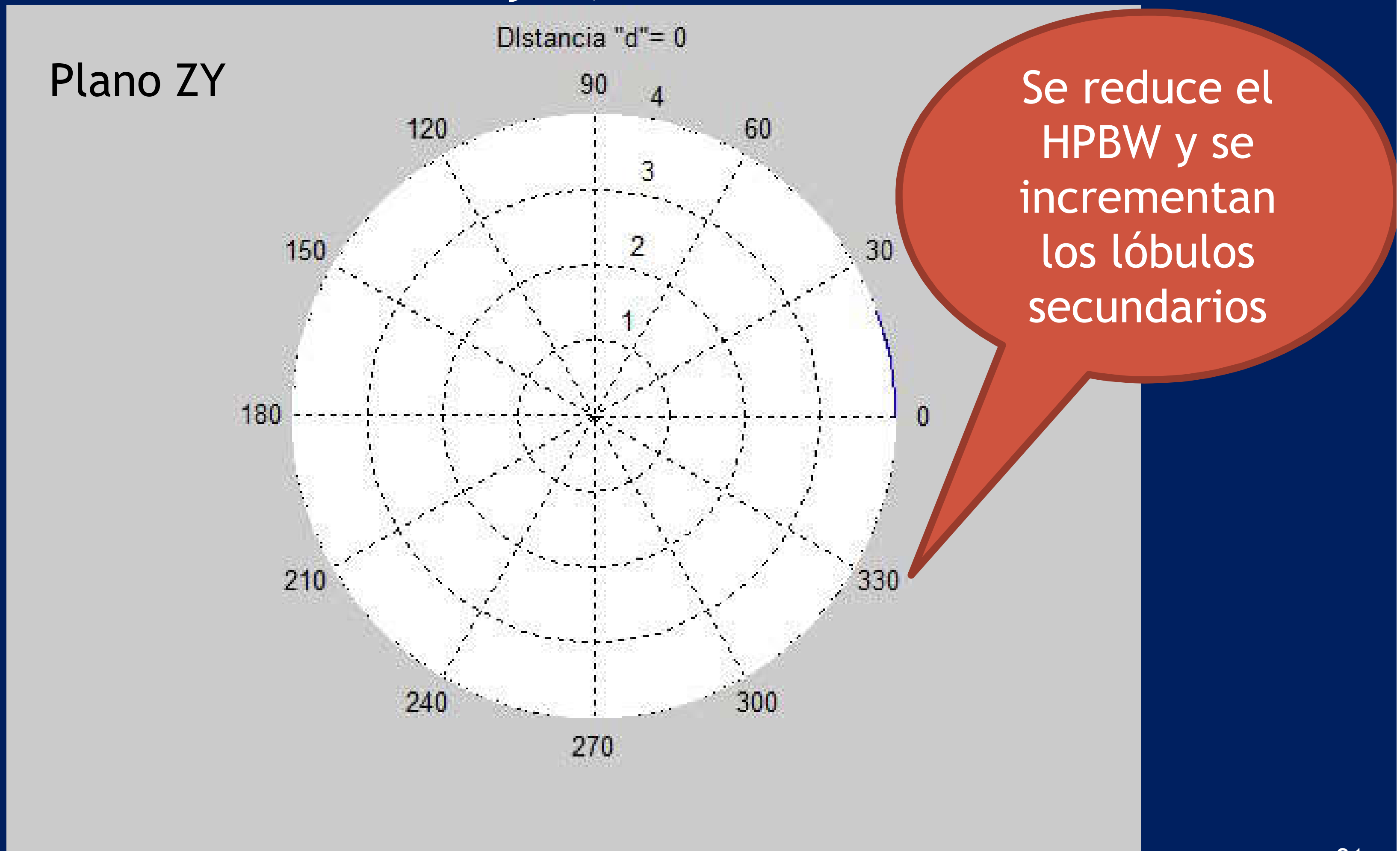
$$G := \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{E_{ZYi}(\theta)}{4E_0}\right)^2 \cdot \sin(\theta)\, d\theta\, d\phi}$$

$$G = 4$$



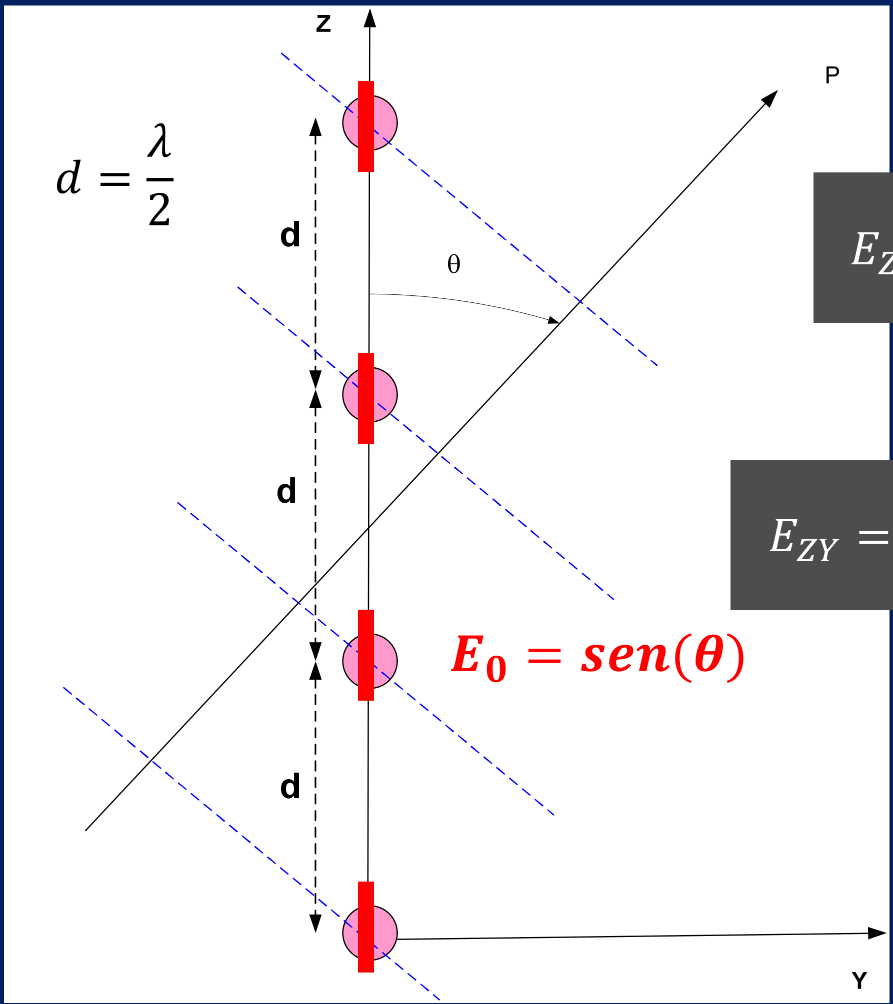
Arreglos de antenas

Array con cuatro elementos en el eje Z, variación de la distancia «d»



Arreglos de antenas

Array con cuatro dipolos cortos en el eje Z, orientados según el eje Z



¿Dipolos cortos en Z?

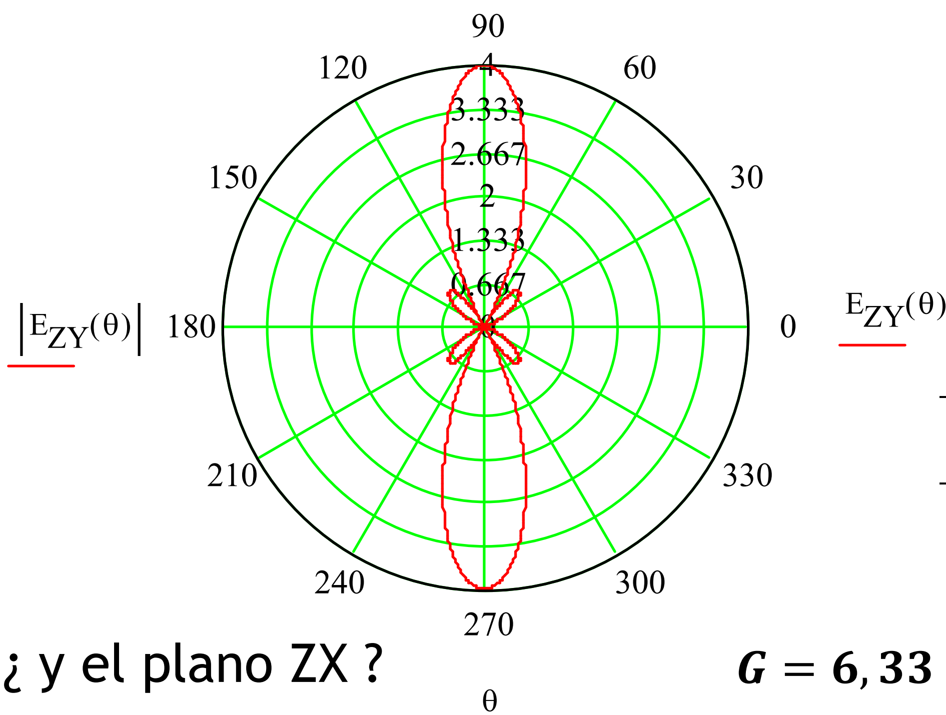
$$E_{ZYi} = 2E_0\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos(\theta)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)\right)$$

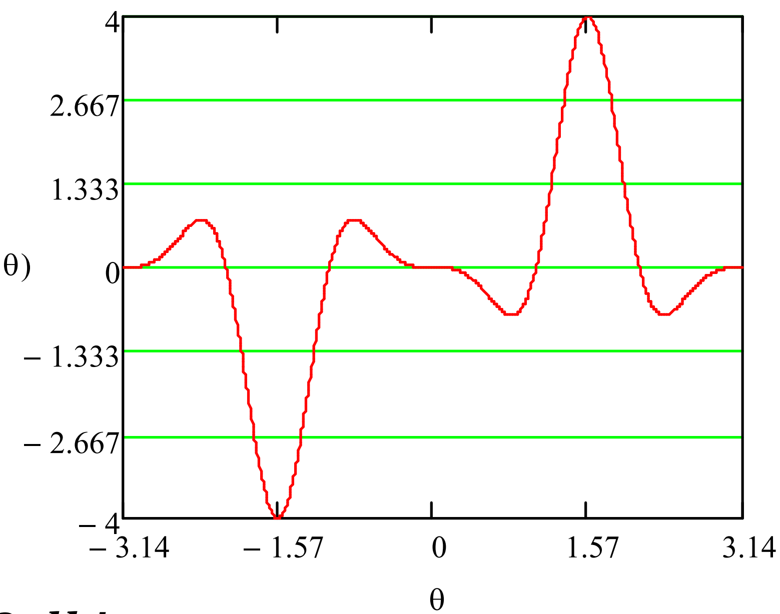
$$E_{ZY} = 2sen(\theta)\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos(\theta)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)\right)$$

Arreglos de antenas

Array con cuatro elementos en el eje Z

$$E_{ZY} = 2sen(\theta)\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos(\theta)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)\ \right) para\ d = \frac{\lambda}{2}$$



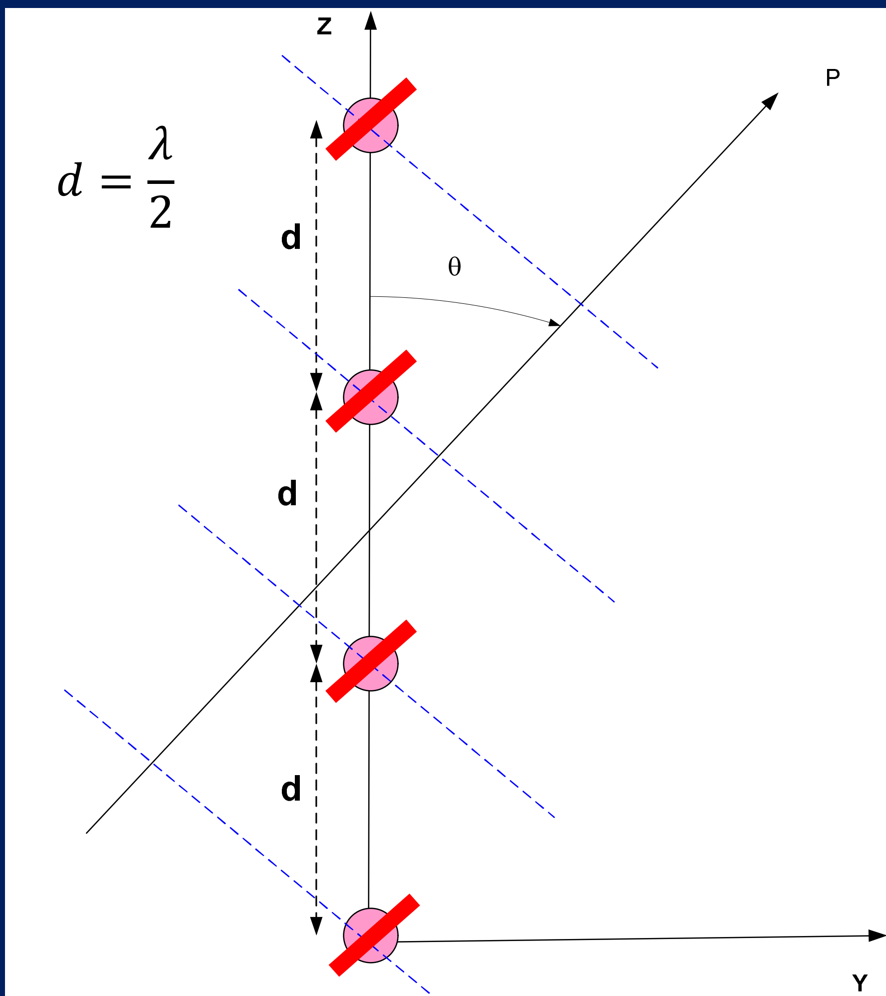


¿ y el plano ZX ?

$$\boldsymbol{G = 6,33\ dbi}$$

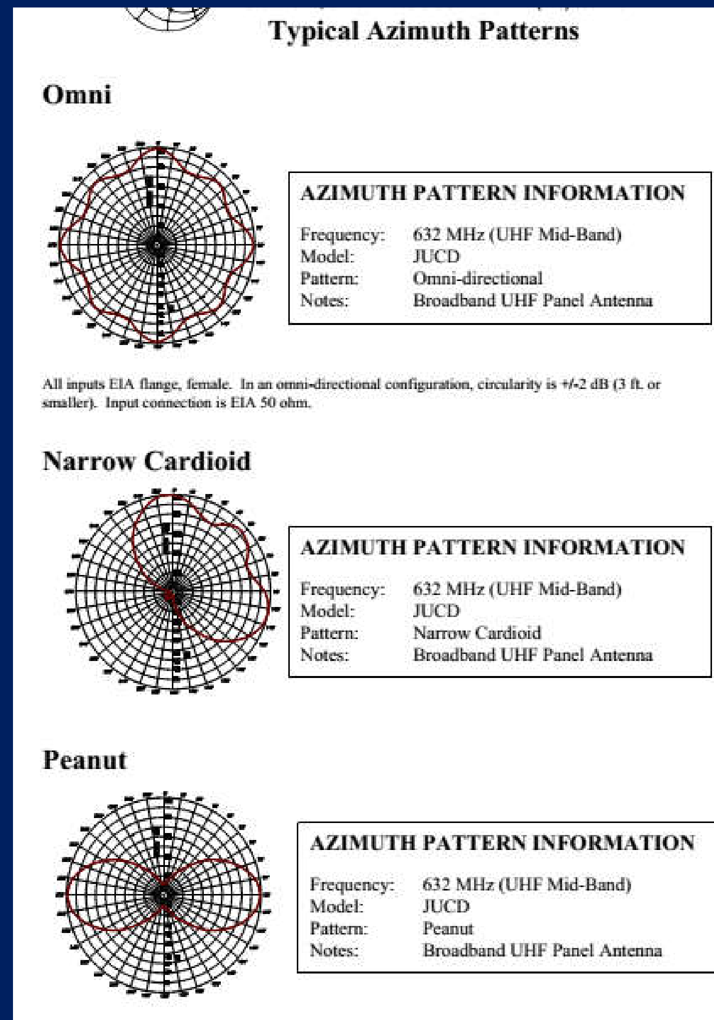
Arreglos de antenas

Array con cuatro dipolos cortos en el eje Z, orientados según el eje X



Arreglos de antenas

JAMPRO Antennas, Inc. http://www.jampro.com/



Typical Azimuth Patterns

Omni

AZIMUTH PATTERN INFORMATION	
Frequency:	632 MHz (UHF Mid-Band)
Model:	JUCD
Pattern:	Omni-directional
Notes:	Broadband UHF Panel Antenna

All inputs EIA flange, female. In an omni-directional configuration, circularity is +/-2 dB (3 ft. or smaller). Input connection is EIA 50 ohm.

Narrow Cardioid

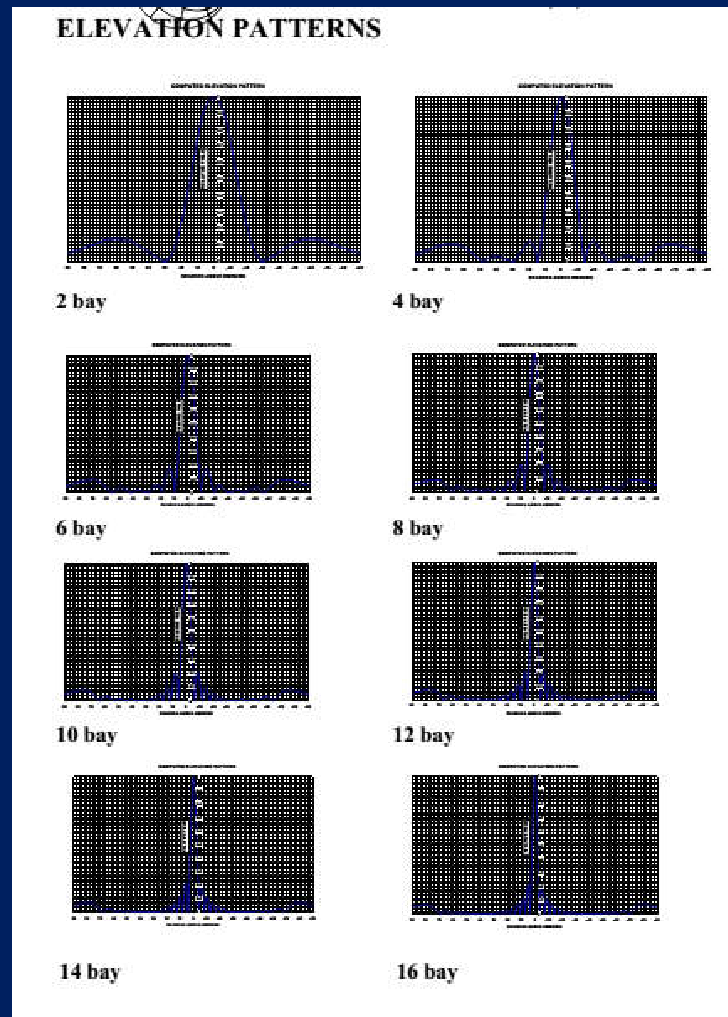
AZIMUTH PATTERN INFORMATION	
Frequency:	632 MHz (UHF Mid-Band)
Model:	JUCD
Pattern:	Narrow Cardioid
Notes:	Broadband UHF Panel Antenna

Peanut

AZIMUTH PATTERN INFORMATION	
Frequency:	632 MHz (UHF Mid-Band)
Model:	JUCD
Pattern:	Peanut
Notes:	Broadband UHF Panel Antenna

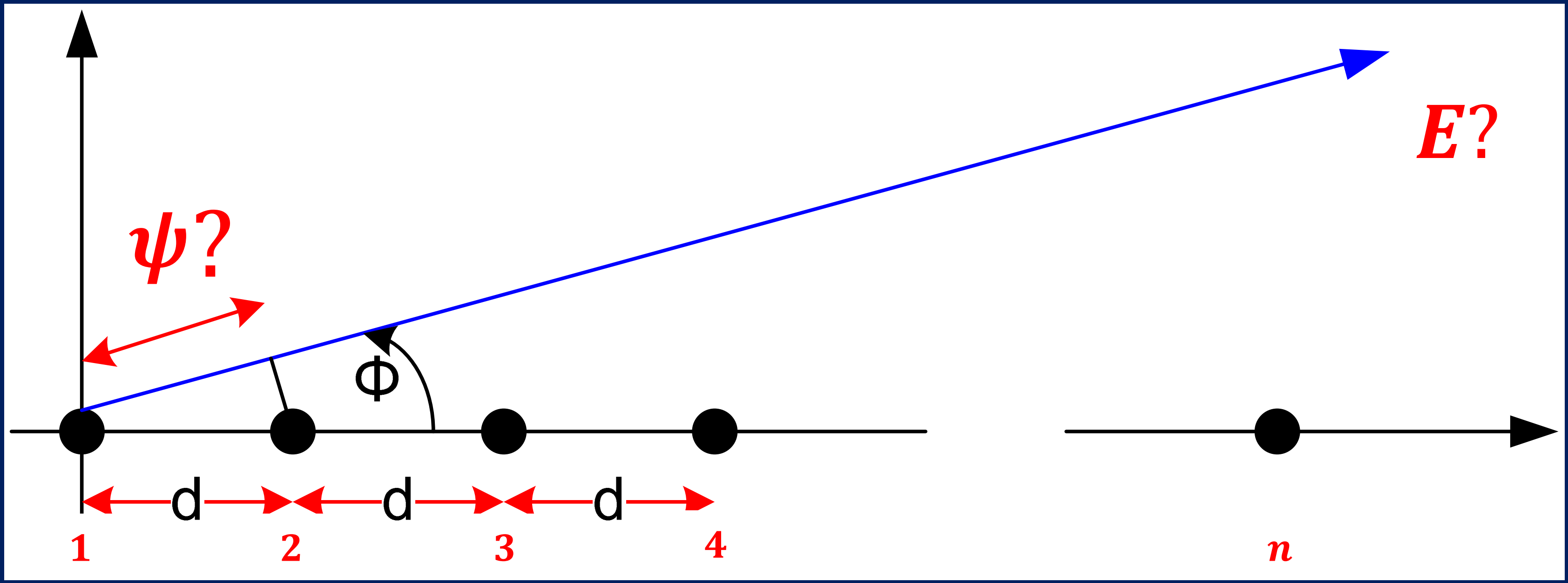
Arreglos de antenas

JAMPRO Antennas, Inc. http://www.jampro.com/



Arreglos de "n" fuentes puntuales

Consideremos un arreglo de " n " fuentes puntuales, de igual amplitud, espaciadas «d»



$$E = 1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{j(n-1)\psi} \qquad \psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos\phi + \delta$$

δ *es la diferencia de fase con respecto a la fuente adyacente:*

2 relativa a 1, 3 relativa a 2, etc

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Tenemos una serie geométrica, donde cada termino es un fasor

$$E = 1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \cdots + e^{j(n-1)\psi} \qquad (1)$$

Multiplicando ambos términos por $e^{j\psi}$

$$Ee^{j\psi} = e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + e^{j4\psi} + \cdots + e^{jn\psi} \qquad (2)$$

Restando (1) de (2) y dividiendo por $1 - e^{j\psi}$

$$E = \frac{1 - e^{jn\psi}}{1 - e^{j\psi}} = \frac{e^{j\frac{n\psi}{2}}}{e^{j\frac{\psi}{2}}}\left(\frac{e^{j\frac{n\psi}{2}} - e^{-j\frac{n\psi}{2}}}{e^{j\frac{\psi}{2}} - e^{-j\frac{\psi}{2}}}\right) = e^{j\frac{(n-1)\psi}{2}} \frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$$

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Tenemos una componente de amplitud y otra de fase

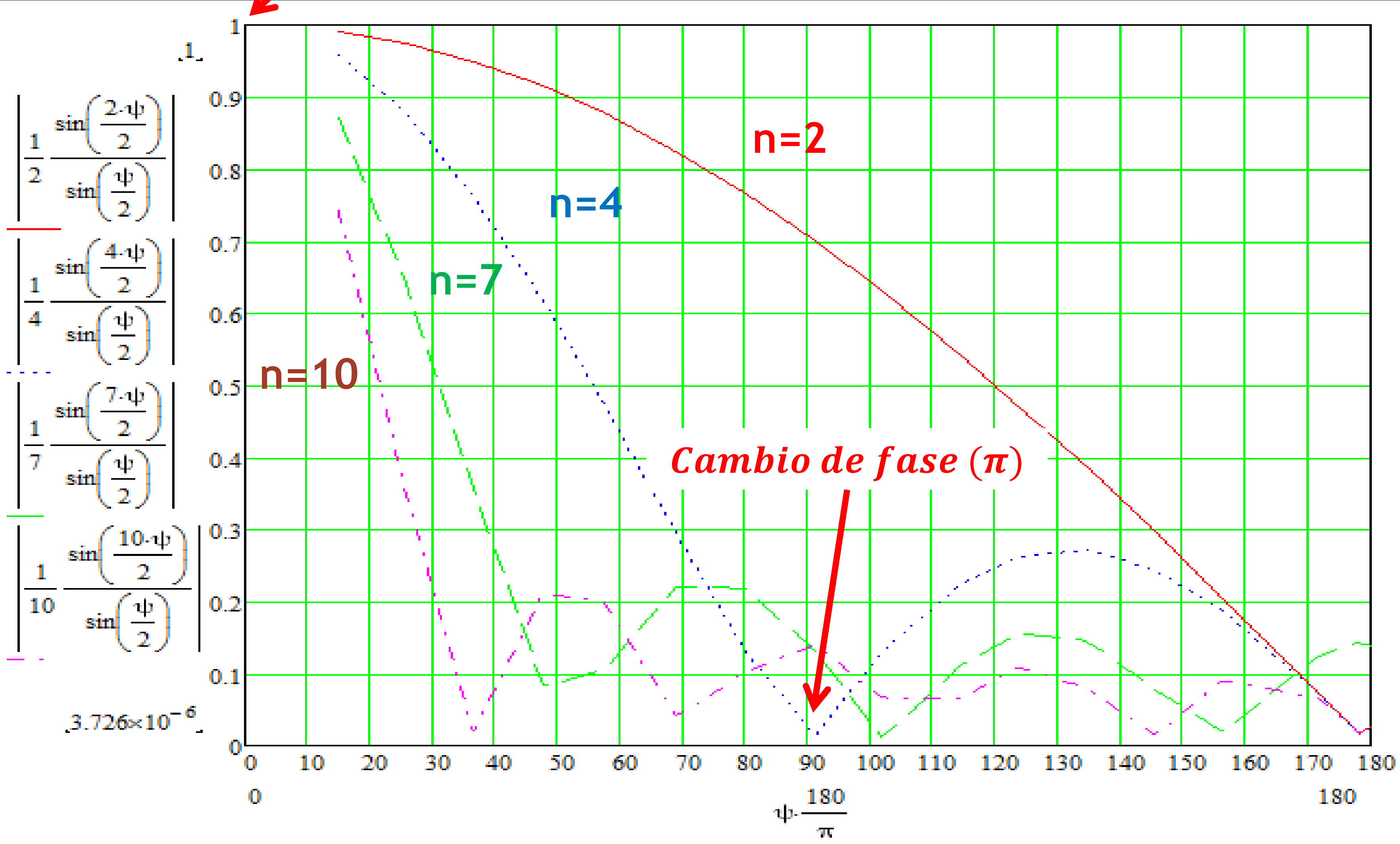
$$E = e^{j\frac{(n-1)\psi}{2}} \frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \qquad \boxed{E = e^{j\xi} \frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}} \qquad \xi = \frac{(n-1)\psi}{2}$$

Si la fase se refiere al centro del arreglo $\xi = 0$, ¿Cuál será el máximo de E?

$$\lim_{\psi \to 0} \frac{\sin\frac{n\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \qquad E_{max} = n$$

Arreglos de "n" fuentes puntuales

E sera maximo en cualquier direccion ϕ, que haga $\psi = 0$



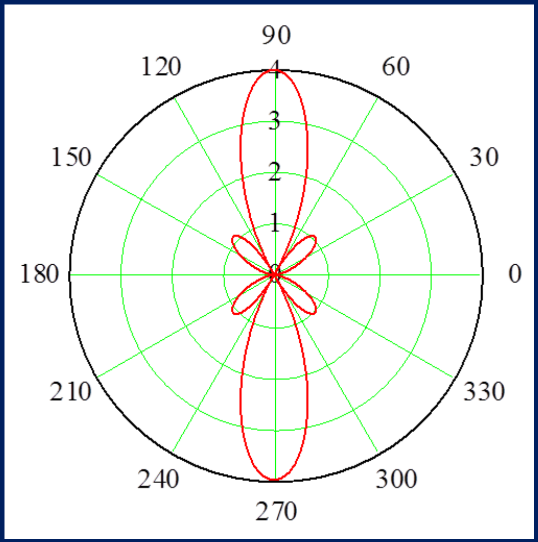
Arreglos de "n" fuentes puntuales

Consideremos el caso de «n» fuentes en fase, $\delta = 0$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos\phi \qquad \psi = 0 \quad si \ldots \qquad \phi = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad k = 0,1,2 \ldots$$

$$Entonces\ el\ campo\ E\ sera\ maximo\ para\ \phi = \frac{\pi}{2}\ y\ \phi = \frac{3\pi}{2}$$

Por lo que tenemos un arreglo de tipo BROADSIDE

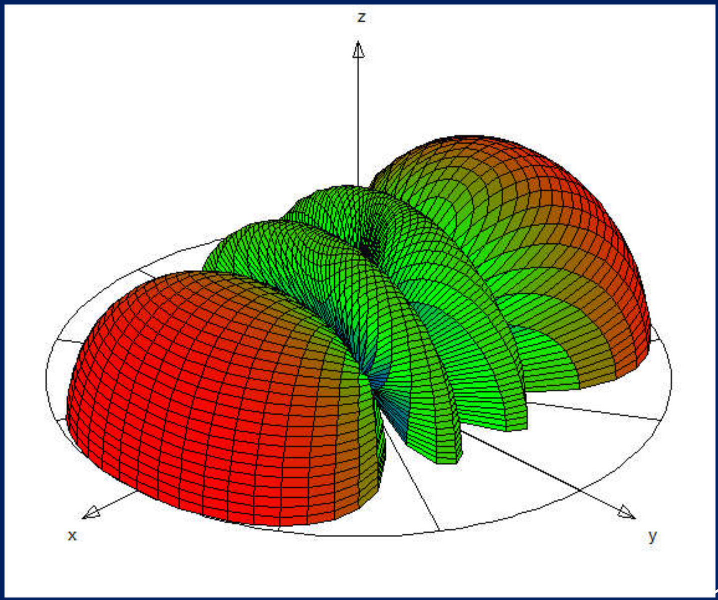


Arreglos de "n" fuentes puntuales

Si buscamos que el máximo de E este en la dirección del arreglo Φ=0

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos\phi + \delta \qquad \psi = 0 \ \ y \ \ \phi = 0 \qquad \delta = -\frac{2\pi}{\lambda} d$$

Por lo que tenemos un arreglo ENDFIRE

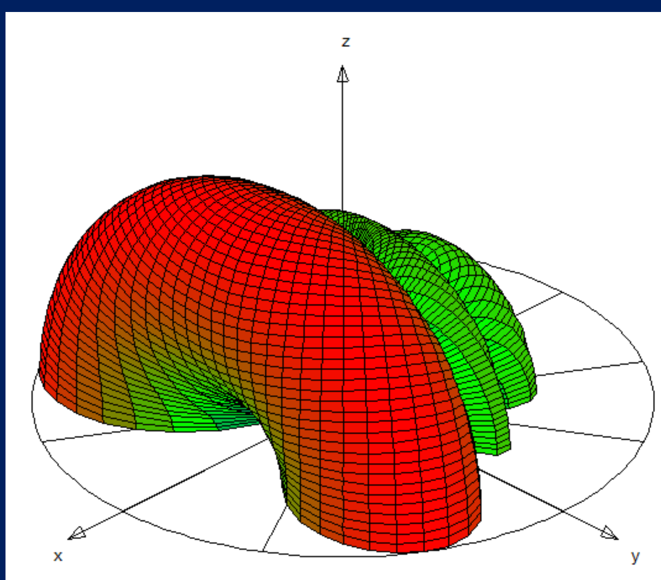


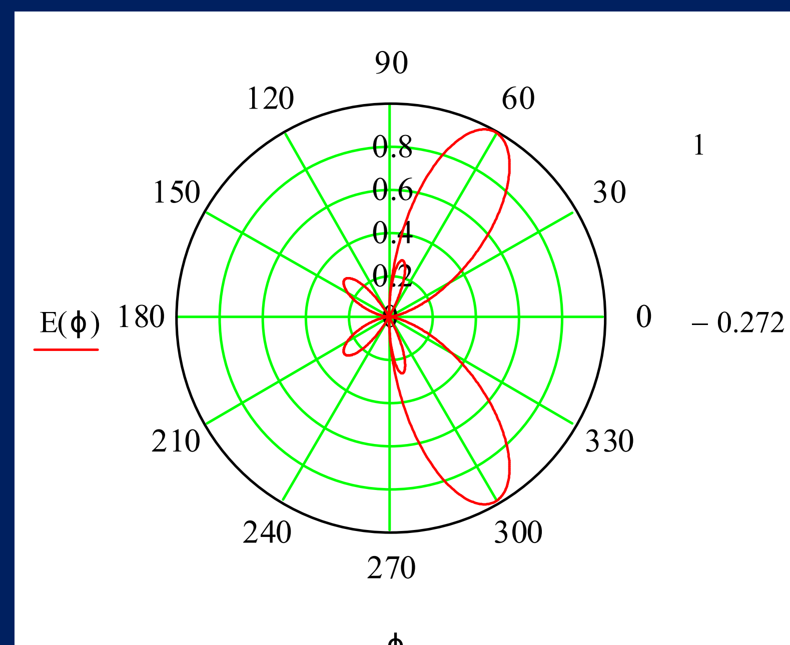
Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglo con el máximo de E en una dirección arbitraria, por ej. $\phi = 60°$.
El arreglo es de 4 fuentes espaciadas λ/2

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos\phi + \delta \qquad \psi = 0 \;\; y \;\; \phi = 60 \qquad \delta = -\pi cos(60)$$

$$\delta = -\frac{\pi}{2} \qquad E = \frac{1}{4}\frac{\sin\frac{4\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$$





ϕ

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Estuvimos analizando arreglos lineales de *amplitud uniforme*

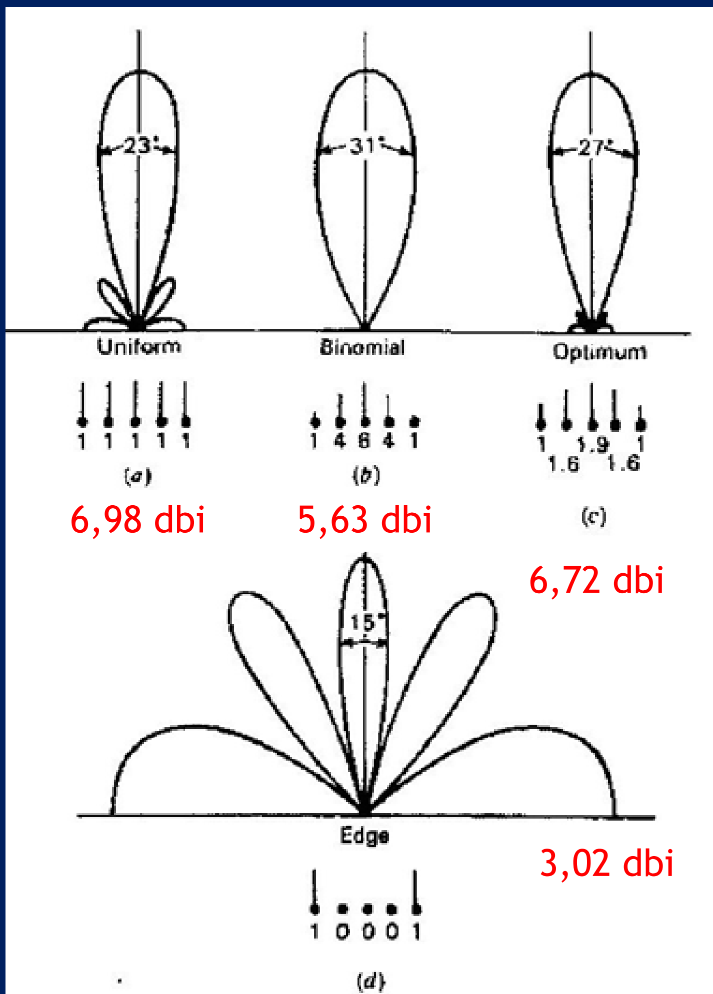
Ampliaremos la discusión a arreglos de *amplitud no uniforme*

Tópicos a considerar:

- Distribución Dolph - Tschebycheff
- Comparación con otras distribuciones

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglos lineales de <u>*amplitud no uniforme*</u>



Todos son arreglos de 5 fuentes, en fase, $\mathrm{d} = \lambda/2$

Ganancia…

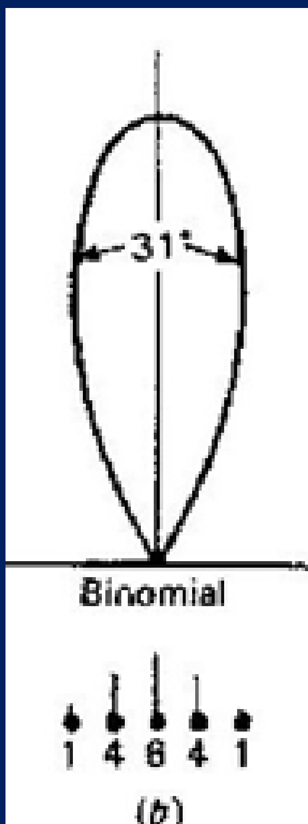
Ancho de banda de media potencia…

Lóbulos secundarios…

Conclusiones…

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglos lineales de *<u>amplitud no uniforme</u>: distribución binomial*



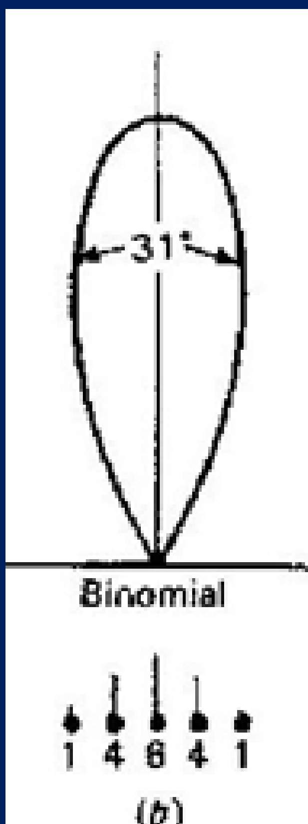
Para reducir los lóbulos secundarios John Stone propuso que las amplitudes de las fuentes fueran proporcionales a los coeficientes de una serie binomial

$$(a+b)^{n-1} = a^{n-1} + (n-1)a^{n-2}b + \frac{(n-1)(n-2)a^{n-3}b^2}{2!} + \cdots$$

n	Amplitudes relativas						
3			1	2	1		
4		1	3		3	1	
5		1	4	6	4	1	
6	1	5	10		10	5	1

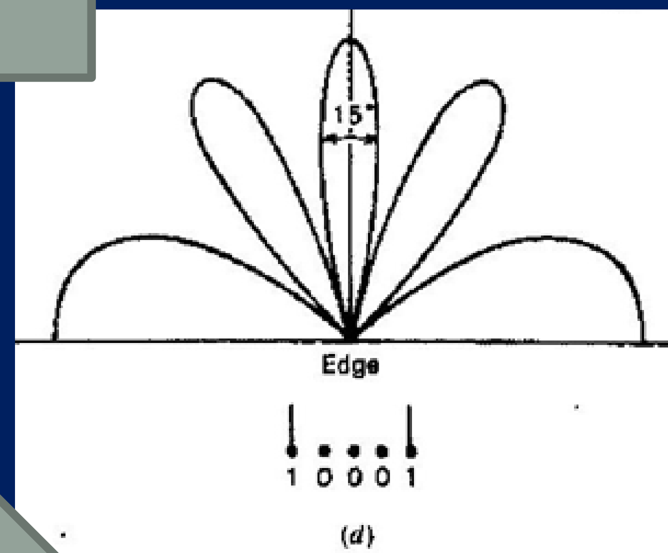
Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglos lineales de *amplitud no uniforme*



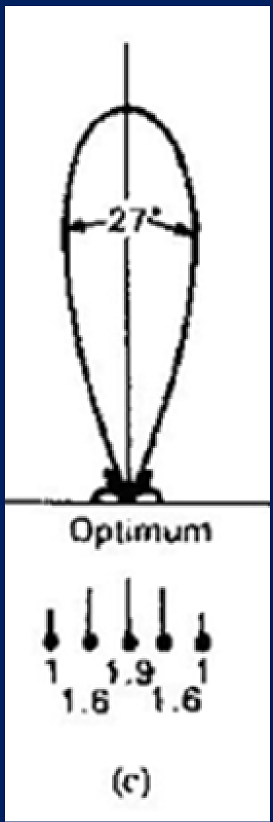
Sin lóbulos secundarios
Mayor HPBW

Menor HPBW
Mayor lóbulos secundarios



Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglos lineales de <u>*amplitud no uniforme*:</u> *Dolph - Tchebyscheff*



El patrón de campo lejano de un arreglo lineal de «n» fuentes isotrópicas, puede ser expresado como una serie de Fourier de «n» términos.

Dolph propone adaptar los términos de la serie polinomial de Fourier con los términos de un polinomio de Tchebyscheff.

Esto permite obtener una distribución OPTIMA, a partir de la especificación del nivel de los lóbulos laterales SLL

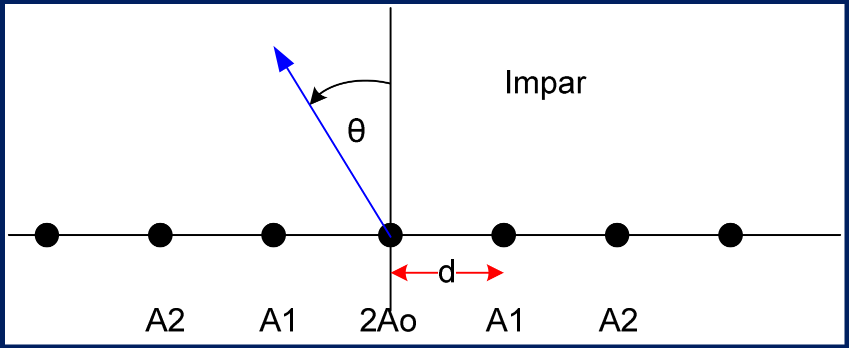
Si especificamos el nivel de SLL, optimizamos el HPBW
Si especificamos el nivel de HPBW, optimizamos el SLL

Analizaremos dos casos…

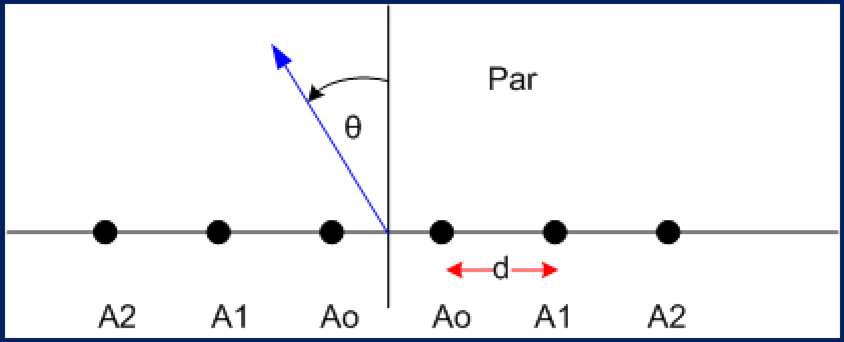
Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglos lineales de *amplitud no uniforme: Dolph - Tchebyscheff*

Arreglo linear de un numero impar de fuentes isotrópicas.

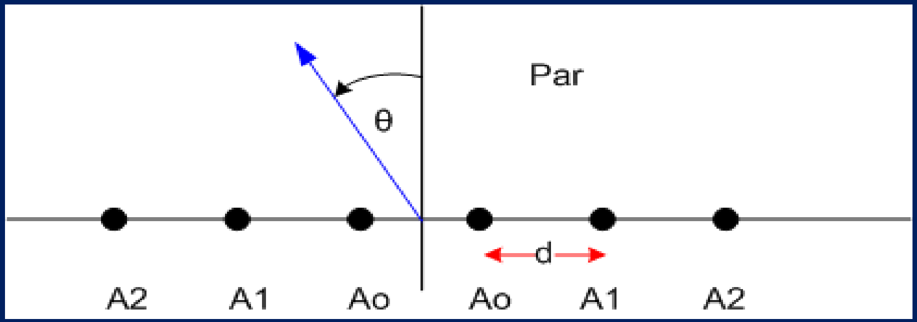


Arreglo linear de un numero par de fuentes isotrópicas.



Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglo linear D-T de un numero par de fuentes isotrópicas



$$E_p = 2A_0 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + 2A_1 \cos\left(3\frac{\psi}{2}\right) + \cdots + 2A_k \cos\left[\left(\frac{n_p - 1}{2}\right)\frac{\psi}{2}\right]$$

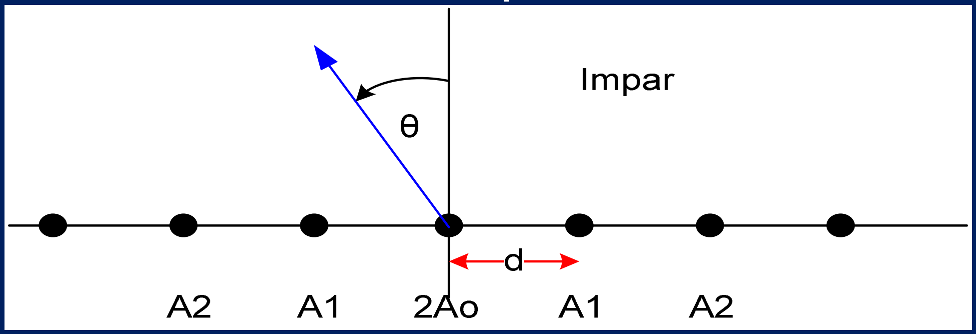
$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot sin(\theta) \quad haciendo\ 2(k+1) = n_p \quad k = 0,1,2,3,\ldots \qquad \frac{n_p - 1}{2} = \frac{2k+1}{2}$$

$$E_p = 2\sum_{k=0}^{N-1} A_k \cos\left[(2k+1)\frac{\psi}{2}\right] \qquad N = \frac{n_p}{2}$$

Cada termino representa el campo debido a un par de fuentes dispuestas simétricamente

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglo linear D-T de un numero impar de fuentes isotrópicas



$$E_i = 2A_0 + 2A_1 \cos(\psi) + \cdots + 2A_k \cos\left[\left(\frac{n_i - 1}{2}\right)\psi\right]$$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot sin(\theta) \quad haciendo\ 2k + 1 = n_i \quad k = 0,1,2,3, \ldots$$

$$E_i = 2\sum_{k=0}^{N} A_k \cos\left[2k\frac{\psi}{2}\right] \qquad N = \frac{n_i - 1}{2}$$

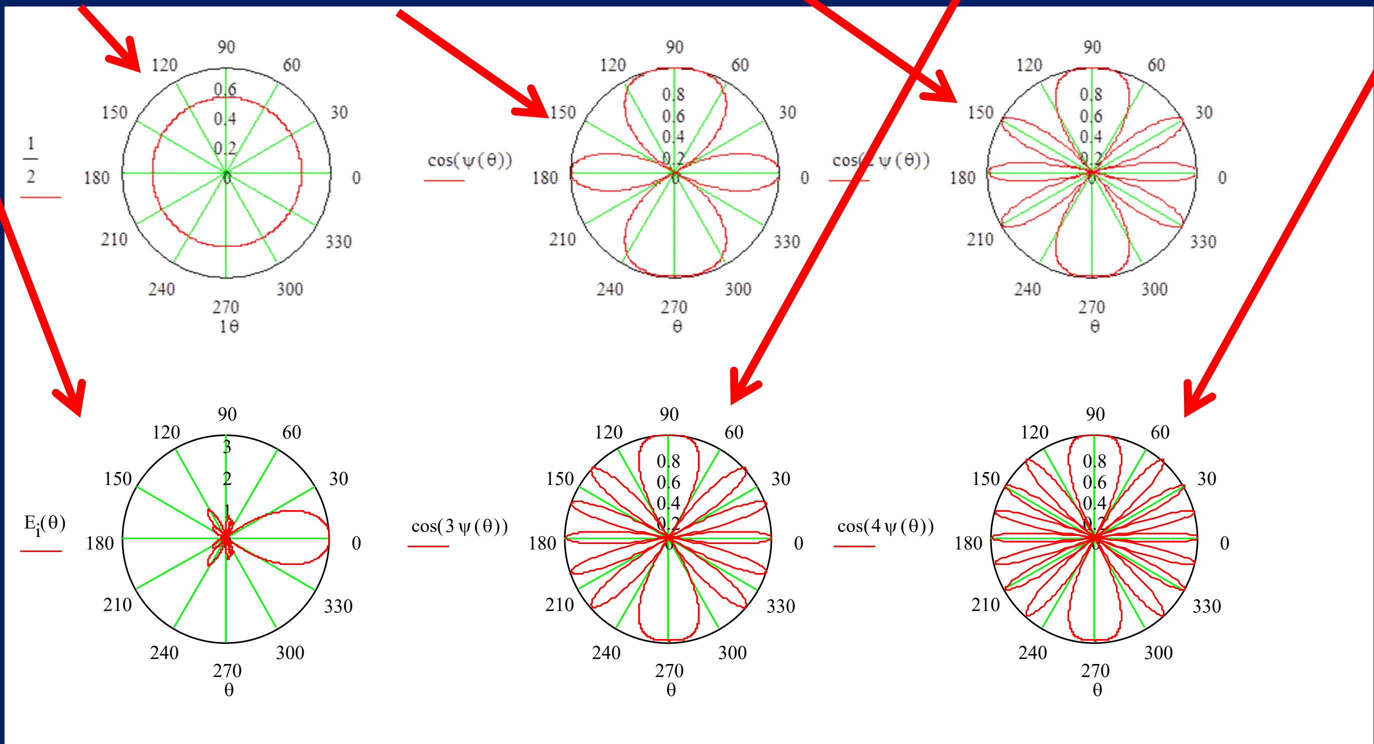
Serie de Fourier finita de N términos

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglo linear D-T : Naturaleza de las expresiones de la serie

Consideremos un arreglo de 9 fuentes espaciadas λ/2.

$$E_i(\theta) := \frac{1}{2} + \cos(\psi(\theta)) + \cos(2\cdot\psi(\theta)) + \cos(3\,\psi(\theta)) + \cos(4\,\psi(\theta))$$



Amplitud => 2Ao=A1=A2=A3=A4=1/2

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglo linear Dolph-Tchebyscheff

Con el método Dolph-Tchebyscheff podemos demostrar que para una distribución de amplitud puede determinarse los coeficientes de la serie de forma tal de lograr un mínimo ancho del haz para un determinado nivel de lóbulos secundarios.

El primer paso consiste en demostrar que las ecuaciones de series planteadas pueden ser consideradas como polinomios de grado n-1 (numero de fuentes menos 1).

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglo linear Dolph-Tchebyscheff – caso broadside

Teorema de Moivre

$$\psi = d_r \sin\theta \qquad e^{-jm\frac{\psi}{2}} = \cos m\frac{\psi}{2} + j\,\mathrm{sen}\, m\frac{\psi}{2} = \left(\cos\frac{\psi}{2} + j\,\mathrm{sen}\frac{\psi}{2}\right)^m$$

$$consideremos\ la\ parte\ real \qquad \cos m\frac{\psi}{2} = \Re\left(\cos\frac{\psi}{2} + j\,\mathrm{sen}\frac{\psi}{2}\right)^m$$

$$expandiendo \qquad \cos m\frac{\psi}{2} = cos^m\frac{\psi}{2} - \frac{m(m-1)}{2!}cos^{m-2}\frac{\psi}{2}sen^2\frac{\psi}{2} +$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}cos^{m-4}\frac{\psi}{2}sen^4\frac{\psi}{2} - \cdots$$

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglo linear Dolph-Tchebyscheff – caso broadside

$$\cos m\frac{\psi}{2} = cos^m\frac{\psi}{2} - \frac{m(m-1)}{2!}cos^{m-2}\frac{\psi}{2}sen^2\frac{\psi}{2} + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}cos^{m-4}\frac{\psi}{2}sen^4\frac{\psi}{2} - \cdots$$

$$sen^2\frac{\psi}{2} = 1 - cos^2\frac{\psi}{2}$$

$m = 0 \qquad \cos m\frac{\psi}{2} = 1$

$m = 1 \qquad \cos m\frac{\psi}{2} = \cos\frac{\psi}{2}$

$m = 2 \qquad \cos m\frac{\psi}{2} = 2\,cos^2\frac{\psi}{2} - 1$

$m = 3 \qquad \cos m\frac{\psi}{2} = 4\,cos^3\frac{\psi}{2} - 3\cos\frac{\psi}{2}$

$m = 4 \qquad \cos m\frac{\psi}{2} = 8\,cos^4\frac{\psi}{2} - 8\,cos^2\frac{\psi}{2} + 1$

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglo linear Dolph-Tchebyscheff – caso broadside

$x = cos\frac{\psi}{2}$ *haciendo un cambio de variable*

$m = 0 \qquad \cos m\frac{\psi}{2} = 1$

$m = 1 \qquad \cos m\frac{\psi}{2} = x$

$m = 2 \qquad \cos m\frac{\psi}{2} = 2\,x^2 - 1$

$m = 3 \qquad \cos m\frac{\psi}{2} = 4\,x^3 - 3x$

$m = 4 \qquad \cos m\frac{\psi}{2} = 8\,x^4 - 8x^2 + 1$

Aquí tenemos que cada término que aporta un par de fuentes (el arreglo se evalúa con respecto al centro) a la expresión del campo total E, se puede escribir como un Polinomio de Tchebyscheff

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglo linear Dolph-Tchebyscheff – caso broadside

$$T_m(x) = \cos m\frac{\psi}{2}$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

Notar que el grado del polinomio coincide con el valor de m

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglo linear Dolph-Tchebyscheff – caso broadside

Las raíces del polinomio ocurren para…

$$\cos m\frac{\psi}{2} = 0 \qquad m\frac{\psi}{2} = (2k-1)\frac{\pi}{2} \quad k = 1,2,3\ldots$$

$$x = cos\frac{\psi}{2} \qquad designamos\ a\ las\ raices\ del\ polinomio\ como\ \ldots$$

$$x_r = \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2m}\right)$$

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglo linear Dolph-Tchebyscheff – caso broadside

Entonces se comprueba que las expresiones desarrolladas para arreglos pares o impares, se pueden expresar como polinomios de grados $2k + 1\ y\ 2k$

$$E_p = 2\sum_{k=0}^{N-1} A_k \cos\left((2k+1)\frac{\psi}{2}\right) \qquad E_i = 2\sum_{k=0}^{N} A_k \cos\left(2k\frac{\psi}{2}\right)$$

$$donde\ el\ grado\ del\ polinomio\ es\ el\ numero\ de\ fuentes\ menos\ 1$$

$$n_p - 1 = 2k + 1 \qquad n_i - 1 = 2k$$

$$n_p = 2(k + 1) \qquad n_i = 2k + 1$$

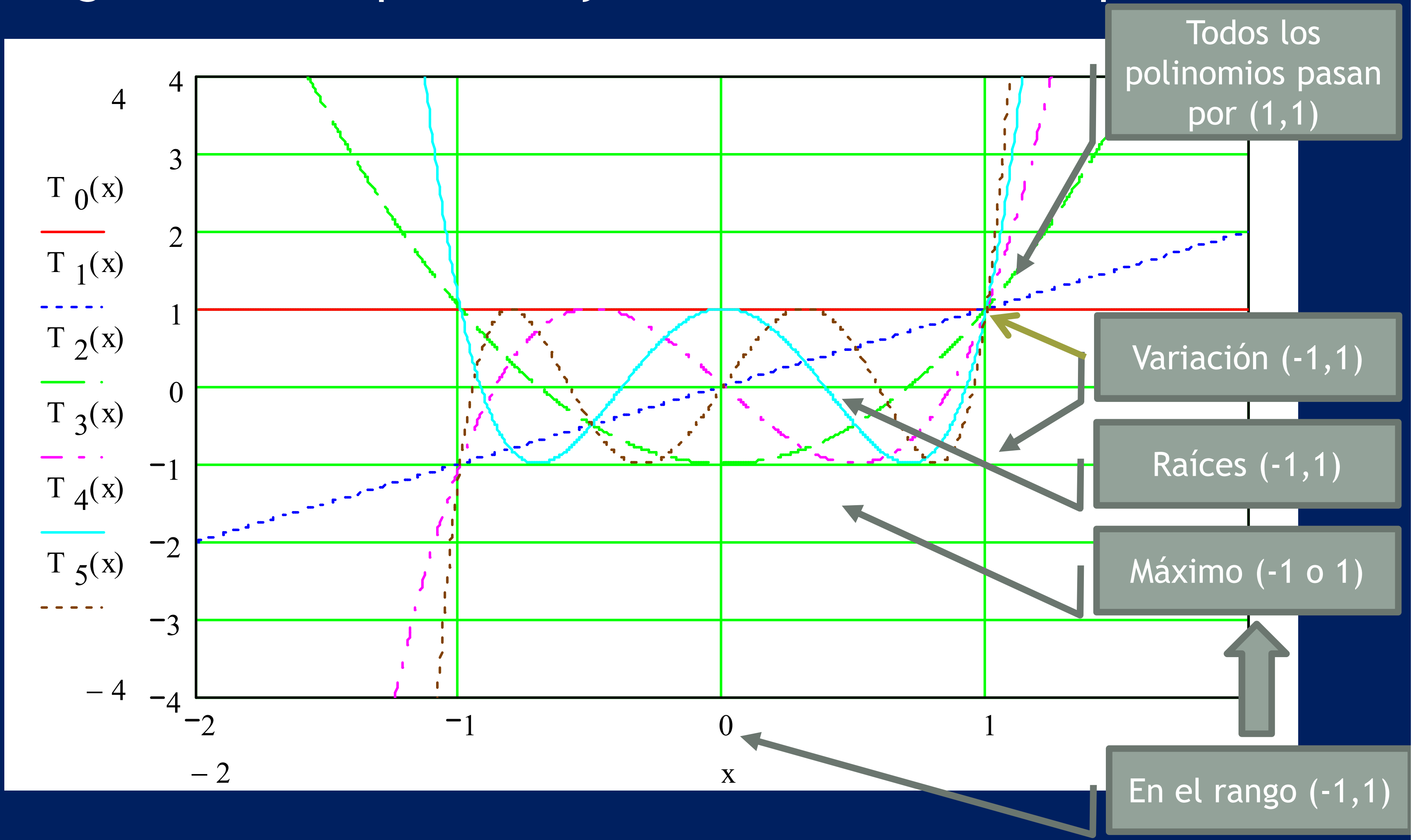
Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglo linear Dolph-Tchebyscheff – caso broadside

Entonces el arreglo polinomial, dado por la expresiones anteriores, se puede considerar como un polinomio de Tchebyscheff de grado m=n-1 (el numero de fuentes menos uno), siendo la distribución de amplitud de las fuentes del arreglo una distribución polinomial de Tchebyscheff.

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Arreglo linear Dolph-Tchebyscheff – Raíces de los polinomios



Arreglos de "n" fuentes puntuales

Método Dolph-Tchebyscheff

Supongamos un arreglo de 6 fuentes, por lo que el patrón de campo será un polinomio de grado 5, definamos la relación R como el cociente entre el máximo del lóbulo principal al nivel de lóbulos secundarios.

$$R = \frac{Max\ Lobulo\ principal}{Max\ Lobulo\ secundario}$$

El punto (Xo, R) en la curva del polinomio T5(x) corresponde al valor del máximo, los lóbulos secundarios están confinados a un valor máximo de 1.

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Método Dolph-Tchebyscheff

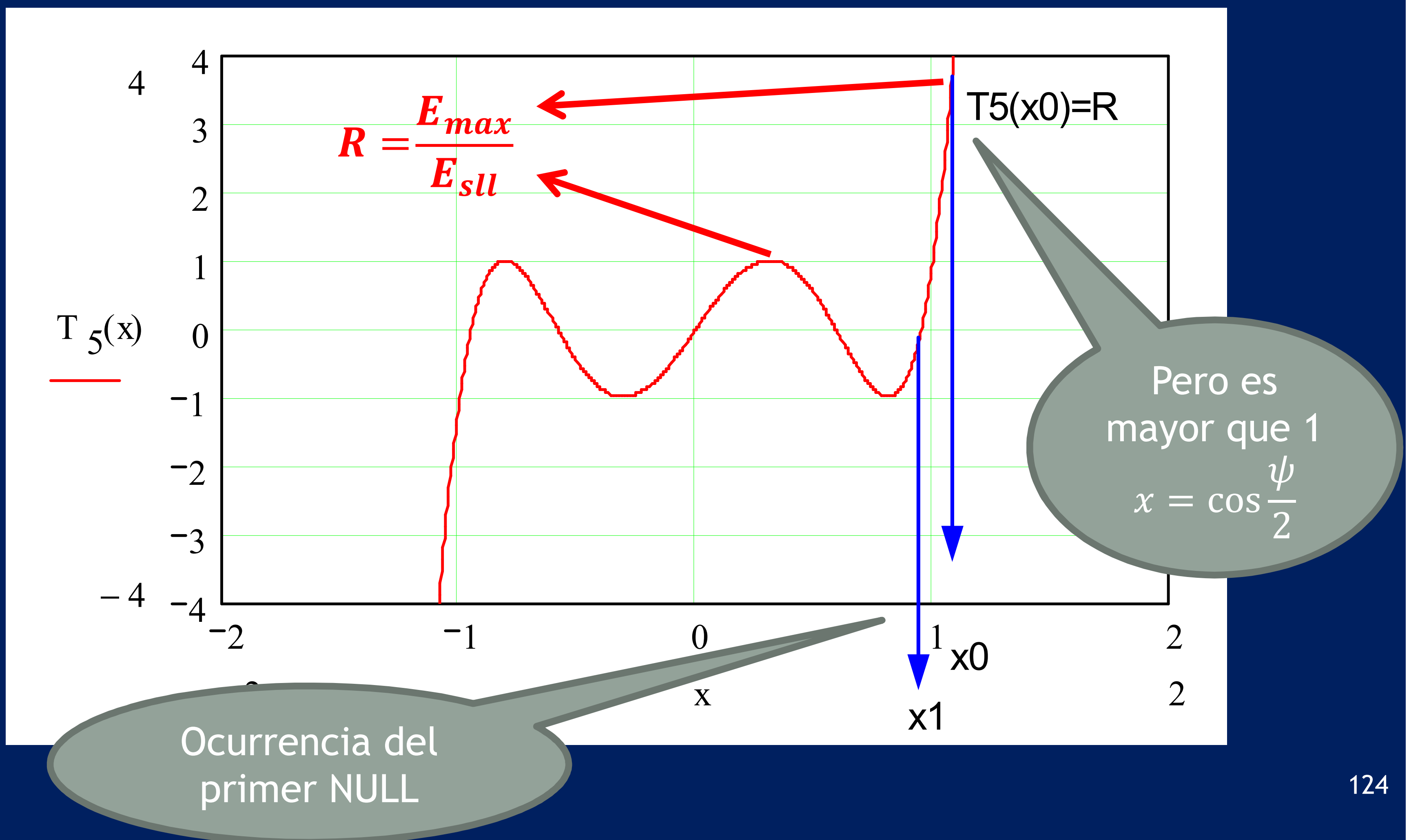
Las raíces del polinomio corresponden a los nulls en el diagrama de campo E.

Una propiedad importante del polinomio de Tchebyscheff es que fijada la razón R, el ancho de banda del primer null (x=x1) queda minimizado, de la misma forma si el ancho de banda es especificado, el valor de R queda maximizado.

Como trabajamos con diagramas de campo normalizados, podemos omitir el factor "2" en la expresión.

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Método Dolph-Tchebyscheff



Arreglos de "n" fuentes puntuales

Método Dolph-Tchebyscheff

En la figura anterior vemos que Xo es mayor que 1, lo cual plantea una dificultad ya que la relación

$$x = \cos\frac{\psi}{2}$$

esta restringida al rango $-1 < x < 1$, por lo cual recurriremos a un cambio de escala tal introduciendo una nueva abscisa

$$w = \frac{x}{x_0} \Rightarrow w = \frac{1}{x_0}\cos\frac{\psi}{2}$$

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Método Dolph-Tchebyscheff

Consideremos un arreglo de 8 fuentes espaciadas $\lambda/2$, con $R_{db} = 26\ db$
Por lo que seleccionamos un polinomio de grado n-1

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$R_{db} = 26\ db \quad R \Rightarrow ? \qquad\qquad 26 = 20\log R \quad R = 19{,}953$$

Para $x = x_0$ el valor del polinomio vale R

$$T_7(x_0) = 20$$

Podemos encontrar x_0 en base a prueba y error o aplicar la ecuación

$$x_0 = \frac{1}{2}\left[\left(R + \sqrt{R^2 - 1}\right)^{\frac{1}{m}} + \left(R - \sqrt{R^2 - 1}\right)^{\frac{1}{m}}\right] \qquad\qquad x_0 = 1{,}142$$

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Método Dolph-Tchebyscheff

Expresión del campo E

$$E_p(\psi(\theta)) = 2\sum_{k=0}^{N-1} A_k \, cos\left[\frac{(2k+1)}{2}\psi(\theta)\right]$$

$$E_p(\psi(\theta)) = 2\left(A_0 cos\left(\frac{1}{2}\psi(\theta)\right) + A_1 cos\left(\frac{3}{2}\psi(\theta)\right) + A_2 cos\left(\frac{5}{2}\psi(\theta)\right) + A_3 cos\left(\frac{7}{2}\psi(\theta)\right)\right)$$

Reemplazando cada termino coseno por el equivalente del polinomio T, considerando el cambio de variable w (omitimos el «2» del análisis)

$$E_p(w) = 2\left(\begin{array}{r} A_0 w + A_1(4w^3 - 3w) + A_2(16w^5 - 20w^3 + 5w) + \cdots \\ \ldots + A_3(64w^7 - 112w^5 + 56w^3 - 7w) \end{array}\right)$$

Reemplazando $w = \frac{x}{x_0}$ y agrupando las potencias del mismo orden tenemos…

Arreglos de "n" fuentes puntuales

Método Dolph-Tchebyscheff

$$E_p(x) = 2\left(\frac{64A_3}{{x_0}^7}x^7 + \frac{(16A_2 - 112A_3)}{{x_0}^5}x^5 + \frac{(56A_3 - 20A_2 + 4A_1)}{{x_0}^3}x^3 + \frac{(A_0 - 3A_1 + 5A_2 - 7A_3)}{x_0}x\right)$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

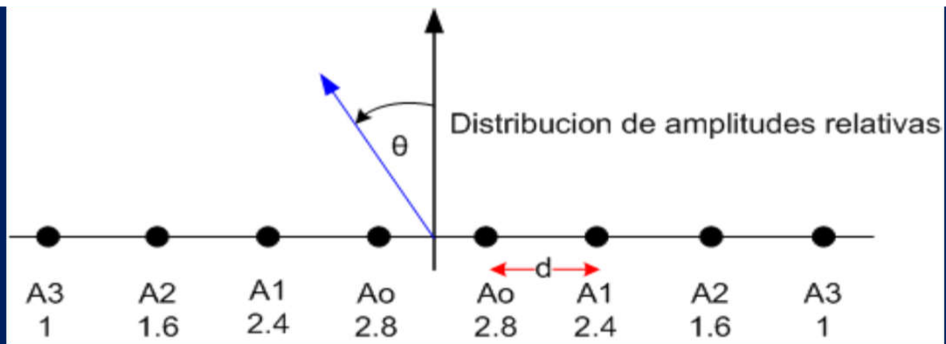
Para que se cumpla que $E_p = T_7$ se debe proceder a igualar los coeficientes

$$64 = \frac{64A_3}{{x_0}^7} \Rightarrow A_3 = {x_0}^7$$

Arreglos de "n" fuentes puntuales

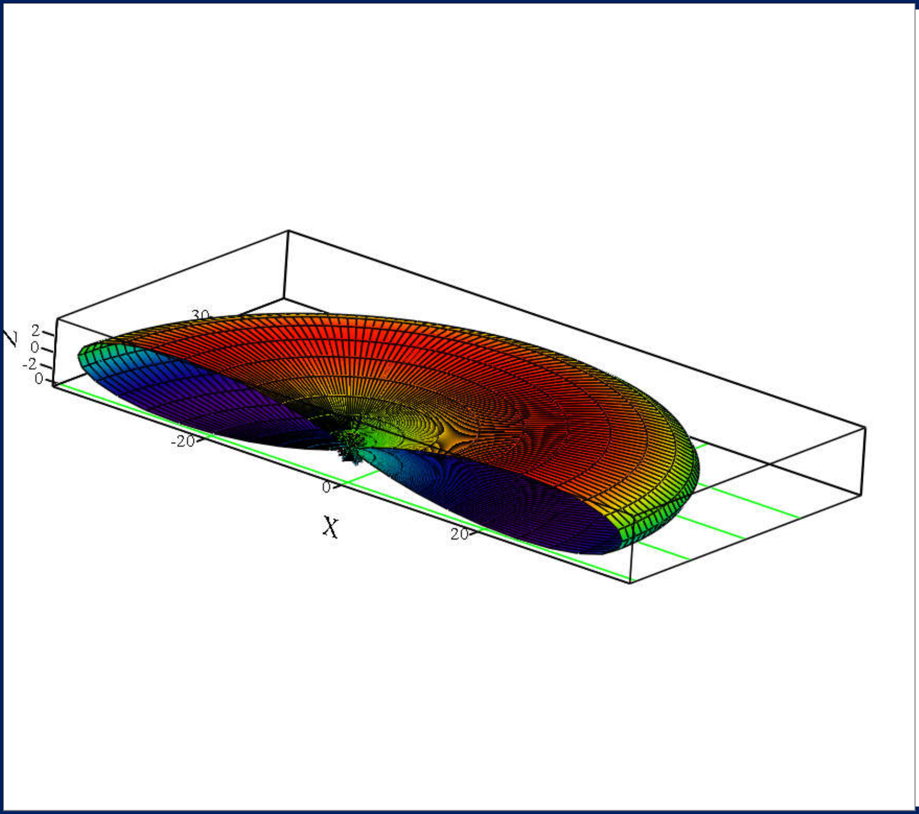
Método Dolph-Tchebyscheff

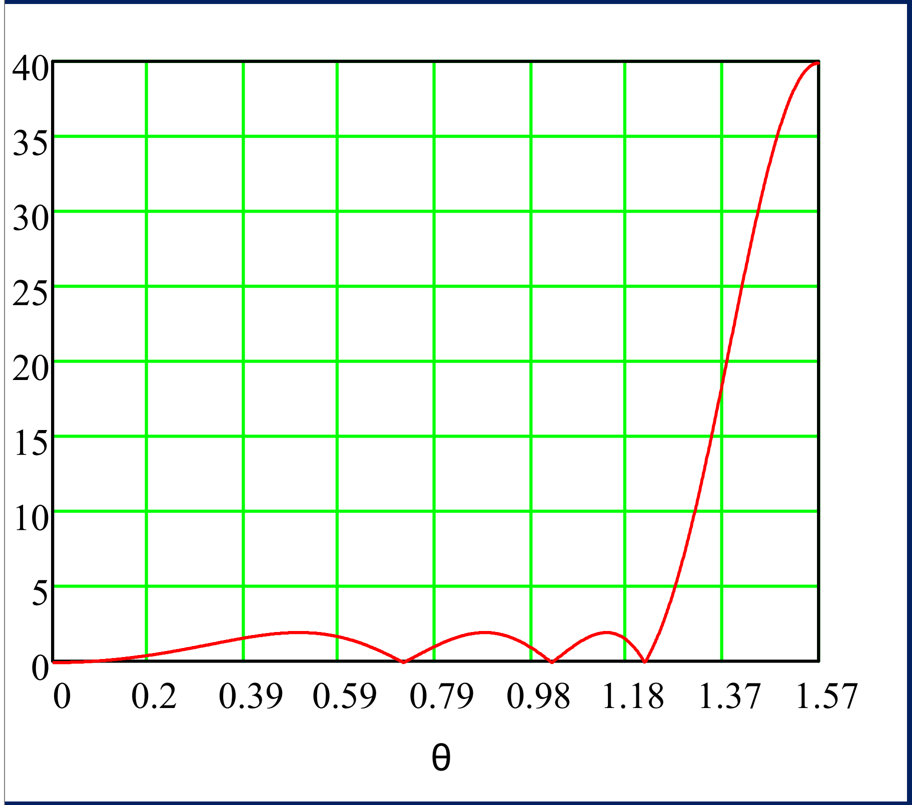
$\frac{64 \cdot A_3}{x_0^{7}} := 64$	$A_3 := x_0^{7}$	$A_3 = 2.531$	Amplitud relativa
$\frac{(16 \cdot A_2 - 112 \cdot A_3)}{x_0^{5}} := -112$	$A_2 := \frac{-112 \cdot x_0^{5} + 112 \cdot A_3}{16}$	$A_2 = 4.129$	$\frac{A_2}{A_3} = 1.631$
$\frac{(56 \cdot A_3 - 20 \cdot A_2 + 4A_1)}{x_0^{3}} := 56$	$A_1 := \frac{56 \cdot x_0^{3} + 20 \cdot A_2 - 56 \cdot A_3}{4}$	$A_1 = 6.053$	$\frac{A_1}{A_2} = 1.466$
$\frac{A_0 - 3 \cdot A_1 + 5A_2 - 7 \cdot A_3}{x_0} := -7$	$A_0 := -7 \cdot x_0 + 3 \cdot A_1 - 5 \cdot A_2 + 7A_3$	$A_0 = 7.24$	$\frac{A_0}{A_3} = 2.86$



Arreglos de "n" fuentes puntuales

Método Dolph-Tchebyscheff para 8 fuentes puntuales





(X, Y, Z)

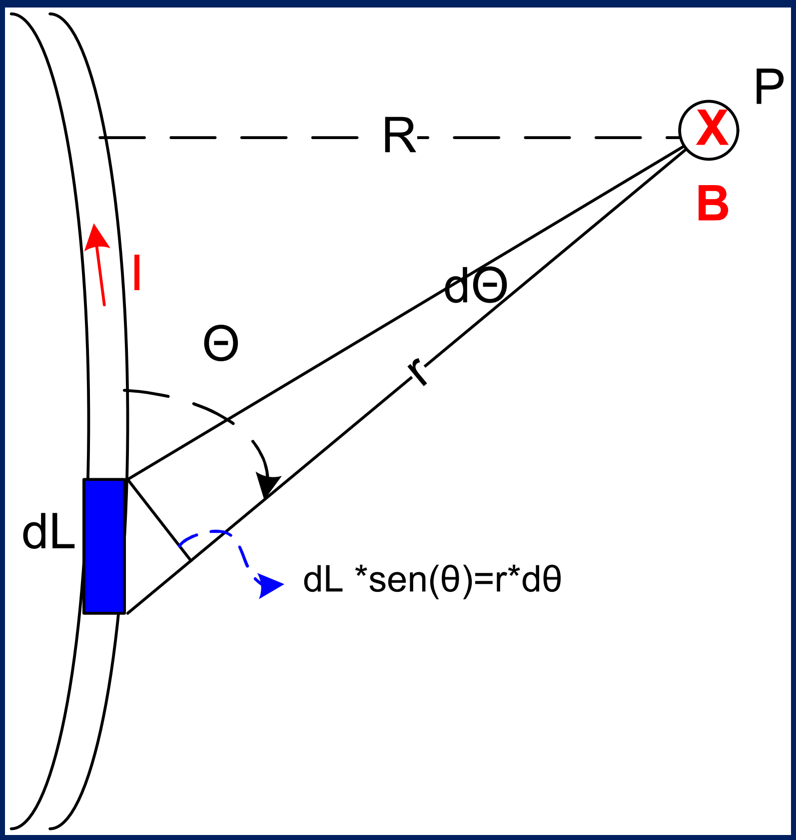
Potencial Vectorial

El potencial vectorial no tiene un significado físico, su utilidad es matemática y permite, si se conoce la distribución de corriente encontrar A y con ella el campo B

$$\boldsymbol{A = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{J}{r}dv \quad \frac{T}{m} \quad o \quad \frac{W}{m}}$$

Expresión del potencial vectorial producido por una distribución de corriente J/r integrada en el volumen ocupado por la distribución de corriente.

Potencial Vectorial



$$B = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{Jxr}{r^2} dv$$

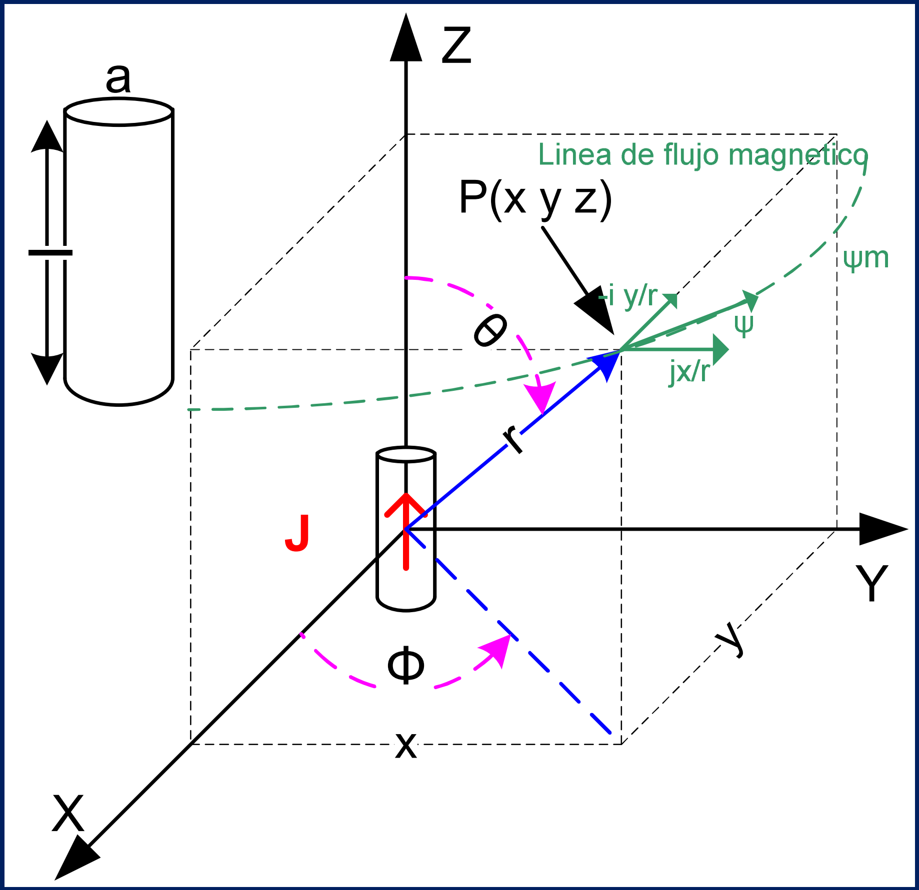
$$\nabla B = 0 \Rightarrow B = \nabla x A$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

$$\boxed{\overrightarrow{A_i} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J_i}}{r} dv}$$

Potencial Vectorial

Consideremos un alambre corto de longitud l y sección a, la densidad de corriente J es uniforme en la dirección de z.
Queremos encontrar la densidad de flujo magnético B a una gran distancia del alambre (r >> l)

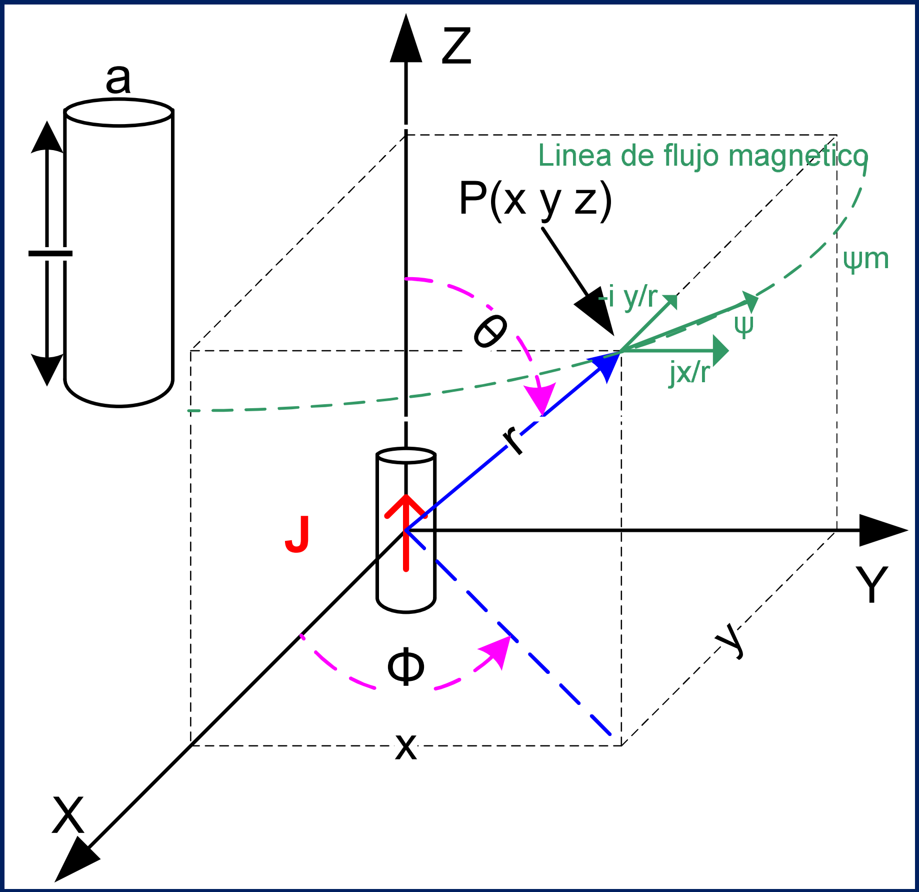


$$A = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J}{r} dv \quad \frac{T}{m}$$

$$si\ r \gg l, se\ puede\ considerar\ cte.$$

$$A = \frac{\mu}{4\pi r} \iiint J dv \quad \frac{T}{m}$$

Potencial Vectorial



$$J = \vec{z} J_z$$

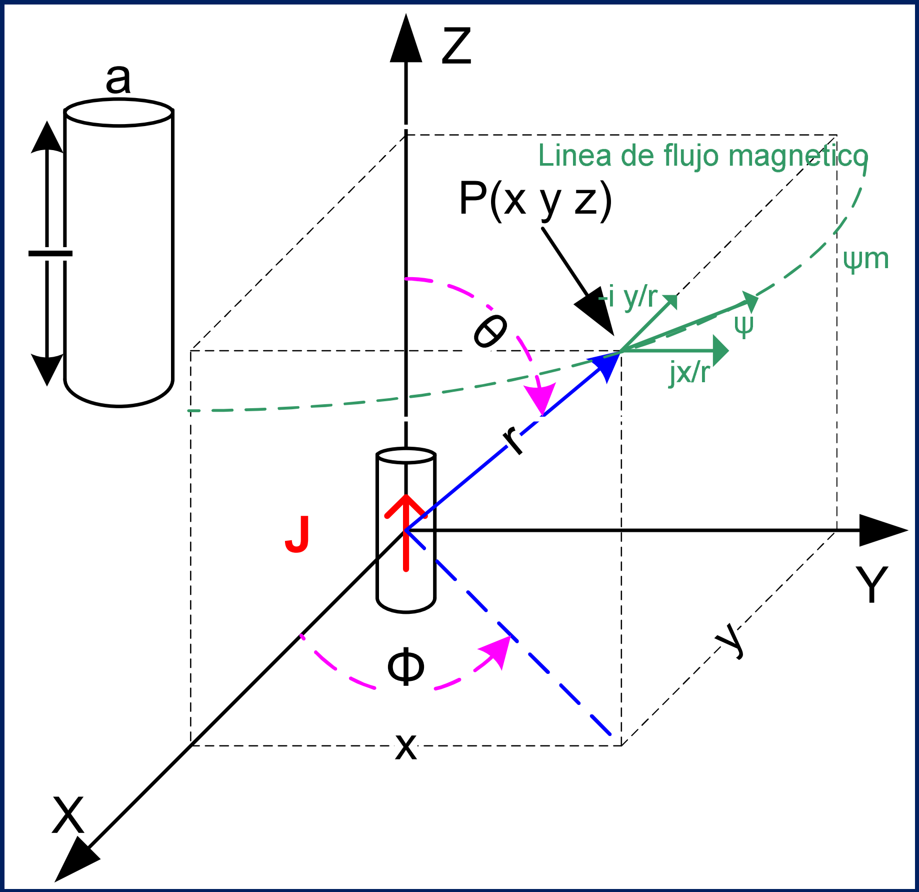
$$A_z = \vec{z}\frac{\mu}{4\pi r}\iiint J dv \quad \frac{T}{m}$$

$$A_z = \vec{z}\frac{\mu}{4\pi r}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\iint_s J\, ds dl \quad \frac{T}{m}$$

$$como\ J\ es\ uniforme$$

$$A_z = \vec{z}\frac{\mu * I}{4\pi r}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dl = \vec{z}\frac{\mu * Il}{4\pi r} \quad \frac{T}{m}$$

Potencial Vectorial



$$B = \nabla x A$$

$$\nabla x A = \vec{i}\frac{\partial A_z}{\partial y} - \vec{j}\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$\nabla x A = -\vec{i}\frac{\mu I l}{4\pi}\frac{y}{r^3} - \vec{j}\frac{\mu I l}{4\pi}\frac{x}{r^3}$$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\Psi}\frac{\mu}{4\pi r^2} I l \sin\theta \quad \frac{Wb}{m^2}}$$

Antenas elementales

Dipolo corto

Una antena lineal puede considerarse como un conjunto de elementos de corriente conectados en serie.
Por lo tanto es de interés analizar las propiedades de radiación de un elemento corto.

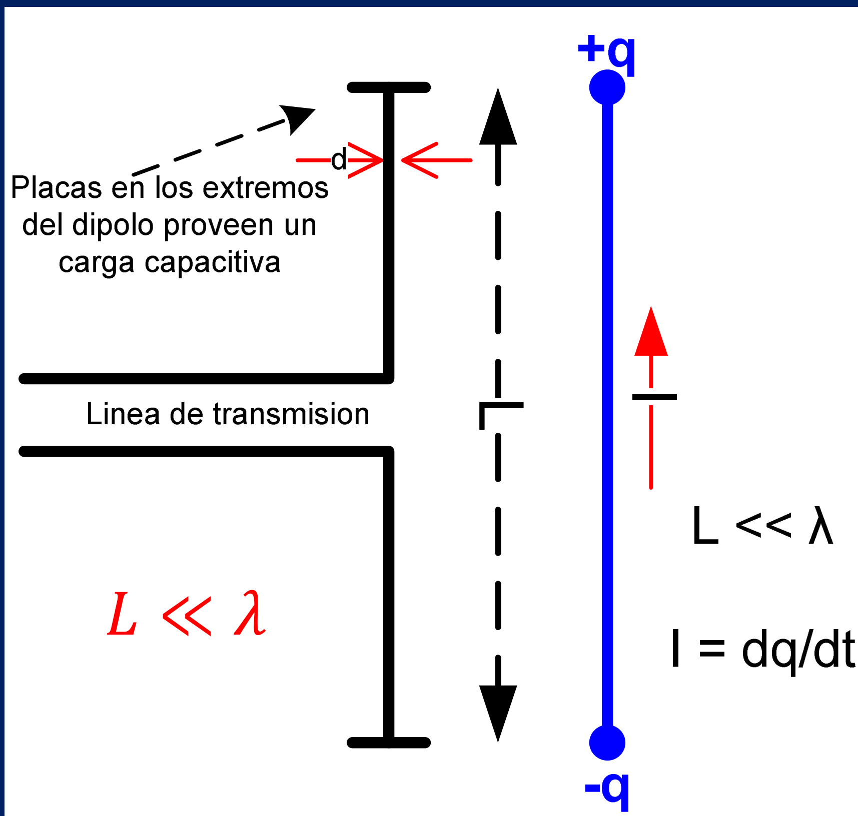
Un conductor lineal se puede considerar como un *dipolo corto si*:

$$L \ll \lambda$$

Como nos interesan los campos generados a grandes distancias, relativas a λ, debemos considerar los potenciales retardados.

