

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMAN**

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE GEODESIA Y TOPOGRAFÍA**

**CÁTEDRA DE GEOFÍSICA**

# **LOCALIZACIÓN DE EPICENTROS**

**PARA ALUMNOS DE INGENIERÍA GEODESICA Y GEOFÍSICA  
DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍA  
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMAN**

**Traducción y diseño: Prof. Ing. Luis A. Estrada  
Programación MatLab: Ing. José R. Golbach**

**Año 2011**

**Sobre la base del libro Modern Global Seismology  
Thorne Lay – Terry C. Wallace  
Academic Press -1995**

## Introducción

Una de las más importantes tareas en un observatorio sismológico es la localización de fuentes sísmicas. Esto implica determinar tanto las coordenadas del hipocentro como el tiempo origen. En general, la determinación de la ubicación del sismo requiere la identificación de fases sísmicas y la medición de sus tiempos de arribo, así como el conocimiento de la velocidad de propagación de las ondas entre el hipocentro y la estación sismológica. Conocida la ubicación de la fuente sísmica, uno puede calcular el tiempo de viaje de cualquier fase en particular hacia cualquier estación sísmica en un arbitrario y complejo modelo de velocidades. Este tipo de problema es conocido como DIRECTO. Los tiempos de arribo son calculados sobre la base de un modelo parametrizado.

Lo opuesto a este método, es decir, localizar el hipocentro, es considerado como el problema INVERSO, donde solo conocemos los tiempos de arribo de las distintas fases para resolver la ubicación del sismo y su tiempo origen.

En esta sección introduciremos el concepto de INVERSA GENERALIZADA, quizás la más crítica y moderna herramienta para interpretar sismogramas y encarar otros problemas geofísicos.

## Localización con una sola estación

Por lo general se requieren varias estaciones para localizar un sismo con precisión. Pero también es posible con una sola estación para obtener una ubicación aproximada. Este método requiere de una estación que registre el movimiento del suelo en sus tres componentes.

Puesto que las ondas **P** son polarizadas vertical y radialmente, el vector **P** puede ser utilizado para inferir el azimut hacia el epicentro. La figura 1 muestra la naturaleza de esta polarización.

Si el movimiento vertical de la **P** es hacia arriba, la componente radial apunta en dirección opuesta al epicentro. Si es hacia abajo, apunta hacia el epicentro. Excepto cuando el epicentro está en el azimut opuesto, tal que el movimiento horizontal de la onda **P** esté naturalmente rotado sobre una componente, los dos sensores horizontales registrarán la componente radial de la onda **P**. La relación de amplitudes entre las dos componentes horizontales puede ser usada entonces para encontrar la proyección de la onda **P** a lo largo del azimut hacia la fuente sísmica.

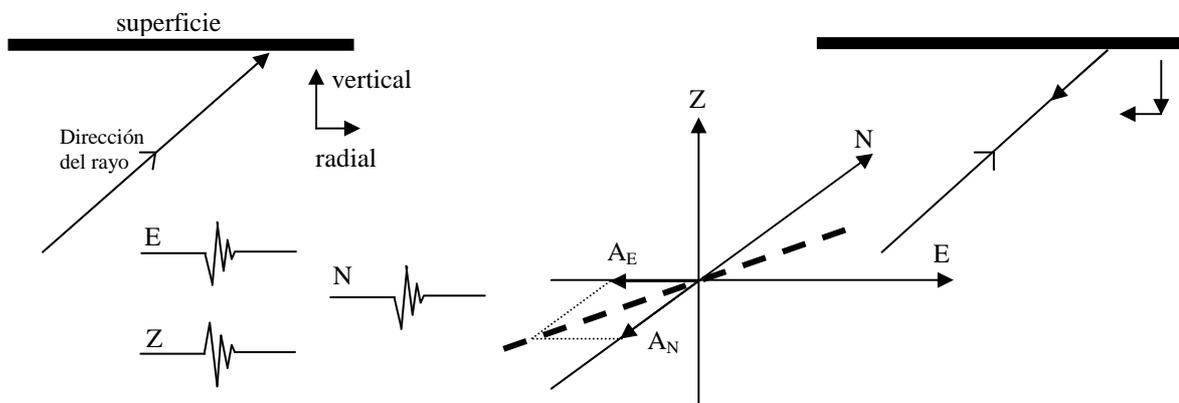


Figura 1: Procedimiento para determinar el azimut a la fuente sísmica usando los tres vectores componentes del movimiento del suelo, partiendo del hecho que la onda **P** está polarizada en el plano vertical y radial.

La distancia a dicha fuente puede ser determinada a partir de la diferencia de tiempo de arribo entre las fases **P** y **S**. Si el terremoto es local, entonces la distancia puede obtenerse de la siguiente relación:

$$D = V_P (T_S - T_P) / (\sqrt{3} - 1) \quad \text{ó} \quad D = 1,37 \times \Delta T \times V_P \quad (1)$$

Esta ecuación supone para la Tierra un coeficiente de Poisson de 0,25, idéntico al del acero. Para la mayoría de los sismos de Corteza, la regla es  $D = 8 \times \Delta T$ . A distancias mayores se utilizan las tablas Tiempo-Distancia.

Conociendo la distancia se puede estimar el tiempo de viaje de la onda y por lo tanto el tiempo de origen del sismo. Comparando las diferencias de tiempo entre varios juegos de fases con los tiempos de una curva de Tiempo-Distancia, se puede mejorar la estimación de la distancia.