Antenas elementales

Dipolo corto



la linea de alimentacion no radia

el diametro "d" *sera tal que*

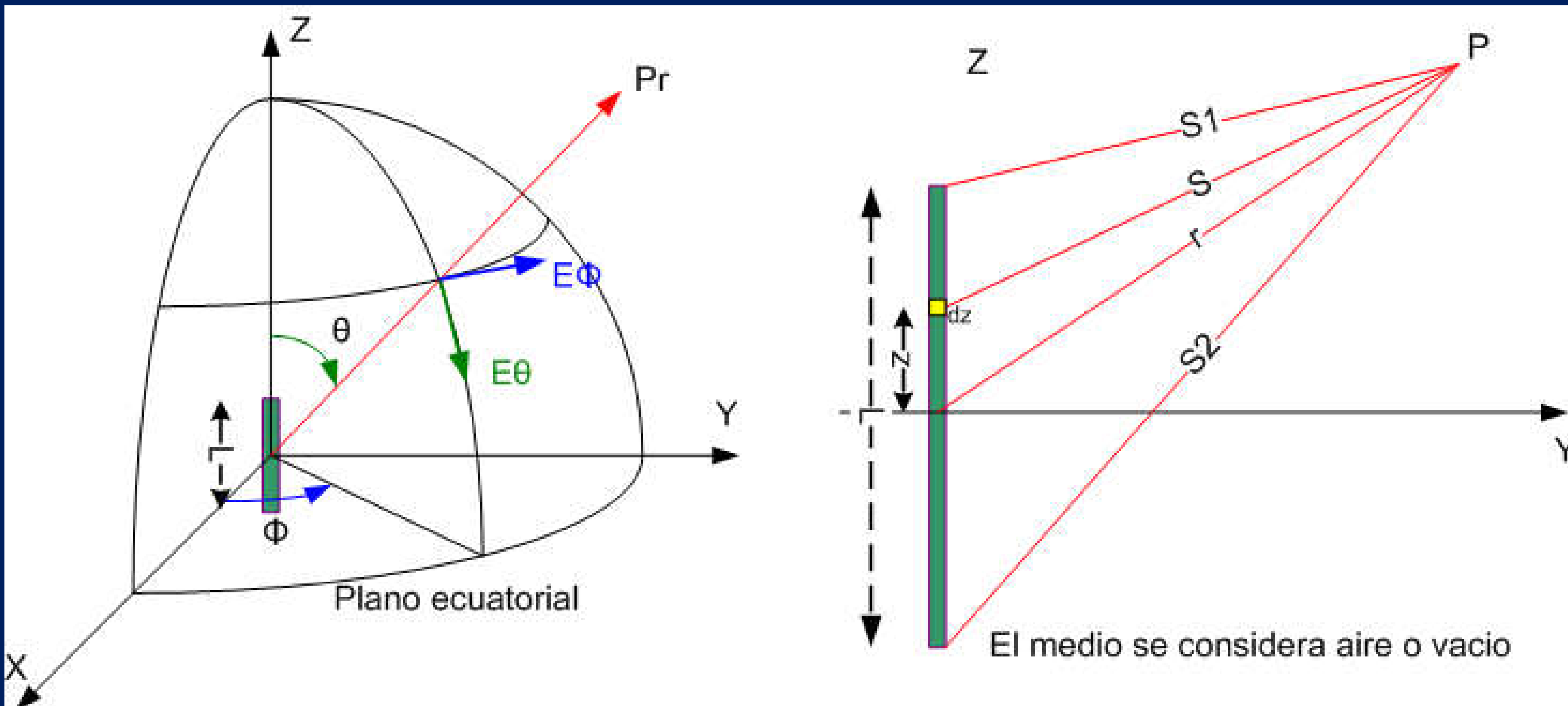
$$\boxed{d \ll L}$$

entonces podemos considerar como un conductor delgado de longitud L *con distribucion de corriente uniforme y carga "q" en los extremos tal que*

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$$

Antenas elementales

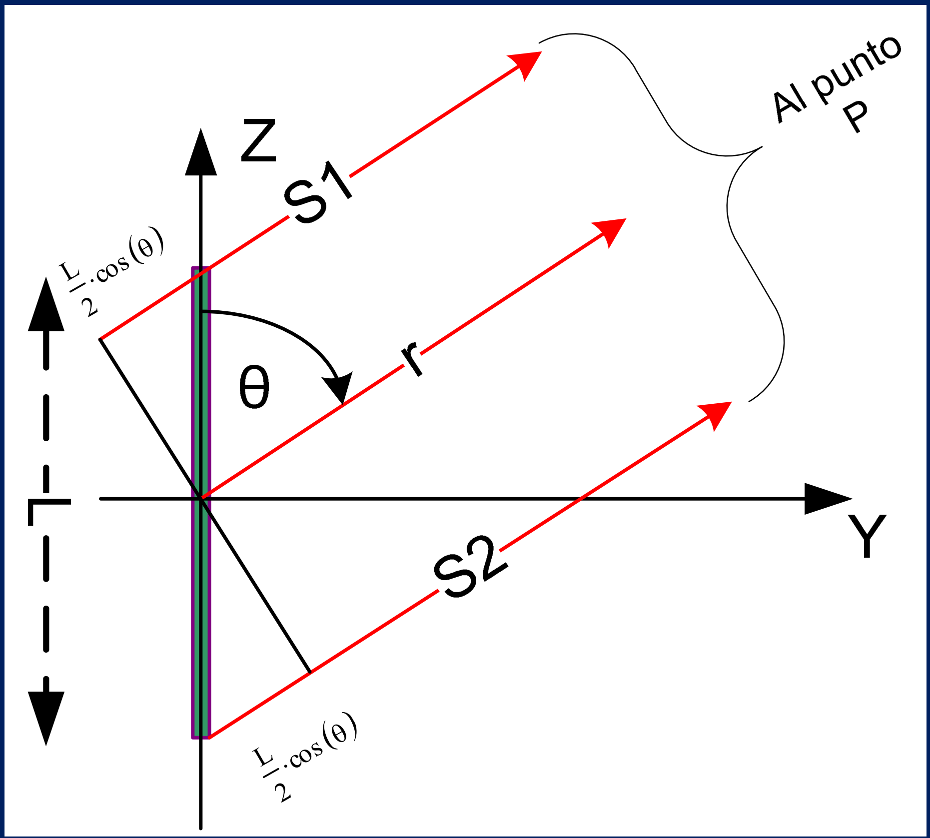
Dipolo corto: Campos generados



Los campos generados en el punto P, serán originados por corrientes y cargas en el dipolo

Antenas elementales

Dipolo corto: Si r>>L, podemos plantear el siguiente modelo



La corriente que fluye en el dipolo no hará sentir su efecto en forma inmediata en el punto P.

Por lo tanto debemos considerar el *retardo*.

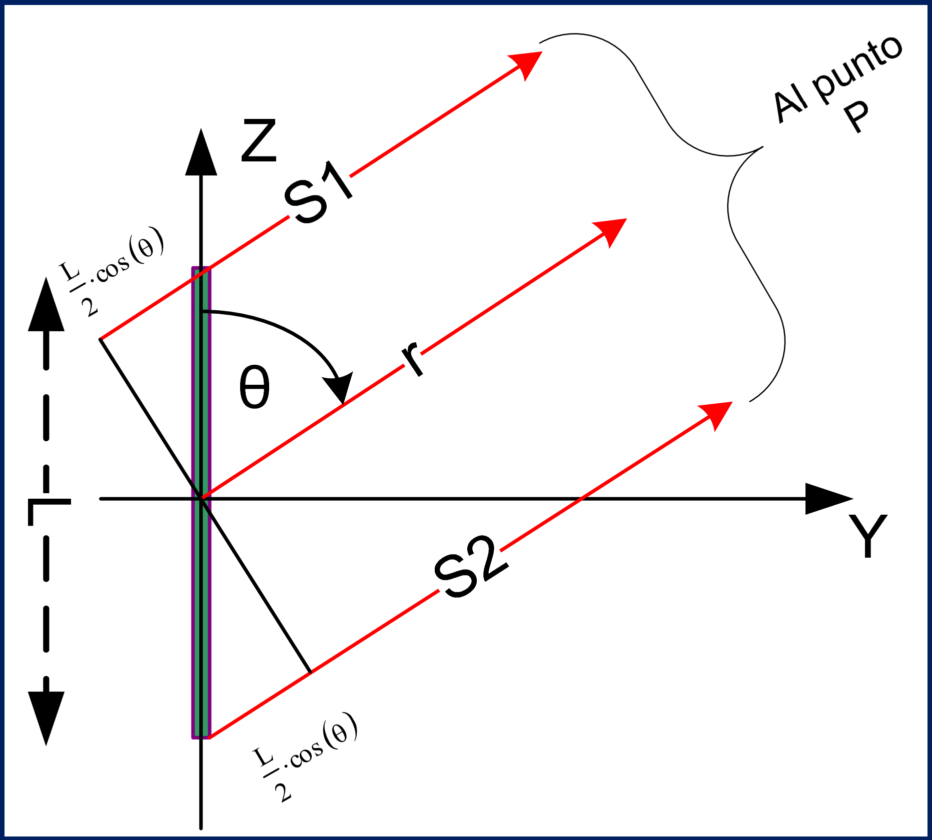
$$\boxed{[I] = I_0 e^{j\omega\left[t-\left(\frac{r}{c}\right)\right]}}$$

Corriente retardada

Esto resulta en retardo de fase

Antenas elementales

Dipolo corto: Utilizamos el Vector potencial Magnético



Bajo las consideraciones:

r>>L y λ>>L

Podemos considerar que S1=r=S2

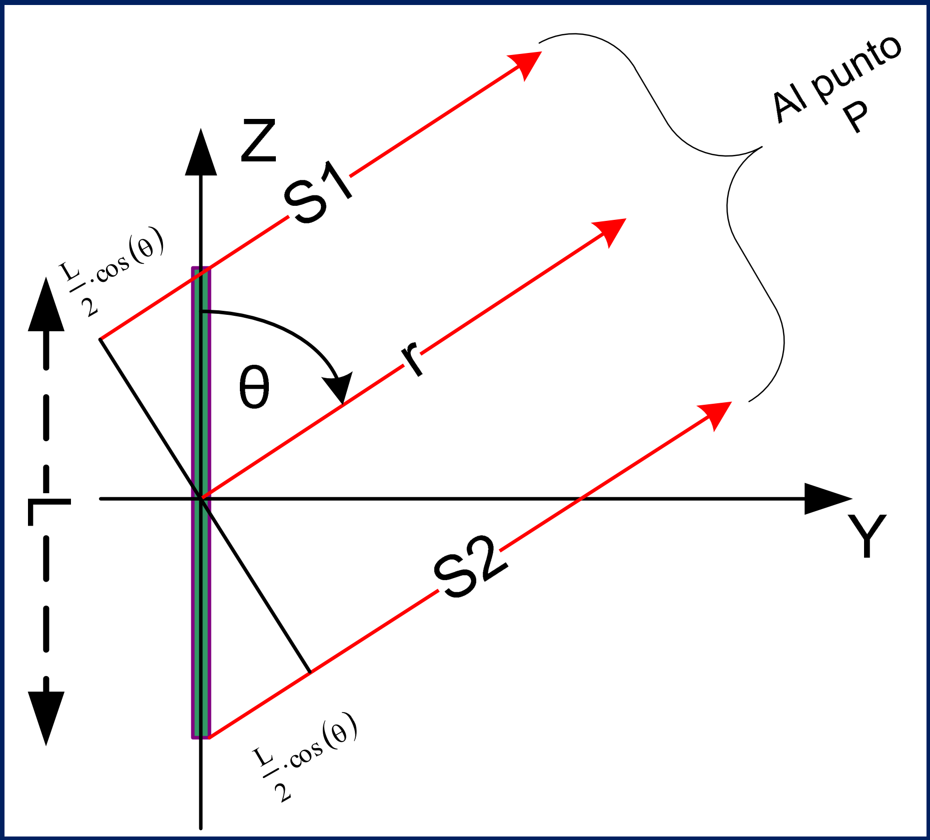
$$\boxed{A_z = \frac{\mu}{4\pi r} L I_0 e^{j\omega\left[t-\left(\frac{r}{c}\right)\right]}}$$

El campo magnético se obtiene a partir de la expresión

$$B = \nabla x A$$

Antenas elementales

Dipolo corto: La carga «q» genera un potencial retardado V



$$V = \frac{I_0}{4\pi\varepsilon j\omega}\left[\frac{e^{j\omega\left[t-\left(\frac{S_1}{c}\right)\right]}}{s_1} - \frac{e^{j\omega\left[t-\left(\frac{S_2}{c}\right)\right]}}{s_2}\right]$$

Si r>>L, podemos considerar S1, S2 y r como paralelos

$$s_1 = r - \frac{L}{2}cos\theta \quad y \quad s_2 = r + \frac{L}{2}cos\theta$$

$$\boxed{V = \frac{I_0 Lcos(\theta)e^{j\omega\left[t-\left(\frac{S_1}{c}\right)\right]}}{4\pi\varepsilon c}\left[\frac{c}{j\omega r^2} + \frac{1}{r}\right]}$$

Antenas elementales

Dipolo corto:

Las expresiones remarcadas en expresan los potenciales eléctricos (V) y magnéticos (A) con las únicas restricciones de que r >> L y L << λ.

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi r} L I_0 e^{j\omega\left[t-\left(\frac{r}{c}\right)\right]} \qquad V = \frac{I_0 L cos(\theta) e^{j\omega\left[t-\left(\frac{S_1}{c}\right)\right]}}{4\pi\varepsilon c}\left[\frac{c}{j\omega r^2}+\frac{1}{r}\right]$$

Consideremos ahora la expresión general del campo E debido a potenciales estáticos y variación de campos magnéticos mas la expresión del campo H en función del potencial magnético A

$$\boxed{E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla V - j\omega A \qquad H = \frac{1}{\mu}(\nabla x A)}$$

Antenas elementales

Dipolo corto:

Es conveniente para el análisis expresar E y H en coordenadas polares, entonces consideremos las expresiones para conversión

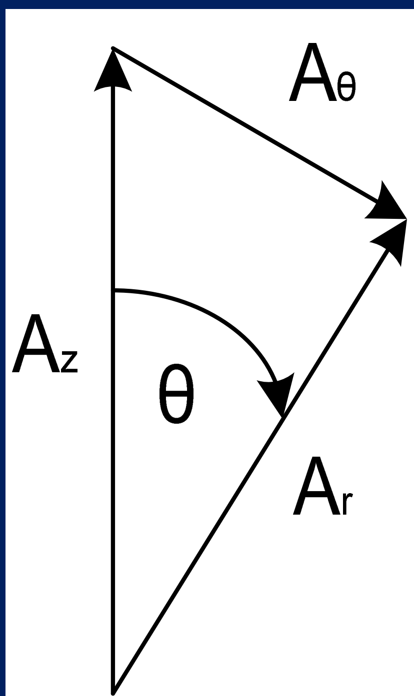
$$A = a_r \cdot A_r + a_\theta \cdot A_\theta + a_\emptyset \cdot A_\emptyset \qquad \nabla \cdot V = a_r \frac{\partial V}{\partial r} + a_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + a_\emptyset \frac{1}{r \cdot \sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \emptyset}$$

$$\nabla x A = \frac{a_r}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial (r \cdot \sin\theta) A_\emptyset}{\partial \theta} - \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial \emptyset}\right) + \frac{a_\theta}{r \cdot \sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial \emptyset} - \frac{\partial (r \cdot \sin\theta) A_\emptyset)}{\partial r}\right) + \frac{a_\emptyset}{r}\left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)$$

Antenas elementales

Dipolo corto:

Si tenemos en cuenta que el dipolo esta orientado en el eje Z, entonces, no tiene componentes en Φ



$$A_r := A_z \cdot \cos(\theta) \qquad E_r := -j\omega A_r - \frac{d}{dr}V \qquad E_r := -j\omega A_z \cdot \cos(\theta) - \frac{d}{dr}V$$

$$A_\theta := -A_z \cdot \sin(\theta) \qquad E_\theta := -j\omega A_\theta - \frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}V \qquad E_\theta := j\omega A_z \cdot \sin(\theta) - \frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}V$$

$$A_\phi := 0 \qquad E_\phi := -j\omega A_\phi - \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)}\frac{d}{d\phi}V \qquad A_\phi := 0 \qquad \frac{d}{d\phi}V := 0 \qquad E_\phi := 0$$

Antenas elementales

Campos del Dipolo corto

$$E_r = \frac{[I]Lcos(\theta)}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$$

$$E_\theta = \frac{[I]Lsen(\theta)}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{j\omega}{c^2r}+\frac{1}{cr^2}+\frac{1}{j\omega r^3}\right)$$

$$H_\varphi = \frac{[I]Lsen(\theta)}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}+\frac{1}{r^2}\right)$$

Campo Lejano

$$E_r = 0$$

$$\frac{E_\theta}{H_\varphi} = 120\pi$$

E_θ y H_φ en fase

$$E_\theta = j\frac{[I]\omega Lsen(\theta)}{4\pi\varepsilon c^2 r} = j\frac{60\pi[I]sen(\theta)}{r}\frac{L}{\lambda}$$

$$H_\varphi = \frac{[I]Lsen(\theta)}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr}\right) = j\frac{[I]sen(\theta)}{2r}\frac{L}{\lambda}$$

Podemos ver como varían E y H en condiciones de campo lejano

Antenas elementales

Campos del Dipolo corto

$$E_r = \frac{[I]Lcos(\theta)}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right)$$

$$E_\theta = \frac{[I]Lsen(\theta)}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right)$$

$$H_\varphi = \frac{[I]Lsen(\theta)}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2}\right)$$

Baja frecuencia

$$E_r = \frac{q_0 Lcos(\theta)}{2\pi\varepsilon r^3}$$

$$E_\theta = \frac{q_0 Lsen(\theta)}{4\pi\varepsilon r^3}$$

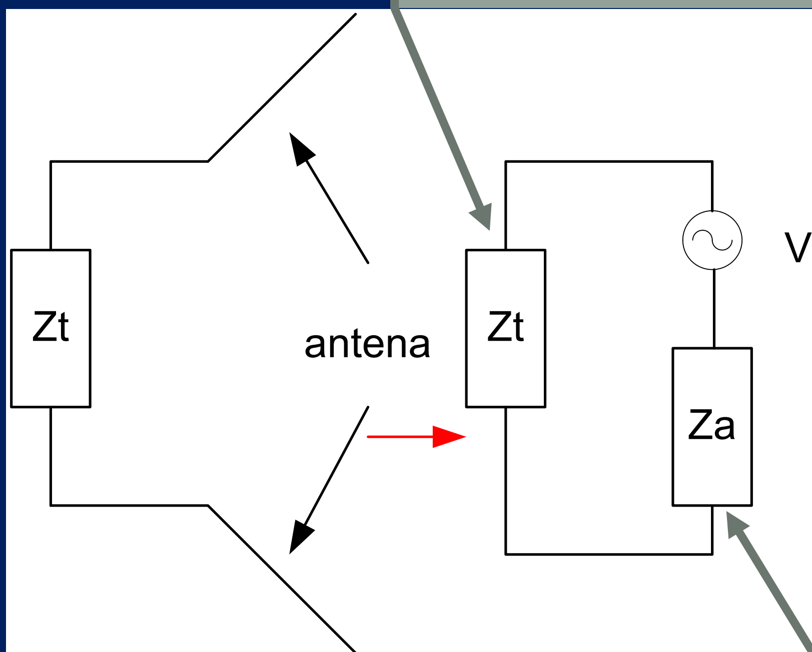
$$H_\varphi = \frac{I_0 Lsen(\theta)}{4\pi\varepsilon r^2}$$

Podemos ver como los campos se atenúan fuertemente a bajas frecuencias

Antena como apertura

Recordando el modelo: La antena colecta energía y la entrega en Zt

Impedancia de terminación



Impedancia de antena

$$Z_t = R_T + jX_T$$

$$Z_a = R_A + jX_A$$

$$R_A = R_r + R_L$$

Resistencia de radiación

Resistencia de perdidas

Resistencia de radiación del DC

Si integramos el vector de Poynting promedio, para condiciones de campo lejano, sobre una superficie esférica obtendremos la potencia total radiada.

Recordando el modelo de antena como apertura, esta será igual I²R, donde I es la corriente eficaz y R la resistencia de radiación (despreciando las perdidas).

$$P_r = \frac{1}{2}\mathbb{R}(E_\theta \mathrm{x} H_\varphi) \qquad Como\ son\ ortogonales \qquad P_r = \frac{1}{2}\mathbb{R}(E_\theta \cdot \overline{H_\varphi})$$

$$E_\theta = 120\pi H_\varphi \qquad P_r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}{H_\varphi}^2 \qquad w = \oint P_r\, ds$$

Resistencia de radiación del DC

Podemos escribir la expresión de la potencia radiada como:

$$W := \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\left|H_\phi\right|\right)^2\cdot\sin(\theta)\,d\theta\,d\phi \qquad \left|H_\phi\right| := \frac{\omega\cdot I_0\cdot L\cdot\sin(\theta)}{4\cdot\pi\cdot c\cdot r} \qquad W := \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\omega\cdot I_0\cdot L\cdot\sin(\theta)}{4\cdot\pi\cdot c\cdot r}\right)^2\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,d\theta\,d\phi$$

$$W := \frac{1}{32}\cdot\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cdot\frac{\omega^2\cdot I_0^{\,2}\cdot L^2}{\pi^2\cdot c^2}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin(\theta))^3\,d\theta\,d\phi \qquad W := \frac{480\cdot\pi}{32}\cdot\frac{I_0^{\,2}\cdot L^2}{\lambda^2}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin(\theta))^3\,d\theta\,d\phi \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin(\theta))^3\,d\theta\,d\phi \rightarrow \frac{8}{3}\cdot\pi$$

$$W := \frac{480\pi}{32}\cdot\frac{I_0^{\,2}\cdot L^2}{\lambda^2}\cdot\frac{8}{3}\cdot\pi \qquad W := 40\cdot\frac{I_0^{\,2}\cdot L^2}{\lambda^2}\cdot\pi^2 \qquad W := \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot R \qquad \frac{I_0^{\,2}}{2}\cdot R := 40\cdot\frac{I_0^{\,2}\cdot L^2}{\lambda^2}\cdot\pi^2$$

Potencia desarrollada en el dipolo

Igualando

$$\boxed{R = 80\pi^2\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2}$$

Resistencia de radiación del DC

¿Qué podemos decir de la Resistencia de radiación del DC?

$$\boxed{R_{DC} = 80\pi^2 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2}$$

$$Si\ \frac{L}{\lambda} \cong 0{,}1 \qquad\qquad R_{DC} = 7{,}9\ \Omega$$

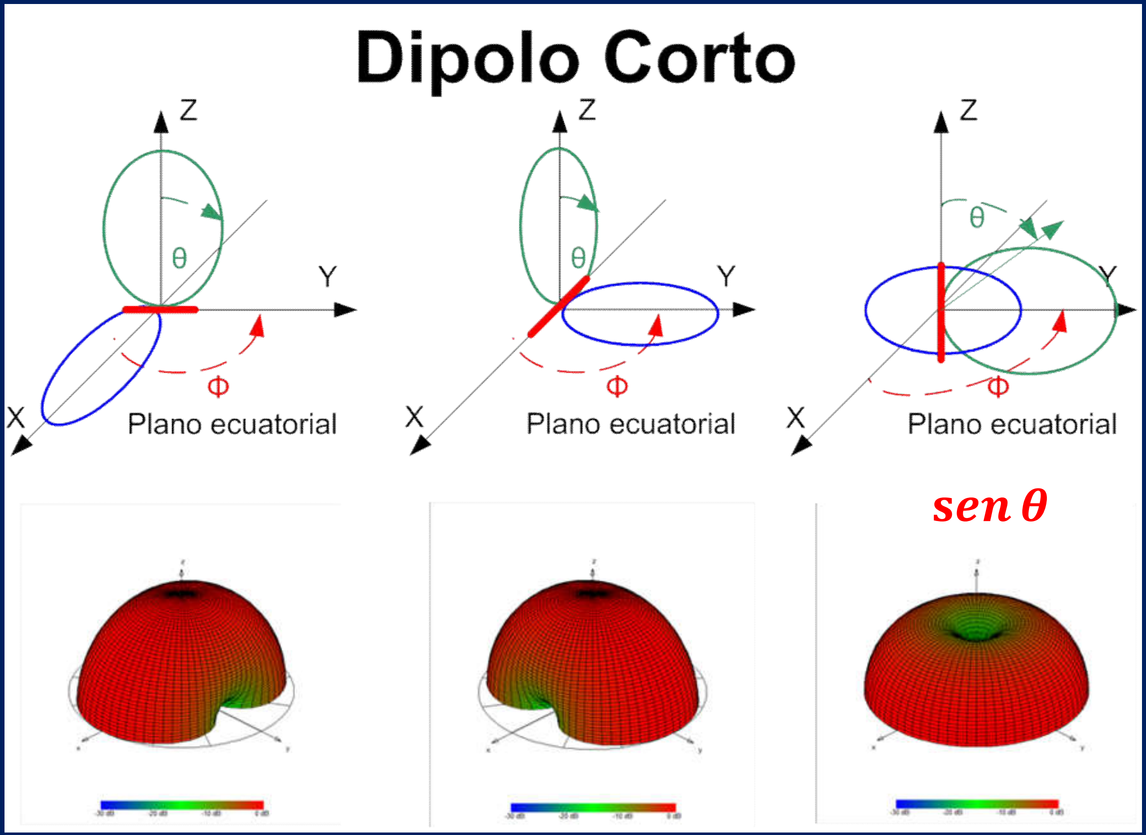
Un valor demasiado bajo de resistencia de radiación implica mayores corrientes para un determinado nivel de potencia lo que muestra la principal desventaja de el dipolo corto.
Si la potencia es 1 Kw, ¿cuanto vale la corriente de excitación?

si $\quad W := 1\ \text{kw} \qquad I := \sqrt{\frac{10^3}{R}} \qquad I = 11.254\ \text{amp}$

Ganancia del DC

Podemos calcular la ganancia a partir del patrón de radiación normalizado

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(sen\theta)^2 sen\theta \; d\theta d\phi}$$



$$\boxed{D_{DC} = 1{,}5}$$

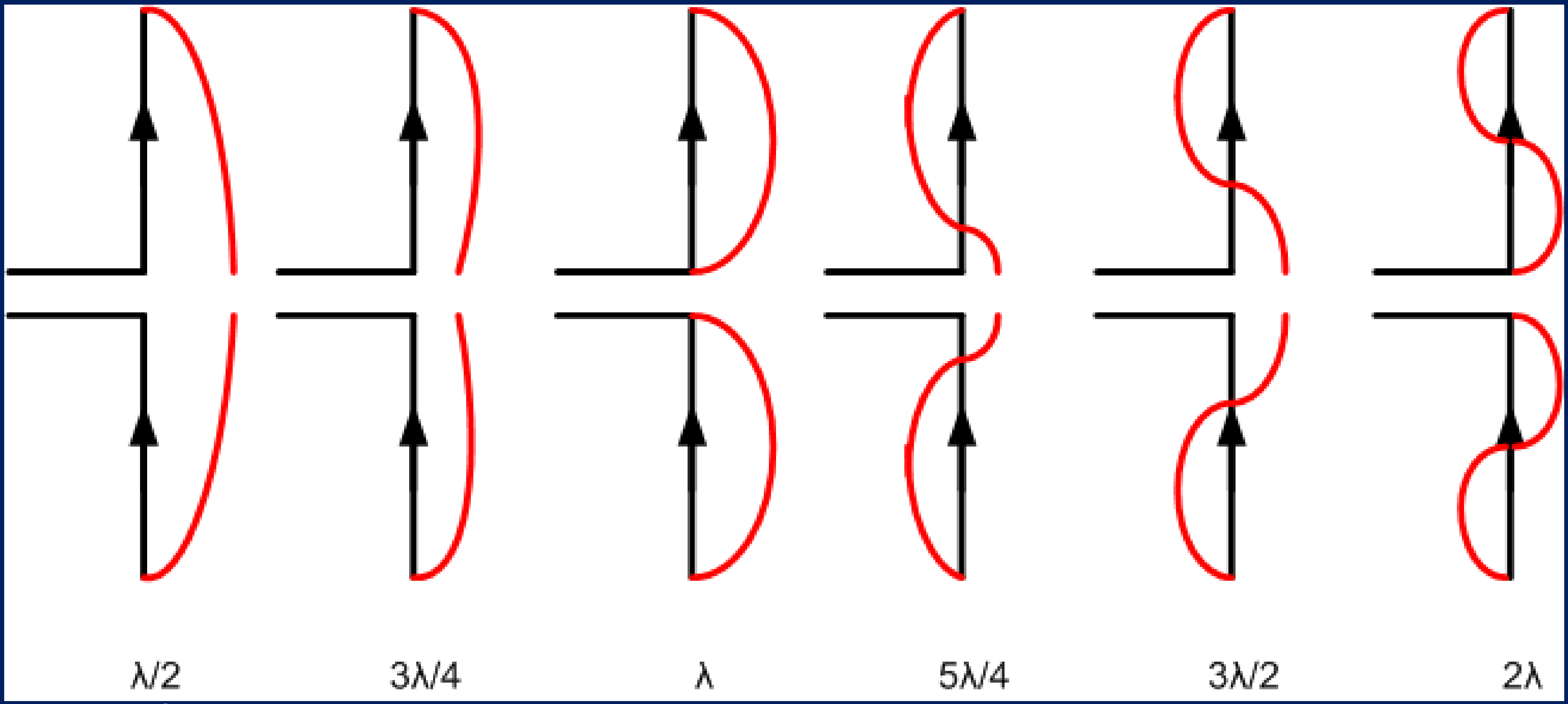
Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada

- Se deducirán las expresiones de campo lejano para este tipo de antena
- La misma es alimentada por una línea balanceada ¿?
- La distribución de corriente es sinusoidal
- d<<λ

Antenas lineal delgada

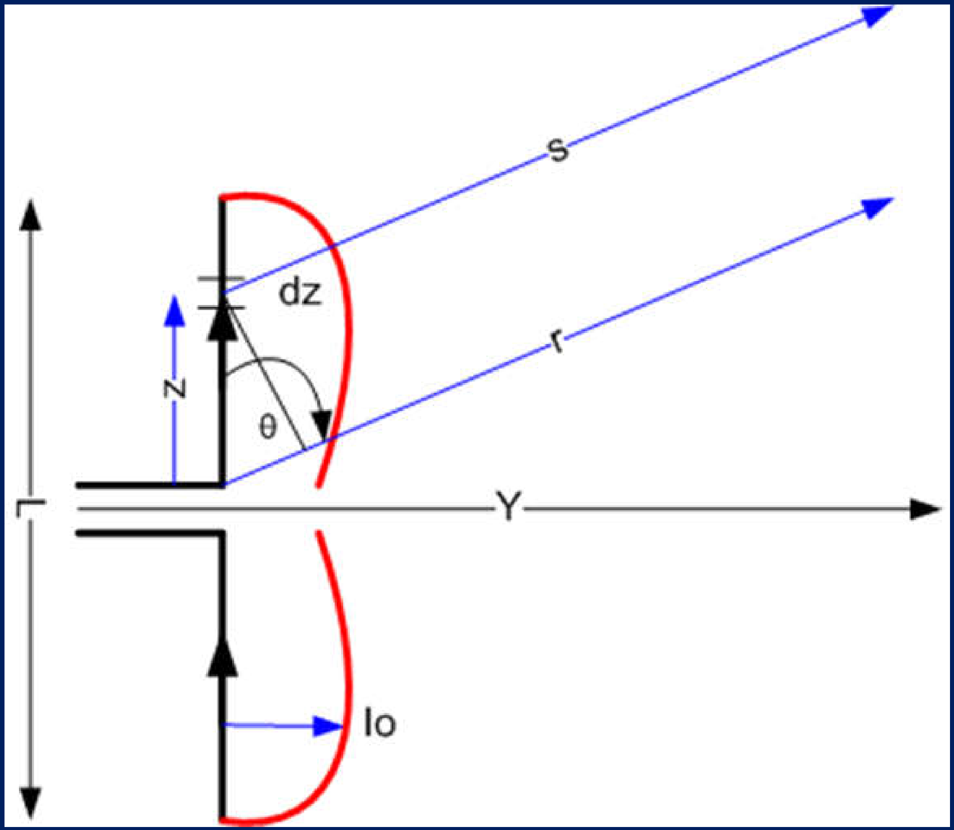
Antena lineal delgada: Distribución sinusoidal



Si el diámetro del conductor es d<<λ (~λ/100), mediciones realizadas demuestran que esta es una buena aproximación a la distribución natural en antenas delgadas.

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada:



$$[I] = I_0 sen\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - z\right)\right] e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \quad z > 0$$

$$[I] = I_0 sen\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} + z\right)\right] e^{j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \quad z < 0$$

$$factor\ de\ forma \quad sen\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} + z\right)\right]$$

Antenas lineal delgada

Consideremos la antena como una serie infinitesimal de dipolos delgados de longitud «dz»

$$dH_{\emptyset} = \frac{j[I]\sin\theta}{2s}\frac{dz}{\lambda} \qquad H_{\emptyset} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d\,H_{\emptyset} \qquad E_{\theta} = 120\pi H_{\emptyset}$$

$$H_{\emptyset} = \frac{jI_0 e^{j\omega t}\sin\theta}{2\lambda}\left(\int_{-\frac{L}{2}}^{0} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}+z\right)\right)e^{-j\omega\frac{s}{c}}}{s}dz + \int_{0}^{\frac{L}{2}} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}-z\right)\right)e^{-j\omega\frac{s}{c}}}{s}dz\right)$$

Consideraciones de campo lejano

Con respecto a la amplitud

$$s = r = cte$$

Con respecto a la fase

$$s = r - z\cos\theta$$

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada

$$H_{\emptyset} = \frac{jI_0 e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\sin\theta}{2\lambda r}\left(\int_{-\frac{L}{2}}^{0}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}+z\right)\right)e^{j\frac{\omega\cos\theta}{c}z}\,dz + \int_{0}^{\frac{L}{2}}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2}-z\right)\right)e^{j\frac{\omega\cos\theta}{c}z}\,dz\right)$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \frac{\beta}{4\pi} = \frac{1}{2\lambda}$$

$$H_{\emptyset} = \frac{j\beta I_0 e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\sin\theta}{4\pi r}\left(\int_{-\frac{L}{2}}^{0}\sin\left(\beta\left(\frac{L}{2}+z\right)\right)e^{j\beta\cos\theta z}\,dz + \int_{0}^{\frac{L}{2}}\sin\left(\beta\left(\frac{L}{2}-z\right)\right)e^{j\beta\cos\theta z}\,dz\right)$$

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada

$$\int \sin(c+bx)\,e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin(c+bx) - b\cos(c+bx)\right)$$

$$1°\ integral \qquad a = j\beta\cos\theta \qquad b = \beta \qquad c = \beta\frac{L}{2}$$

$$2°\ integral \qquad a = j\beta\cos\theta \qquad b = -\beta \qquad c = \beta\frac{L}{2}$$

$$\boldsymbol{H_{\emptyset}(\theta) = \frac{j[I_0]}{2\pi r}\left(\frac{cos\left(\frac{\beta L cos(\theta)}{2}\right) - cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{sen(\theta)}\right) \qquad E_{\theta}(\theta) = \frac{j60[I_0]}{r}\left(\frac{cos\left(\frac{\beta L cos(\theta)}{2}\right) - cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{sen(\theta)}\right)}$$

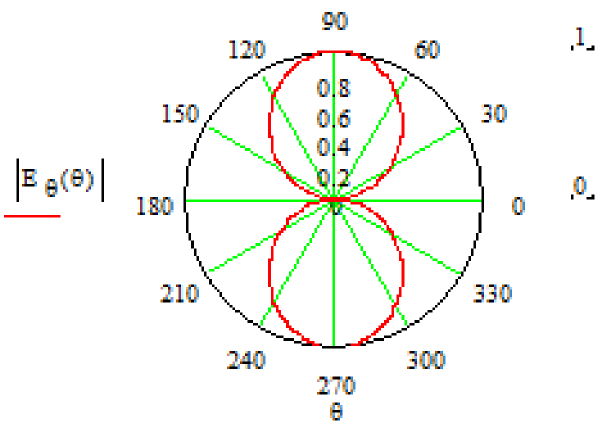
$$\boldsymbol{[I_0] = I_0 e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}$$

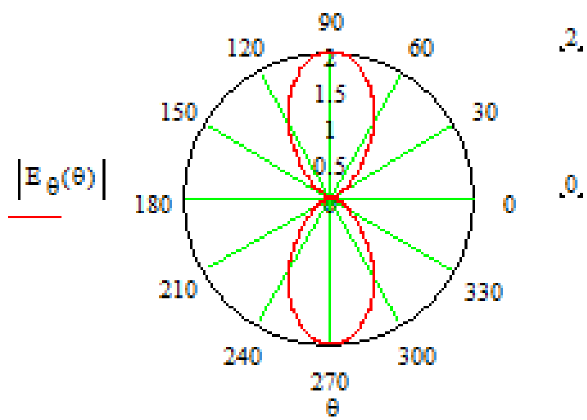
Campo de una antena lineal delgada alimentada en su parte central

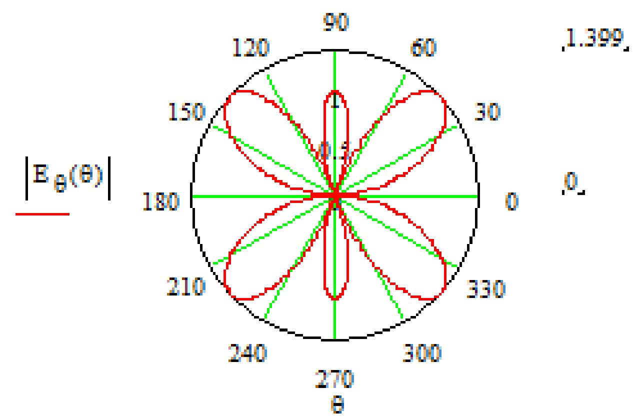
Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada

$L = \lambda/2$	$L = \lambda$	$L = 3\lambda/2$
$E_\theta(\theta) := \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi \cdot \cos(\theta)}{2}\right)}{\sin(\theta)}$	$E_\theta(\theta) := \dfrac{\cos(\pi \cdot \cos(\theta)) + 1}{\sin(\theta)}$	$E_\theta(\theta) := \dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi \cdot \cos(\theta)}{2}\right)}{\sin(\theta)}$



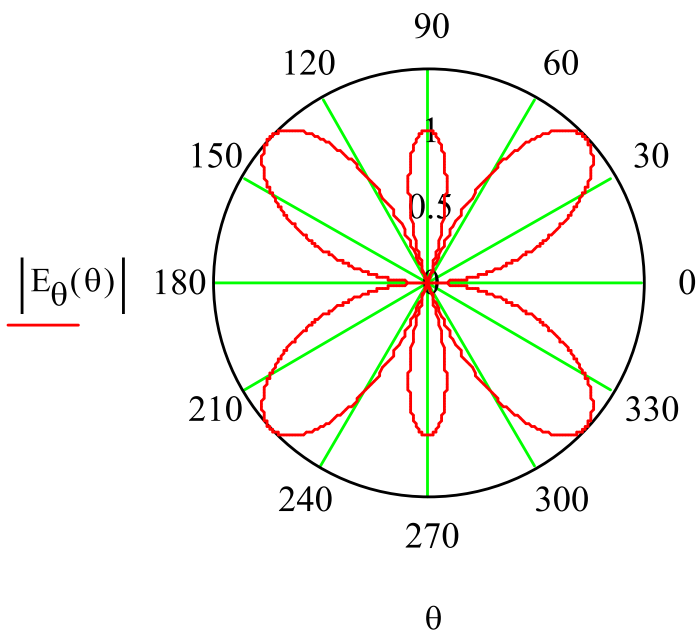


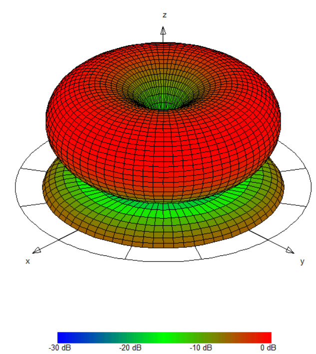


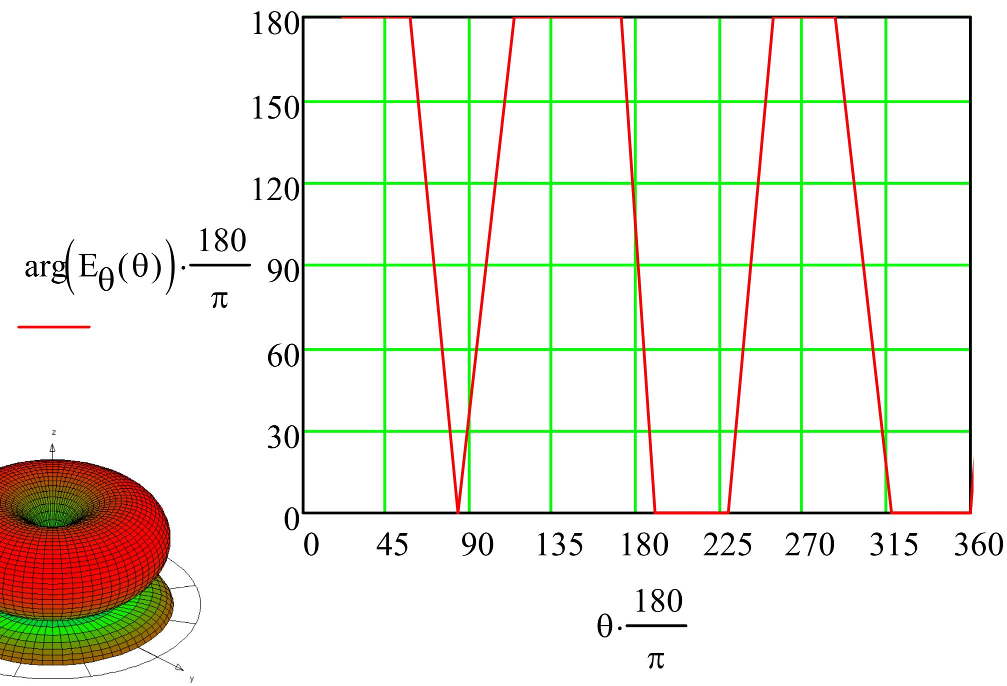
¿HPBW?

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada







Inversion de fase en un Null

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada, resistencia de radiación

Integrando el vector de Poynting sobre una esfera obtenemos…

…la potencia radiada que podemos igualar a $$W = \frac{{I_0}^2}{2} R_0$$

Resistencia de radiación $L = \frac{\lambda}{2}$

$$P_r = \frac{1}{2}\mathbb{R}\left(E_\theta \mathrm{x} \overline{H_\phi}\right)$$

$$E_\theta = 120\pi H_\phi$$

$$P_r = \frac{1}{2}\eta {H_\phi}^2$$

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \eta {H_\phi}^2 r^2 \sin\theta \, d\theta d\phi$$

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada, resistencia de radiación

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \eta \left(\frac{I_0}{2\pi r} \left(\frac{\cos\frac{\beta L \cos\theta}{2} - \cos\frac{\beta L}{2}}{\sin\theta} \right) \right)^2 r^2 \sin\theta \, d\theta d\phi \qquad \eta = 120\pi$$

$$W = \frac{15 {I_0}^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\left(\frac{\cos\frac{\beta L \cos\theta}{2} - \cos\frac{\beta L}{2}}{\sin\theta} \right) \right)^2 \sin\theta \, d\theta d\phi$$

$$W = 30 {I_0}^2 \int_0^{\pi} \left(\left(\frac{\cos\frac{\beta L \cos\theta}{2} - \cos\frac{\beta L}{2}}{\sin\theta} \right) \right)^2 \sin\theta \, d\theta \qquad W = \frac{{I_0}^2}{2} R_0$$

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada, resistencia de radiación

$$\boxed{R_0 = 60 \int_0^{\pi} \frac{\left(\cos\frac{\beta L \cos\theta}{2} - \cos\frac{\beta L}{2}\right)^2}{\sin\theta} d\theta}$$

Resistencia de radiación referida al máximo de corriente, que en el caso de λ/2, seria el centro del dipolo

$$R_0 = ?$$

Para analizar la variación de Ro haremos algunos cambios de variables

$$u = \cos\theta \quad du = -\sin\theta\, d\theta \qquad \theta = 0 \quad u = 1 \quad \theta = \pi \quad u = -1$$

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada, resistencia de radiación

$$u = \cos\theta \quad du = -\sin\theta\, d\theta \qquad \theta = 0 \quad u = 1 \qquad \theta = \pi \quad u = -1$$

$$R_0 = 60\int_{-1}^{1} \frac{\left(\cos\frac{\beta L}{2}u - \cos\frac{\beta L}{2}\right)^2}{1-u^2}du \qquad \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)$$

$$R_0 = 30\int_{-1}^{1}\left(\frac{\left(\cos\frac{\beta L}{2}u - \cos\frac{\beta L}{2}\right)^2}{1-u} + \frac{\left(\cos\frac{\beta L}{2}u - \cos\frac{\beta L}{2}\right)^2}{1+u}\right)du$$

Haciendo una nueva transformación y particularizando para el caso de L = λ/2

$$1 + u = \frac{v}{\pi} \quad du = \frac{dv}{\pi} \qquad 1 - u = \frac{v'}{\pi} \quad du = -\frac{dv'}{\pi} \qquad \frac{v-\pi}{2} = \frac{\pi - v'}{2} \quad L = \frac{\lambda}{2}$$

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada, resistencia de radiación

$$R_0 = 30\int_0^{2\pi}\left(\frac{\left(\cos\frac{\pi}{2}u\right)^2}{1+u}+\frac{\left(\cos\frac{\pi}{2}u\right)^2}{1+u}\right)du = 60\int_0^{2\pi}\frac{\left(\cos\left(\frac{v-\pi}{2}\right)\right)^2}{v}dv$$

$$\left(\cos\left(\frac{v-\pi}{2}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}(1+\cos(v-\pi)) \quad y \quad \cos(v-\pi) = -\cos(v)$$

$$R_0 = 30\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(v)}{v}dv$$

Esta integral esta tabulada

$$\int_0^{x}\frac{1-\cos(v)}{v}dv = \ln(\gamma)+\ln(x)-Ci(x)$$

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada, resistencia de radiación

$$\int_0^x \frac{1-\cos(v)}{v}dv = \ln(\gamma) + \ln(x) - Ci(x)$$

$$\ln(\gamma) = 0{,}577\ Constante\ de\ Euler\ \ y\ \ Ci(x)\ Coseno\ integral$$

$$Cin(x) = \int_0^x \frac{1-\cos(v)}{v}dv \qquad\qquad R_0 = 30Cin(x)$$

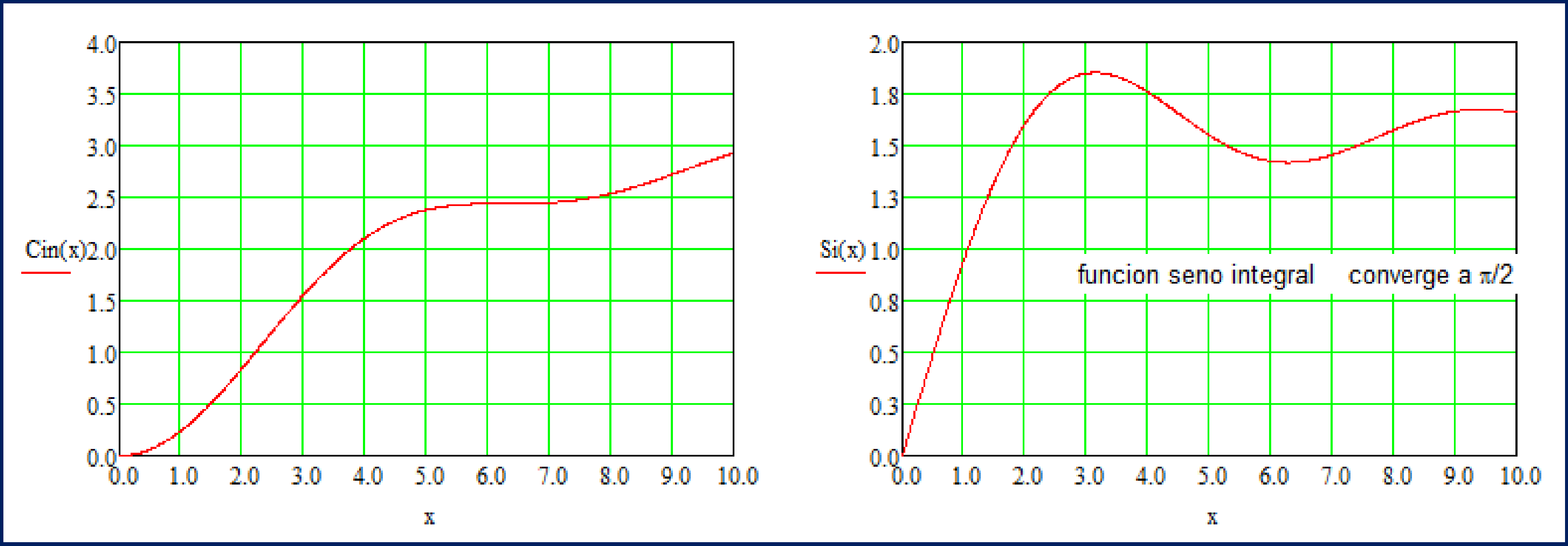
También puede derivarse una expresión para la parte reactiva de la resistencia de radiación Xo, la cual estará en función del Seno Integral

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}(v)}{v}dv \qquad\qquad X_0 = 30Si(x)$$

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada, resistencia de radiación L = λ/2

$$R_0 = 30Cin(x) \qquad X_0 = 30Si(x)$$



Estas expresiones pueden representarse como series

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada, resistencia de radiación

$$R_0 = 30Cin(x) \qquad X_0 = 30Si(x)$$

$$Cin = \sum_{k=1}^{50} \frac{\left(-1^{k}\right)\left(x^{2k}\right)}{2k(2k)!} \qquad Sin = \sum_{k=1}^{50} \frac{\left(-1^{k-1}\right)\left(x^{2k-1}\right)}{(2k-1)(2k-1)!}$$

Para el caso de un dipolo de media onda alimentado al centro, tendremos:

$$R_0 = 30Cin(2\pi) = 73{,}13\Omega \qquad X_0 = 30Si(2\pi) = 42{,}54\Omega$$

Comparar con el dipolo corto. Si se acorta un poco la antena, puede hacerse la parte reactiva igual a cero, ¿de que otra forma?

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada, resistencia de radiación

$$Z_{11} = 30\big(Cin(2\pi n) + jSi(2\pi n)\big) \quad n\ es\ un\ numero\ impar\ \frac{\lambda}{2}$$

$$n = 1 \qquad Z_{11} = 30\big(Cin(2\pi) + jSi(2\pi)\big) = 73{,}13 + j42.54$$

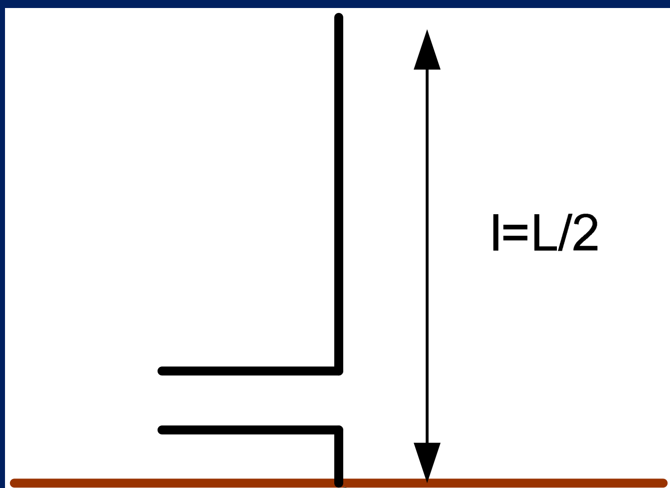
$$n = 5 \qquad Z_{11} = 30\big(Cin(2\pi) + jSi(2\pi)\big) = 120{,}77 + j46.17$$

Vemos la convergencia de la parte reactiva

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada, resistencia de radiación

Podemos aplicar esto a una antena de tipo stub



$$Z_{11} = 15\big(Cin(2\pi n) + jSi(2\pi n)\big)$$

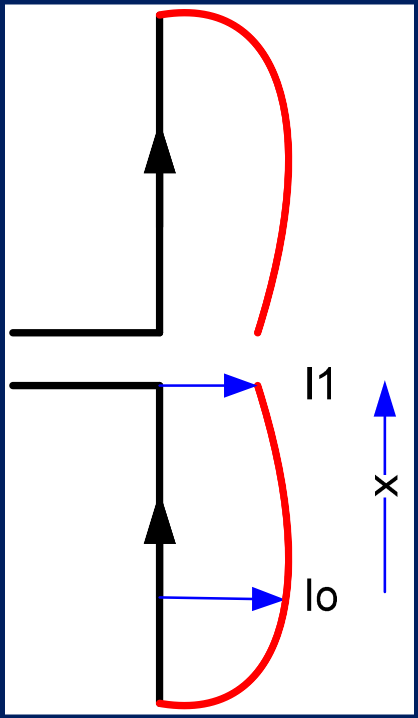
$$n\ es\ un\ numero\ impar\ \frac{\lambda}{4}$$

$$n = 1 \qquad Z_{11} = 36{,}5 + j21.27\ \ \Omega$$

Plano infinito de tierra conductora

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada, resistencia de radiación en un punto que no es el máximo

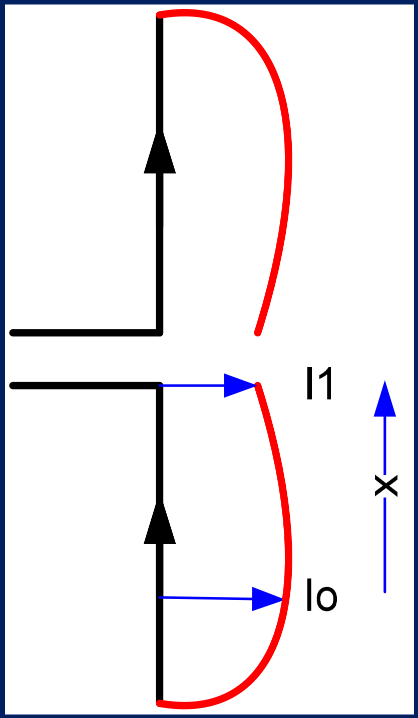


Si evaluamos Ro para un dipolo de 3λ/4 con el método anterior encontramos su valor en un máximo de corriente, que no es precisamente el de conexión de la línea de transmisión.

Considerando que la distribución de corriente sea la misma podemos encontrar fácilmente una expresión para estos casos, igualando la potencia radiada a la potencia suministrada por la línea

Antenas lineal delgada

Antena lineal delgada, resistencia de radiación en un punto que no es el máximo



Calculamos R_0 en el punto donde la corriente I_0 es máxima, lo cual no seria el caso, por ejemplo, en una antena de ¾ λ

Si despreciamos las perdidas de la antena, podemos suponer que la potencia que se entrega en los terminales de la antena es la que se radia

$$\frac{{I_1}^2}{2} R_1 = \frac{{I_0}^2}{2} R_0 \Rightarrow R_1 = \frac{{I_0}^2}{{I_1}^2} R_0$$

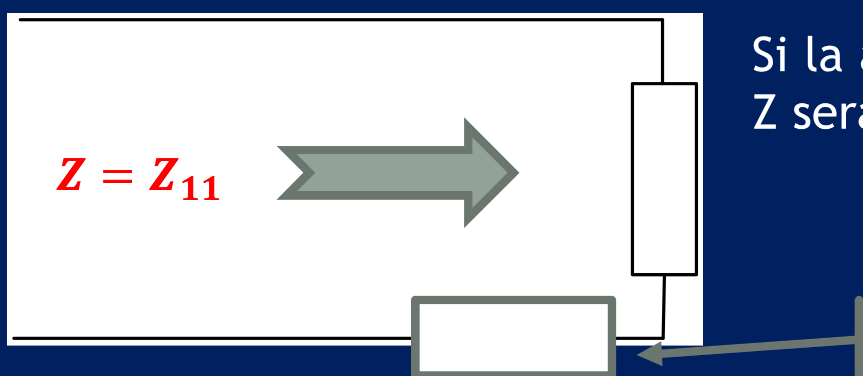
$$I_1 = \cos(\beta x)\, I_0 \Rightarrow R_1 = \frac{R_0}{\cos(\beta x)^2}$$

$$\text{En x} = 0 \text{ tenemos } R_1 = R_0$$

Impedancias Mutuas

Impedancias mutuas y propias

La impedancia presentada por una antena a la línea de transmisión puede representarse por una red de dos terminales, con una impedancia Z.



Si la antena se encuentra aislada , la impedancia Z será igual a la auto impedancia

Pero de no ser así deben considerarse las impedancias mutuas y las corrientes que fluyen por ellas.

Impedancias Mutuas

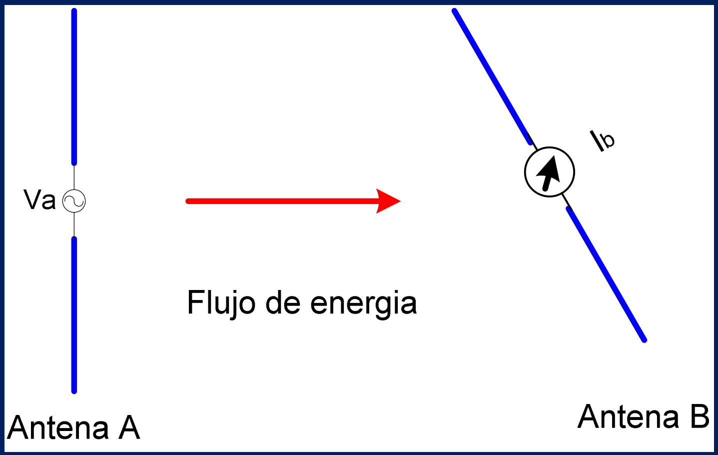
Teorema de reciprocidad generalizado de Carson

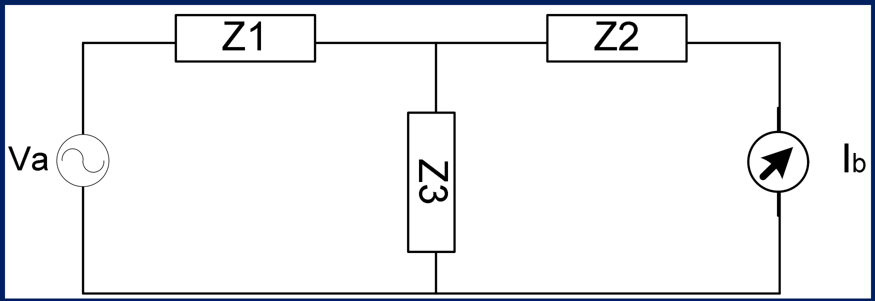
Si una fem es aplicada a los terminales de una antena A y la corriente medida en los terminales de otra antena B, entonces una corriente igual (en amplitud y fase) será medida en los terminales de la antena A si la misma fem se aplica en los terminales de la antena B.
(medio lineal, pasivo e isotrópico).

Un consecuencia de esto es que los diagramas de recepción y transmisión de una antena son iguales

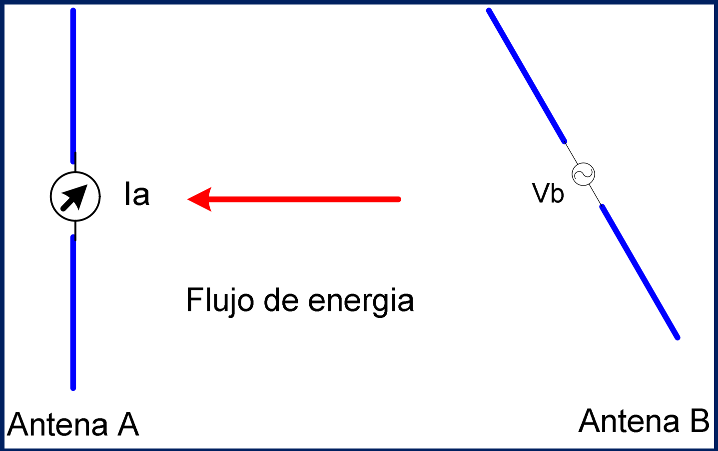
Impedancias Mutuas

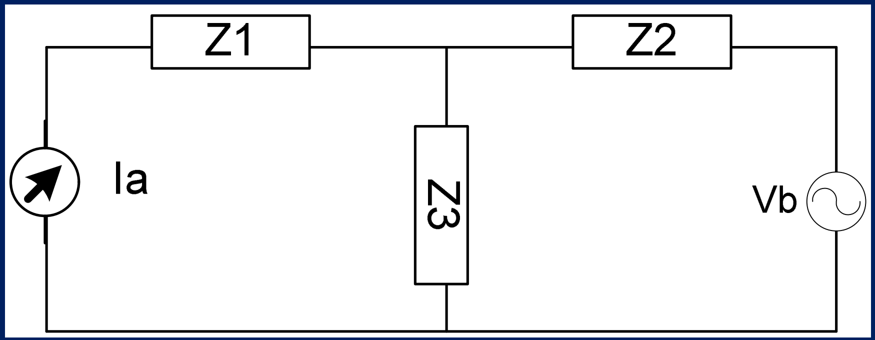
Teorema de reciprocidad generalizado de Carson





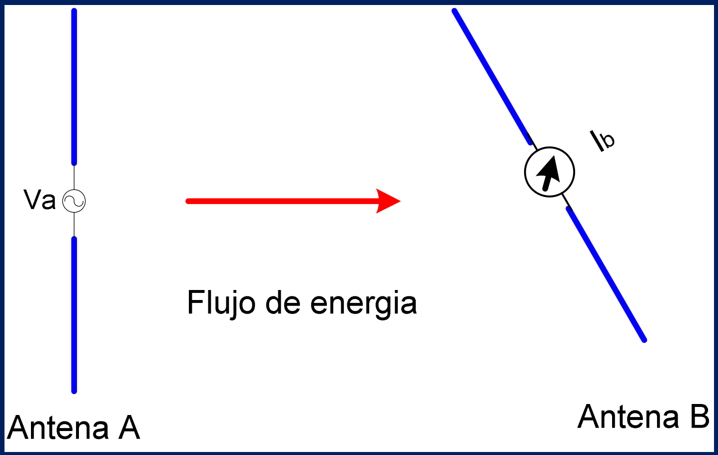
$$Si\ V_a = V_b\ \ entonces\ I_a = I_b$$

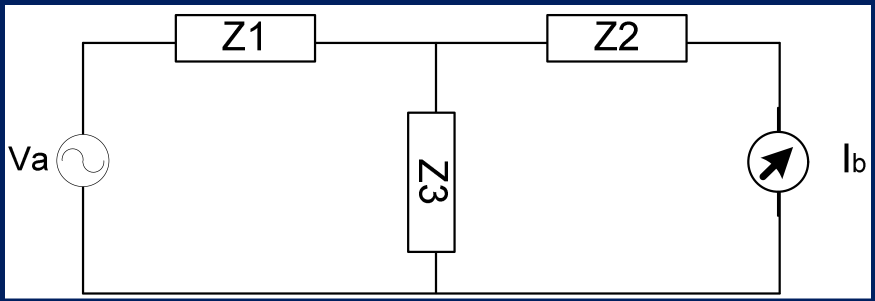




Impedancias Mutuas

Teorema de reciprocidad generalizado de Carson





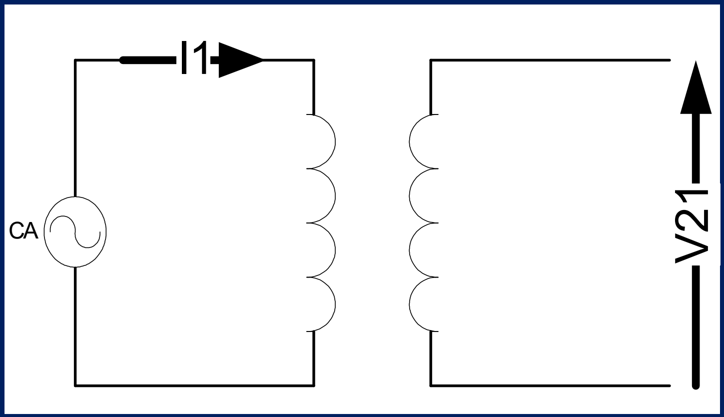
Aparece una impedancia de transferencia, definida como

$$\frac{V_a}{I_b} = Z_{ab} = Z_{ba} = \frac{V_b}{I_a}$$

Las antenas son afectadas por el entorno!

Impedancias Mutuas

Analicemos ahora las ***impedancias mutuas*** de antenas lineales acopladas, para ello consideremos el circuito acoplado y la definición de impedancia mutua

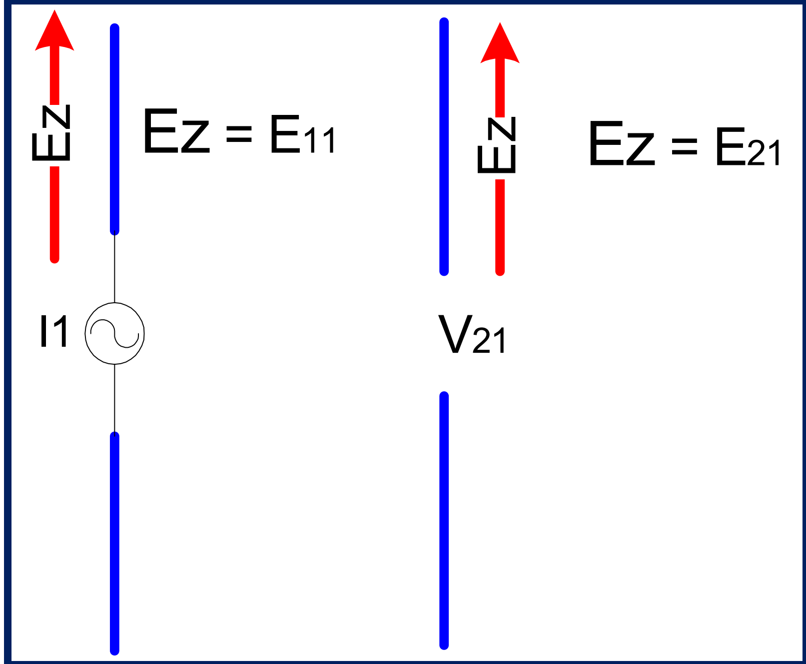


La impedancia mutua se define como la razón negativa de la fem inducida en el circuito 2 por la corriente que fluye en el circuito 1, con el circuito 2 abierto

$$Z_{21} = -\frac{V_{21}}{I_1}$$

Esta Z no es igual a la impedancia de transferencia planteada por el teorema de reciprocidad que se define en lazo cerrado

Impedancias Mutuas



La impedancia mutua será:

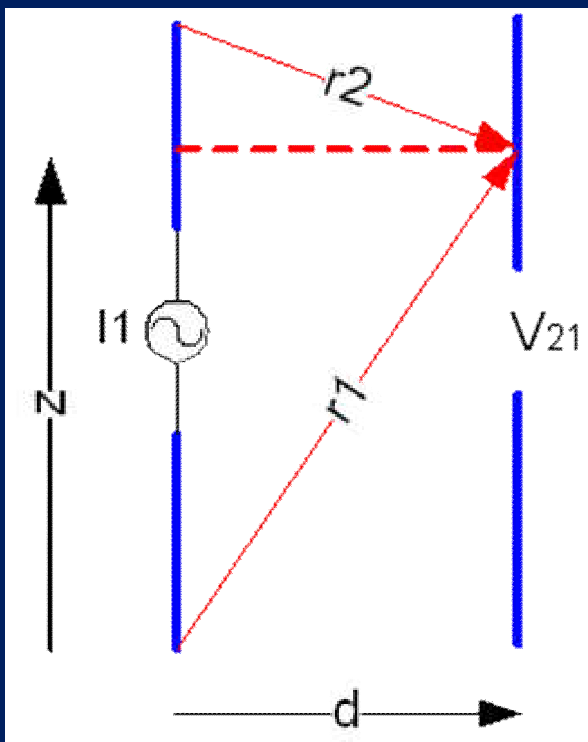
$$Z_{21} = -\frac{V_{21}}{I_1}$$

Si movemos el generador a los terminales de la antena 2 por el teorema de transferencia tenemos

$$-\frac{V_{21}}{I_1} = Z_{21} = Z_{12} = -\frac{V_{12}}{I_2}$$

Impedancias Mutuas

Para antenas lineales delgadas con distribución de corriente sinusoidal tenemos que



$$V_{21}(z) = \int_0^L E_{21}(z) \cdot \sin(\beta \cdot z)\, dz$$

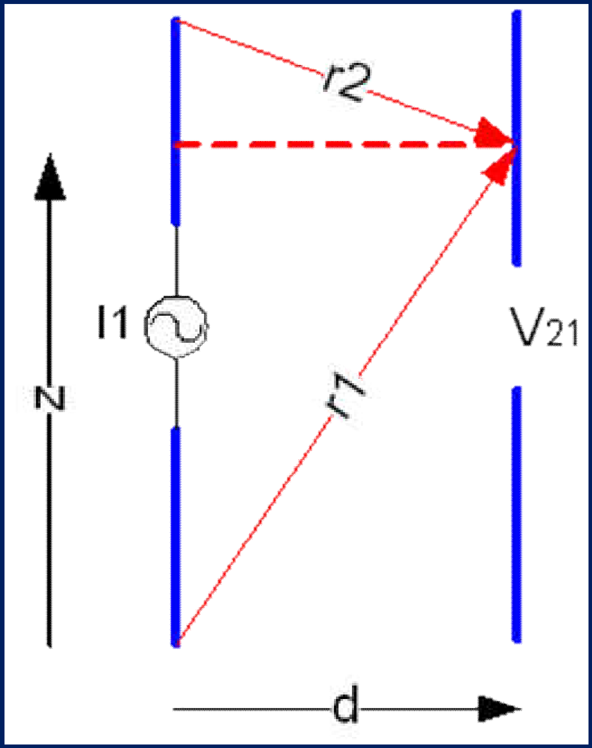
$$Z_{21} = \frac{-1}{I_1} \int_0^L E_{21}(z) \cdot \sin(\beta \cdot z)\, dz$$

Para lo cual necesitamos conocer el campo E

Impedancias Mutuas

Para el caso de dos antenas lineales delgadas iguales de λ/2 separadas una distancia «d» tenemos que evaluar el campo E a partir de las expresiones del potencial eléctrico V y el vector potencial magnético A

$$E = -\nabla V - j\omega A$$



$$r_1(z) = \sqrt{d^2 + z^2} \qquad r_2(z) = \sqrt{d^2 + (L - z)^2}$$

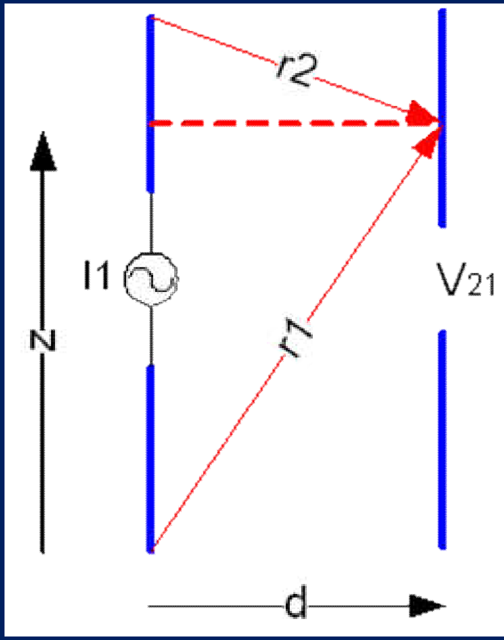
$$Z_{21} = j30 \int_0^L \left(\frac{e^{-j\beta \cdot r_1\ (z)}}{r_1\ (z)} + \frac{e^{-j\beta \cdot r_2\ (z)}}{r_2\ (z)} \right) E_{21} \cdot \sin(\beta \cdot z)\, dz$$

Integral que se puede resolver a partir de las funciones Seno y Coseno integral

Impedancias Mutuas

Para antenas lineales delgadas tenemos que

$$R_{21}(d) = 30\left[2Ci(\beta \cdot d) - Ci\left(\beta \cdot \left(\sqrt{d^2+L^2}+L\right)\right) - Ci\left(\beta \cdot \left(\sqrt{d^2+L^2}-L\right)\right)\right]$$



Esta es la resistencia mutua en el caso de antenas lineales paralelas y múltiplos impares de λ/2.

Se puede utilizar el mismo método para evaluar la autoimpedancia Z11, lo que coincide con el valor de impedancia de radiación deducida para los dipolos.

En el cálculo de arreglos es importante la relación R11-R21

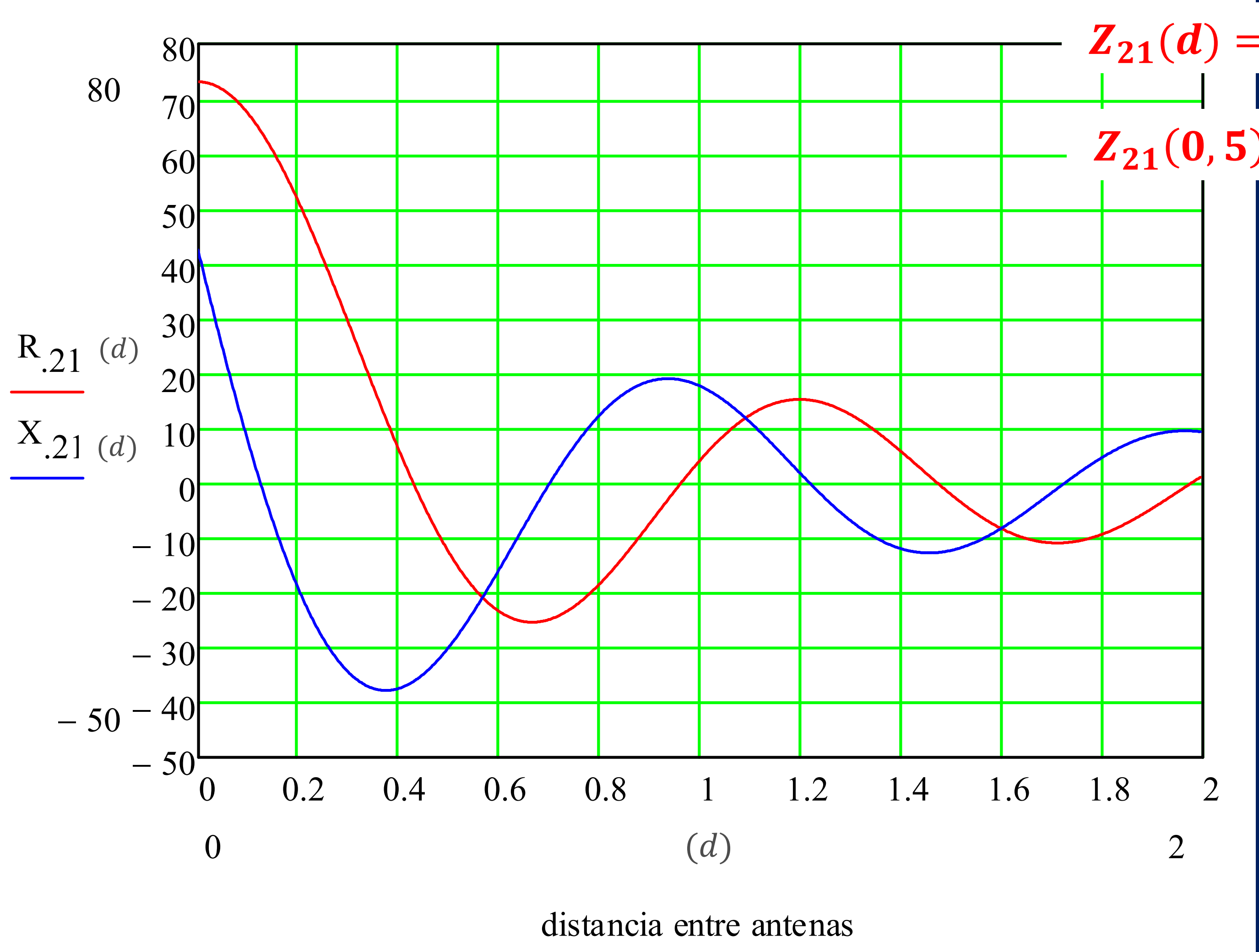
$$X_{21}(d) = -30\left[2Si(\beta \cdot d) - Si\left(\beta \cdot \left(\sqrt{d^2+L^2}+L\right)\right) - Si\left(\beta \cdot \left(\sqrt{d^2+L^2}-L\right)\right)\right]$$

Impedancias Mutuas

Acoplamiento entre antenas lineales delgadas

$$Z_{21}(d) = R_{21}(d) + jX_{21}(d)$$

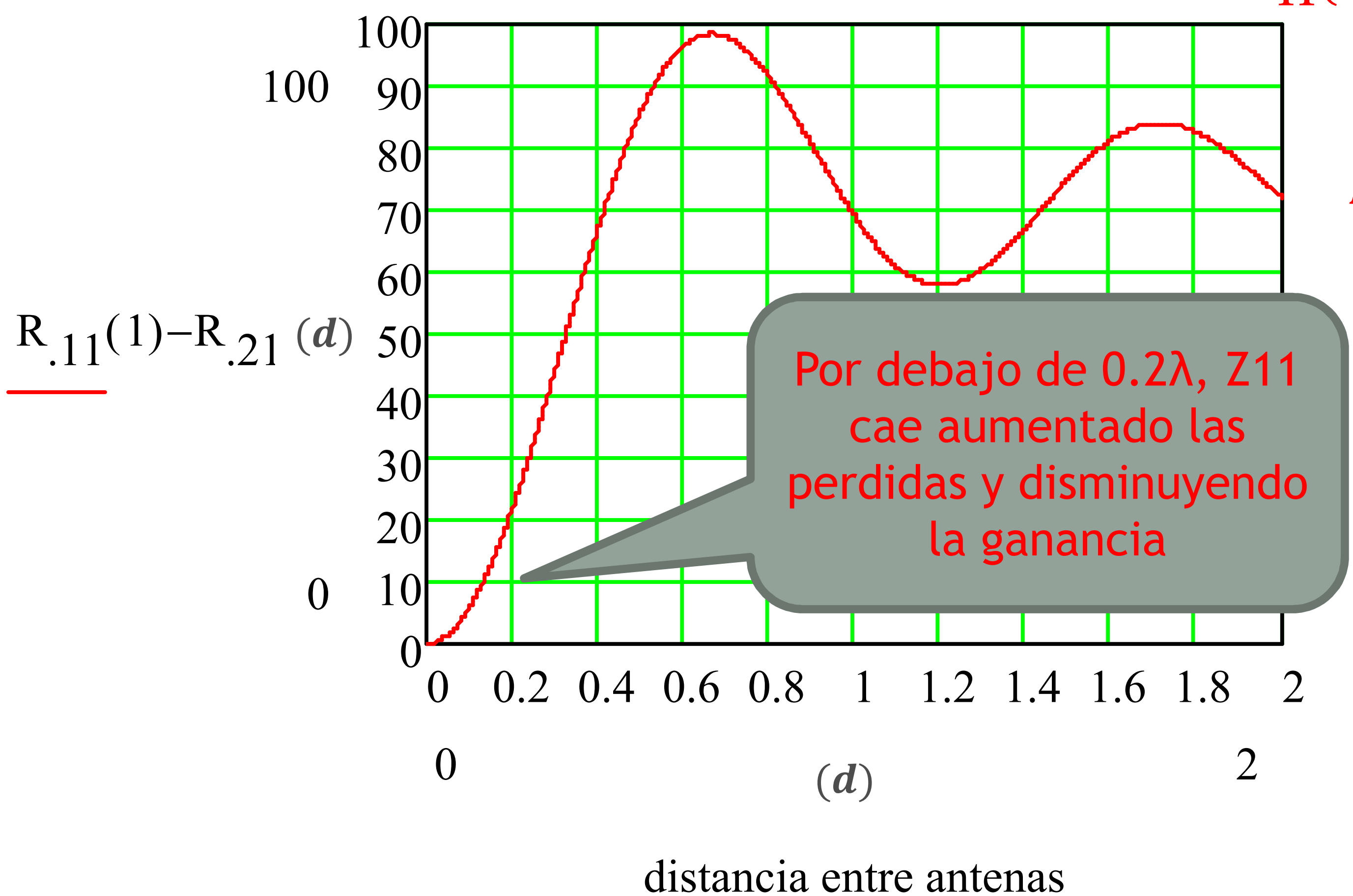
$$Z_{21}(0,5) = -12,5 - j29,9$$



Impedancias Mutuas

Acoplamiento entre antenas lineales delgadas

$$R_{11}(n) = 30C_{in}(2\pi n)$$

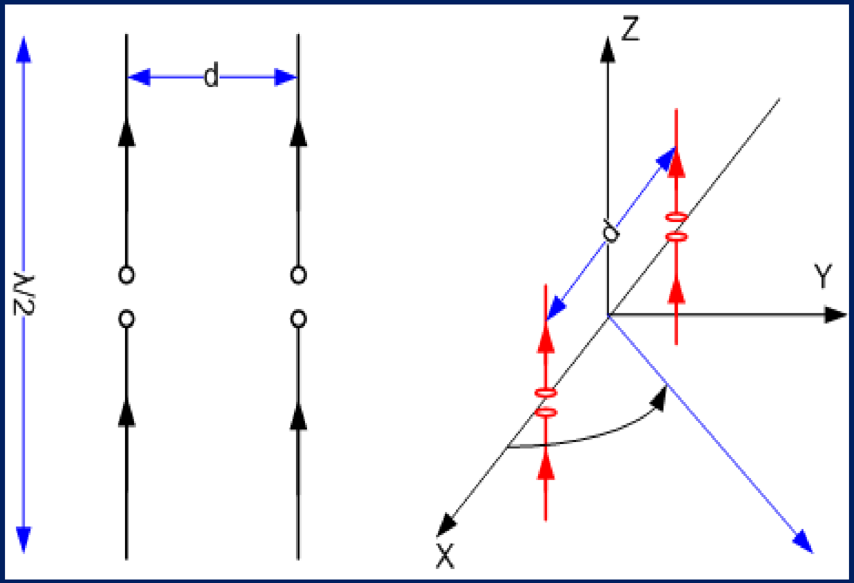


$$R_{11}(1) = 73,13\Omega$$

En *Antennas (Kraus)* pueden encontrarse los análisis para arreglos colineales y en escalera

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de antenas, caso broadside



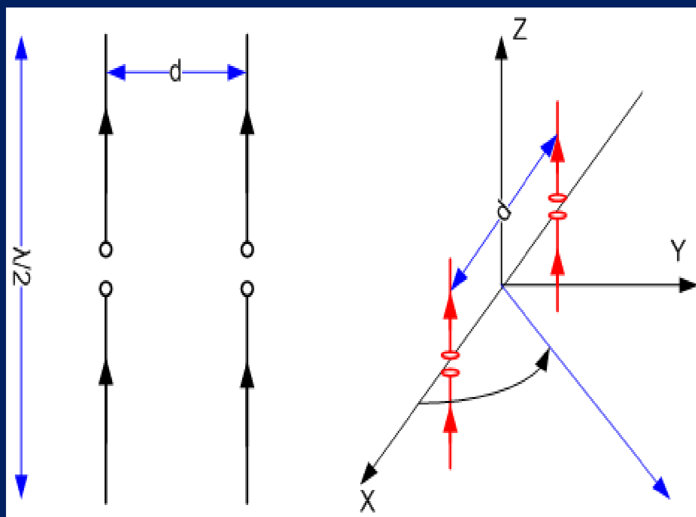
Suponemos que las antenas están en el espacio libre, es decir a una distancia infinita del plano de tierra u otros objetos.

Es conveniente obtener los diagramas de radiación, para los planos horizontal y vertical.
Consideramos la intensidad de campo a grandes distancias del array D >> d

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de antenas, caso broadside

En el plano XY la intensidad de campo E será proporcional a la corriente que circula en el elemento (estamos hablando de una sola fuente no del conjunto) e independiente del ángulo Φ



$$E_1(\varphi) = kI_1 \qquad k\ incluye\ la\ distancia\ D$$

$$d_r = \frac{2\pi}{\lambda} d \qquad y\ haciendo \qquad E_1 = E_0$$

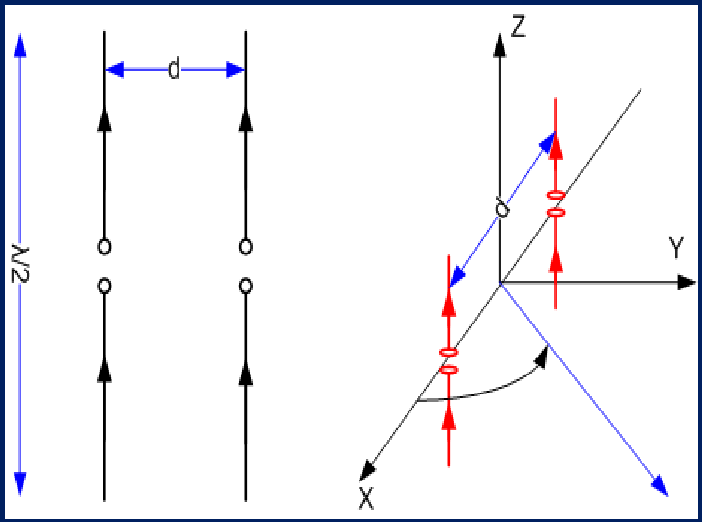
$$E_{XY}(\varphi) = ? \qquad E_{XY}(\varphi) = 2E_0 cos\left(\frac{d_r}{2}\cos(\varphi)\right)$$

$$\boxed{E_{XY}(\varphi) = 2kI_1 cos\left(\frac{d_r}{2}\cos(\varphi)\right) \quad para\ d = \frac{\lambda}{2}}$$

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de antenas, caso broadside

En el plano ZX o ZY tenemos que el campo producido por una antena lineal delgada será:



$$E_1(\theta) = kI_1 \frac{cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}$$

$$considerando\ el\ arreglo\ tendremos$$

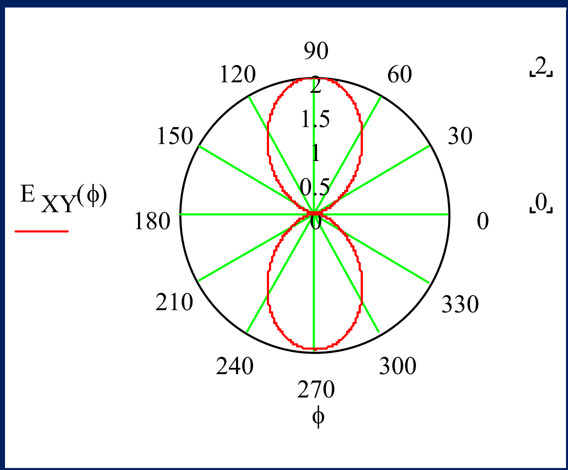
$$E_{ZX}(\theta) = ? \quad y \quad E_{ZY}(\theta) = ?$$

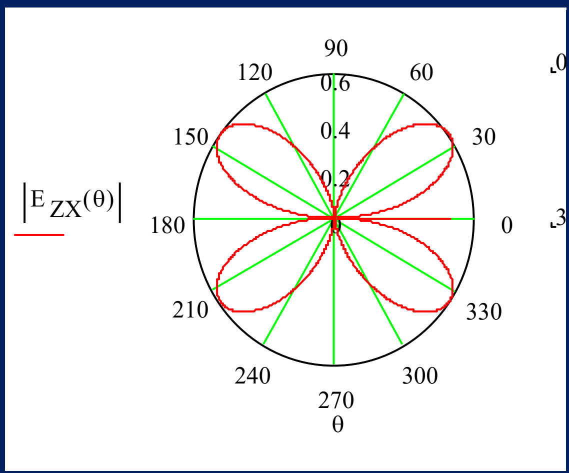
$$\boxed{E_{ZY}(\theta) = 2E_1(\theta)}$$

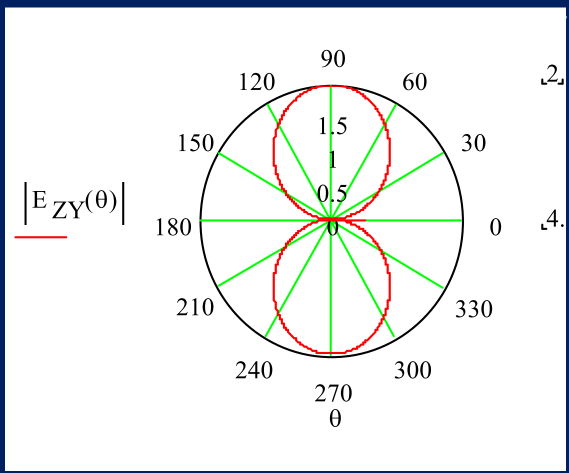
$$\boxed{E_{ZX}(\theta) = 2kI_1 \frac{cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)} cos\left(\frac{d_r}{2}\operatorname{sen}(\theta)\right)}$$

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de antenas: caso broadside

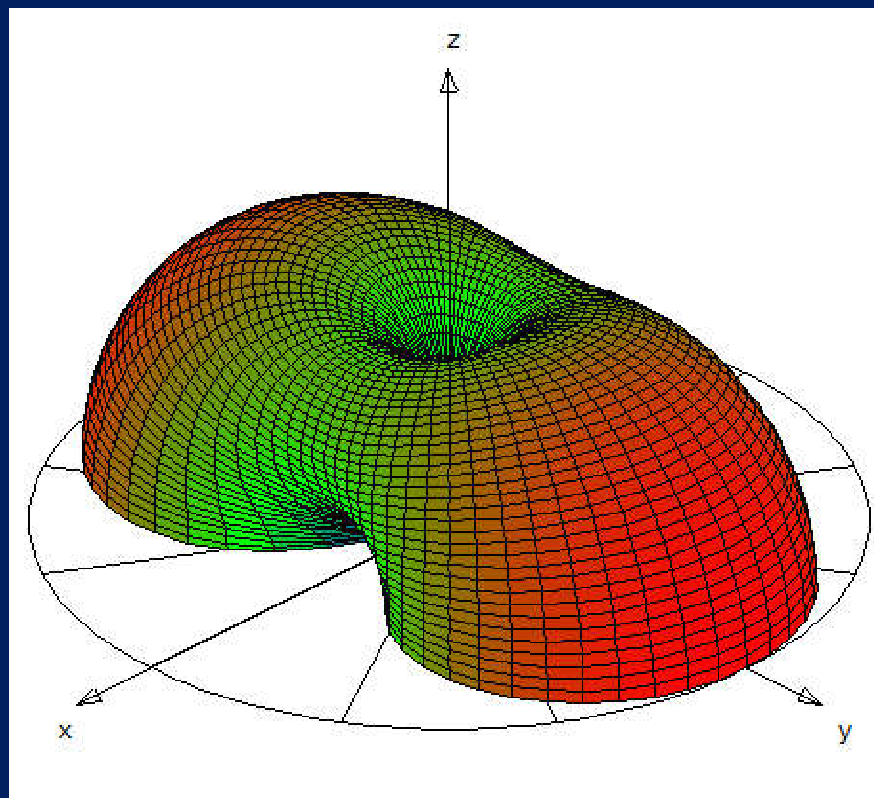






¿Y el patrón 3D?

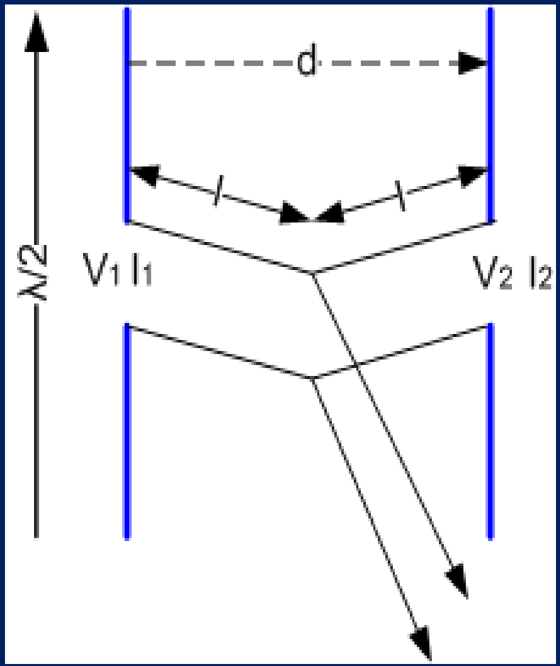
Arreglo de antenas lineales



¿Qué tipo de arreglo tenemos?