Si hay fases profundas claras, hasta se puede estimar la profundidad del Foco desde una sola estación. Este procedimiento no es preciso para distancias mayores a los 20°, porque el arribo de las ondas **P** vertical y sus componentes horizontales son muy pequeñas para dar un azimut confiable.

### Localización con varias estaciones

La localización puede ser bastante precisa cuando se dispone de los tiempos de arribo de **P** y **S** de varias estaciones. Si el evento es local, el tiempo origen puede determinarse con el **Diagrama de Wadati**. Esta técnica consiste en graficar puntos cuyas abscisas sean los tiempos de arribo de las ondas **P** a cada estación, y en las ordenadas las diferencias de tiempo entre las fases **S** y **P**. Puesto que la diferencia  $\Delta T$  tiende a cero en el hipocentro, la intersección de la línea recta ajustada con el eje de las abscisas dará el tiempo origen.

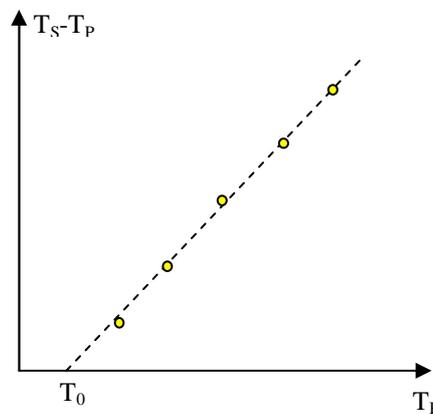


Figura 2: Ejemplo del Diagrama de Wadati para determinar el Tiempo Origen de un sismo.

La pendiente de la recta es  $m = (V_P/V_S - 1)$  que puede ser relacionada con el coeficiente de Poisson como sigue:

$$\frac{V_P}{V_S} = \frac{(1 - \sigma)}{(\frac{1}{2} - \sigma)} \quad \text{con} \quad \sigma = \frac{1 - n/2}{1 - n} \quad \text{y} \quad n = (m+1)^2 \quad (2)$$

Una vez estimado el tiempo origen  $T_0$ , la distancia  $D_i$  a una estación  $i$  puede calcularse restando este tiempo del tiempo de arribo de la onda P y multiplicándolo por la velocidad  $V_P$ , es decir,

$$D = (T_P - T_0) V_P \quad (3)$$

El epicentro debe estar en una semiesfera de radio  $D_i$  con centro en la estación  $i$ , lo que visto en un mapa corresponde a un círculo con ese radio. Construyendo estos círculos en cada estación, los mismos deberían interceptarse en un solo punto que serían las coordenadas del epicentro. La profundidad focal  $d$  puede determinarse por la raíz cuadrada de la diferencia entre los cuadrados de las distancias de propagación  $D$  y al epicentro  $\Delta$ , es decir,

$$d = (D^2 - \Delta^2)^{1/2}$$

En la práctica el error siempre está presente, tanto en los datos como en la suposición de que el camino del rayo es rectilíneo y que la velocidad de propagación es conocida, de modo que la dispersión en la intersección siempre ocurre.

Este método para determinar hipocentros se conoce como **Método de los Círculos**. En nuestro ejemplo hemos supuesto un semiespacio homogéneo, con todo, el método trabajará para una estructura de velocidades inhomogéneas y capas planas.

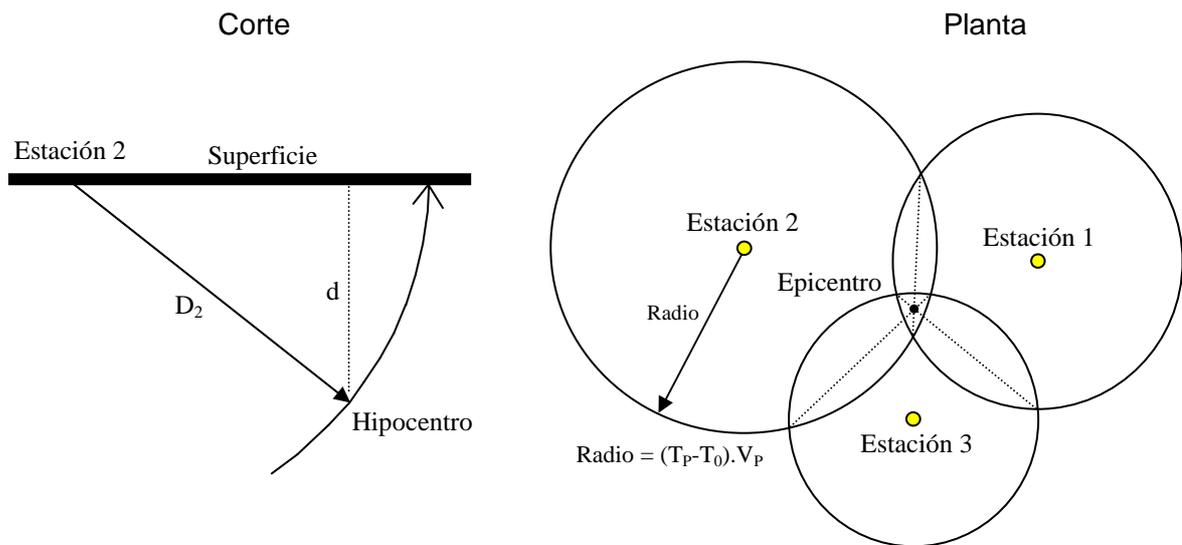


Figura 3: Triangulación del epicentro por el Método de los Círculos.