Arreglo de antenas lineales

Impedancia del punto de excitación, escribamos las ecuaciones para V1 y V2



$$V_1 = I_1 \cdot Z_{11} + I_2 \cdot Z_{12} \qquad V_2 = I_2 \cdot Z_{22} + I_1 \cdot Z_{21}$$

$$I_1 = corriente\ del\ elemento\ 1\ \ y\ \ Z_{11}\ \ su\ autoimpedancia$$

$$I_1 = I_2 \quad y\ estan\ en\ fase$$

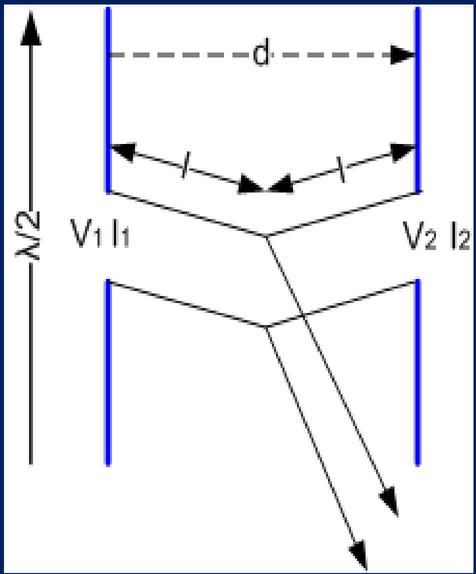
$$V_1 = I_1 \cdot (Z_{11} + Z_{12}) \qquad Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12}$$

$$V_2 = I_2 \cdot (Z_{22} + Z_{21}) \qquad Z_2 = \frac{V_2}{I_2} = Z_{22} + Z_{21}$$

$$Como\ los\ elementos\ son\ identicos\ Z_{11} = Z_{22}\ \ y\ \ en\ consecuencia\ Z_1 = Z_2$$

Arreglo de antenas lineales

En función de lo anterior las tensiones V1 y V2 debe ser iguales y estar en fase, entones podemos escribir



$$para \quad d = \frac{\lambda}{2} \quad y \quad L = \frac{\lambda}{2}$$

$$Z_{11} = 30\big(Cin(2\pi) + jSi(2\pi)\big) = 73{,}13 + j42.54 \quad Z_{21} = R_{21}(0{,}5) + jX_{21}(0{,}5)$$

$$Z_1 = Z_{11} + Z_{12} = 60{,}598 + j12{,}616 \quad \Omega$$

Si se ajusta la línea con una reactancia capacitiva en serie, la impedancia que presenta cada elemento es una resistencia pura de 60 ohm.

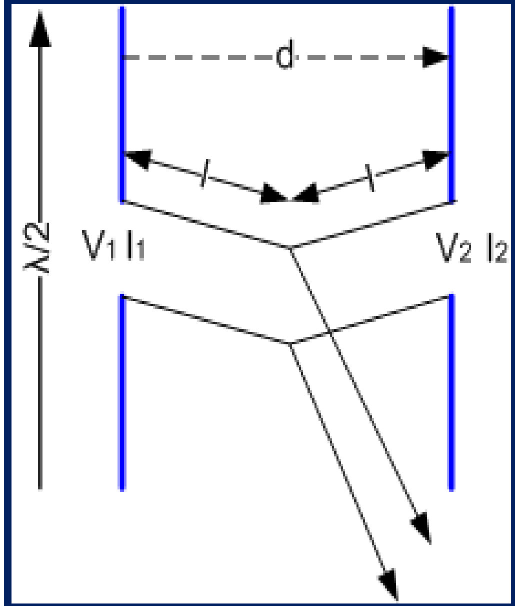
¿Cómo podemos conectar las antenas?

Haciendo l = λ/2 , tenemos que la impedancia de entrada en el punto de excitación será 30 Ω ¿Por qué?.

Este valor puede ser algo bajo para ser adaptado por una línea de transmisión, por lo cual puede resultar conveniente utilizar l = λ/4 ¿Por qué?

Arreglo de antenas lineales

Estimación de la ganancia del arreglo



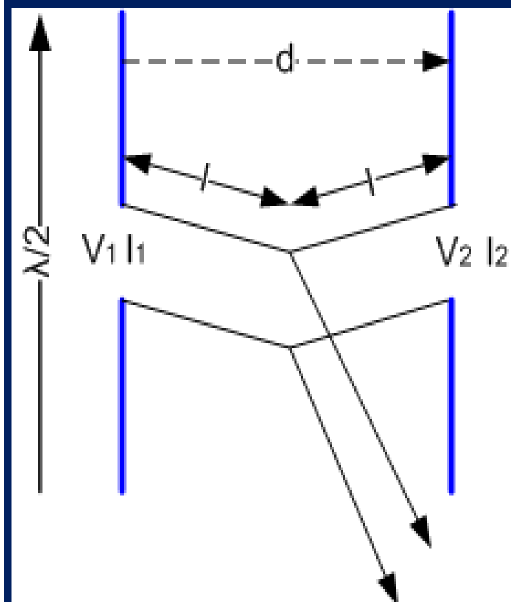
Se propone ahora un método alternativo para el cálculo de la ganancia, basado en las impedancias propias y mutuas, al método de integración de los patrones de radiación.

Este resulta un poco mas sencillo de aplicar.

La potencia P de entrada al arreglo se considera constante

Arreglo de antenas lineales

Estimación de la ganancia del arreglo



$P_1 = {I_1}^2(R_{11} + R_{12})$ Potencia en el elemento 1

$P_2 = {I_2}^2(R_{22} + R_{12})$ Potencia en el elemento 2

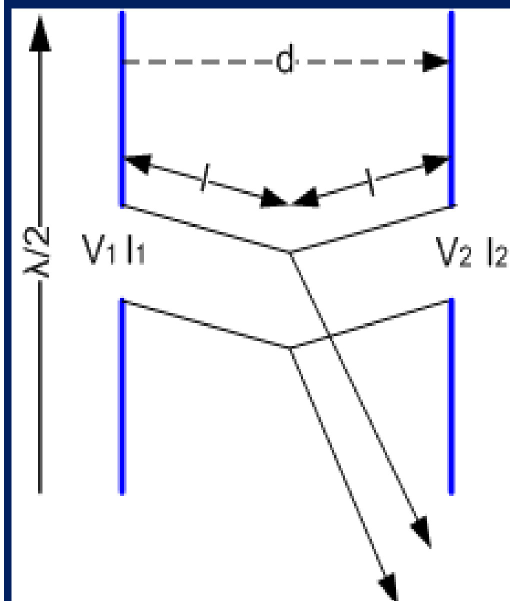
$R_{11} = R_{22}$ $I_1 = I_2$ Por ser iguales las antenas (I en RMS)

$P = 2{I_1}^2(R_{11} + R_{12})$ Potencia de entrada al arreglo $P_1 + P_2$

$$I_1 = \sqrt{\frac{P}{2(R_{11} + R_{12})}}$$

Arreglo de antenas lineales

Calculamos la ganancia con respecto a uno de los elementos que componen el arreglo, (en nuestro caso la referencia es un elemento de λ/2).



Si no hay perdidas por calor la potencia y la corriente en el elemento serán:

$$I_0 = \sqrt{\frac{P}{R_{00}}}$$

Ambos elementos orientados en la misma dirección y con igual potencia P.

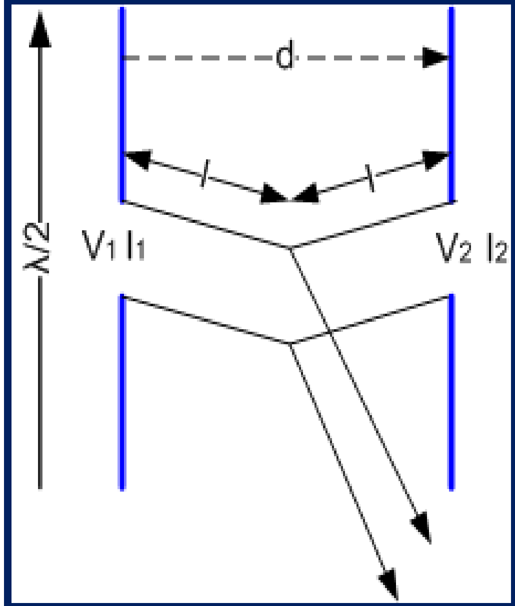
Aquí será conveniente analizar la ganancia en dos planos el horizontal y el vertical.

$$E_{HW}(\varphi) = k \cdot I_0 \quad intensidad\ de\ campo\ referida\ al\ dipolo\ de\ \lambda/2$$

$$E_{HW}(\varphi) = k \cdot \sqrt{\frac{P}{R_{00}}}\ intensidad\ de\ campo\ de\ un\ elemento$$

Arreglo de antenas lineales

$E_{HW}(\varphi) = k \cdot I_0$ *intensidad de campo referida al dipolo de* $\lambda/2$



$$E_{HW}(\varphi) = k \cdot \sqrt{\frac{P}{R_{00}}} \text{ intensidad de campo de un elemento}$$

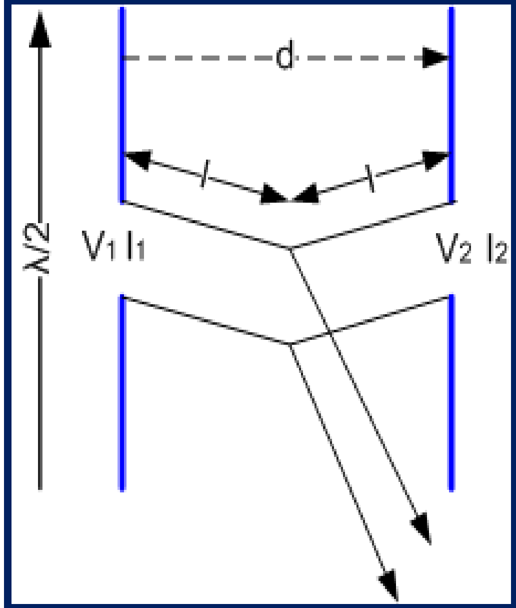
$$E(\varphi) = 2k \cdot I_1 \cos\left(\frac{d_r}{2}\cos(\varphi)\right)$$

$$E(\varphi) = k \cdot \sqrt{\frac{2P}{(R_{11} + R_{12})}} \cos\left(\frac{d_r}{2}\cos(\varphi)\right)$$

$$G(\varphi) = \frac{E(\varphi)}{E_{HW}(\varphi)} \qquad G(\varphi) = \sqrt{\frac{2R_{00}}{(R_{11} + R_{12})}} \cos\left(\frac{d_r}{2}\cos(\varphi)\right)$$

Arreglo de antenas lineales

Estimación de la ganancia del arreglo



$$Para\ el\ caso\ de\ L = \frac{\lambda}{2}\ y\ lo\ mismo\ en\ el\ espaciado, tenemos$$

$$d_r = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi \qquad R_{11} = 73\ \Omega \qquad R_{00} = R_{11}$$

$$R_{21}(d) = 30\left[2Ci(\beta \cdot d) - Ci\left(\beta \cdot \left(\sqrt{d^2 + L^2} + L\right)\right) - Ci\left(\beta \cdot \left(\sqrt{d^2 + L^2} - L\right)\right)\right]\ d = 0{,}5$$

$$R_{12}(0{,}5) = -12{,}532\ \Omega \qquad \rho\ separacion\ en\ longitudes\ de\ onda$$

$$\sqrt{\frac{2R_{00}}{(R_{11} + R_{12})}} = ?$$

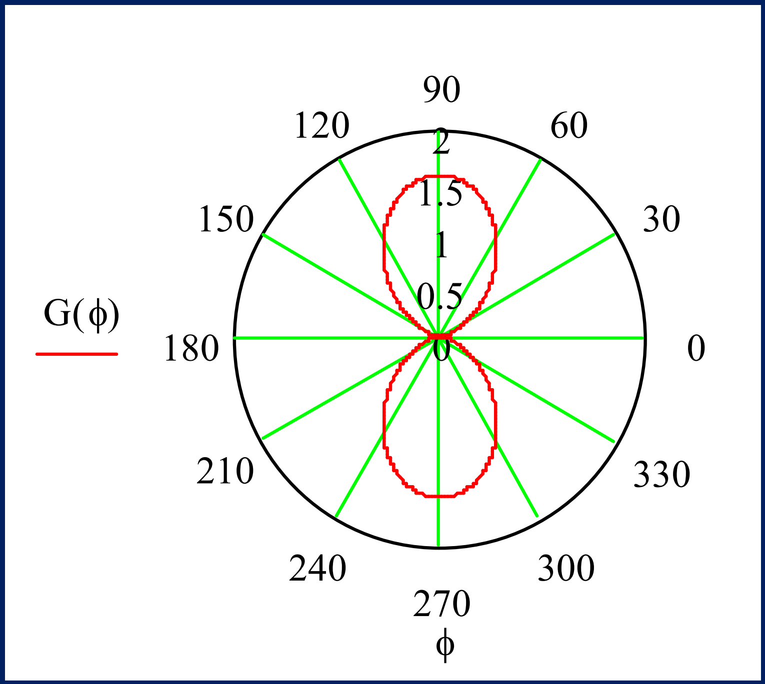
$$\boxed{G(\varphi) = 1{,}56 \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\varphi)\right)}$$

Arreglo de antenas lineales

Estimación de la ganancia del arreglo en el plano Horizontal o XY

$$\boxed{G(\varphi) = 1{,}56\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\varphi)\right)}$$

¿Cuál será la ganancia?



Ganancia = 1,56 para 90º

¿tipo de arreglo?

Arreglo de antenas lineales

Estimación de la ganancia del arreglo en el plano Vertical o ZY

En el plano ZY el dipolo tiene el siguiente patrón:

$$E_{HW}(\theta) = k \cdot I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)} \qquad E_{HW}(\theta) = k \cdot \sqrt{\frac{P}{R_{00}}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}$$

En el plano ZY vemos los dos elementos en el origen así tenemos

$$E(\theta) = 2E_{HW}(\theta) \qquad E(\theta) = k \cdot \sqrt{\frac{2P}{R_{11} + R_{12}}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}$$

$$\boxed{G(\theta) = \sqrt{\frac{2R_{00}}{R_{11} + R_{12}}}}$$

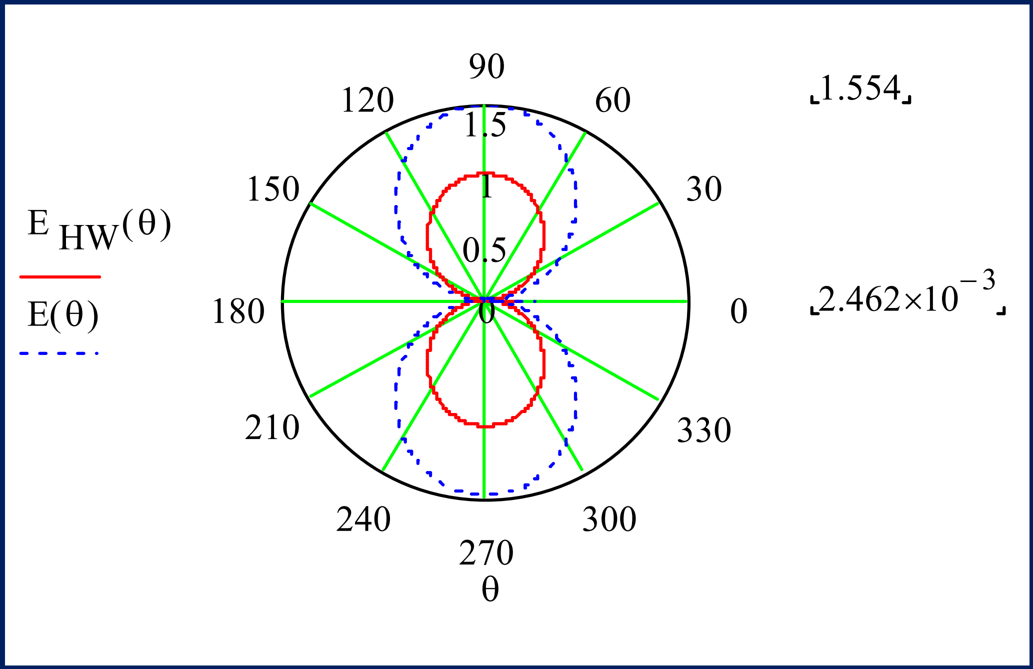
En el plano ZY la ganancia es independiente del ángulo Θ, igual a 1,56 o 3,86 db

Arreglo de antenas lineales

Estimación de la ganancia del arreglo en el plano Vertical o ZY

$$G(\theta) = \sqrt{\frac{2R_{00}}{R_{11} + R_{12}}}$$

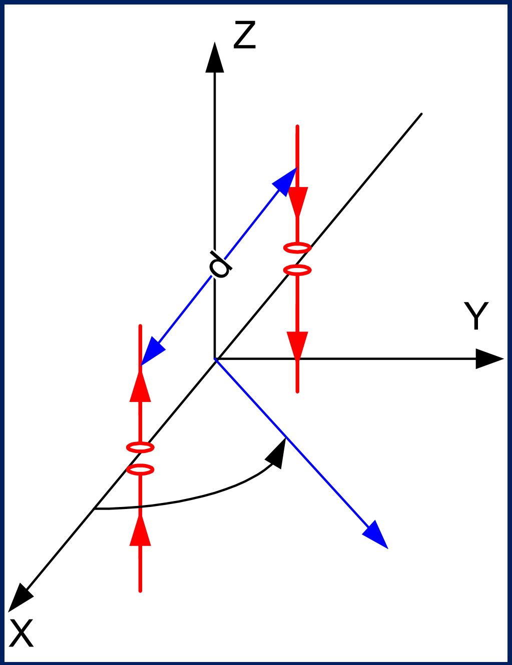
En el plano ZY la ganancia es independiente del ángulo Θ, igual a 1,56 o 3,86 db



Arreglo de antenas lineales

Arreglo de dos antenas lineales de λ/2 caso Endfire

La única diferencia con el caso anterior analizado es que la corriente en uno de los elementos esta en contrafase.
El análisis se dividirá en tres etapas como en el caso anterior: diagramas de campo, impedancia de excitación y ganancia



$$E_1(\varphi) = k \cdot I_1 \quad \textit{radiacion de un elemento en el plano XY}$$

$$E_{XY}(\varphi) = 2E_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{d_r}{2}\cos(\varphi)\right)$$

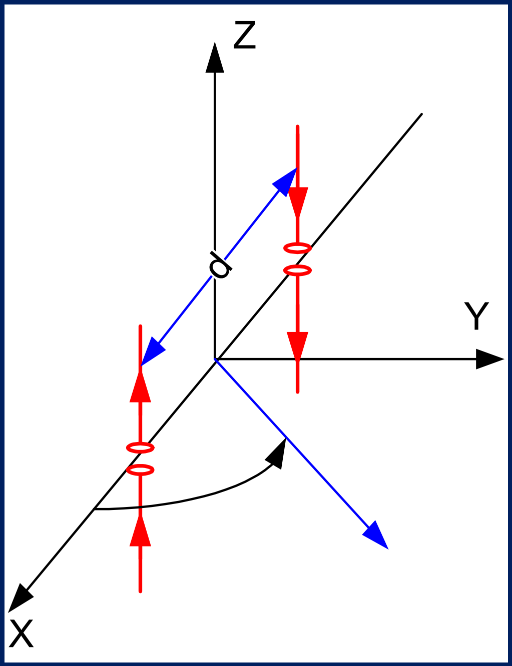
radiacion de dos elementos isotropicos (se omitio j)

$$E_0(\varphi) = k \cdot I_1 \quad \textit{Principio de superposicion}$$

$$E_{XY}(\varphi) = 2kI_1 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{d_r}{2}\cos(\varphi)\right)$$

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de dos antenas lineales de λ/2 caso Endfire



$$E_1(\theta) = k \cdot I_1 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}$$

radiacion de un elemento en el plano ZX

$$E_{ZX}(\theta) = 2E_0 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{d_r}{2}\cos(\theta)\right)$$

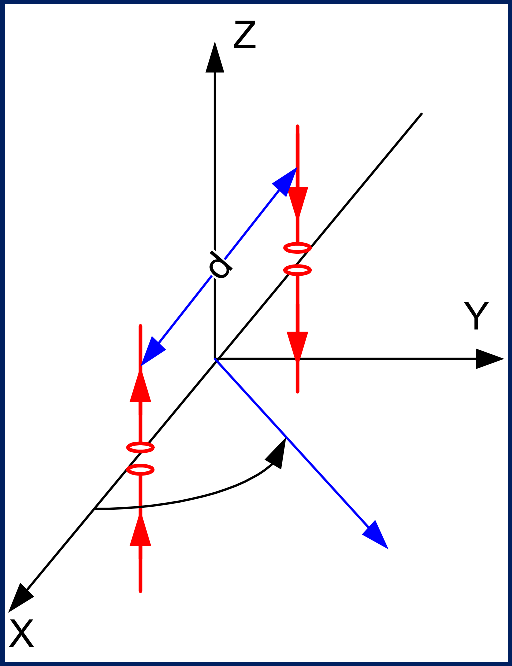
radiacion de dos elementos isotropicos (se omitio j)

$$E_0(\theta) = E_1(\theta) \quad \textit{Principio de superposicion}$$

$$\boxed{E_{ZX}(\theta) = 2kI_1 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{d_r}{2}\cos(\theta)\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)} = 2kI_1 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}}$$

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de dos antenas lineales de λ/2 caso Endfire

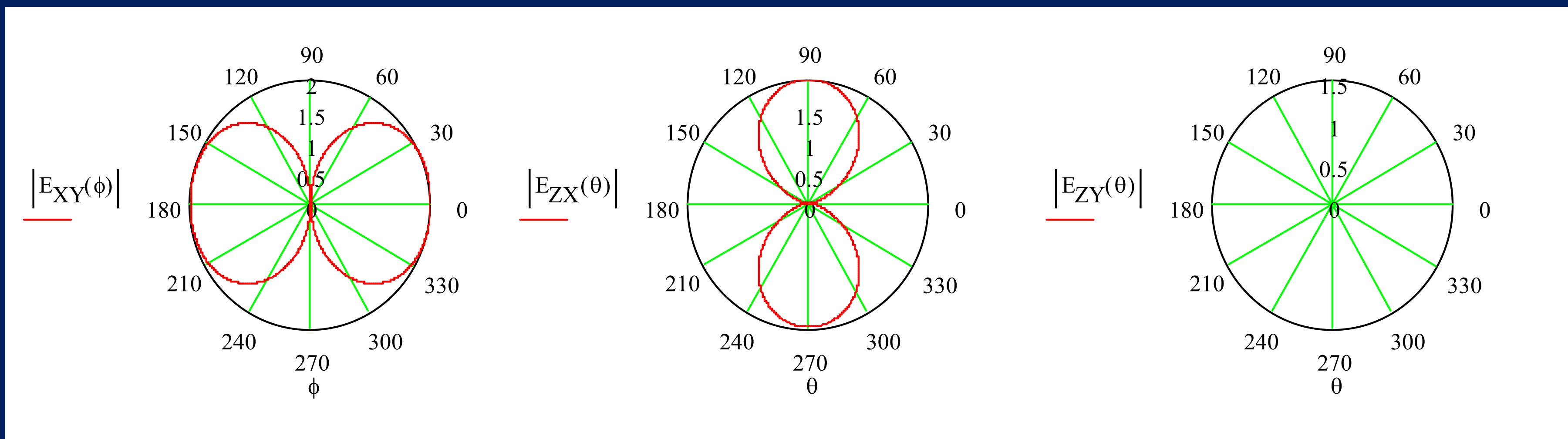


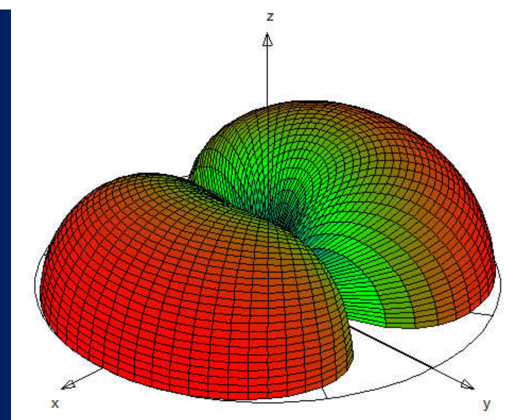
En el plano ZY tendremos:

$$\boxed{\begin{array}{c} E_{ZY}(\theta) = E_1(\theta) - E_1(\theta) = 0 \\ \text{porque estan en contrafase} \end{array}}$$

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de dos antenas lineales de λ/2 caso Endfire

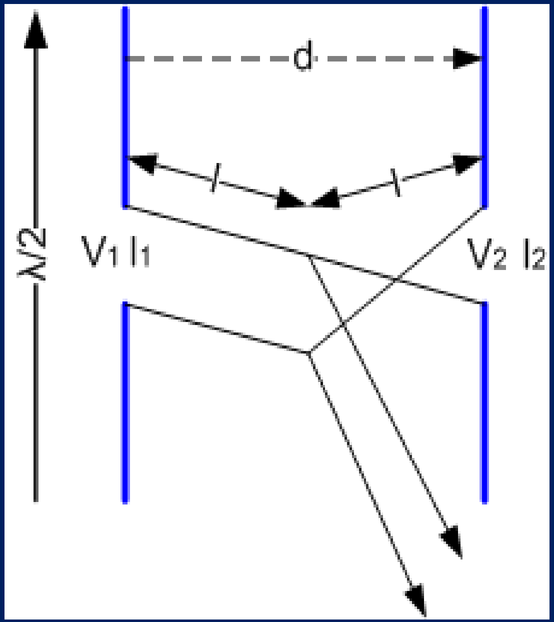




Arreglo de antenas lineales

Arreglo de dos antenas lineales de λ/2 caso Endfire

Impedancia en el punto de excitación



$$V_1 = I_1 \cdot Z_{11} + I_2 \cdot Z_{12}$$

$$V_2 = I_2 \cdot Z_{22} + I_1 \cdot Z_{21}$$

Como las corrientes estan en contrafase tendremos

$$I_1 = -I_2$$

$$V_1 = I_1 \cdot (Z_{11} - Z_{12}) \qquad Z_1 = \frac{V_1}{I_1} \qquad Z_1 = Z_{11} - Z_{12}$$

$$V_2 = I_2 \cdot (Z_{22} - Z_{21}) \qquad Z_2 = \frac{V_2}{I_2} \qquad Z_2 = Z_{22} - Z_{21}$$

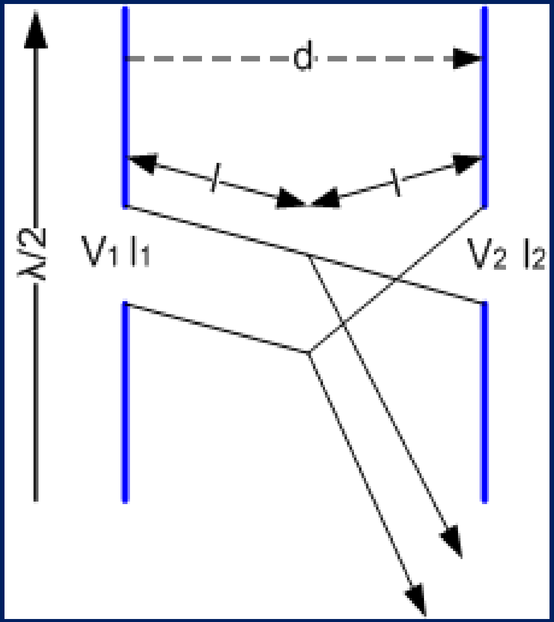
Como los elementos son identicos tenemos que $Z_1 = Z_2$

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de dos antenas lineales de λ/2 caso Endfire

Impedancia en el punto de excitación

$$L = d = \frac{\lambda}{2} \quad Z_{11} = 30\big(Cin(2\pi) + jSi(2\pi)\big) \quad Z_{21} = R_{21}(0{,}5) + jX_{21}(0{,}5)$$



$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12} = 85{,}662 + j72{,}473\ \Omega$$

¿Como podemos tener una impedancia real?

¿Si las líneas de unión del arreglo son de $\frac{\lambda}{2}$ cuanto vale la impedancia de entrada?

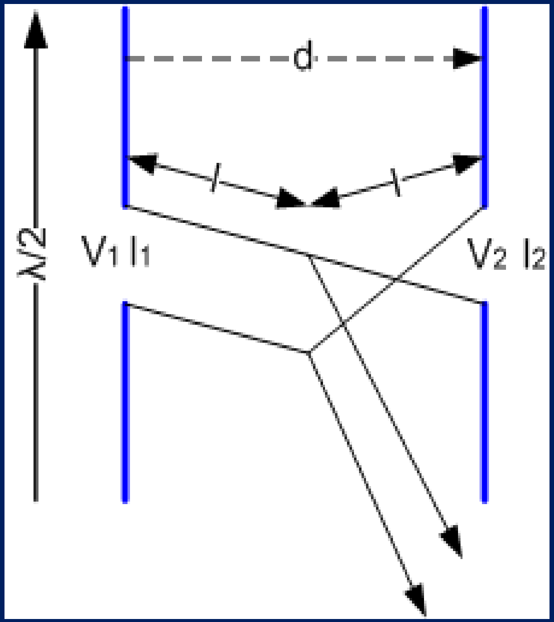
¿Cómo puede hacerse mas alta?

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de dos antenas lineales de λ/2 caso Endfire

Ganancia del arreglo: Según el mismo planteo anterior

$P_1 = {I_1}^2(R_{11} - R_{12})$ Potencia en el elemento 1



$P_2 = {I_2}^2(R_{22} - R_{12})$ Potencia en el elemento 2

$R_{11} = R_{22}$ $I_1 = -I_2$ Por ser iguales las antenas (I RMS)

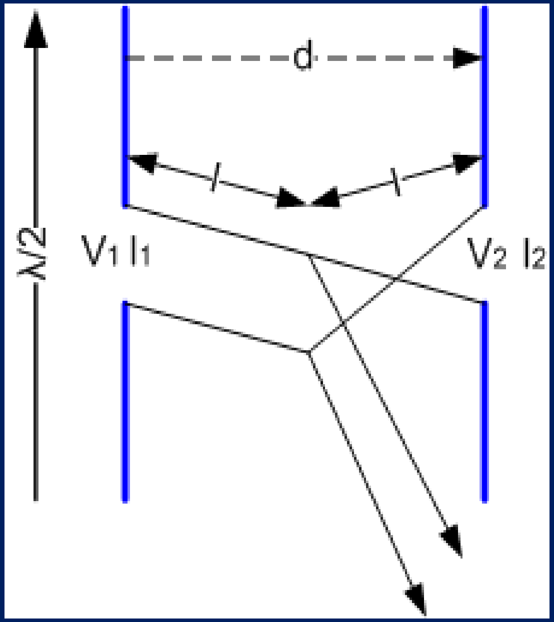
$P = 2{I_1}^2(R_{11} - R_{12})$ Potencia de entrada al arreglo $P_1 + P_2$

$$I_1 = \sqrt{\frac{P}{2(R_{11} - R_{12})}}$$

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de dos antenas lineales de λ/2 caso Endfire

Ganancia del arreglo



$$I_0 = \sqrt{\frac{P}{R_{00}}}$$

$$E_{HW}(\varphi) = kI_0 = k\sqrt{\frac{P}{R_{00}}} \quad Intensidad\ referida\ al\ dipolo$$

$$E(\varphi) = 2kI_1 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{d_r}{2}\cos(\varphi)\right) \qquad I_1 = \sqrt{\frac{P}{2(R_{11} - R_{12})}}$$

$$G(\varphi) = \frac{E(\varphi)}{E_{HW}(\varphi)}$$

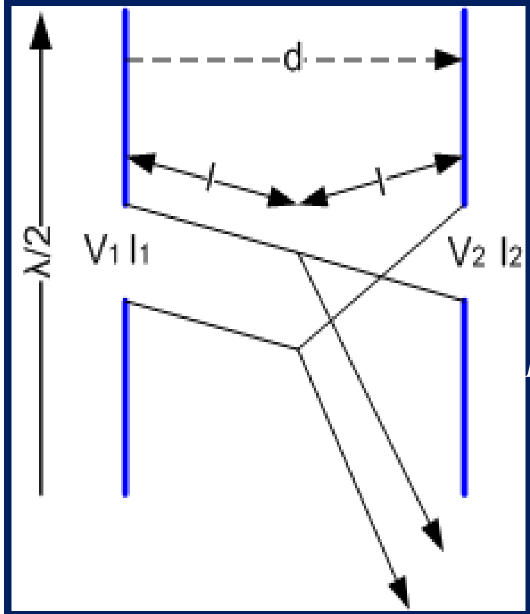
$$E(\varphi) = k\sqrt{\frac{2P}{(R_{11} - R_{12})}} \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{d_r}{2}\cos(\varphi)\right)$$

$$\boxed{G(\varphi) = \sqrt{\frac{2R_{00}}{(R_{11} - R_{12})}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{d_r}{2}\cos(\varphi)\right)}$$

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de dos antenas lineales de λ/2 caso Endfire

Ganancia del arreglo



$$Para\ el\ caso\ de\ L = \frac{\lambda}{2}\ y\ lo\ mismo\ en\ el\ espaciado, tenemos$$

$$d_r = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi \qquad R_{11} = 73\ \Omega \qquad R_{00} = R_{11}$$

$$R_{21}(d) = 30\left[2Ci(\beta \cdot d) - Ci\left(\beta \cdot \left(\sqrt{d^2 + L^2} + L\right)\right) - Ci\left(\beta \cdot \left(\sqrt{d^2 + L^2} - L\right)\right)\right]\ d = 0{,}5$$

$$R_{12}(0{,}5) = -12{,}532\ \Omega \qquad \rho\ separacion\ en\ longitudes\ de\ onda$$

$$\sqrt{\frac{2R_{00}}{(R_{11} - R_{12})}} = ?$$

$$\boxed{G(\varphi) = 1{,}31\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\varphi)\right)}$$

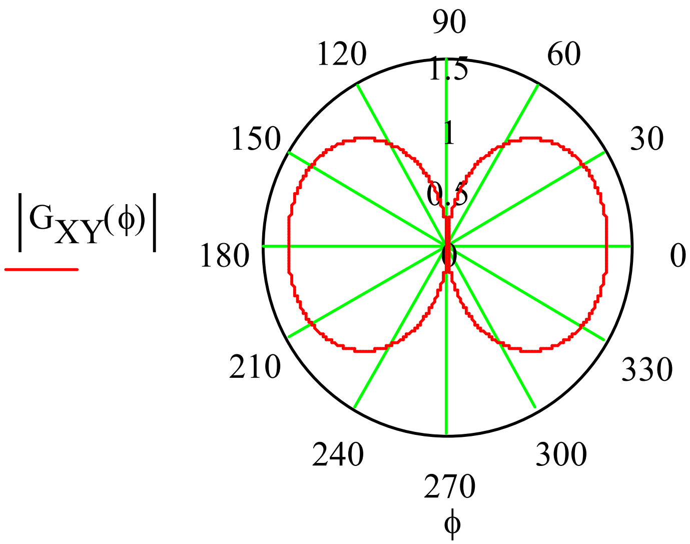
Arreglo de antenas lineales

Arreglo de dos antenas lineales de λ/2 caso Endfire

Ganancia del arreglo

$$\boxed{G(\varphi) = 1{,}31\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\varphi)\right)}$$

G_{dbd}!



$G_{XY}(0) = 1.31$ $\qquad 20\cdot\log\left(G_{XY}(0)\right) = 2.345$

la ganancia es de 2.3 db con respecto al dipolo o bien, sumando la ganacia de dipolo con respecto a la isotropica

$$G_{HW} := \frac{4\cdot\pi}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}\right)^2\cdot\sin(\theta)\,d\theta\,d\phi}$$

G_{dbi}!

$10\cdot\log\left(G_{HW}\right) = 2.151$ $\qquad G_i := 10\cdot\log\left(G_{HW}\right) + 20\cdot\log\left(G_{XY}(0)\right)$ $\qquad G_i = 4.496$

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de dos antenas lineales de λ/2 caso Endfire

Ganancia del arreglo en el plano ZX.
Recordar que en el caso anterior habíamos analizado el plano ZY donde los radiadores aparecen superpuestos, pero en este caso al estar en contrafase la radiación en ese plano es nula.

Consideremos en primer término la expresión de la intensidad de campo producida por un solo elemento en ese plano

$$\boxed{E_{HW}(\theta) = kI_0 \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)} = k\sqrt{\frac{P}{R_{00}}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}}$$

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de dos antenas lineales de λ/2 caso Endfire

Ganancia del arreglo en el plano ZX.
Ahora consideremos la expresión de dos radiadores isotropicos en contrafase y apliquemos superposición

$$E_i(\theta) = 2j \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{d_r}{2}\operatorname{sen}(\theta)\right) \qquad E_{ZX}(\theta) = 2j \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{d_r}{2}\operatorname{sen}(\theta)\right) kI_1 \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}$$

$$como\ I_1 = \sqrt{\frac{P}{2(R_{11} - R_{12})}}$$

$$\boxed{E_{ZX}(\theta) = 2jk \cdot \sqrt{\frac{P}{2(R_{11} - R_{12})}}\operatorname{sen}\left(\frac{d_r}{2}\operatorname{sen}(\theta)\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}}$$

Arreglo de antenas lineales

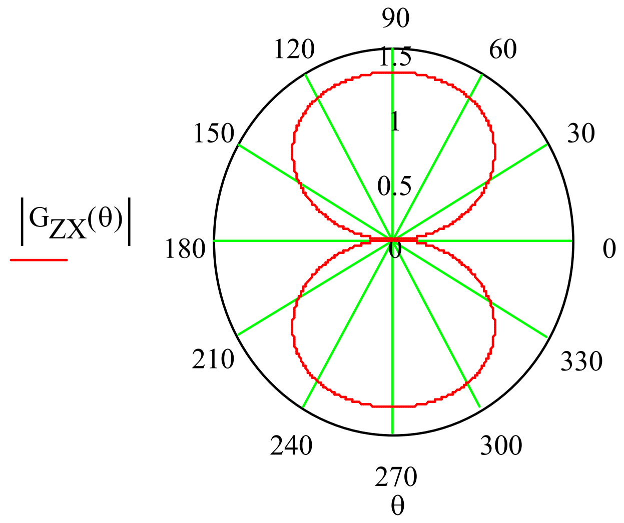
Arreglo de dos antenas lineales de λ/2 caso Endfire

Ganancia del arreglo en el plano ZX.

haciendo el cociente y particularizando para d $=\lambda/2$

$$G_{ZX}(\theta) := \frac{E_{ZX}(\theta)}{E_{HW}(\theta)}$$

$$G_{ZX}(\theta) := \sqrt{\frac{2\cdot R_{00}}{R_{11} - R_{12}(0.5)}}\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot \sin(\theta)\right)$$

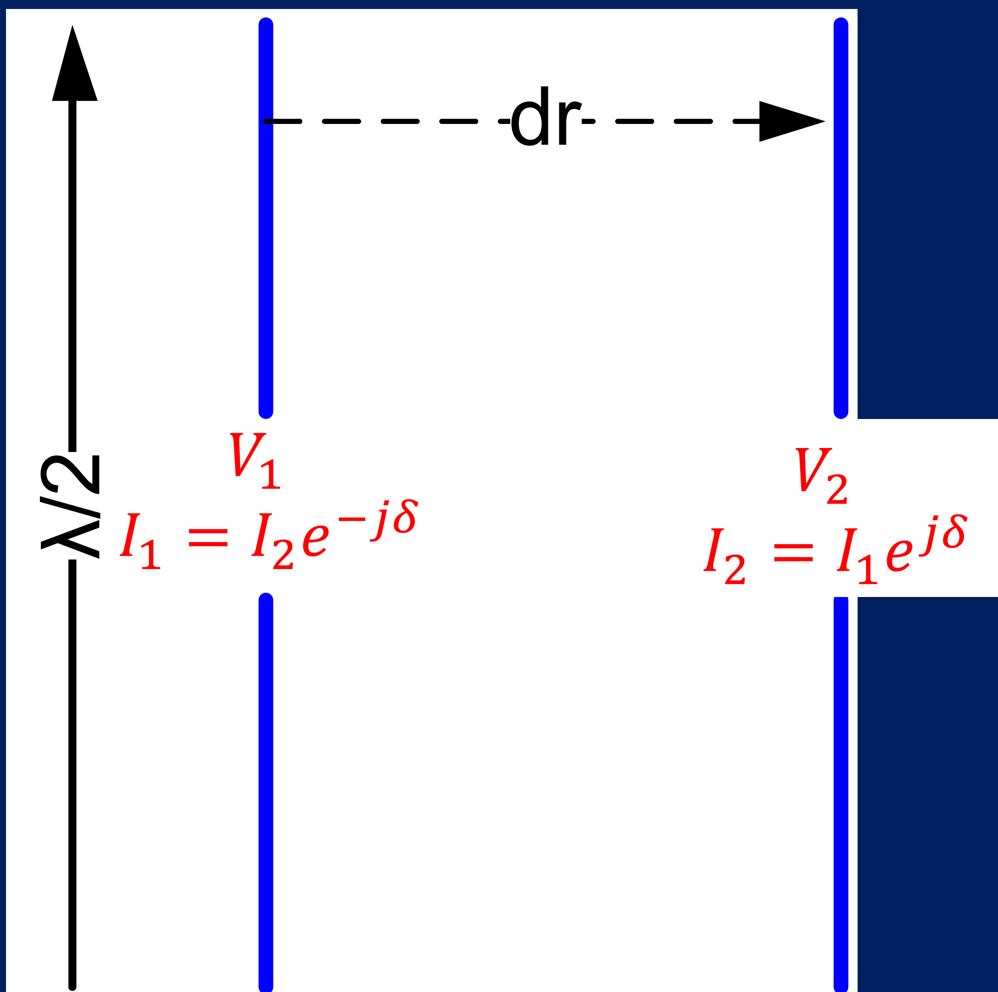


$$\sqrt{\frac{2\cdot R_{00}}{R_{11} - R_{12}(0.5)}} = 1.307$$

$$G_{ZX}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.307$$

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de antenas lineales con misma intensidad y fase arbitraria



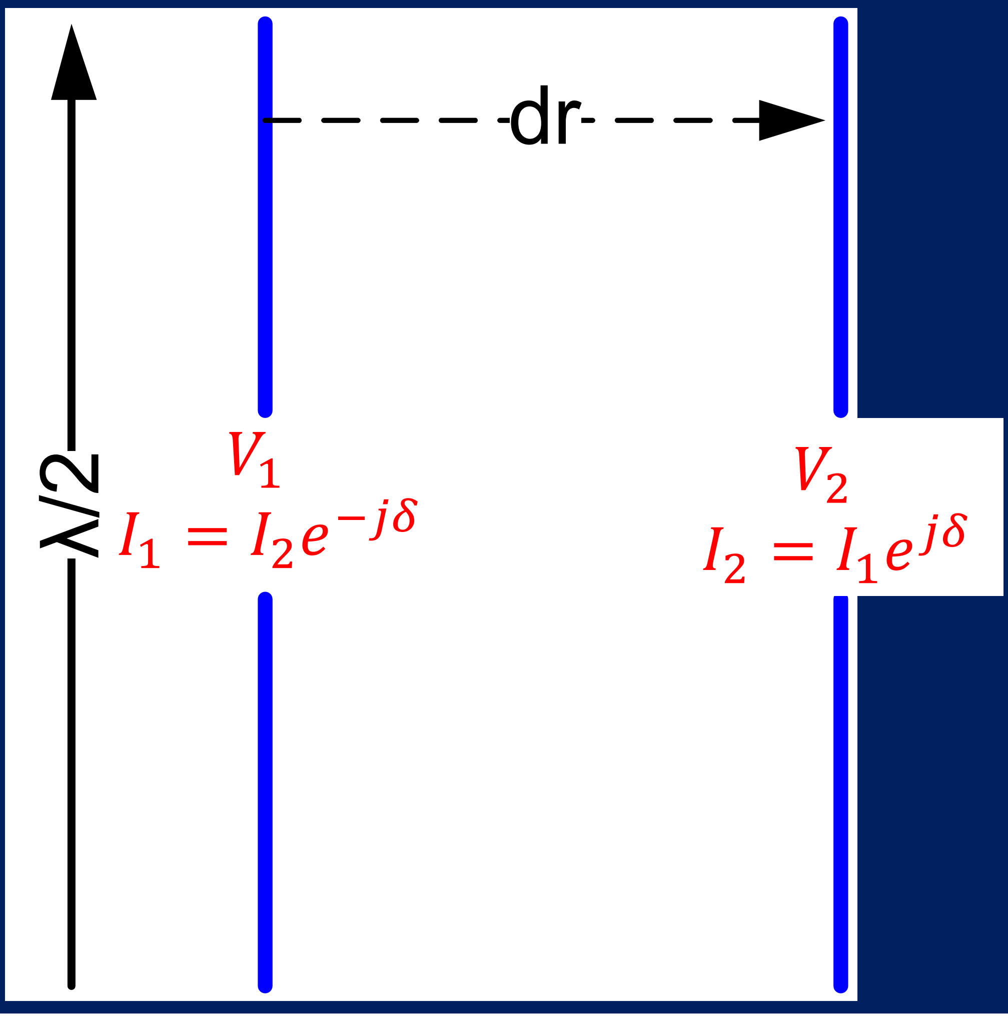
$$\psi_{(\phi)} = d_r \cos(\phi) + \delta$$

I_1 Atrasa en fase con respecto a I_2.

I_2 Adelanta en fase con respecto a I_1.

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de antenas lineales con misma intensidad y fase arbitraria



$$V_1 = I_1 \cdot Z_{11} + I_2 \cdot Z_{12}$$

$$V_1 = I_1 \cdot (Z_{11} + Z_{12}\angle\delta\ )$$

$$V_2 = I_2 \cdot Z_{22} + I_1 \cdot Z_{21}$$

$$V_2 = I_2 \cdot (Z_{22} + Z_{12}\angle{-\delta}\ )$$

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de antenas lineales con misma intensidad y fase arbitraria

Con igual razonamiento llegamos a:

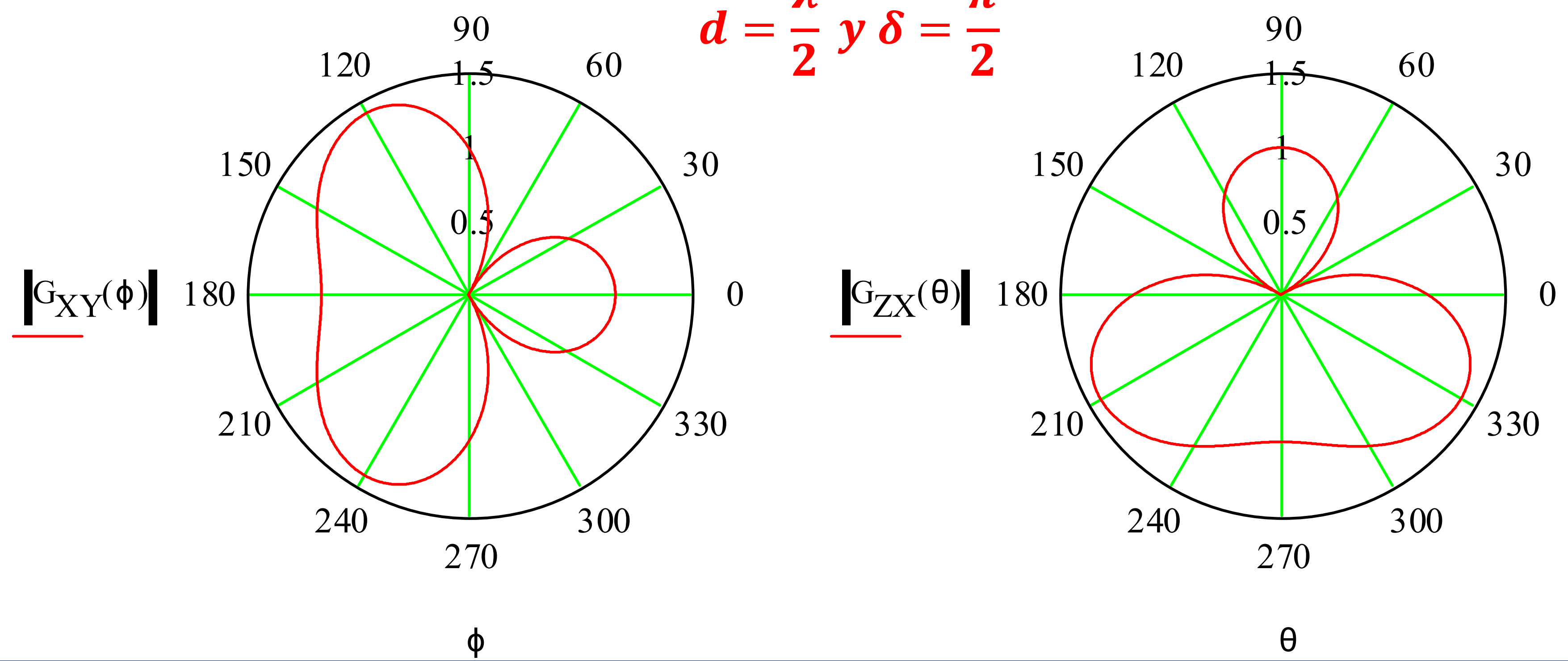
$$G_{ZX(\theta)} = \sqrt{\frac{2R_{11}}{R_{11} + R_{12}\cos\delta}}\cos\frac{d_r\,\mathrm{sen}(\theta) + \delta}{2}$$

$$G_{XY(\phi)} = \sqrt{\frac{2R_{11}}{R_{11} + R_{12}\cos\delta}}\cos\frac{d_r\cos(\phi) + \delta}{2}$$

Arreglo de antenas lineales

Arreglo de antenas lineales con misma intensidad y fase arbitraria

$$d = \frac{\lambda}{2} \; y \; \delta = \frac{\pi}{2}$$



Antena sobre el plano de tierra

Hasta ahora supusimos las antenas en el espacio libre, infinitamente lejos de la tierra

Esto es una suposición razonable en altas frecuencias

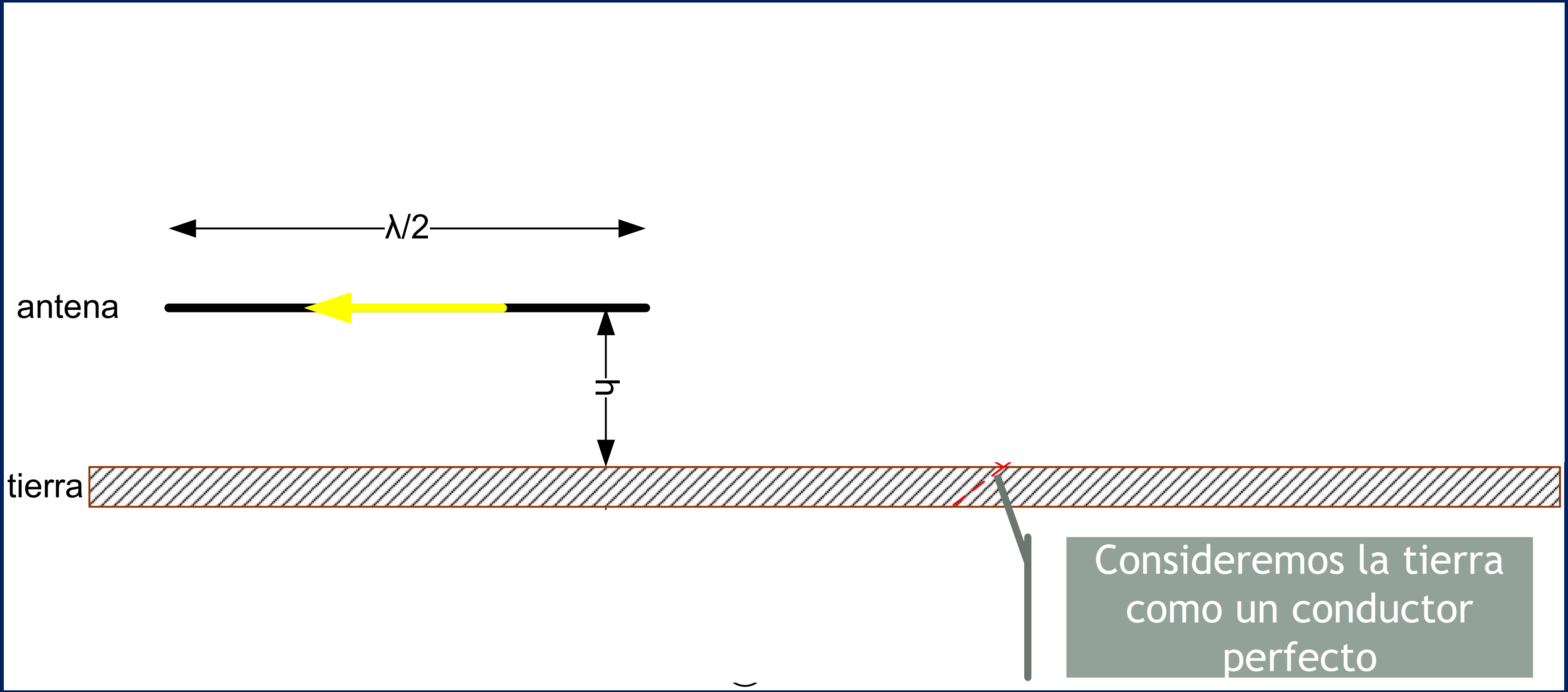
Pero la mayoría de las antenas se verán afectadas por la presencia de la tierra

Esto afectara el patrón de radiación…

…y también las relaciones de impedancia

Antena sobre el plano de tierra

Consideremos el caso de una antena horizontal sobre el plano de tierra



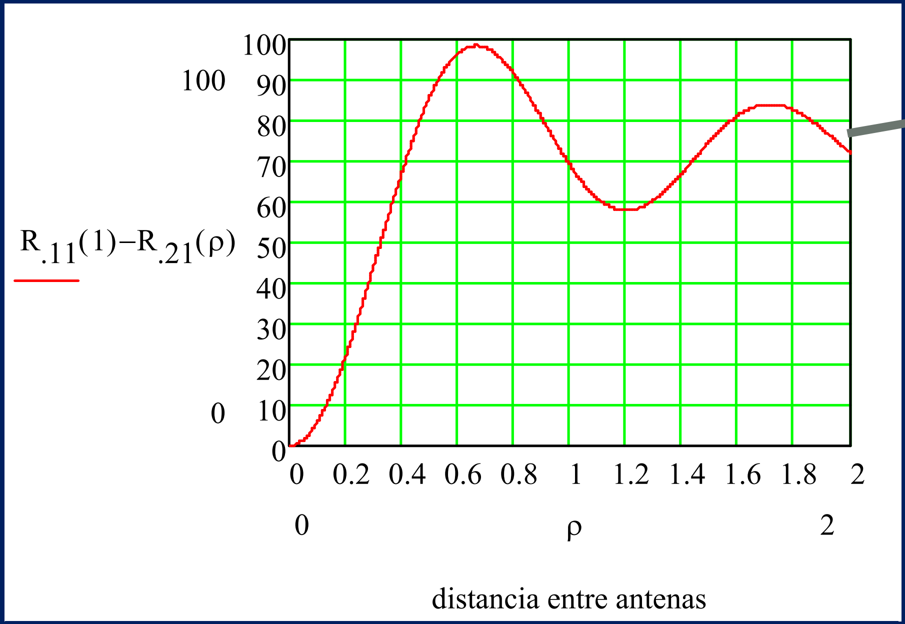
Considerando la antena imagen, el problema se reduce a un arreglo endfire

Antena sobre el plano de tierra

Si la antena es excitada con una potencia P, la misma potencia se aplica a la antena imagen ➔ Potencia total será 2P

$$V_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_m \qquad I_1 = -I_2$$

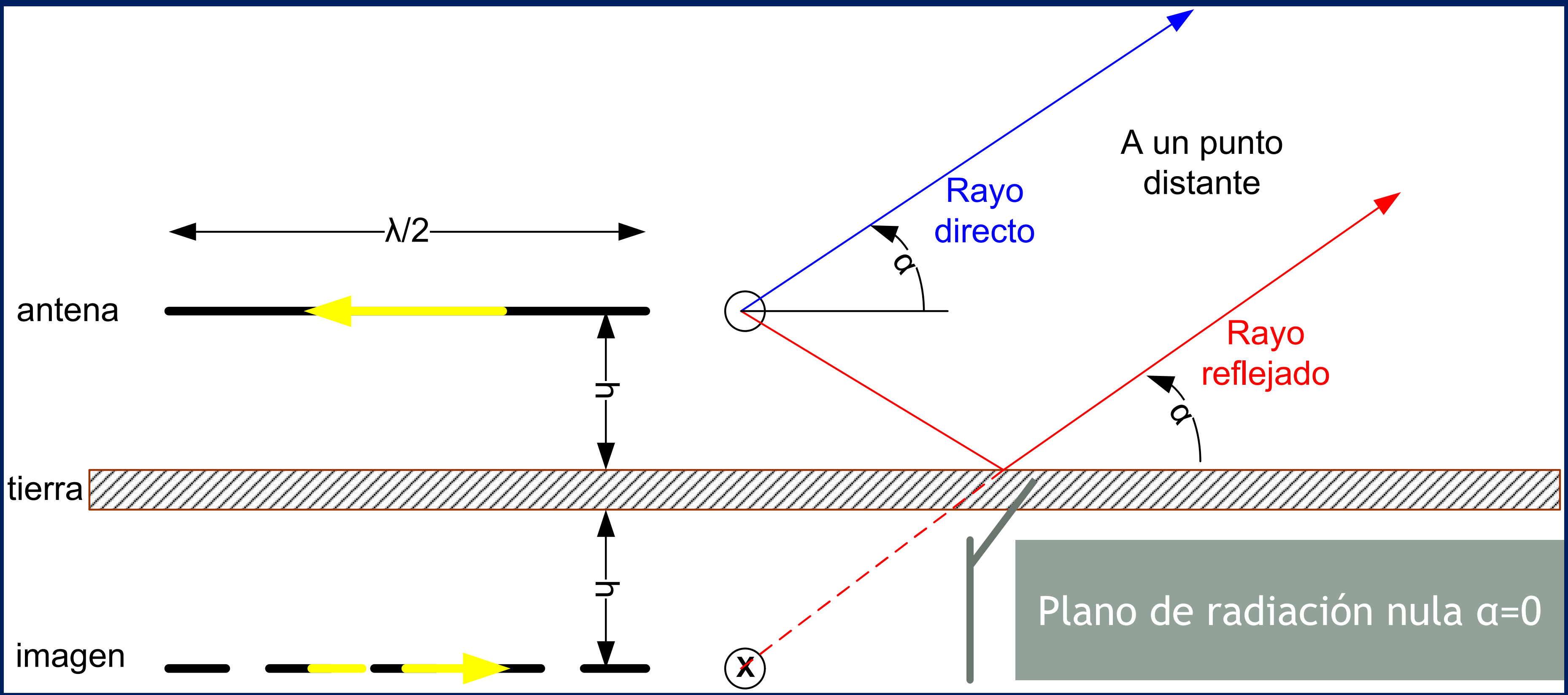
$$V_1 = I_1(Z_{11} - Z_m) \qquad Z_1 = Z_{11} - Z_m$$



Si h es grande

Antena sobre el plano de tierra

La antena y su imagen tienen corrientes opuestas en fase



Si $h < \lambda/4$ el máximo esta en $\alpha = 90°$
Si $h > \lambda/4$ el máximo estará $0 < \alpha < 90°$

Antena sobre el plano de tierra

Analicemos la ganancia de una antena sobre el plano de tierra con respecto a una en el espacio libre

$$E_{ZX}(\theta) = 2jE_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{d_r}{2}\cos(\theta)\right) \ arreglo\ endfire$$

$$Como\ \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad E_{ZX}(\alpha) = 2jE_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{d_r}{2}\operatorname{sen}(\alpha)\right)$$

$$G_{ZX(\alpha)} = \sqrt{\frac{R_{11} + R_{1L}}{R_{11} + R_{1L} - R_m(\rho)}}\, 2 \cdot \operatorname{sen}(h_r \operatorname{sen}(\alpha))$$

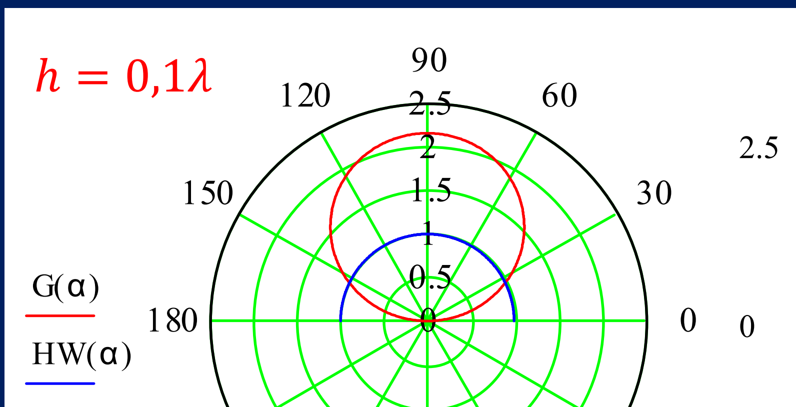
R_{1L} resistencia de perdidas

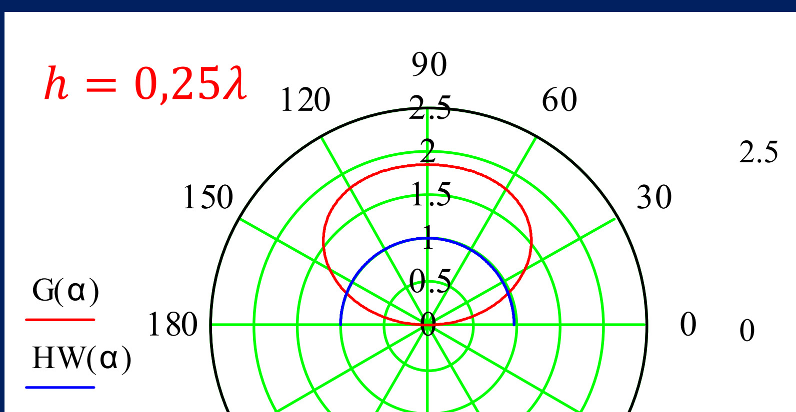
$R_m(\rho)$ resistencia mutua entre el dipolo y la imagen para una distancia 2h

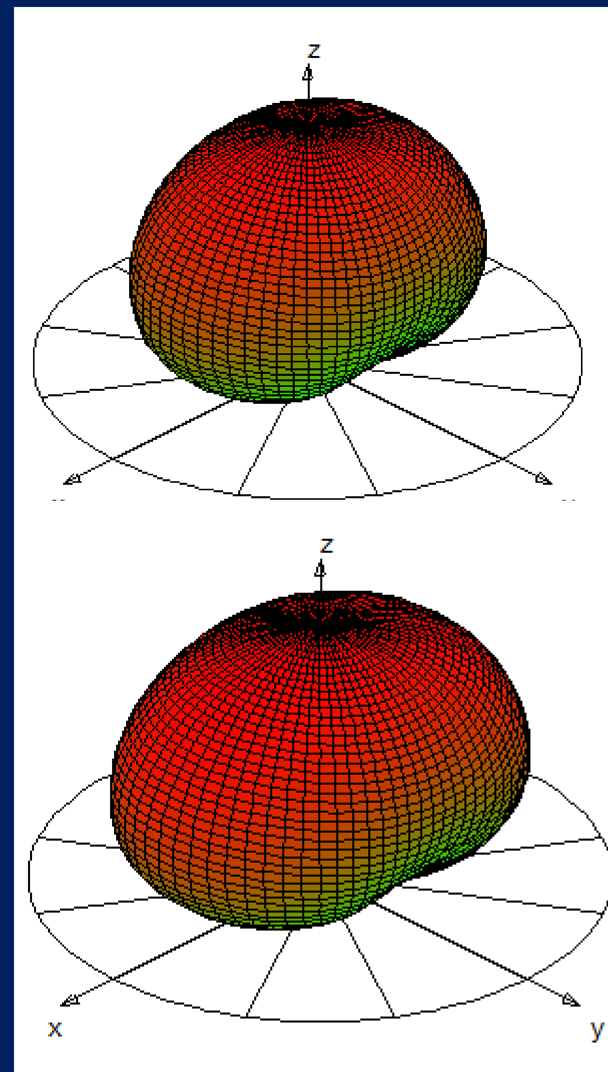
Se puede ver que la presencia del plano de tierra puede incrementar la ganancia hasta en 6 db o mas, actuando este plano como un reflector

Antena sobre el plano de tierra

Analicemos la ganancia en el plano vertical de una antena sobre el plano de tierra con respecto a una en el espacio libre

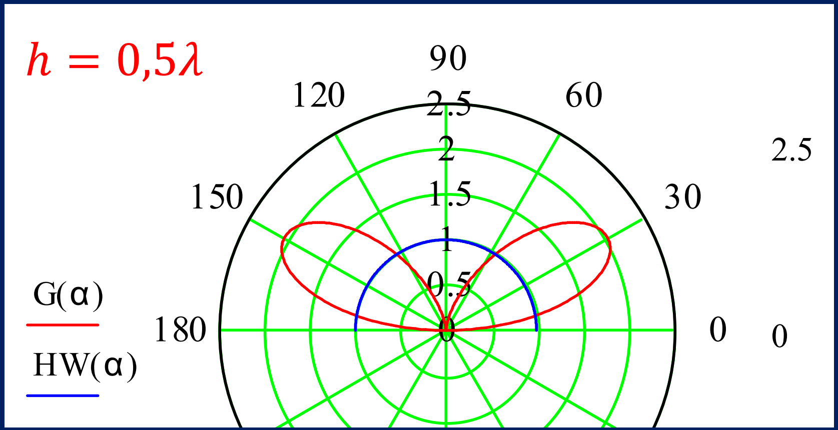


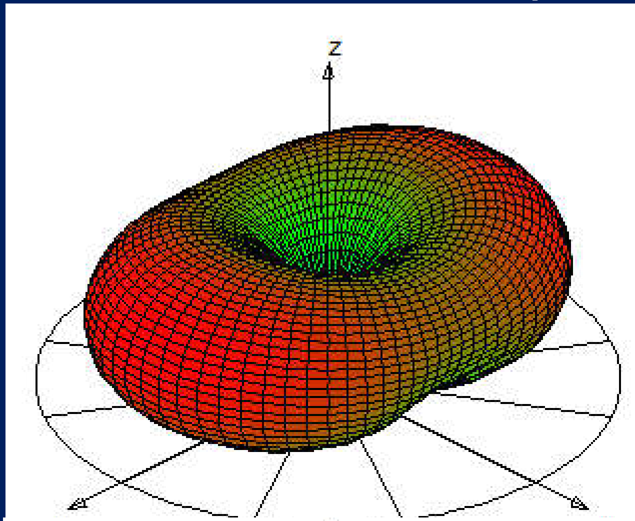


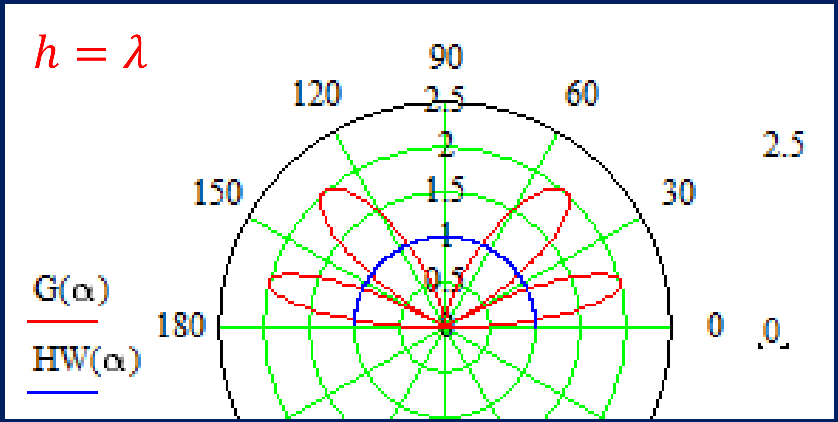


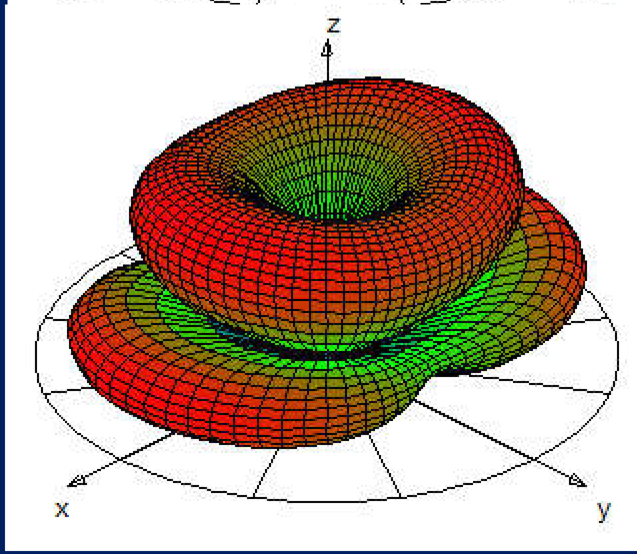
Antena sobre el plano de tierra

Analicemos la ganancia en el plano vertical de una antena sobre el plano de tierra con respecto a una en el espacio libre





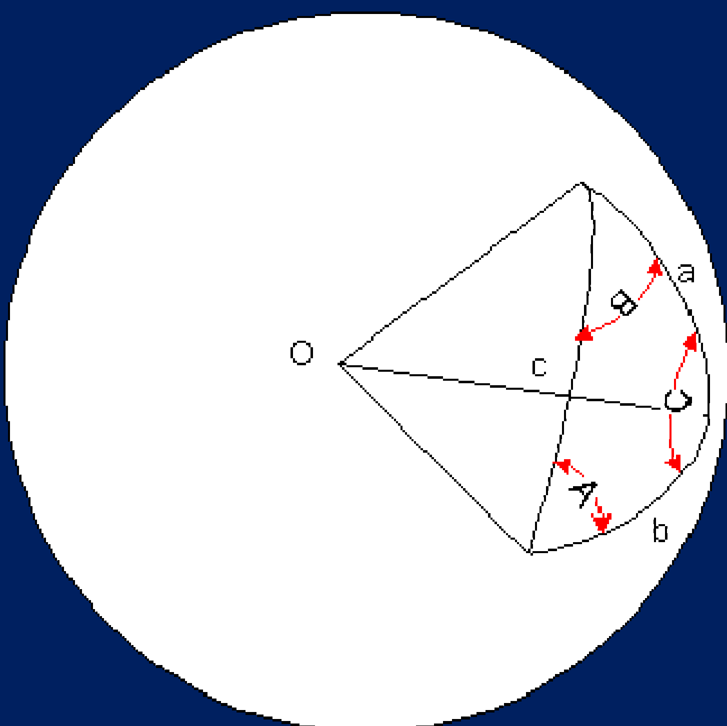




Antena sobre el plano de tierra

Analicemos la ganancia de una antena sobre el plano de tierra con respecto al plano azimutal

Para esto introducimos el concepto de Triangulo esférico



Los ángulos A, B y C son opuestos a los lados a, b, y c

a, b, y c, son los arcos medidos por los ángulos subtendidos al centro de la esfera O

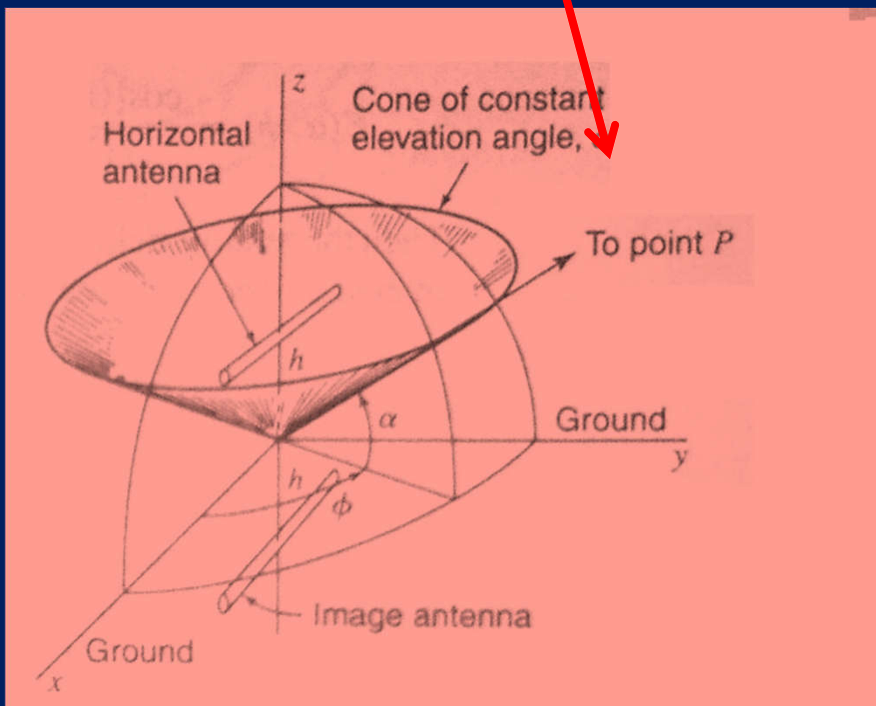
$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

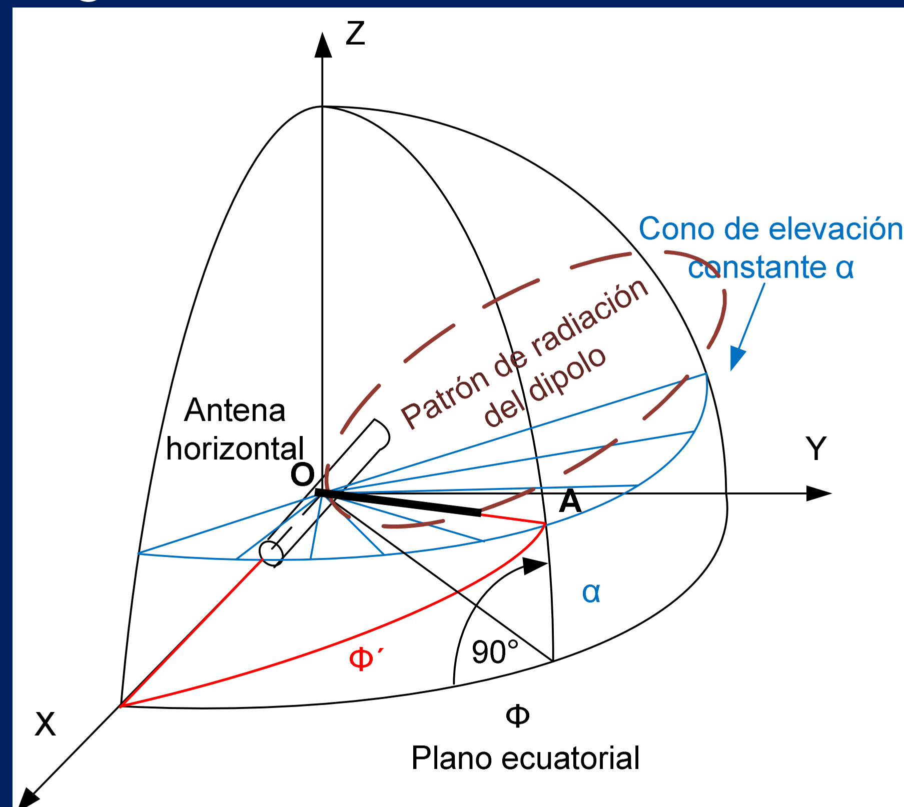
$$\operatorname{sen} a = \sqrt{1 - \cos a^2}$$

Antena sobre el plano de tierra

Esto formara un cono alrededor del dipolo

Consideremos la intersección del cono con el diagrama de radiación





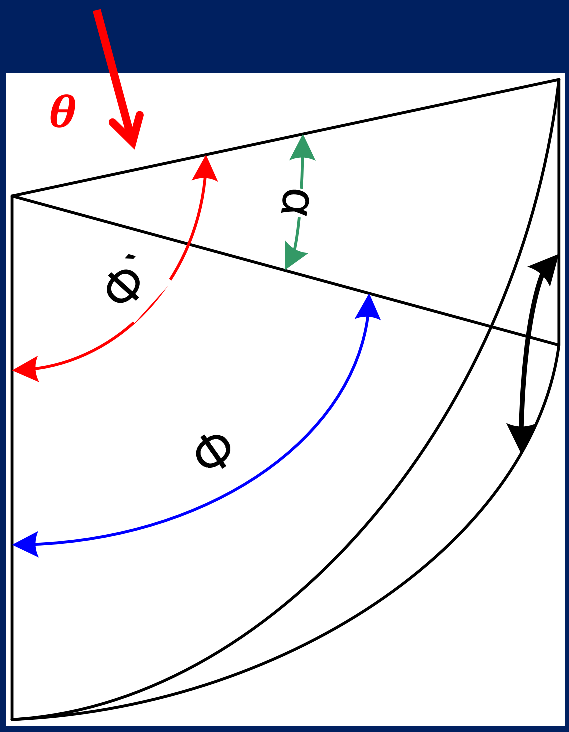
El segmento OA representa la intensidad de campo E

Antena sobre el plano de tierra

Tomado en cuenta que el dipolo esta horizontal y $\mathrm{L} = \frac{\lambda}{2}$

$$E_\theta(\theta) = \frac{j60[I_0]}{r}\left(\frac{\cos\left(\frac{\beta L\cos(\theta)}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{sen(\theta)}\right)$$

$$\cos\phi' = \cos\phi\cos\alpha + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\alpha\cos\frac{\pi}{2}$$



$$\cos\phi' = \cos\theta\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos\phi'^2}$$

$$E_{HW(\alpha,\phi)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\cos\alpha\right)}{\sqrt{1-(\cos\phi\cos\alpha)^2}}$$

Antena sobre el plano de tierra

Consideremos ahora la antena sobre el plano de tierra (antena imagen)

$$E_{iso} = \sin(h_r \sin \alpha) \;\; \textit{arreglo de dos RI} \quad h_r = \frac{2\pi}{\lambda} h$$

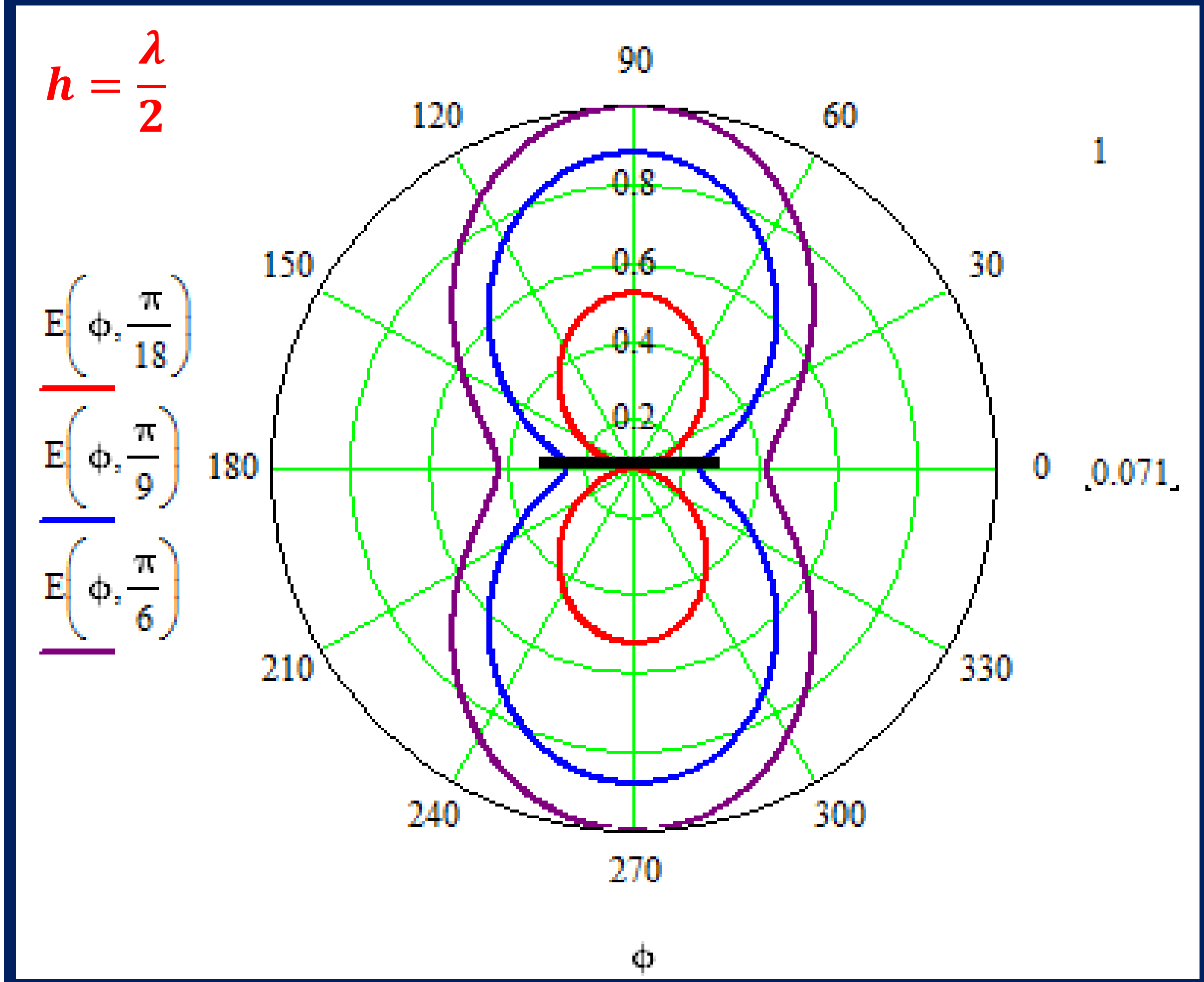
Multiplicando por la expresión anterior

$$\boxed{E_{(\alpha,\phi)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\cos\alpha\right)}{\sqrt{1-(\cos\phi\cos\alpha)^2}}\sin(h_r \sin \alpha)}$$

Expresión del campo en 3 dimensiones, en función de α y Φ

Antena sobre el plano de tierra

Expresión del campo en 3 dimensiones, en función de α y Φ



¿Qué valores de α están graficados?

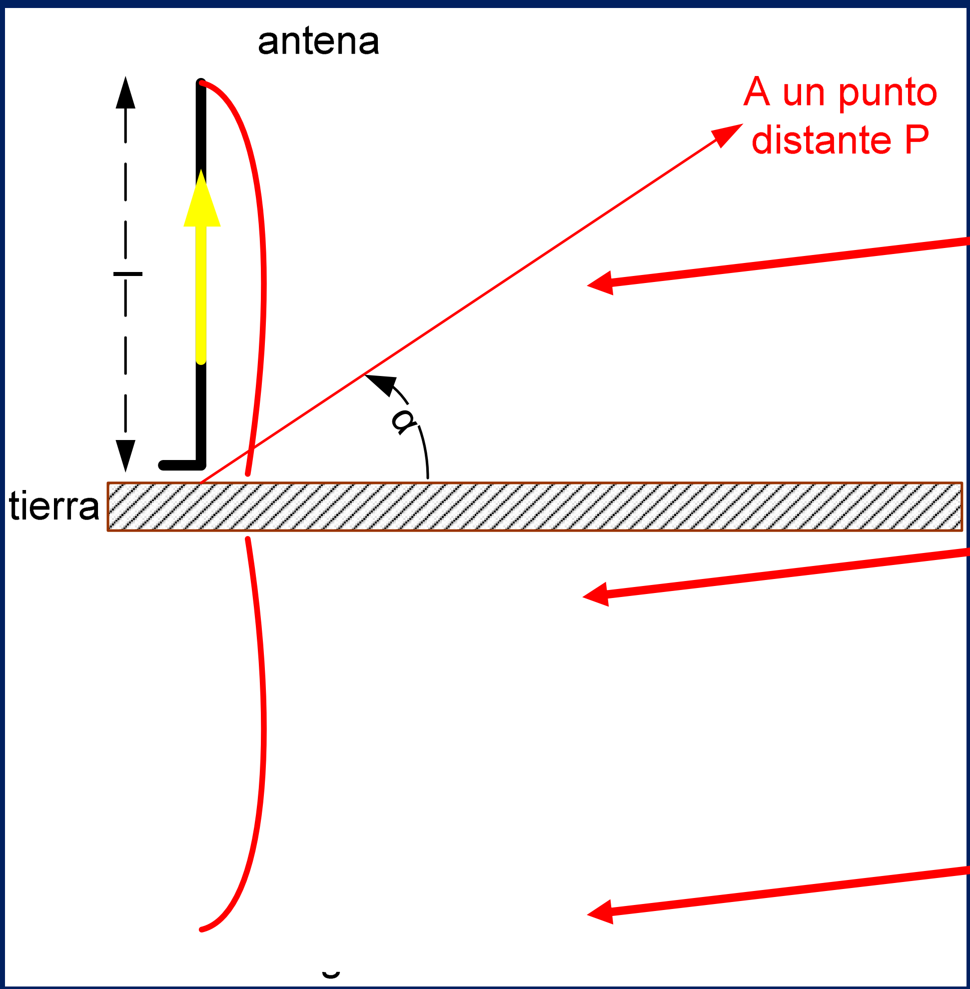
En Φ=0 o 180° el campo esta polarizado verticalmente

En Φ=90° o 270° el campo esta polarizado horizontalmente

α ➔ 0 E ➔ ?

Antena sobre el plano de tierra

Consideremos el caso de una antena Vertical sobre el plano de tierra



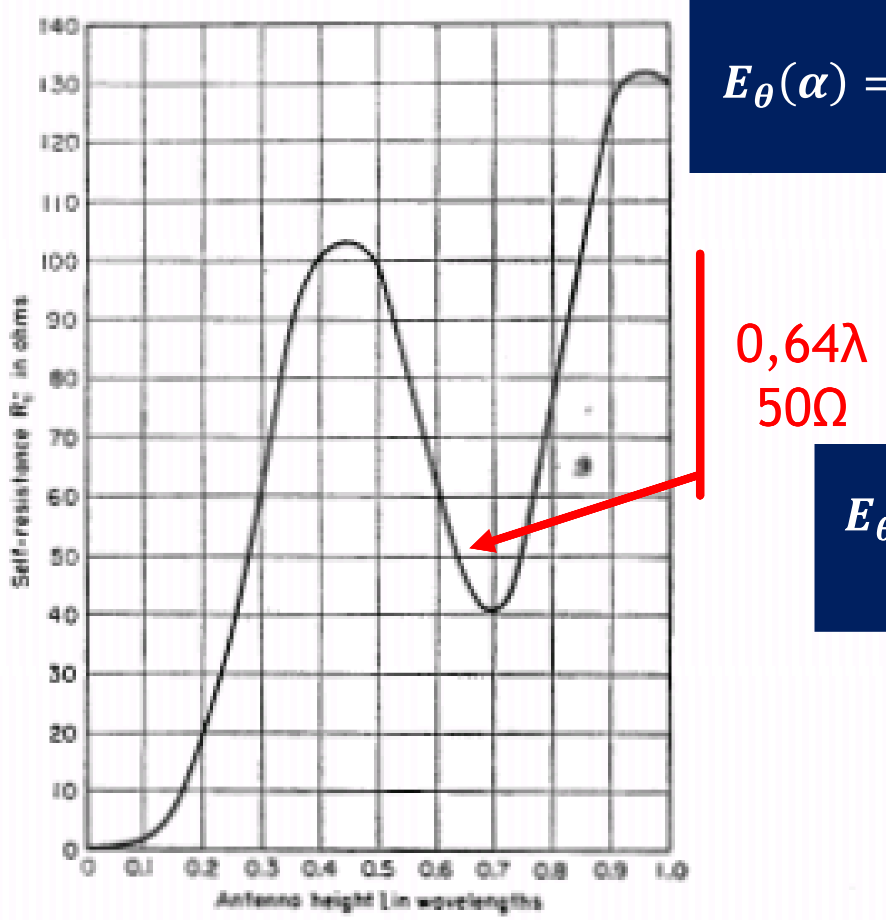
Antena Stub sobre plano de tierra

Antena lineal delgada alimentada en su parte central

Antena imagen

Antena sobre el plano de tierra

Antena Vertical sobre el plano de tierra



Radiation resistance at the current loop of a thin vertical antenna as a ...he height l of the antenna. (*After Brown and Lewis.*)

$$E_\theta(\alpha) = \frac{60}{r}\sqrt{\frac{P}{R_{11}+R_{1L}}}\left(\frac{\cos(\beta L sen(\alpha)) - \cos(\beta L)}{\cos(\alpha)}\right)$$

$$E_\theta(\alpha) = ? \quad r = 1609\, m \quad P = 1w \quad L = \frac{\lambda}{4} \quad \alpha = 0°$$

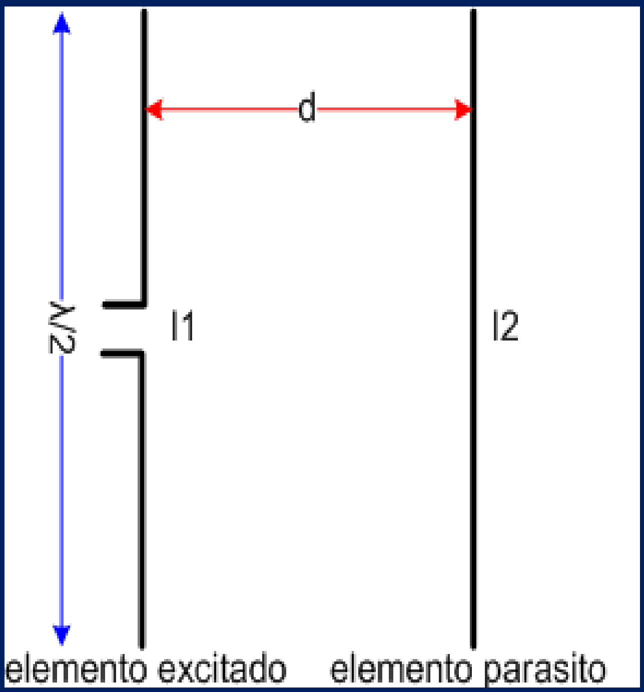
$$perdidas\ despreciables$$

$$E_\theta(\alpha) = 6,2\, mv/m$$

Arreglos con elementos parásitos

Hasta ahora habíamos hablado de arreglos donde todos los elementos estaban excitados

Sin embargo es posible construir antenas con elementos parásitos



En donde las corrientes son inducidas por el elemento excitado

$$V_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12}$$

y la segunda ecuación seria…

$$0 = I_2 Z_{22} + I_1 Z_{12}$$

Arreglos con elementos parásitos

De la segunda ecuación tenemos

$$I_2 = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}} I_1 = -I_1 \left|\frac{Z_{12}}{Z_{22}}\right| \angle(\tau_m - \tau_2)$$

$$I_2 = I_1 \left|\frac{Z_{12}}{Z_{22}}\right| \angle\xi \qquad \xi = \pi + \tau_m - \tau_2$$

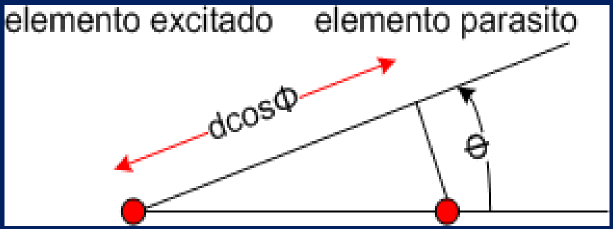
$$\tau_m = \tan^{-1}\frac{X_{12}}{R_{12}} \qquad y \qquad \tau_2 = \tan^{-1}\frac{X_{22}}{R_{22}}$$

Impedancia mutua

Impedancia propia

Arreglos con elementos parásitos

El campo eléctrico, a grandes distancias, en el plano horizontal será…



$$E_{(\phi)} = k(I_1 + I_2 \angle d_r \cos\phi)$$

$$E_{(\phi)} = k\left[I_1 + I_1 \left|\frac{Z_{12}}{Z_{22}}\right| \angle(\xi + d_r \cos\phi)\right]$$

$$E_{(\phi)} = kI_1\left[1 + \left|\frac{Z_{12}}{Z_{22}}\right| \angle(\xi + d_r \cos\phi)\right]$$

Arreglos con elementos parásitos

La impedancia en el punto de excitación será…

$$Z_1 = Z_{11} - \frac{Z_{12}}{Z_{22}} Z_{12} = Z_{11} - \frac{{Z_{12}}^2}{Z_{22}}$$

$$R_1 = R_{11} + R_{1L} - \left|\frac{{Z_{12}}^2}{Z_{22}}\right| \cos(2\tau_m - \tau_2)$$

$$I_1 = \sqrt{\frac{W}{R_1}} = \sqrt{\frac{W}{R_{11} + R_{1L} - \left|\frac{{Z_{12}}^2}{Z_{22}}\right| \cos(2\tau_m - \tau_2)}}$$

Arreglos con elementos parásitos

Regresando a la expresión del campo E

$$E_{(\phi)} = kI_1[1 + \left|\frac{Z_{12}}{Z_{22}}\right| \angle(\xi + d_r \cos\phi)]$$

$$E_{(\phi)} = k\sqrt{\frac{W}{R_{11} + R_{1L} - \left|\frac{{Z_{12}}^2}{Z_{22}}\right| \cos(2\tau_m - \tau_2)}}[1 + \left|\frac{Z_{12}}{Z_{22}}\right| \angle(\xi + d_r \cos\phi)]$$

Para un solo dipolo de media onda tendremos

$$E_{HW(\phi)} = kI_0 = k\sqrt{\frac{W}{R_{00} + R_{0L}}}$$

Arreglos con elementos parásitos

Con lo cual podemos expresar la ganancia como…

$$G_{(\phi)} = k\sqrt{\frac{R_{11}+R_{1L}}{R_{11}+R_{1L}-\left|\frac{Z_{12}{}^{2}}{Z_{22}}\right|\cos(2\tau_m-\tau_2)}}\left[1+\left|\frac{Z_{12}}{Z_{22}}\right|\angle(\xi+d_r\cos\phi)\right]$$

Si se hace muy grande X_{22} desintonizando, la ganancia se hace 1

A partir de una relación similar G. H. Brown encontró que son convenientes espaciados menores a λ/4.