Entonces podemos extender el método a una tierra esférica, pero consideraremos una ligera variación que nos ayudará conceptualmente para el problema inverso.

Consideremos varias estaciones sísmicas distribuidas globalmente y que queremos determinar cuatro incógnitas: Las tres coordenadas del hipocentro y el tiempo origen. Podemos adivinar una solución y calcular el tiempo de arribo de la onda **P**. Si comparamos estas predicciones con los tiempos reales observados, podremos determinar el error cometido en nuestra suposición. Entonces podemos corregir este valor y repetir el proceso tantas veces como sea necesario para obtener diferencias aceptables entre los tiempos calculados y los observados.

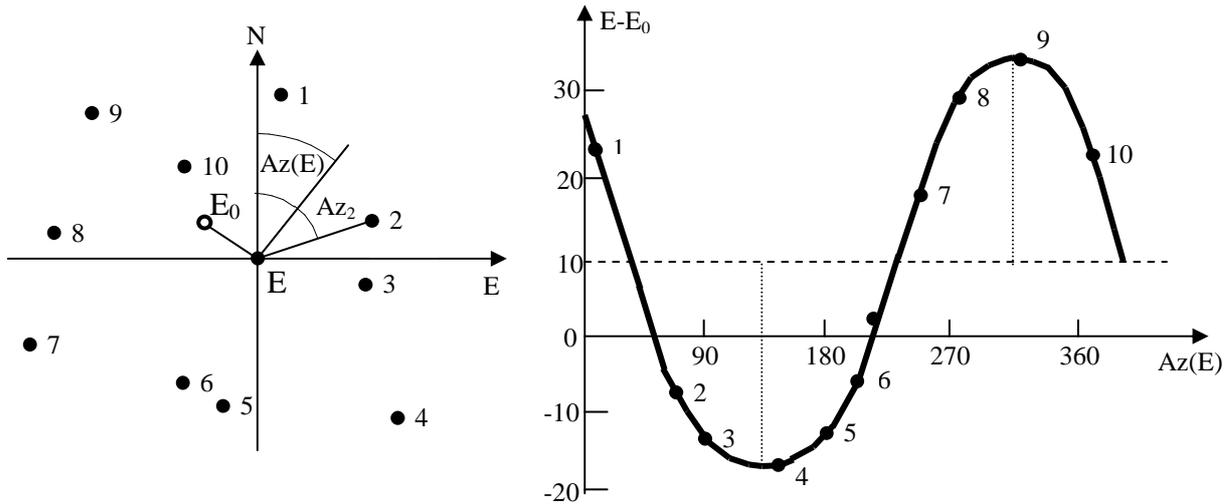


Figura 4: Ajuste de los epicentros estimados graficando la diferencia entre los tiempos estimados y observados y las correspondientes distancias epicentrales. La forma senoidal es debida a los errores sistemáticos.

En la Figura 4 se muestran 10 estaciones sísmicas distribuidas alrededor de un presunto epicentro  $E$ . El epicentro verdadero  $E_0$  está al noroeste de aquel. Los tiempos de arribo estimados para las estaciones al Noroeste del epicentro serán mayores que los observados, y menores para las ubicadas al Sudeste. Los correspondientes a las estaciones ubicadas al Noreste y Sudoeste no serán afectados grandemente por su particular ubicación. Entonces podremos utilizar estas relaciones para estimar una corrección al presunto epicentro, siguiendo los siguientes pasos:

- 1- Determine el tiempo inferido  $t_i$  y la distancia  $D_i$  para cada estación desde el presunto epicentro.
- 2- Determine la distancia  $\bar{D}_i$  a cada estación tomando la diferencia entre el tiempo  $P$  observado y el presunto tiempo origen  $\bar{t}_i$ , convirtiendo esta diferencia de tiempo en distancia utilizando la tabla de tiempo-distancia.
- 3- Lleve a una gráfica la diferencia  $(D_i - \bar{D}_i)$  contra el acimut calculado desde el presunto epicentro a cada estación. Si este es de 90 grados, entonces la diferencia será cero. De lo contrario, la variación de esta diferencia respecto al acimut será sinusoidal, con el máximo y mínimo alineados a lo largo del vector que apunta del presunto al verdadero epicentro.
- 4- Cambie el tiempo origen en una cantidad igual al valor medio de las diferencias  $(t_i - \bar{t}_i)$  y cambie la ubicación del epicentro presunto por la amplitud de la variación de la curva senoidal, con la dirección de cambio a lo largo del acimut del máximo de la curva.
- 5- Una vez que se encuentra un nuevo epicentro, este puede ser utilizado para comenzar nuevamente la aproximación repitiendo los cinco pasos. Por lo general con una sola iteración ya se encuentra el verdadero epicentro dentro de los 100 km.

Es decir que con los **datos  $x_i, y_i, T_{pi}$  y  $x_0, y_0$  estimados** podemos calcular

$$D_i = [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2]^{1/2} \text{ (distancia presunta) y } t_i = D_i/v_p \text{ (tiempo de viaje inferido).}$$

con estos valores podemos calcular el tiempo origen presumible  $\bar{t}_i = D_i/v_p - t_i$

Luego se obtiene una nueva distancia presunta a cada estación entrando a una Tabla de Tiempo-Distancia con la diferencia  $T_{pi} - t_i$  que nos dará un  $D_i$ .