Directional Antenna, proc IRE 25, 78-145 January 1937 G. H. Brown (Buscar)

Arreglos con elementos parásitos

Consideraciones…

La magnitud de la corriente en el elemento parasito y su fase con respecto a la corriente del elemento excitado, dependen de la sintonía

El elemento parasito puede ser de $\lambda/2$ e insertar una reactancia de sintonía en serie con la antena en su punto central

O bien puede ajustarse su longitud, sin usar una reactancia

Esto es conveniente constructivamente, pero mas complejo de analizar

Cambiando la sintonía del elemento parasito, puede actuar como un director enviando el máximo de radiación en $\Phi=0$

O actuar como un reflector enviando enviando el máximo de radiación en $\Phi=180$

Arreglos con elementos parásitos

Consideraciones…

Si el elemento tiene un longitud superior a $\lambda/2$ es inductivo y se comporta como reflector.

Si es menor se vuelve capacitivo y actúa como director

Un arreglo puede ser construido con ambos elementos, reflectores y directores.

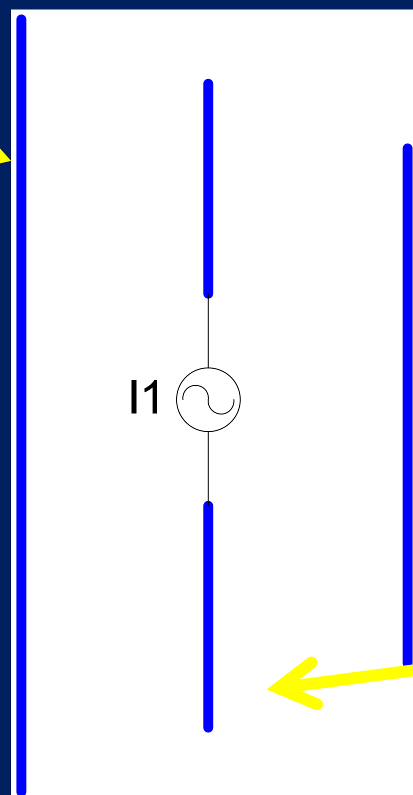
Las investigaciones de Uda llevaron a la conclusión de que la máxima ganancia se obtenía para reflectores cercanos a $\lambda/2$ espaciado a $\lambda/4$ del dipolo y directores mas cortos (~10% de λ) espaciados $\lambda/3$.

Arreglos con elementos parásitos

Pueden construirse antenas con varios elementos parásitos

Reflector

Elemento parasito



Director

Elemento parasito

Elemento excitado

Un grupo de antenas lineales con longitudes próximas a $\lambda/2$, distribuidas en el espacio, de una forma especifica, y excitadas en un solo elementos forma un tipo de antena conocida como Yagui - Uda

Antena Yagui - Uda

Programa Para Cálculo de Antenas Yagi-Uda

NESTOR E. ARIAS

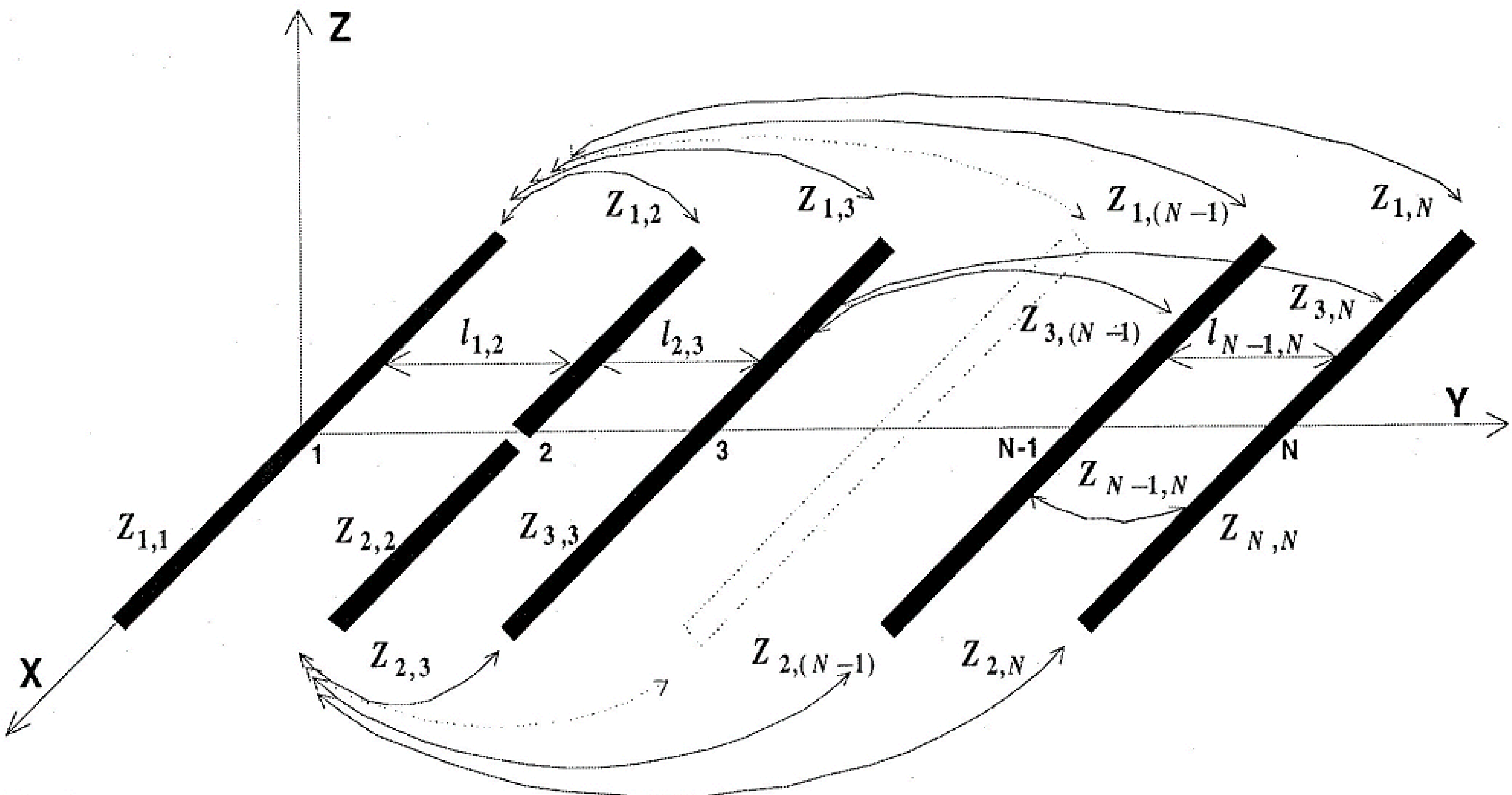
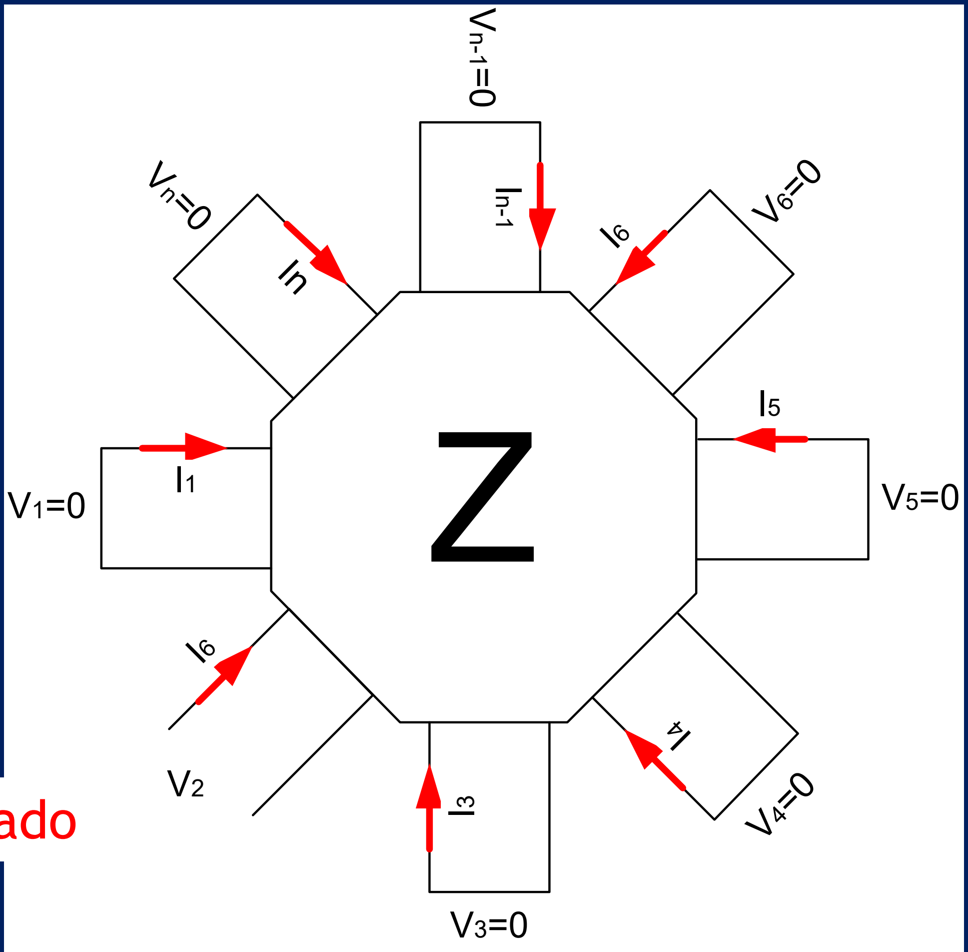


Fig. 1

Antena Yagui - Uda

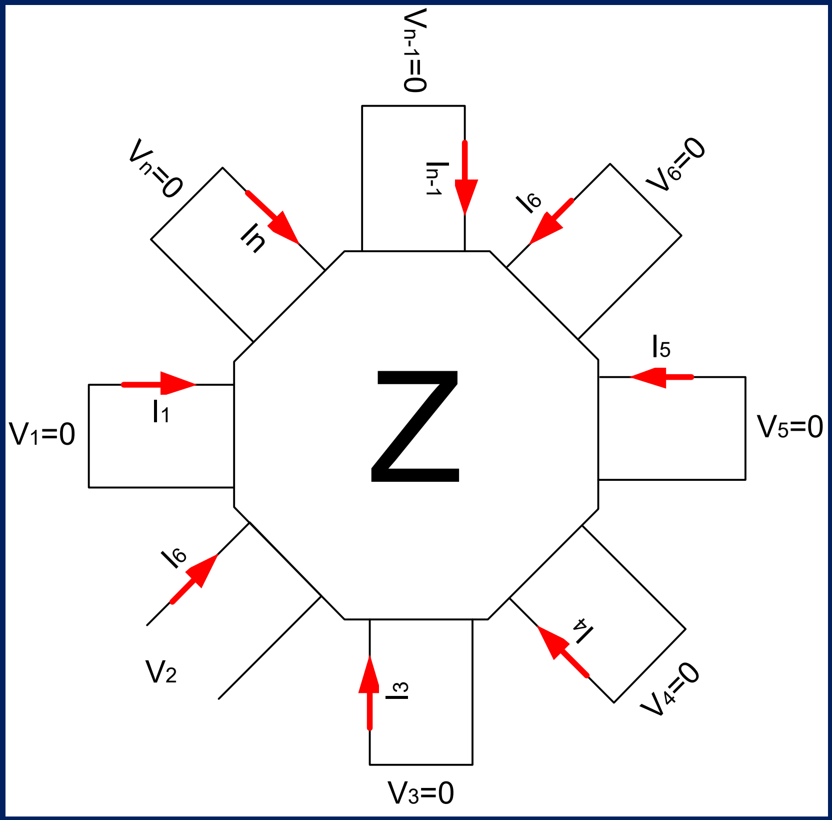
Para calcular la ganancia, los diagramas de radiación y la impedancia en el punto de excitación debemos resolver la Matriz Impedancia



Elemento excitado

Antena Yagui - Uda

Para calcular la ganancia, los diagramas de radiación y la impedancia en el punto de excitación debemos resolver la Matriz Impedancia



Por el teorema de reciprocidad

$$Z_{ij} = Z_{ji}$$

$$[V] = [Z] \cdot [I]$$

Antena Yagui - Uda

$$Z_{ij} = Z_{ji}$$

Impedancia propia del elemento

$$Z = \begin{pmatrix}
68.718 + 27.301i & 50.714 - 11.897i & 17.767 - 26.218i & -4.56 - 21.028i & -13.17 - 7.22i & -10.714 + 4.323i & 0.741 + 9.244i & 6.811 + 4.409i & 6.775 - 2.455i & 1.895 - 6.195i \\
50.714 - 11.897i & 61.039 + 12.372i & 40.92 - 8.264i & 17.555 - 21.105i & -1.79 - 18.203i & -10.978 - 7.874i & -8.455 + 6.039i & -0.393 + 8.882i & 5.937 + 4.994i & 6.707 - 1.516i \\
17.767 - 26.218i & 40.92 - 8.264i & 39.815 - 34.457i & 29.057 - 9.128i & 12.417 - 15.267i & -1.258 - 13.753i & -9.649 - 2.78i & -6.839 + 4.796i & -0.372 + 7.125i & 4.729 + 4.038i \\
-4.56 - 21.028i & 17.555 - 21.105i & 29.057 - 9.128i & 30.716 - 58.342i & 22.229 - 9.192i & 10.159 - 12.663i & -4.496 - 10.035i & -8.457 - 2.476i & -6.011 + 4.178i & -0.35 + 6.237i \\
-13.17 - 7.22i & -1.79 - 18.203i & 12.417 - 15.267i & 22.229 - 9.192i & 23.275 - 80.655i & 17.981 - 9.073i & 4.731 - 11.657i & -3.891 - 8.759i & -7.348 - 2.181i & -5.235 + 3.61i \\
-10.714 + 4.323i & -10.978 - 7.874i & -1.258 - 13.753i & 10.159 - 12.663i & 17.981 - 9.073i & 20.08 - 91.295i & 13.704 - 8.788i & 4.403 - 10.855i & -3.605 - 8.146i & -6.819 - 2.037i \\
0.741 + 9.244i & -8.455 + 6.039i & -9.649 - 2.78i & -4.496 - 10.035i & 4.731 - 11.657i & 13.704 - 8.788i & 20.08 - 91.295i & 16.703 - 8.986i & 8.235 - 10.417i & -0.839 - 9.838i \\
6.811 + 4.409i & -0.393 + 8.882i & -6.839 + 4.796i & -8.457 - 2.476i & -3.891 - 8.759i & 4.403 - 10.855i & 16.703 - 8.986i & 20.08 - 91.295i & 16.703 - 8.986i & 8.235 - 10.417i \\
6.775 - 2.455i & 5.937 + 4.994i & -0.372 + 7.125i & -6.011 + 4.178i & -7.348 - 2.181i & -3.605 - 8.146i & 8.235 - 10.417i & 16.703 - 8.986i & 20.08 - 91.295i & 16.703 - 8.986i \\
1.895 - 6.195i & 6.707 - 1.516i & 4.729 + 4.038i & -0.35 + 6.237i & -5.235 + 3.61i & -6.819 - 2.037i & -0.839 - 9.838i & 8.235 - 10.417i & 16.703 - 8.986i & 20.08 - 91.295i
\end{pmatrix}$$

Sistema de adaptación Gamma

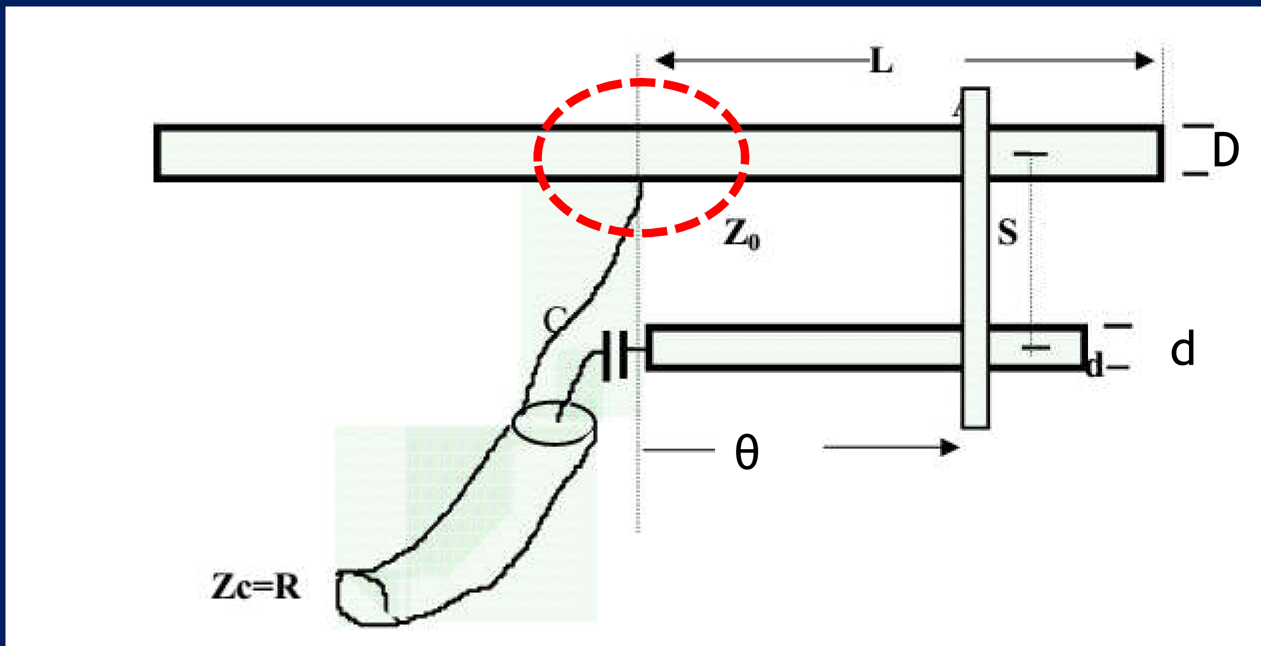
Las antenas tipo dipolo que hemos estudiado presentan en su punto de excitación impedancias por lo general complejas, lo cual plantea la necesidad de adaptación a los valores de impedancia características Zo disponibles comercialmente.

Esto evitara ondas estacionarias y maximizara la entrega de energía en la carga.

Analizaremos el método de ADAPTACION GAMMA.

Sistema de adaptación Gamma

El sistema Gamma, permite adaptar antenas de tipo dipolo a líneas coaxiales (desbalanceadas), con la ventaja de que el centro del dipolo se puede conectar a masa .



Si la antena es de tipo yagui todos los elementos estarán unidos al barral central.

Sistema de adaptación Gamma

El método propuesto será para un dipolo λ/2 sin acoplamientos.

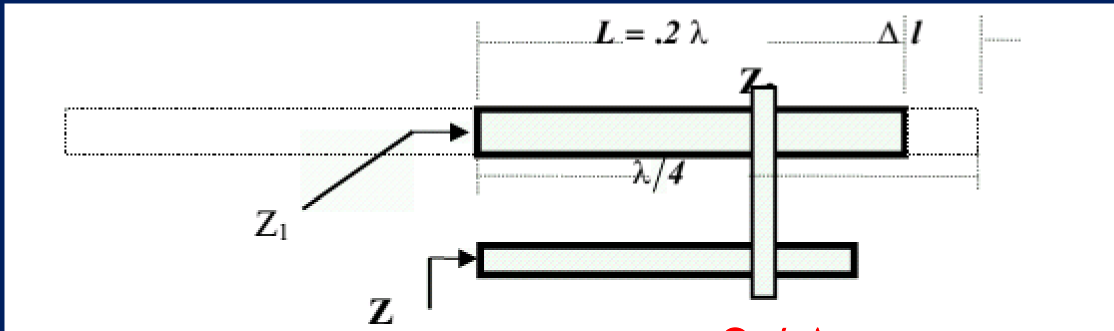
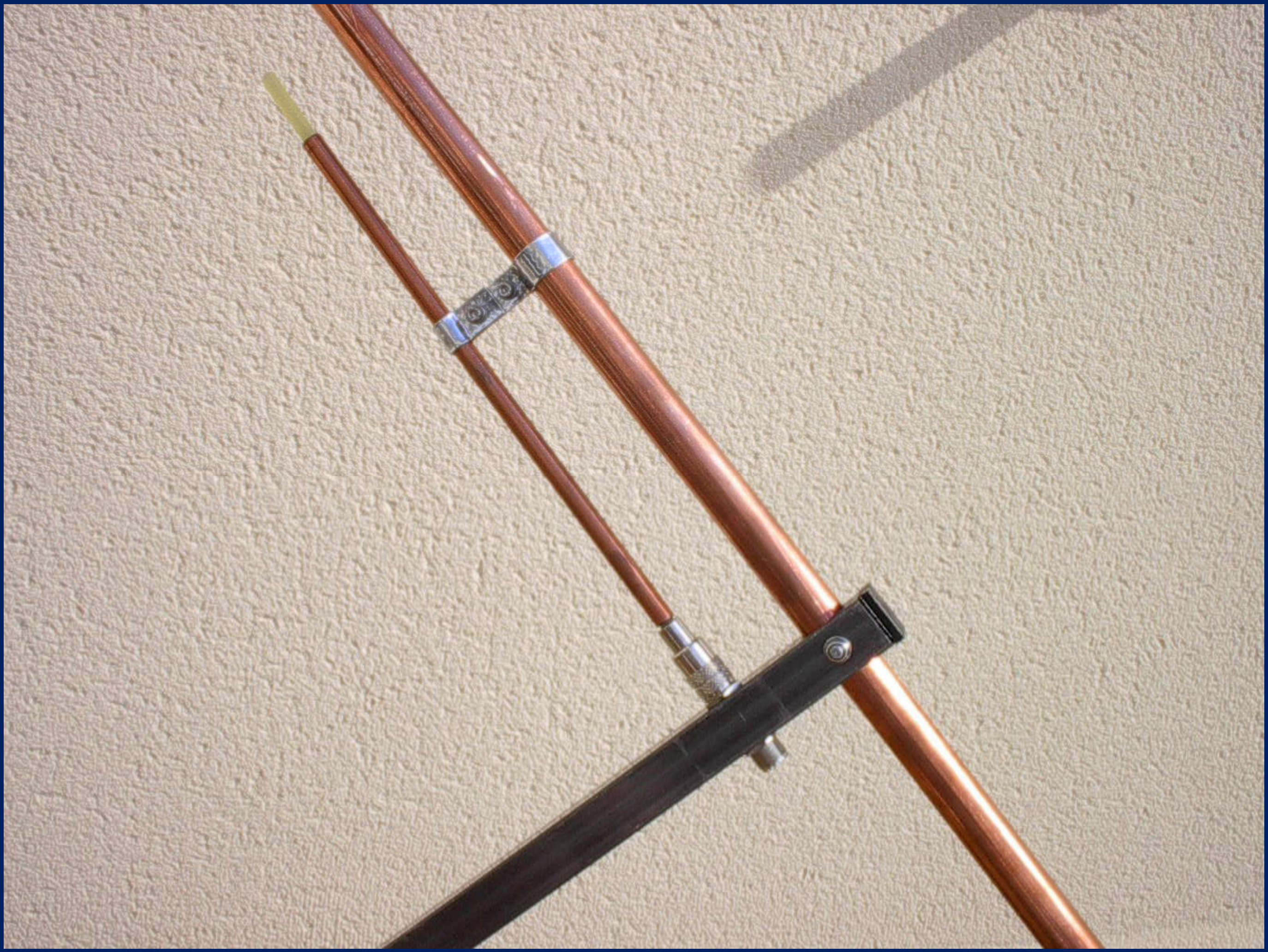


Fig. 2

$$Z_1 = Impedancia\ en\ el\ punto\ de\ excitacion\ del\ dipolo,$$
$$en\ este\ caso\ considera\ como\ si\ fuera\ un\ monopolo\ de\ \lambda/4$$

$$Necesitamos\ determinar\ el\ punto\ A\ (distancia\ electrica\ \theta)$$
$$y\ el\ valor\ del\ capacitor\ C$$

Sistema de adaptación Gamma



Antenas Microstrip

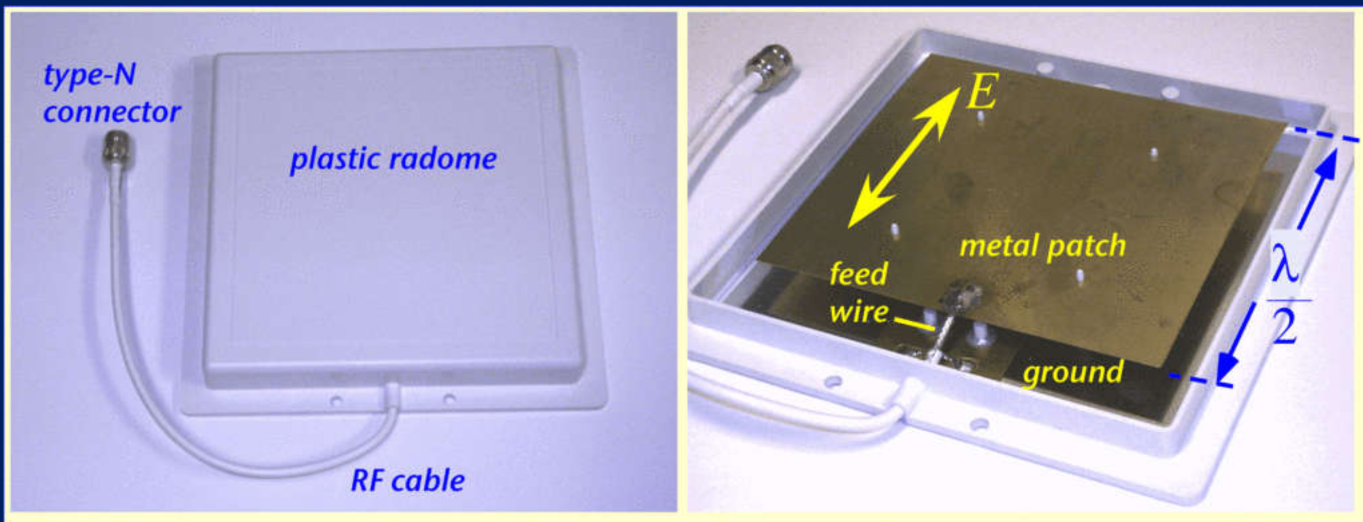
Aplicaciones en aeronáutica, satélites, espacio exterior y misiles requieren de antenas cumplan con las siguientes características:

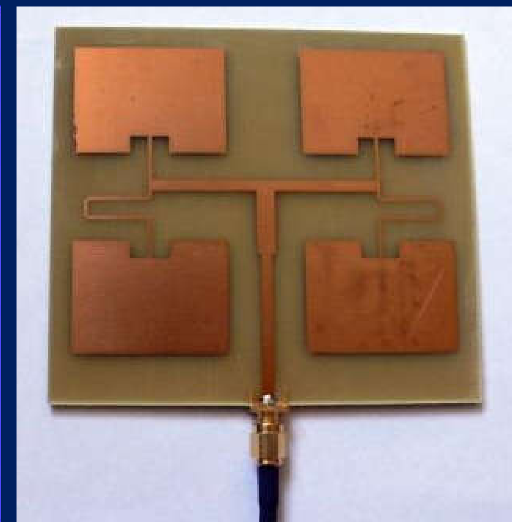
- Perfil aerodinámico
- Adaptable a superficies planas y no planas
- Simples de fabricar
- Tamaño y peso reducidos
- Facilidad de instalación

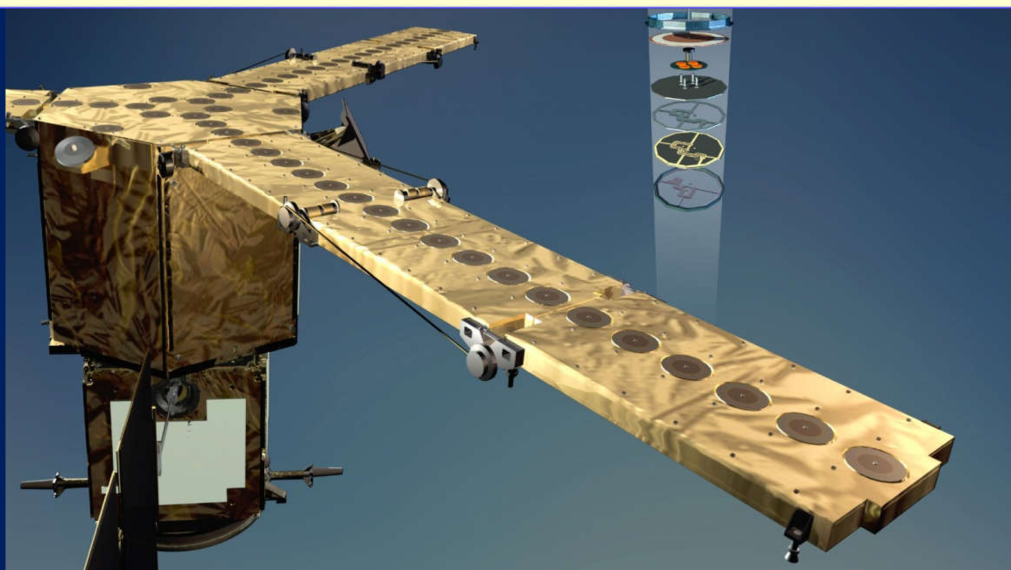
Las antenas microstrip cumplen con estos requisitos

Bibliografía: Antenna Theory: *Analysis and Design Constantine Balanis*

Antenas Microstrip

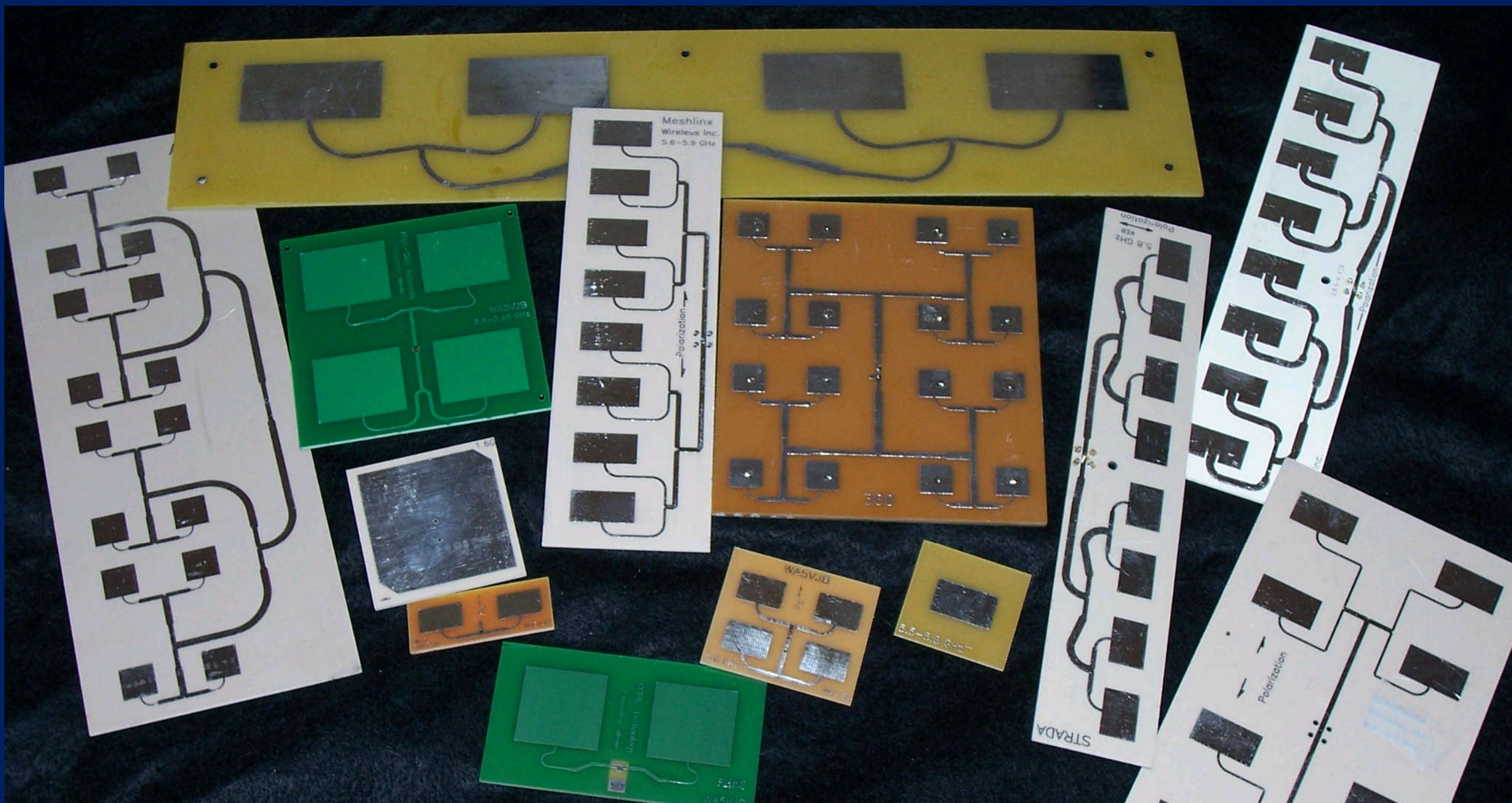






Patch antenna: each of the 69 antenna elements is based on a dual-polarization four-probe patch antenna in multi-layer microstrip technology.

Antenas Microstrip



Antenas Microstrip

Características de las antenas microstrip:

- Robustas
- Compatibles con diseños MMIC
- Versátiles
- Alto Q
- Configurables mediante la inserción de cargas entre la antena y el plano de tierra
- Baja eficiencia y Baja potencia
- Pureza de polarización pobre

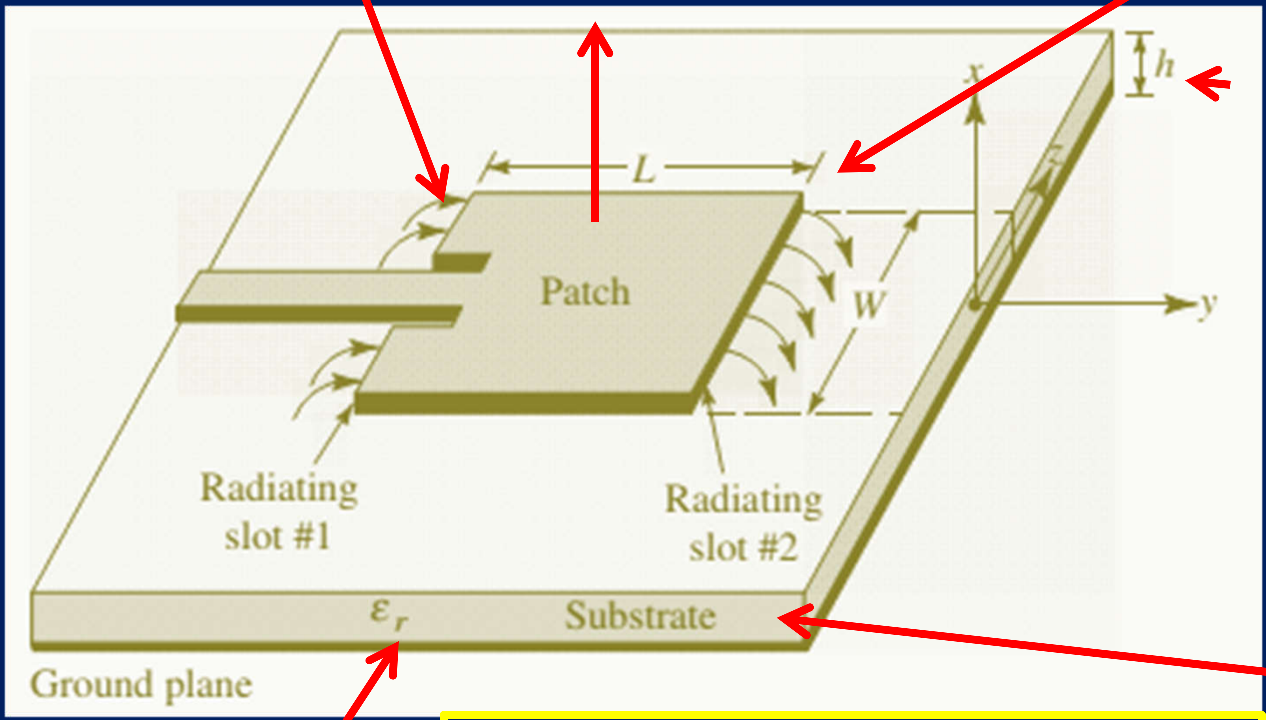
Antenas Microstrip

Características básicas de las antenas microstrip:

Antena ranura radiante

¿ λ_0?

Patch de espesor $t \ll \lambda_0$



Ubicado sobre un plano de tierra $h \ll \lambda_0$

$0{,}003\lambda_0 < h \ll 0{,}05\lambda_0$

¿Dónde estará el máximo de radiación?

$\lambda_0/3 < L \ll \lambda_0/2$

$2{,}2 < \varepsilon_r < 12$

Sustratos altos → Mejor eficiencia, pero mayor tamaño

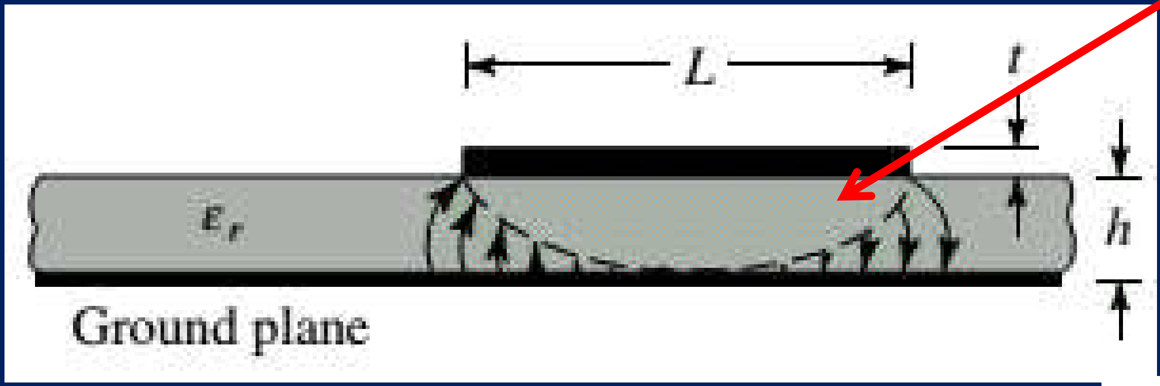
Sustrato dieléctrico de espesor *h*

Para microondas, menor tamaño → mayores perdidas

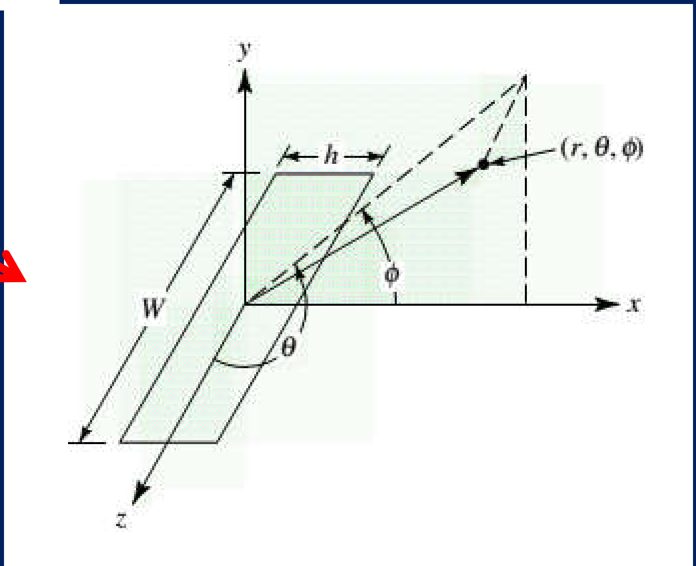
Antenas Microstrip

Características básicas de las antenas microstrip:

Campo E



Sistema de coordenadas para cada antena ranura



(c) Coordinate system for each radiating slot

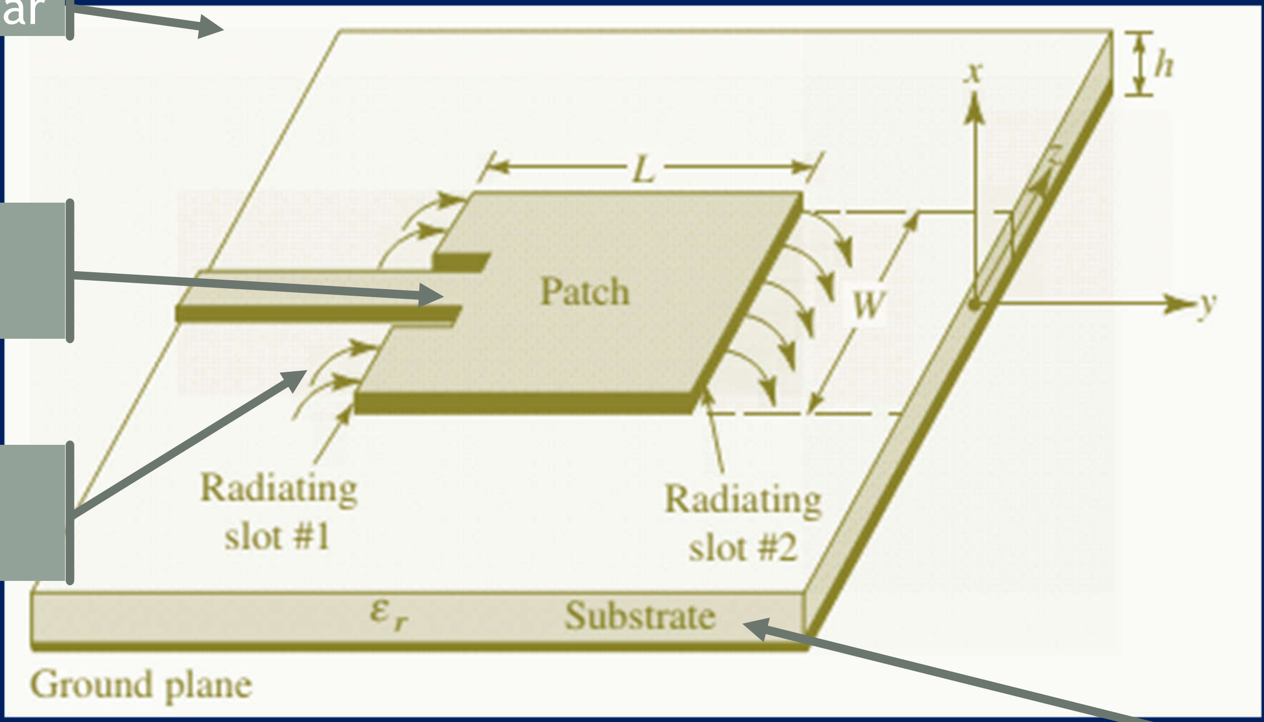
Antenas Microstrip

Métodos de alimentación: *Línea microstrip*

Fácil de fabricar

Simple de adaptar

Fácil de modelar



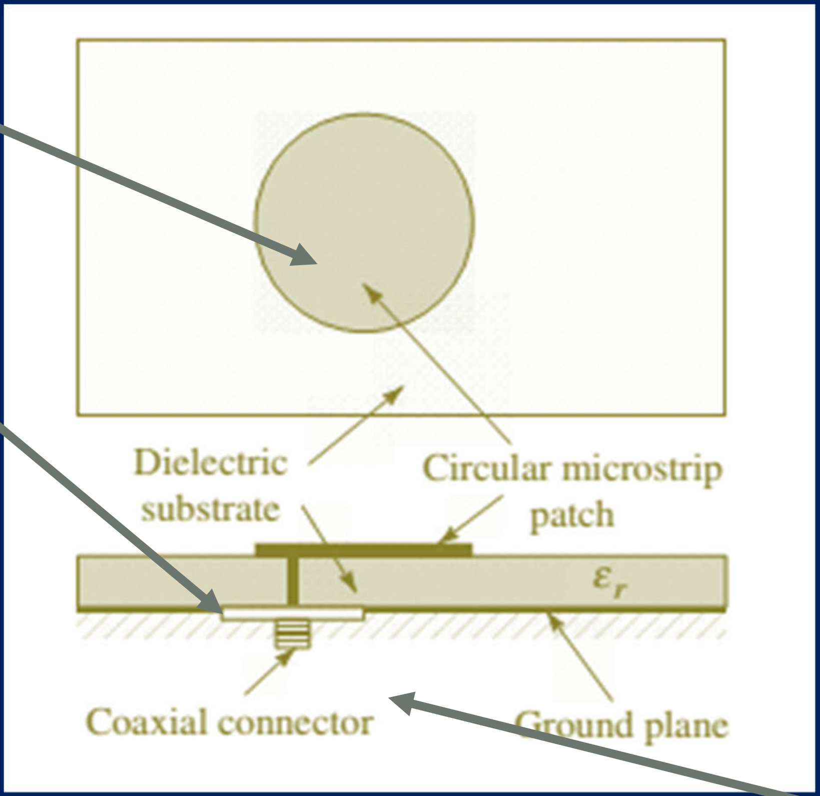
Si el espesor se incrementa, también lo hacen las ondas de superficie y la radicación espuria

Antenas Microstrip

Métodos de alimentación: *Línea coaxial*

El conductor central se conecta al patch

El conductor exterior se conecta al plano de tierra



Es fácil de fabricar y adaptar, tiene baja radiación espuria, pero se reduce el ancho de banda (2 al 5%) y es mas difícil de modelar $h \ll 0{,}02\lambda o$.

Antenas Microstrip

Métodos de alimentación: *Acoplamiento por apertura*

1) Patch

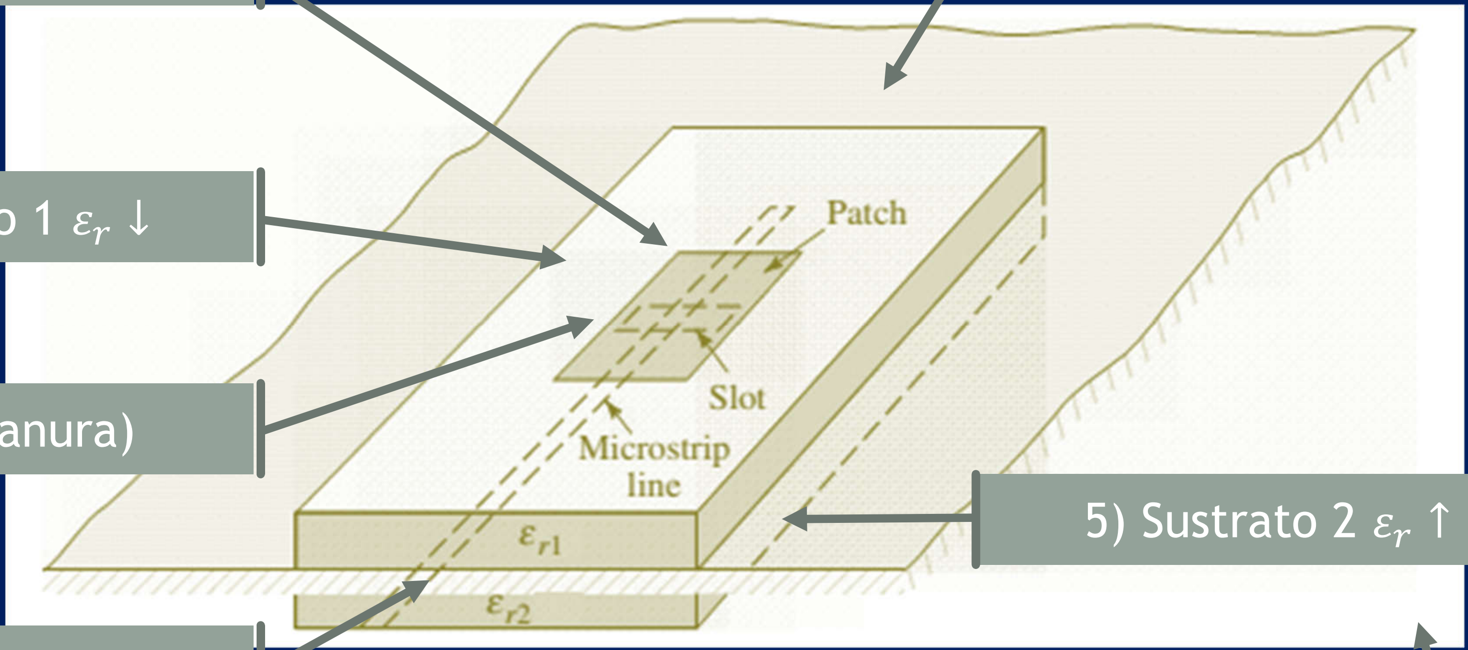
2) Sustrato 1 $\varepsilon_r \downarrow$

3) Slot (Ranura)

4) Plano de tierra

5) Sustrato 2 $\varepsilon_r \uparrow$

6) Línea microstrip



Mas difícil de fabricar y tiene un reducido ancho de banda
Fácil de modelar y moderada radiación espuria
El plano de tierra aísla la línea de la antena

Antenas Microstrip

El acoplamiento por apertura, puede ser modelado a partir de la Teoría de Bethe

THE

PHYSICAL REVIEW

A journal of experimental and theoretical physics established by E. L. Nichols in 1893

SECOND SERIES, VOL. 66, NOS. 7 AND 8 — OCTOBER 1 AND 15, 1944

Theory of Diffraction by Small Holes

H. A. BETHE

Department of Physics, Cornell University, Ithaca, New York

(Received January 26, 1942)

Antenas Microstrip

Métodos de alimentación: *Acoplamiento por proximidad*

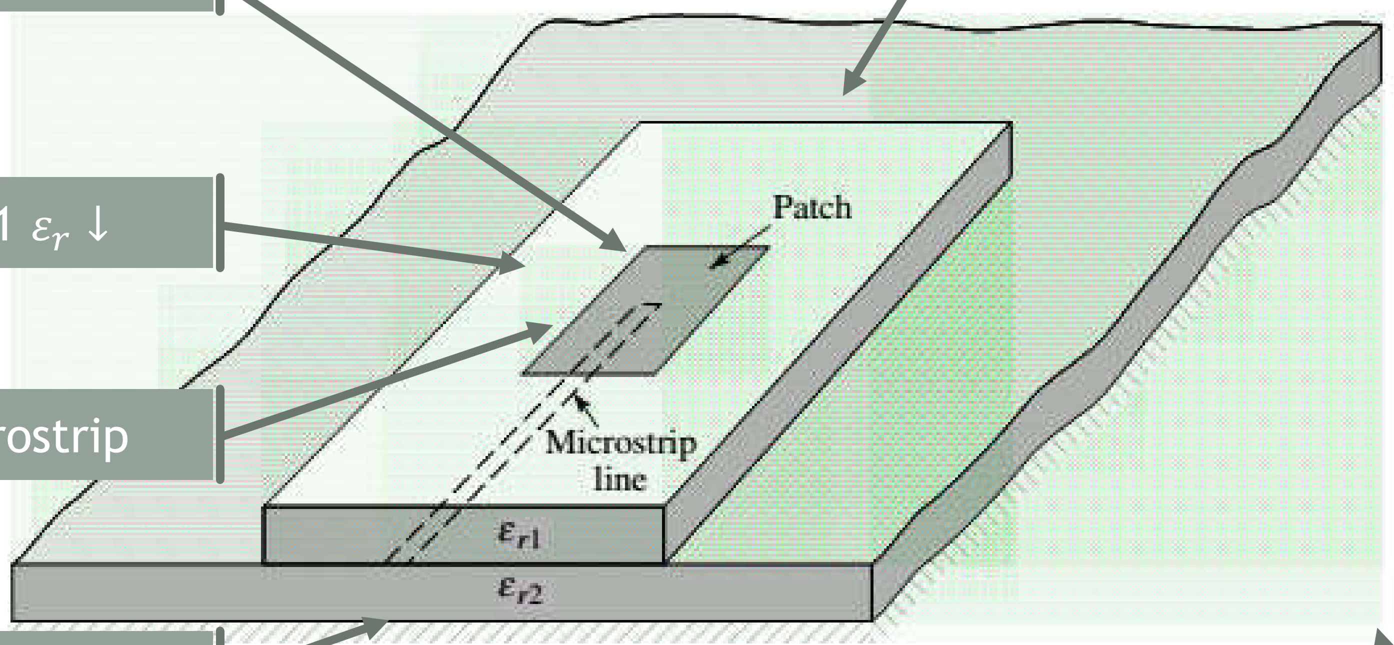
1) Patch

2) Sustrato 1 $\varepsilon_r \downarrow$

3) Línea microstrip

4) Sustrato 2 $\varepsilon_r \uparrow$

6) Plano de tierra

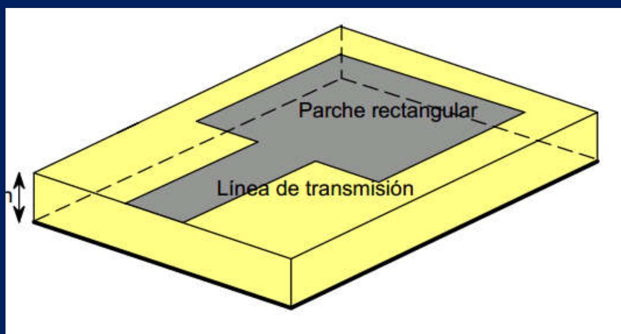


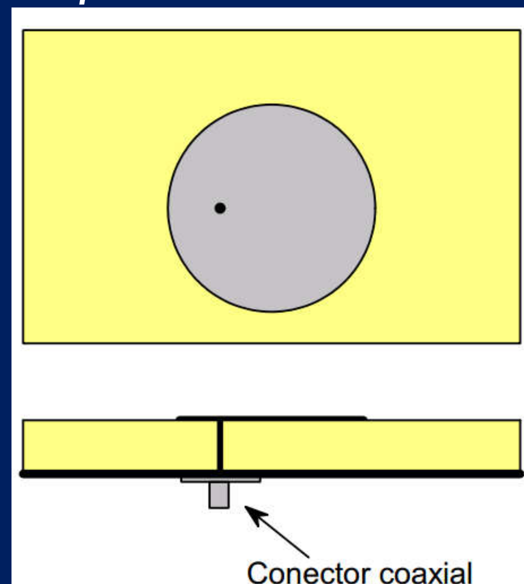
(d) Proximity-coupled feed

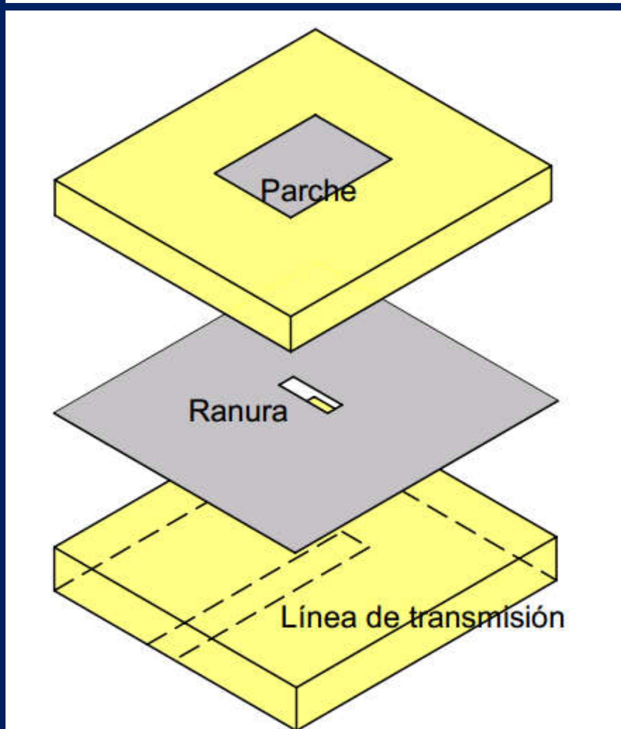
Mayor ancho de banda (aprox. 13%)
Fácil de modelar y moderada radiación espuria
Puede ser algo mas difícil de fabricar

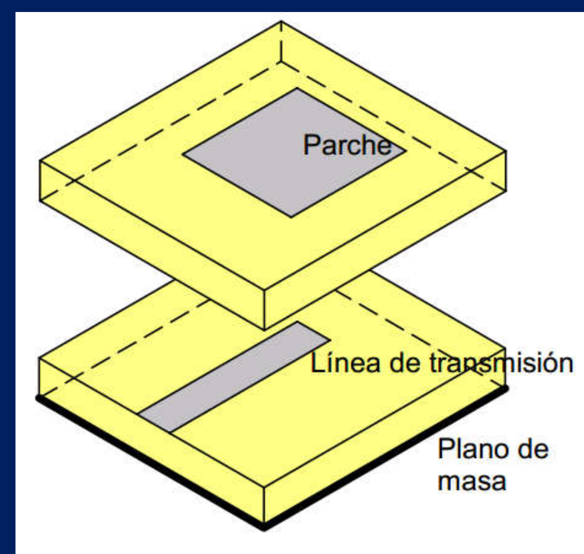
Antenas Microstrip

En resumen los métodos de acoplamiento mas comunes son









Antenas Microstrip

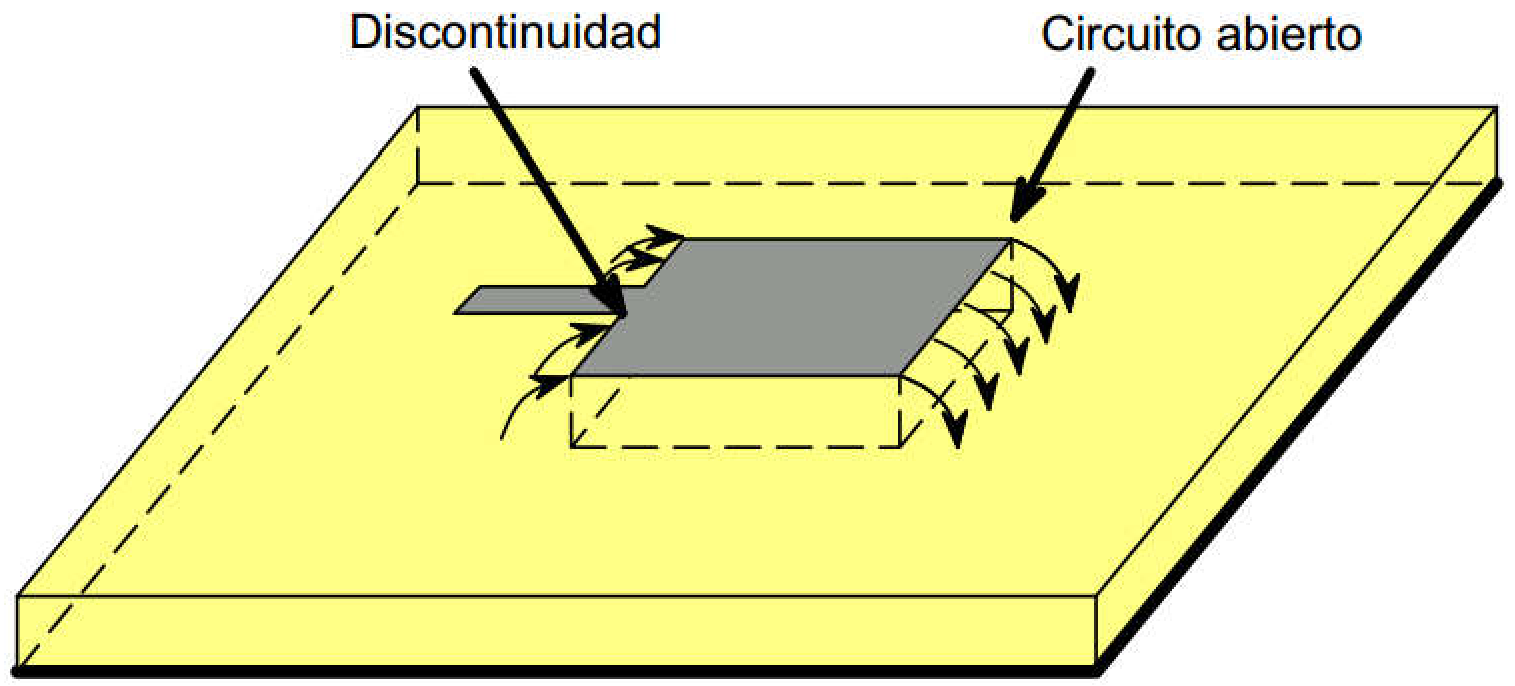
Métodos de análisis

- Método de línea de transmisión
  - Fácil
  - +Intuitivo físicamente
  - Menos preciso
- Método de cavidad
  - Mas complejo
  - -Intuitivo físicamente
  - Mas preciso
- Método de momentos
  - Muy versátil
  - Poco intuitivo físicamente
  - Muy preciso

Antenas Microstrip

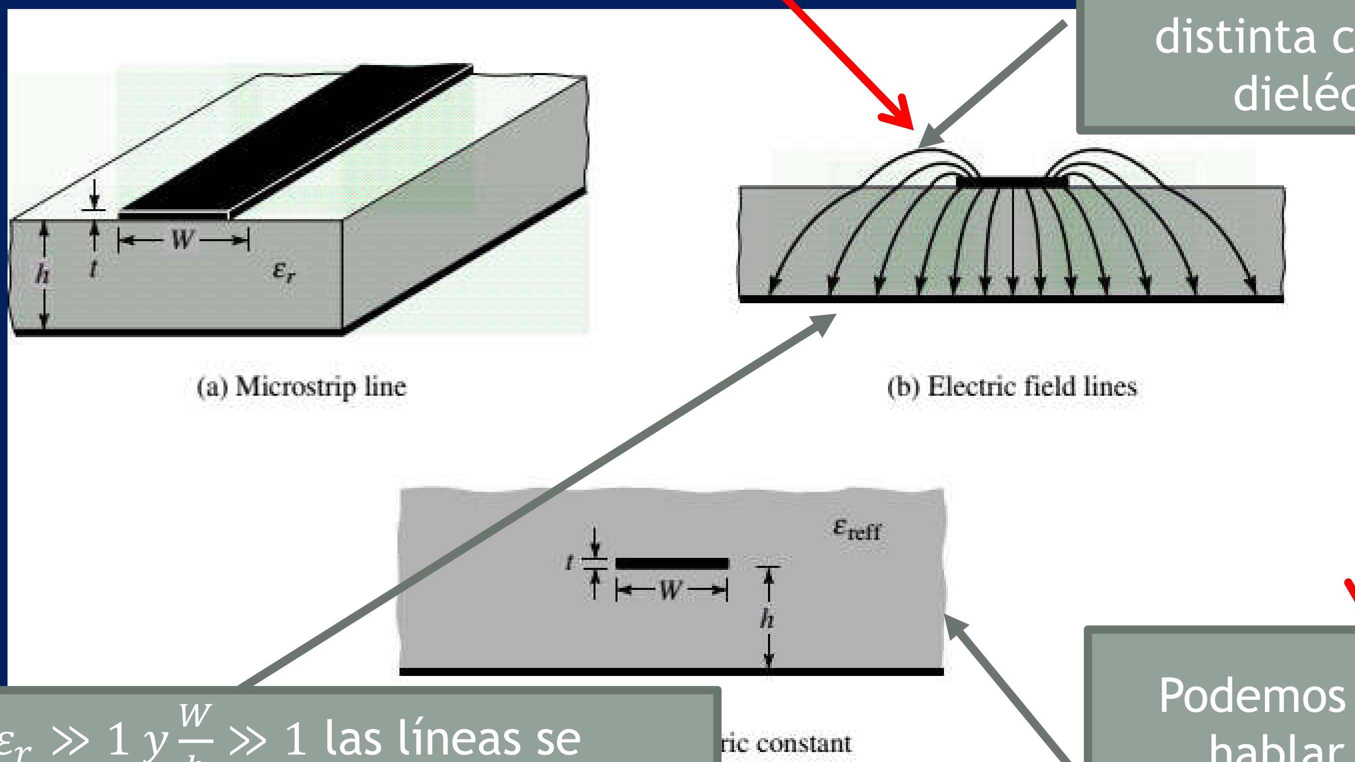
Modelo de Línea de Transmisión: La antena patch rectangular, puede ser representada como un arreglo de dos antenas ranuras de ancho W y altura h, separadas por una línea de baja impedancia de longitud L

¿Dónde están cada uno de estos parámetros y equivalentes?



Antenas Microstrip

Modelo de Línea de Transmisión: Efecto de bordes (fringing)



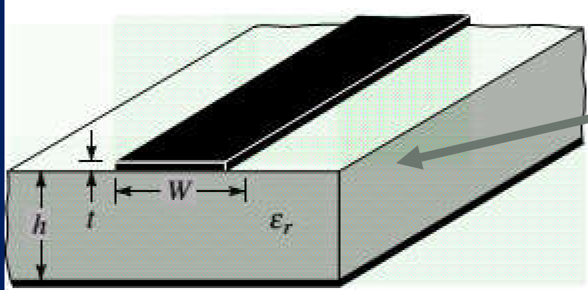
Las líneas de campo, atraviesan zonas de distinta constante dieléctrica

Podemos entonces hablar de una constante ε_{reff}

Para $\varepsilon_r \gg 1$ y $\frac{W}{h} \gg 1$ las líneas se concentran mayormente en el sustrato, aparece un ensanchamiento eléctrico W↑

Antenas Microstrip

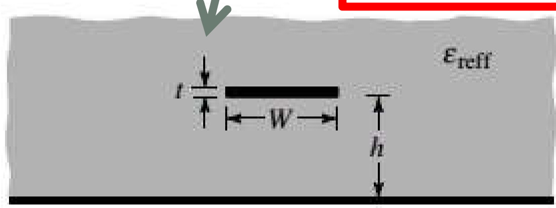
Modelo de Línea de Transmisión: Constante dieléctrica efectiva



(a) Microstrip line

La constante ε_{reff} será aquella para la cual las características de propagación y eléctricas son idénticas para ambas líneas

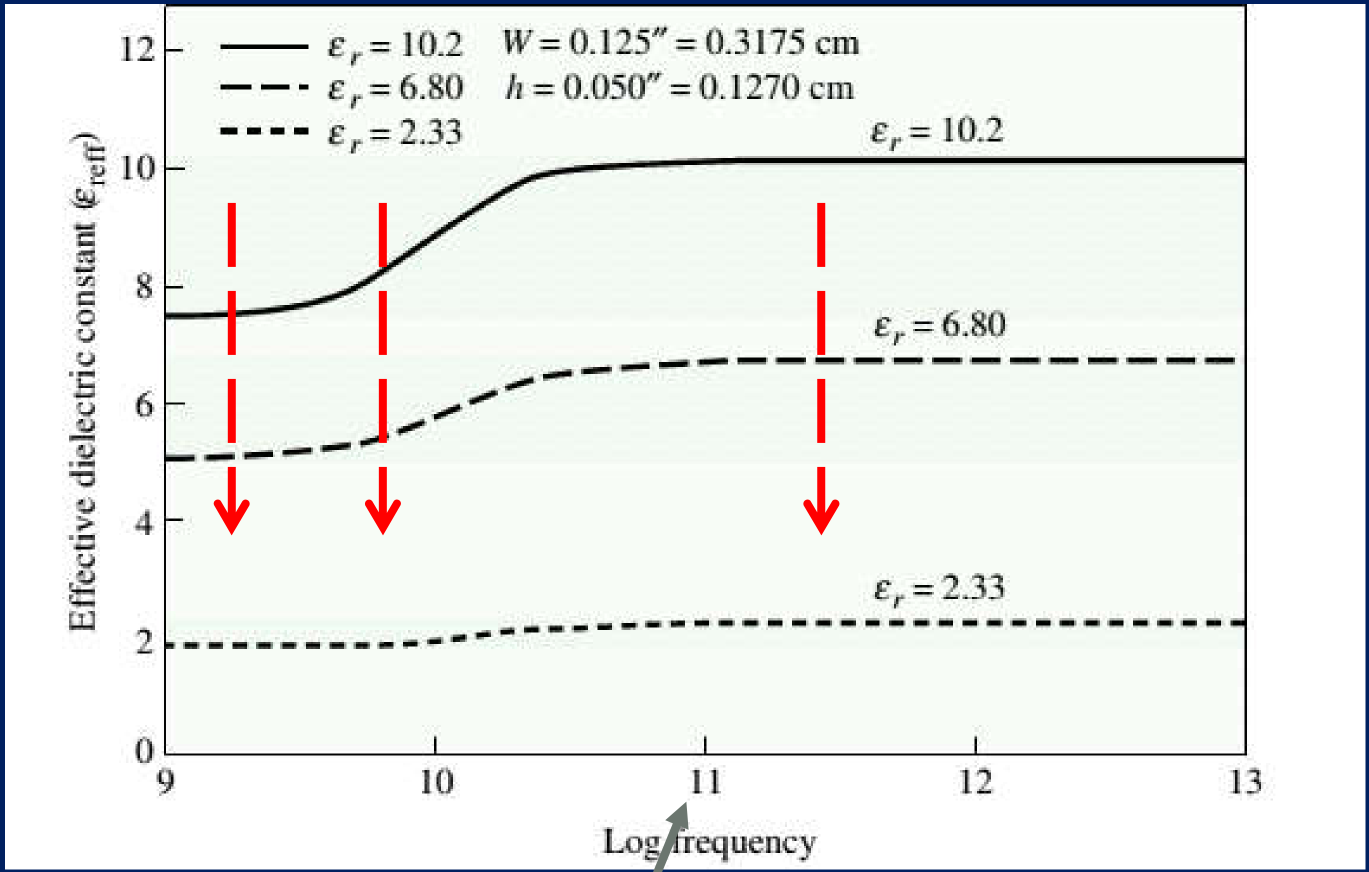
$$\frac{W}{h} \gg 1 \qquad \varepsilon_{reff} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2}\left(1 + 12\frac{h}{W}\right)^{-1/2}$$



(c) Effective dielectric constant

Antenas Microstrip

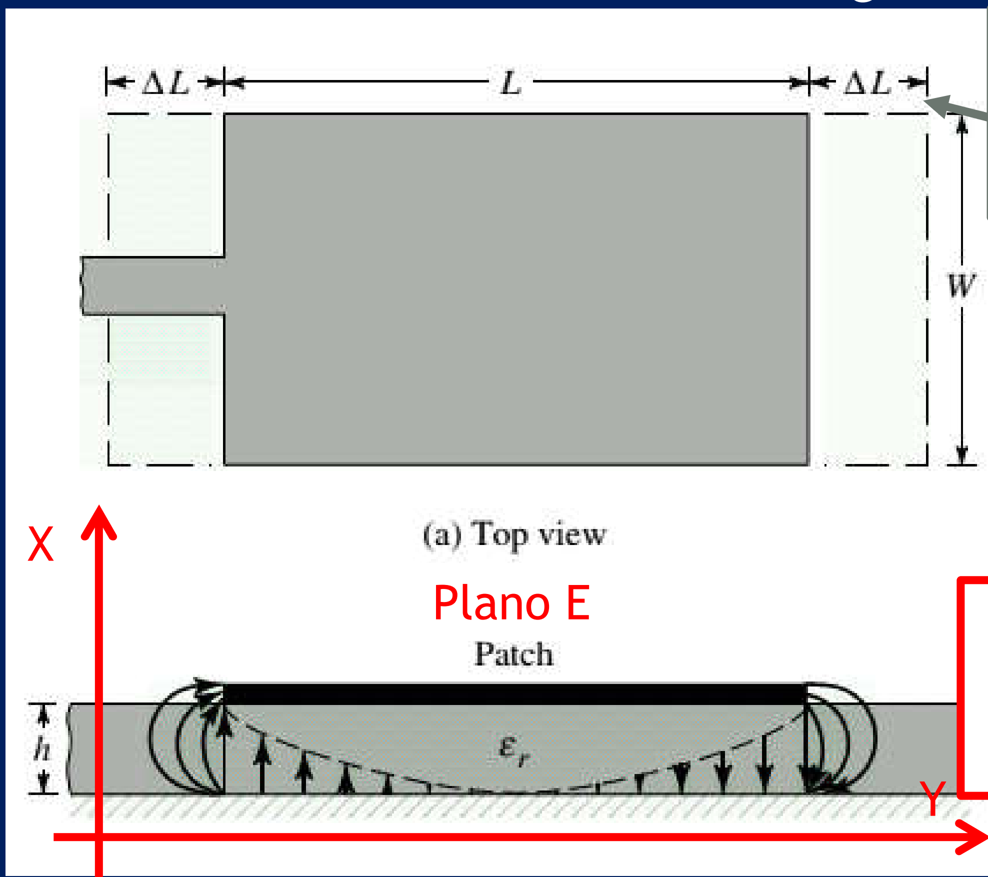
Modelo de Línea de Transmisión: Constante dieléctrica efectiva



La constante ε_{reff} será también función de la frecuencia

Antenas Microstrip

Modelo de Línea de Transmisión: Longitud efectiva



Debido a los efectos de borde (fringing), el patch de la antena se ve mas «largo» y mas «ancho»

$$\Delta L \; sera \; funcion \; de \; \varepsilon_{reff} \; y \; \frac{W}{h}$$

$$\frac{\Delta L}{h} = 0,412 \frac{(\varepsilon_{reff}+0,3)\left(\frac{W}{h}+0,264\right)}{(\varepsilon_{reff}-0,258)\left(\frac{W}{h}+0,8\right)}$$

$$L_{eff} = L + 2\Delta L \quad donde \; L_{eff} = \frac{\lambda}{2} \qquad \lambda \neq \lambda_0$$

Antenas Microstrip

Modelo de Línea de Transmisión: frecuencia de resonancia

El modo dominante será el TM_{010} y por consiguiente la frecuencia de resonancia seria:

$$f_{rc_{010}} = \frac{1}{2L\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{v_0}{2L\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Pero si consideramos los efectos de borde, tendremos:

$$\boxed{\boldsymbol{f_{rc_{010}} = \frac{1}{2\,L_{eff}\sqrt{\varepsilon_{reff}}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{v_0}{2(L+2\Delta L)\sqrt{\varepsilon_{reff}}}}}$$

Antenas Microstrip

Modelo de Línea de Transmisión: Procedimiento de diseño

Dados el material de diseño, y la frecuencia de resonancia

$$f_r\ (Hz) \quad \varepsilon_r \quad h$$

$$f_r = 10 \cdot 10^9\ Hz \quad \varepsilon_r = 2{,}2 \quad h = 0{,}1588\ cm$$

Sustrato RT/Duroid 5880

Determinar: W y L

Antenas Microstrip

Modelo de Línea de Transmisión: Procedimiento de diseño

1) Para un radiador eficiente, es una buena aproximación considerar

$$W = \frac{1}{2\, f_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_r + 1}} = \frac{v_0}{2\, f_r} \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_r + 1}}$$

$$W = \frac{30}{2(10)} \sqrt{\frac{2}{2{,}2 + 1}} = 1{,}186\ cm$$

Antenas Microstrip

Modelo de Línea de Transmisión: Procedimiento de diseño

2) Determinar la constante dieléctrica efectiva

$$\varepsilon_{reff} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2}\left(1 + 12\frac{h}{W}\right)^{-1/2}$$

$$\varepsilon_{reff} = \frac{2,2 + 1}{2} + \frac{2,2 - 1}{2}\left(1 + 12\frac{0,1588}{1,186}\right)^{-1/2} = 1,972$$

Antenas Microstrip

Modelo de Línea de Transmisión: Procedimiento de diseño

3) Determinar ΔL

$$\frac{\Delta L}{h} = 0{,}412\,\frac{(\varepsilon_{reff}+0{,}3)\left(\frac{W}{h}+0{,}264\right)}{(\varepsilon_{reff}-0{,}258)\left(\frac{W}{h}+0{,}8\right)}$$

$$\Delta L = 0{,}412(0{,}1588)\,\frac{(1{,}972+0{,}3)\left(\frac{1{,}186}{0{,}1588}+0{,}264\right)}{(1{,}972-0{,}258)\left(\frac{1{,}186}{0{,}1588}+0{,}8\right)} = 0{,}081\ cm$$

Antenas Microstrip

Modelo de Línea de Transmisión: Procedimiento de diseño

4) Determinar L

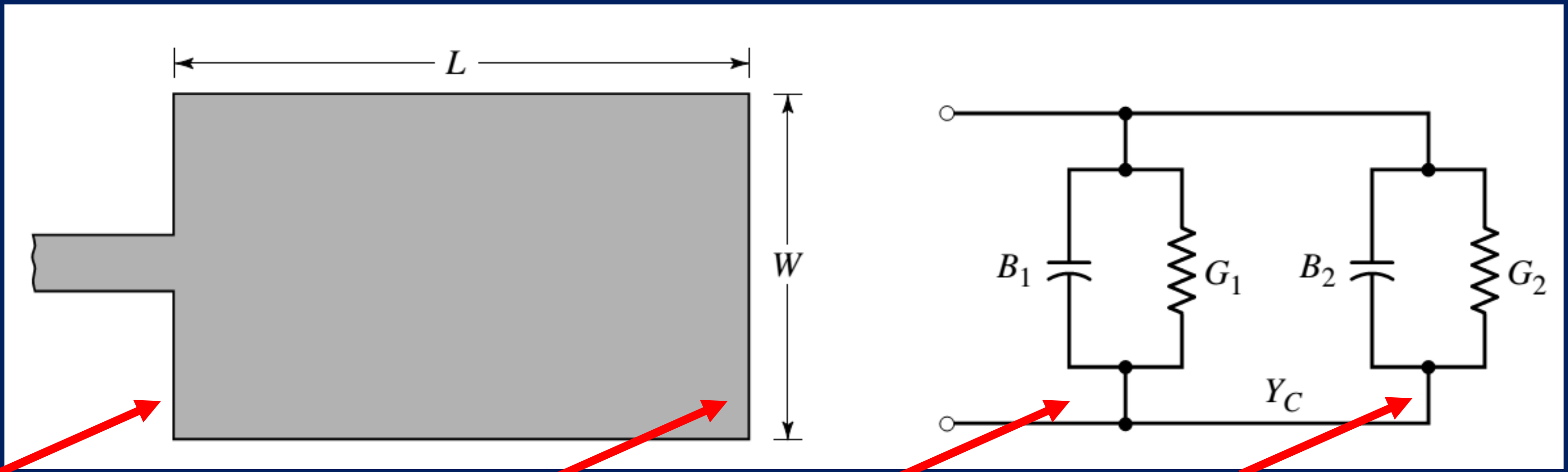
$$L_{eff} = \frac{1}{2f_{rc_{010}}\sqrt{\varepsilon_{reff}}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{\lambda}{2} \qquad\qquad L = L_{eff} - 2\Delta L$$

$$L = \frac{\lambda}{2} - 2\Delta L = \frac{30}{2(10)\sqrt{1,972}} - 2(0,081) = 0,906\ cm$$

Antenas Microstrip

Modelo de Línea de Transmisión: Impedancia

Puede considerarse el siguiente modelo equivalente



Slot 1 Slot 2 Slot 1 Slot 2

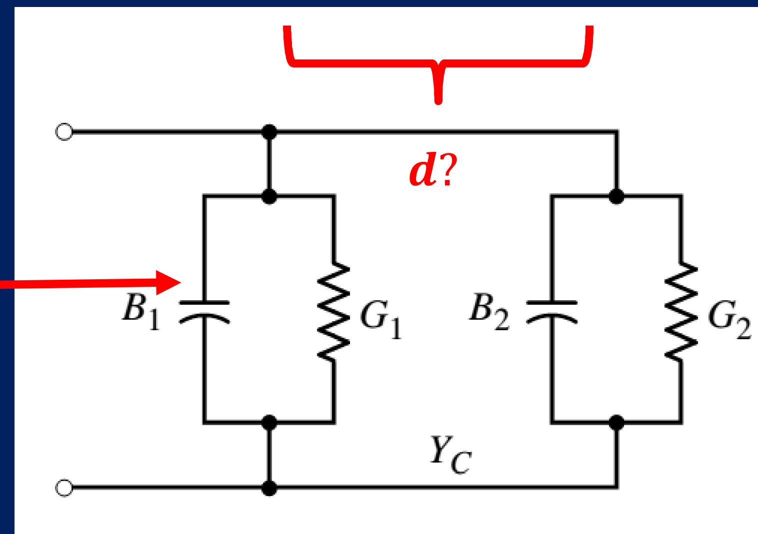
$$Y_1 = Y_2 \qquad G_1 = G_2 \qquad B_1 = B_2$$

Antenas Microstrip

Modelo de Línea de Transmisión: Impedancia modelo equivalente

$$G_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{90}\left(\dfrac{W}{\lambda_0}\right)^2 & si\ W \ll \lambda_0 \\ \dfrac{1}{120}\left(\dfrac{W}{\lambda_0}\right) & si\ W \gg \lambda_0 \end{cases}$$

$$\boxed{Z_{in}?}$$



$$Y_{in} = Y_1 + \widetilde{Y_2} = G_1 + \widetilde{G_2} + B_1 + \widetilde{B_2}$$

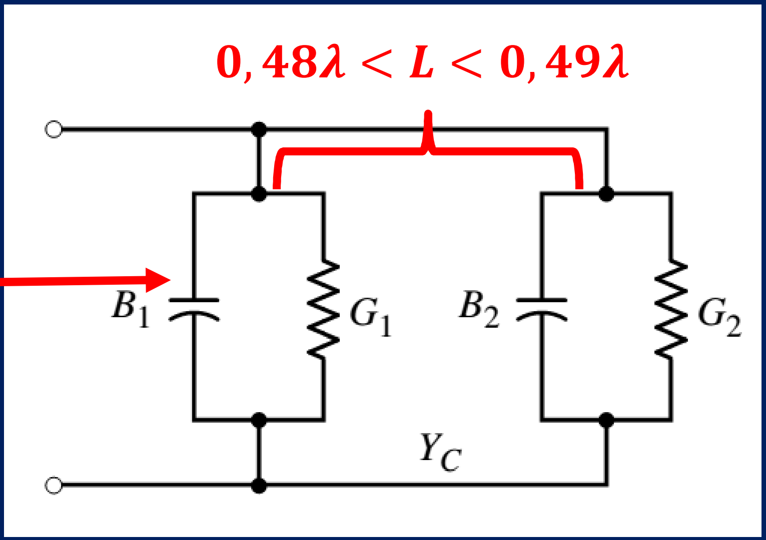
Antenas Microstrip

Modelo de Línea de Transmisión: Impedancia modelo equivalente

$$Y_{in} = Y_1 + \widetilde{Y_2} = G_1 + \widetilde{G_2} + B_1 + \widetilde{B_2}$$

$$\widetilde{Y_2} = G_1 - B_1$$

$$\boxed{Z_{in}?}$$



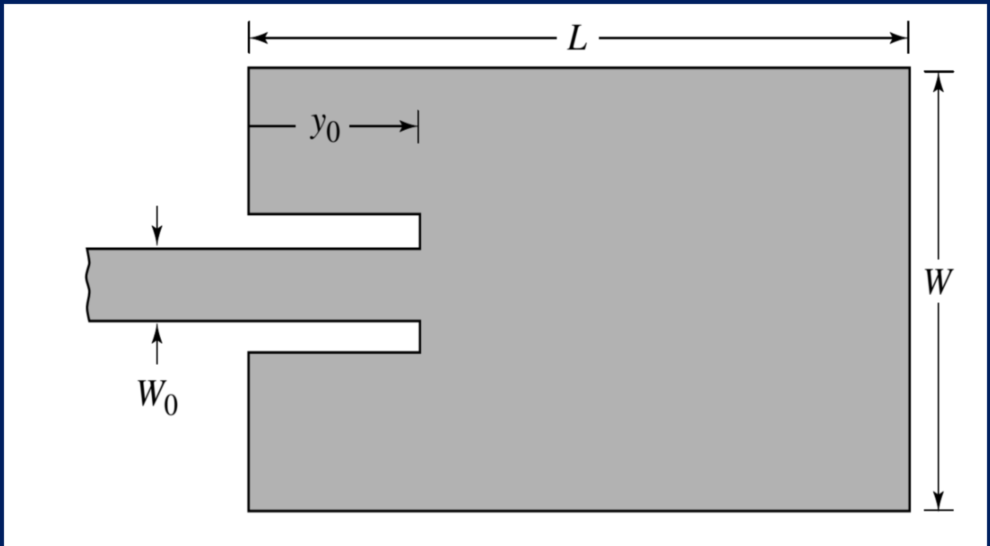
$$Y_{in} = G_1 + G_1 + B_1 - B_1$$

$$Z_{in} = \frac{1}{2G_1}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{2(G_1 + G_{12})}$$

Antenas Microstrip

Ajustando la impedancia de entrada

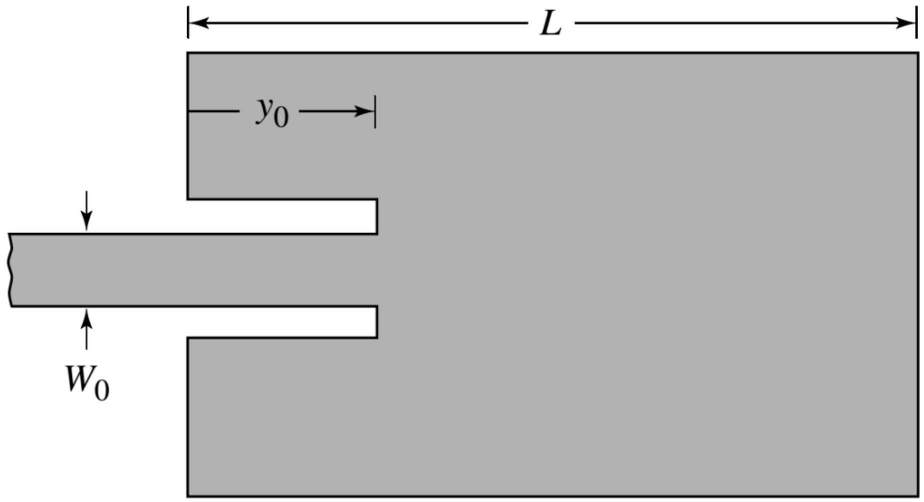


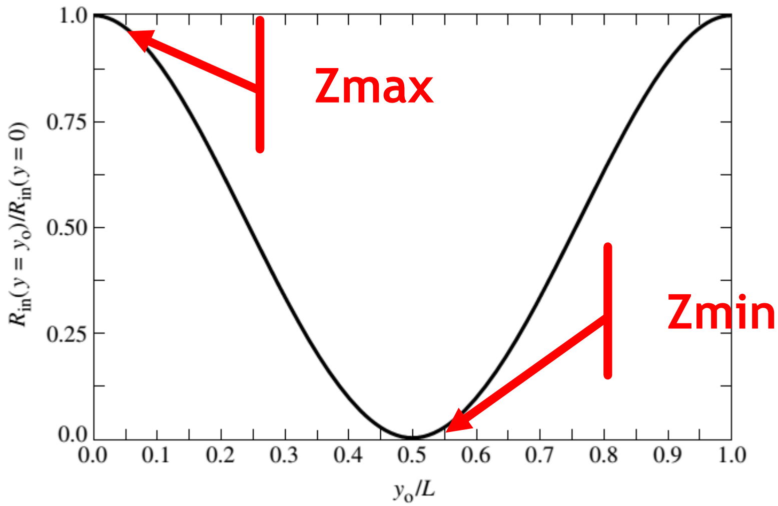
Se puede cambiar la impedancia de entrada, insertando la línea de transmisión una distancia "y_0" en el patch.
Entonces es posible adaptar la antena usando una línea microstrip cuya impedancia característica sea:

$$Z_c = \begin{cases} \dfrac{60}{\sqrt{\epsilon_{reff}}} \ln\left[\dfrac{8h}{W_0} + \dfrac{W_0}{4h}\right], & \dfrac{W_0}{h} \leq 1 \quad (14\text{-}19a) \\ \dfrac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{reff}}\left[\dfrac{W_0}{h} + 1.393 + 0.667 \ln\left(\dfrac{W_0}{h} + 1.444\right)\right]}, & \dfrac{W_0}{h} > 1 \quad (14\text{-}19a) \end{cases}$$

Antenas Microstrip

Ajustando la impedancia de entrada





$$R_{in}(y = y_0) = \frac{1}{2(G_1 \pm G_{12})} cos^2\left(\frac{\pi y_0}{L}\right) = R_{in}(y = 0) cos^2\left(\frac{\pi y_0}{L}\right)$$