Este procedimiento descrito es una serie de ejercicios de modelaje que generan datos que pueden ser comparados con las observaciones. Cuando encontramos el modelo que más se aproxima a las observaciones, declaramos que el modelo describe suficientemente la ubicación del epicentro. Matemáticamente podemos pensar esto como una serie de ecuaciones:

$$t_{i \text{ presunto}} = f(\bar{x}_i, v) = t_{i \text{ observado}} \quad (4)$$

donde  $\bar{x}_i$  es la ubicación del epicentro,  $v$  es la velocidad de la estructura y  $f$  una nueva función que calcula el tiempo de arribo  $t_{i \text{ presunto}}$ , dados  $x_i$  y  $v$ .

Si tenemos  $n$  estaciones en las cuales hemos medido los tiempos de arribo, podemos imaginar al  $t_{i \text{ observado}}$  como la  $i$ -ésima componente de un vector  $d$  que a su vez tiene  $n$  componentes, tal que  $d = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

La variable  $x_i$  da los parámetros del modelo, y podemos considerar también un vector  $m$  que tiene  $m$  componentes (en general  $m=4$ , tres espaciales y una temporal), es decir  $m = m(x,y,z,t)$ . Entonces podemos reescribir la ecuación (4) en la forma

$$F(m) = d \quad (5)$$

$F$  es definido como un operador que utiliza los elementos del vector modelo para dar el vector datos. Si  $F$  es una serie de ecuaciones lineales (que no es el caso para el problema de localización), entonces  $F$  es una matriz llamada de **Kernel**.

### El problema inverso

Si pudiéramos reacomodar los términos en la ecuación (5) de un modo tal que dividiendo  $d$  por algún operador  $F^{-1}$  obtuviéramos directamente  $m$ , estaríamos resolviendo un problema inverso. Para entender como se resuelve este problema inverso, utilizaremos como ejemplo la localización de epicentros en un medio homogéneo de velocidad  $v$ . Los medios homogéneos nos dan un camino de rayos rectos. Las coordenadas cartesianas del hipocentro verdadero y de la  $i$ -ésimas estación sísmica son  $(x,y,z)$  y  $(x_i,y_i,z_i)$ , respectivamente. Sean  $t$  y  $t_i$  el tiempo origen del terremoto y el de arribo a la  $i$ -ésima estación respectivamente. Entonces

$$t_i = t + \frac{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2]^{1/2}}{v} \quad (6)$$

Es obvio que  $t_i$  es un elemento del vector de datos  $d$ , y  $x,y,z$  y  $t$  los elementos del vector  $m$  que queremos determinar. Idealmente, hay una única combinación de los parámetros del hipocentro que se ajusta a los tiempos observados. Los elementos de  $d_i$  están relacionados al vector modelo por el miembro de la derecha de la ecuación (6), que escribimos como:

$$F(x,y,z,t) = d \quad (7)$$

Cómo podemos encontrar  $\mathbf{m}$ ? La ecuación para  $\mathbf{d}$  no es lineal, lo que nos lleva a utilizar la solución por mínimos cuadrados. El procedimiento es linealizar el problema e iterativamente mejorar  $\mathbf{m}$ . El primer paso es estimar una solución  $\mathbf{m}^0$ , para la cual el tiempo predecido,  $\mathbf{d}^0$  ( $\mathbf{d}=\mathbf{d}(\mathbf{t})$ ), pueda ser calculado e investigar el comportamiento de  $\mathbf{d}^0$  en las proximidades de  $\mathbf{m}^0$  tal como en la última sección. Aproximamos los cambios en  $\mathbf{m}^0$  con el desarrollo en Serie de Taylor.

$$\mathbf{m}_j^1 = \mathbf{m}_j^0 + \delta\mathbf{m}_j^0 \quad (8)$$

donde  $\delta\mathbf{m}_j^0$  es un incremento de los j-ésimos parámetros del modelo hacia un mejor ajuste de los datos. Para nuestro ejemplo, esto significa adivinar una solución  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{t}_0)$  y luego determinar los incrementos  $\delta\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$ ,  $\delta\mathbf{y}_0 = (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0)$ ,  $\delta\mathbf{z}_0 = (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0)$  y  $\delta\mathbf{t}_0 = (\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0)$ . Los subíndices corresponden al número de iteraciones. Expandiendo la (8) en series de Taylor alrededor de  $\mathbf{m}^0 + \delta\mathbf{m}^0$ , pueden encontrarse los correspondientes incrementos en el vector de datos predecido:

Recordemos que si  $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  entonces  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  o  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ .

En nuestro caso  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{t}_0)$  o  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = \mathbf{d} - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{t}_0)$ , es decir:

$$(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x}_0)\delta\mathbf{x}_0 + (\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{y}_0)\delta\mathbf{y}_0 + (\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{z}_0)\delta\mathbf{z}_0 + (\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{t}_0)\delta\mathbf{t}_0 = \mathbf{d}_i - \mathbf{F}_i^0(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{t}_0) \quad (9)$$

Analizando la ecuación (9), vemos que la diferencia entre los tiempos de viaje predecido y observado (miembro de la derecha), está ahora relacionada linealmente a los cambios que necesitamos en las coordenadas del hipocentro, y así podremos modelar mejor los datos aproximados. Usando la serie de Taylor truncada en el primer término tendremos la linealización, pero esto excluye las perturbaciones de la rápida convergencia hacia el  $\mathbf{m}$  verdadero. Las derivadas son evaluadas en la solución predecida,  $\mathbf{m}_j^0$ . Sustituyendo la (7) en la (9) tendremos:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = \mathbf{d} \Rightarrow \delta\mathbf{F} = \delta\mathbf{d} = (\partial\mathbf{d}/\partial\mathbf{m})\delta\mathbf{m} \Rightarrow \delta\mathbf{F}/\delta\mathbf{m} = \partial\mathbf{d}/\partial\mathbf{m}$$

$$\delta\mathbf{d}_i = \frac{\partial\mathbf{d}_i}{\partial\mathbf{m}_j} \delta\mathbf{m}_j \quad (10)$$

Y definiendo  $\partial\mathbf{d}_i / \partial\mathbf{m}_j$  como una matriz  $\mathbf{G}$  de derivadas parciales,

$$\mathbf{G}_{i,j} = \frac{\partial\mathbf{d}_i}{\partial\mathbf{m}_j} \quad (11)$$

Podemos escribir un sistema de ecuaciones que mapee los cambios en los parámetros del modelo sobre las mejoras en el ajuste de los datos:

$$\Delta\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \Delta\mathbf{m} \quad (12)$$

Esta es la notación estándar, así que eliminamos la  $\Delta$  y escribimos  $\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$ .

Debe aclararse que esta fórmula también se cumple para un problema puramente lineal, y no solo para nuestra versión linealizada. De aquí en adelante, los vectores datos y modelo son entendidos como vectores de cambios en el modelo y en los datos espaciales.

Regresando a la ecuación (9), tenemos un sistema de ecuaciones con cuatro incógnitas  $\delta x_0$ ,  $\delta y_0$ ,  $\delta z_0$  y  $\delta t_0$ , con coeficientes que son derivadas como la  $(\partial F_i / \partial m_j)(\partial m / \partial x)$ , las que evaluadas a  $m^0$  son constantes. El miembro de la derecha son los datos de origen y los aproximados o predecidos.

$$(\partial F_i / \partial m_j)(\partial m / \partial x) \delta x_0 + (\partial F_i / \partial m_j)(\partial m / \partial y) \delta y_0 + (\partial F_i / \partial m_j)(\partial m / \partial z) \delta z_0 + (\partial F_i / \partial m_j)(\partial m / \partial t) \delta t_0 =$$

$$= d_i - F_i^0(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

Si hay cuatro tiempos de arribo observados, tendremos cuatro ecuaciones y podremos resolver el sistema por eliminación gaussiana, dando, ya sea, ninguna solución o un resultado exacto para  $\delta m_j^0$ . Cualquier error en los datos llevará a una solución incorrecta o a ecuaciones inconsistentes. Una vez que  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  y  $\delta t$  son calculados, podemos “corregir” los parámetros aproximados de la fuente:

$$x_1 = x_0 + \delta x_0, \quad y_1 = y_0 + \delta y_0, \quad z_1 = z_0 + \delta z_0 \quad \text{y} \quad t_1 = t_0 + \delta t_0. \quad (13)$$

Estos nuevos parámetros aproximados ( $x_1, y_1, z_1, t_1$ ) son se utilizan para repetir el proceso y obtener unos parámetros ( $x_2, y_2, z_2, t_2$ ) más precisos, y así sucesivamente iterando hasta que  $\Delta d$  sea aceptablemente pequeño. Este proceso es conocido como el **Método de Geiger**. Desafortunadamente la convergencia depende fuertemente de la precisión de los parámetros iniciales, y hasta a veces no hay garantía de que se logre la convergencia.

### Problema Inverso Generalizado.

En la sección anterior hemos desarrollado un sistema de ecuaciones simultáneas que relaciona los cambios de los parámetros, para mejorarlos con un ajuste de los datos. La ecuación  $d = Gm$  (12) es válida para resolver cualquier problema sísmológico en el cual tengamos un juego de mediciones que depende a su vez de un juego de parámetros del modelo. Una importante rama de las Matemáticas que ha sido desarrollada para estudiar la solución de tales sistemas, es conocida como la Teoría Inversa. Los detalles de la inversión están más allá del alcance de este texto, pero sin embargo desarrollaremos algunas formulaciones básicas que son importantes para los últimos capítulos. Por más detalles sobre esta teoría aplicada a la Geofísica, consultar Menke (1989) y Tarantolla (1987).

La ecuación 12 relaciona el vector datos de dimensión  $n$  (número de observaciones) con el vector modelo de dimensión  $m$  (parámetros del modelo). En general, la mayoría de los problemas de localización de terremotos son sobredeterminados: hay más observaciones que número de incógnitas ( $n > m$ ). Para las inversiones en la estructura de la Tierra, las funciones continuas de las propiedades del material, son aproximadas por un modelo finito simplificado a fin de asegurar que  $n > m$ . Para  $n > m$  la matriz  $G$  no es cuadrada (hay más filas que columnas), lo que consideraremos más tarde. Si  $G$  fuera cuadrada,  $n = m$  ecuaciones e incógnitas, podríamos simplificar ambos miembros de la ecuación multiplicándolos por  $G^{-1}$ , la inversa de  $G$ , suponiendo que existe.

Por definición,  $\mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. De este modo tendremos un nuevo sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{m} \quad (14)$$

Entonces podríamos resolver  $\mathbf{m}$  directamente. Esta es una ecuación simple y fácil de resolver. Desafortunadamente, nunca tenemos este caso en Sismología. Estamos tratando con datos que tiene errores, tal como aquellos asociados a las lecturas de los tiempos de arribo. Similarmente, la ecuación 14 supone que podemos predecir perfectamente los datos. En el caso de los tiempos de viaje, esto significa que debemos conocer muy bien las velocidades de la estructura entre la fuente y los receptores. En efecto, esto no es así, y por lo tanto estamos tratando con ecuaciones inconsistentes, lo que hace imposible el uso de la ecuación 14. A pesar de estos problemas, no todo está perdido, porque si medimos muchos datos, podemos encontrar una solución sobredeterminada, que es el modelo que mejor se ajusta a un “promedio” de los datos.

Antes de discutir esta solución, regresemos a la ecuación 12, donde  $\mathbf{G}$  es una matriz cuadrada de  $n \times n$  ( $n=m$ ) y desarrollemos algunas definiciones. En esta ecuación podemos pensar que  $\mathbf{G}$  es un operador que mapea los parámetros del modelo en los vectores de los datos predecidos. En otras palabras,  $\mathbf{G}$  transforma un vector de  $n$  dimensiones en otro de iguales dimensiones. Esto es análogo para un sistema de transformación de coordenadas con vectores de posición. Por lo tanto podemos extender la analogía para introducir el concepto de los auto-valores o valores propios.

El problema de los auto-valores puede ser definido por la transformación del vector modelo en un vector paralelo. Consiste en encontrar los valores de un parámetro escalar  $\lambda$  para el cual existan vectores  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$  que satisfagan la ecuación

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{d} = \lambda \cdot \mathbf{d} \quad (15)$$

Físicamente, esto significa que queremos encontrar un conjunto de vectores de datos que, cuando operamos con  $\mathbf{G}$ , obtengamos vectores que señalen en la misma dirección con una longitud escalada por la constante  $\lambda$ . Podemos entonces definir la siguiente ecuación homogénea:

$$[\mathbf{G} - \lambda \mathbf{I}] \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0}_n \quad (16)$$

donde  $\mathbf{0}_n$  es un vector de ceros de  $n \times 1$ . Este sistema de ecuaciones homogéneas tiene una solución no trivial si, y solo si, el determinante del sistema es igual a cero:

$$[\mathbf{G} - \lambda \mathbf{I}] = \begin{vmatrix} \mathbf{g}_{11} - \lambda & \mathbf{g}_{12} & \dots & \mathbf{g}_{1n} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} - \lambda & \dots & \mathbf{g}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{g}_{n1} & \mathbf{g}_{n2} & \dots & \mathbf{g}_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = f(\lambda) = 0 \quad (17)$$

El valor del determinante viene dado por una función polinómica de orden  $n$  en  $\lambda$ , llamada **polinomio característico**

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_0 = 0 \quad (18)$$

Las raíces  $\lambda$  de esta ecuación son llamadas auto valores de  $\mathbf{G}$ . Entonces hay  $n$  auto valores o raíces  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , cada una de las cuales puede ser usada para encontrar una solución del sistema homogéneo de ecuaciones.

El polinomio  $f(\lambda)$  puede escribirse en términos de sus factores, usando sus propias raíces, esto es,  $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$ . Comparándola con la ecuación 18, podemos escribir las conocidas relaciones entre las raíces y los coeficientes:

$$a_{n-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \quad a_0 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n$$

$$a_{n-2} = \sum_{j>i}^n \lambda_i \lambda_j = \lambda_1 \lambda_2 + \dots + \lambda_1 \lambda_n + \lambda_2 \lambda_3 + \dots + \lambda_2 \lambda_n + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n$$

$$a_{n-r} = \sum_{k>\dots>j>i}^n \lambda_i \lambda_j \lambda_k \dots \lambda_r \text{ cada termino es producto de } r \text{ de los } \lambda_i$$

Por cada  $\lambda$  existen auto vectores unitarios  $\mathbf{u}$ , es decir:

$$\begin{array}{ll} \lambda = \lambda_1 & \mathbf{u}_1 = [\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1, \dots, \mathbf{u}_n^1] \\ \lambda = \lambda_2 & \mathbf{u}_2 = [\mathbf{u}_1^2, \mathbf{u}_2^2, \dots, \mathbf{u}_n^2] \\ \dots & \dots \\ \lambda = \lambda_n & \mathbf{u}_n = [\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n, \dots, \mathbf{u}_n^n] \end{array} \quad (19)$$

La solución  $\mathbf{u}$  representa  $n$  distintos vectores llamados los auto valores de  $\mathbf{G}$ . Los auto-valores y auto vectores son usados entonces para definir dos nuevas matrices:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{U} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1^1 & \mathbf{u}_1^2 & \dots & \mathbf{u}_1^n \\ \mathbf{u}_2^1 & \mathbf{u}_2^2 & \dots & \mathbf{u}_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{u}_n^1 & \mathbf{u}_n^2 & \dots & \mathbf{u}_n^n \end{vmatrix} \quad (21)$$

$\Lambda$  es una matriz diagonal de los auto-valores de  $\mathbf{G}$ , y  $\mathbf{U}$  es una matriz de  $n \times n$  con los auto vectores de  $\mathbf{G}$  en las columnas. Los auto-vectores definen un nuevo sistema de coordenadas, igualmente válidas para describir la solución de nuestro sistema de ecuaciones originales. La ventaja del nuevo sistema de coordenadas es principalmente la simplicidad computacional para determinar la inversa generalizada, pero puede visualizarse algún aspecto físico también al considerar el rol de  $\mathbf{G}$ . Como establecimos antes,  $\mathbf{G}$  transforma, o une, los parámetros del modelo (o modelo espacial) a los datos predecidos (o datos espaciales). Un cambio de los parámetros del modelo afectará a ciertos elementos de los datos espaciales. Por ejemplo, en el problema de la localización de un terremoto, un cambio en la profundidad afectará los tiempos de viaje a todas las estaciones de observación.

En el sistema de coordenadas de los auto-vectores, los parámetros del modelo original son mapeados en un nuevo modelo espacial; igualmente para los datos espaciales. En este sistema de coordenadas, un cambio en un parámetro del modelo solo afectará a un elemento del vector de los datos. Esta relación biunívoca es muy valiosa para entender que la combinación de los parámetros del modelo es bien resuelta.

En la ecuación 18 suponemos que el polinomio característico tiene  $n$  raíces. En general, las raíces pueden ser complejas, pero para el tipo de problema que intentamos resolver en sismología, todas las raíces son reales. Sin embargo, no hay garantía que las raíces sean cero o repetidas, problema que debe ser encarado. Si un valor propio es cero, esto implica que no existe un eje coordenado en el espacio transformado, y solo pueden resolverse  $n-1$  parámetros del modelo. Si un valor propio está repetido, nos referimos a ellos como degenerados. En este caso, los auto valores no corresponden a un único auto vector, sino en cambio a un plano definido por dos auto vectores. En este caso, la unicidad de los auto-vectores se desvanece; cualquiera de los dos vectores en el plano describirá un nuevo modelo espacial.

Una aplicación de los auto-vectores es encontrar el sistema de coordenadas principal. Esto representa la diagonalización de  $\mathbf{G}$  en nuestro ejemplo. De la ecuación 15 podemos escribir:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Lambda} \quad (22)$$

Multiplicando por la inversa de  $\mathbf{U}$  nos da:

$$\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \quad (23)$$

Siendo  $\mathbf{\Lambda}$  la matriz diagonal de la (20). Como un ejemplo, considere el caso donde  $\mathbf{G}$  es un tensor de esfuerzos. Entonces los auto valores son la magnitud de los principales esfuerzos, y los auto vectores dan la orientación de los ejes coordenados para el sistema principal de esfuerzos.

Podemos usar el análisis de los auto-valores para encontrar  $\mathbf{G}^{-1}$ . Comenzamos con un análisis similar de los auto-valores sobre  $\mathbf{G}^T$  para definir una matriz  $\mathbf{V}$  de auto-vectores. Los auto valores de  $\mathbf{G}^T$  son los mismos de  $\mathbf{G}$  (el valor de un determinante no cambia cuando se intercambian filas por columnas). Entonces.

$$\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda} \quad (24)$$

Tomando la transpuesta en ambos miembros y multiplicándolos por  $\mathbf{U}$  tendremos:

$$\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{G} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^T \quad (25)$$

Multiplicando ambos lados por  $\mathbf{U}$

$$\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{U} \quad (26)$$

Ahora podemos utilizar la 22 para escribir la 26 como:  $\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{U}$  (27)

Esta es una ecuación importante y es la base de la técnica llamada **descomposición de valores singulares**. La 27 será cierta solo cuando  $\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}$ . Esto implica que  $\mathbf{V}^T$  y  $\mathbf{U}$  sean ortogonales. Usando nuestra analogía de transformación de coordenadas, esta ortogonalidad significa que los ejes coordenados (auto-vectores) son ortogonales. Recordemos que definimos la matriz inversa como  $\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}$ , lo que lleva a varias relaciones entre los auto-vectores de  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^T$ :

$$\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{U} = (\mathbf{V}^T)^{-1}; \quad \mathbf{V} = (\mathbf{U}^T)^{-1}; \quad \mathbf{U}^T = \mathbf{V}^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} \quad (28)$$

Si sustituimos  $\mathbf{V}^T = \mathbf{U}^{-1}$  en la 25 y multiplicamos por  $\mathbf{U}$ , obtenemos lo que se conoce como la descomposición del valor singular de  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{U}^T \quad (29)$$

Podemos escribir una ecuación similar para  $\mathbf{G}^{-1}$ :

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Lambda}^{-1} \cdot \mathbf{V}^T \quad (30)$$

Donde  $\mathbf{\Lambda}^{-1}$  viene dado por:

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \begin{vmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_n \end{vmatrix} \quad (31)$$

Estas manipulaciones son un modo bastante complejo de invertir una matriz cuadrada, aunque sirven para visualizar la estructura de los autovalores y auto vectores de un problema. Sin embargo, en la mayoría de los problemas en geofísica, estamos involucrados con muchos más datos que parámetros del modelo. Si los datos sísmicos de nuestro modelo de predecir observaciones fueran perfectos, entonces un problema sobredeterminado sería **redundante**. Para un juego de ecuaciones redundantes, algunos auto valores serán cero. En este caso  $\mathbf{G}^{-1}$  no existe, pero podríamos eliminar la redundancia y con todo, encontrar una solución completa. Si los datos y el modelo contienen ruido y errores, la redundancia perfecta no existe, y el problema inverso puede ser formulado como un problema sobre-determinado. En este caso,  $\mathbf{G}$  no es una matriz cuadrada y no podemos usar la (14) ni la (31) directamente, así que debemos manipular más nuestra formulación básica del problema (12).

Un ejemplo de un problema sobredeterminado es la desconocida ubicación de un terremoto con más de cuatro tiempos de arribo. Ninguna ubicación predecirá perfectamente todos los tiempos de arribo, así que debemos buscar la ubicación que proveerá la mejor predicción. El mejor ajuste es generalmente definido como el modelo que tiene la más pequeña **residual** o diferencia entre datos observados y estimados. De la ecuación (12) podemos escribir una ecuación que mide el error del modelo:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{d} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}] \quad (32)$$

Si el modelo ajusta exactamente a todos los datos,  $\mathbf{E}$  sería un vector de  $n$  elementos iguales a cero. Como este no es generalmente el caso, el problema inverso busca un modelo que minimice  $\mathbf{E}$ . La forma más común de hacer esto es escribiendo una ecuación para los errores al cuadrado.

$$\mathbf{E}^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{d}_i - \sum_{j=1}^m \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{m}_j)^2 \quad (33)$$

y forzamos a que  $\mathbf{E}^2$  sea mínimo. Para ello tomamos las derivadas de  $\mathbf{E}^2$  con respecto a los parámetros del modelo y luego igualamos a cero:

$$\frac{\partial E^2}{\partial m_k} = 2 E \frac{\partial E}{\partial m_k} = -2 \sum_{i=1}^n (d_i - \sum_{j=1}^m G_{ij} \cdot m_j) \cdot G_{ik} = 0 \quad (34)$$

Reagrupando términos quedará,

$$\sum_{i=1}^n d_i G_{ik} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m G_{ij} \cdot m_j \right) G_{ik} \quad (35)$$

Que puede ser escrita en notación matricial como:

$$\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} \cdot \mathbf{m} \quad (36)$$

Esta es una forma muy útil llamada **ecuaciones normales**.  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  es ahora una matriz cuadrada, de modo que tiene una inversa (mientras esta no sea singular!). Más aún,  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  es simétrica, lo que significa que sus auto valores son reales y positivos. Por lo tanto podemos escribir una ecuación de la forma:

$$\mathbf{m} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{d} \quad (37)$$

donde  $[\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1} \cdot \mathbf{G}^T = \mathbf{G}^{-g}$  es llamada la **inversa generalizada de G**. Estrictamente hablando, esta es llamada la **inversa de mínimos cuadrados**; si  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  es no singular, entonces es la inversa generalizada. La ecuación 37 provee la mejor solución para  $\mathbf{m}$  en mínimos cuadrados (el error cuadrático es minimizado). Esta ecuación, y sus modificaciones, es una de las más importantes ecuaciones en geofísica para los problemas lineales y no lineales. En general, en la mayoría de los casos son no lineales. Entonces  $\mathbf{m}$  servirá solamente como una corrección al modelo inicial, y debemos repetir el proceso inverso con  $\mathbf{G}$  actualizado para el nuevo modelo.

Podemos resolver la ecuación 37 por el método de descomposición del valor singular. La matriz  $\mathbf{G}$  tiene dimensiones  $n \times m$ , de modo que  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  es de dimensión  $m \times m$  y  $\mathbf{G} \mathbf{G}^T$  es de dimensión  $n \times n$ . Puesto que estas matrices son cuadradas, podemos usar la ecuación 29 para resolver la inversa de  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ , en términos de las matrices  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{U}$  de auto vectores para  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  en  $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^T = \mathbf{G} \mathbf{G}^T$  respectivamente. De la ecuación 29 podemos escribir:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} = [\mathbf{V} \Lambda_{m(2)} \mathbf{V}^T] \quad (38)$$

Donde  $\mathbf{V}$  es de  $m \times m$ , y la matriz de los autovalores  $\Lambda_{m(2)}$  también es  $m \times m$ . Estos autovalores son justamente los valores cuadrados de los autovalores de  $\mathbf{G}$  que los identificamos con el subíndice (2). Este corresponde a la descomposición de los valores singulares de  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ . Existe un valor singular para cada parámetro del modelo, aunque no hay garantía que estos sean distintos de cero. La matriz  $\mathbf{V}$  contiene los auto vectores asociados con estos valores singulares, y por eso decimos que expande el espacio del modelo". Del mismo modo podemos escribir la descomposición de  $\mathbf{G} \mathbf{G}^T$ :

$$\mathbf{G} \mathbf{G}^T = [\mathbf{U} \Lambda_{n(2)} \mathbf{U}^T] \quad (39)$$

Donde  $\mathbf{U}$  es ahora una matriz de auto vectores  $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ , que expanden el espacio de los datos". Note que  $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$  tiene dimensión  $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$  con  $\mathbf{n} > \mathbf{m}$ , pero solamente hasta los  $\mathbf{m}$  auto valores distintos de cero, y son los mismos de la ecuación 38. Las restantes  $\mathbf{n} - \mathbf{m}$  filas y columnas de  $\Lambda_n$  son cero, aunque los correspondientes auto vectores necesiten ser distintos de cero.

En la ecuación 37 necesitamos  $[\mathbf{G}\mathbf{G}^T]^{-1}$ . Nuestra formulación de auto valores nos permite llevar a cabo la inversa necesariamente:

$$[\mathbf{G}\mathbf{G}^T]^{-1} = [\mathbf{V}^T]^{-1}[\Lambda_{m(2)}]^{-1}\mathbf{V}^{-1} \quad (40)$$

La inversa de  $\mathbf{V}^T$  es justamente  $\mathbf{V}$ , y similarmente,  $\mathbf{V}^{-1}$  es  $\mathbf{V}^T$ . Entonces, podemos reescribir la ecuación 40 como:

$$[\mathbf{G}^T\mathbf{G}]^{-1} = \mathbf{V}[\Lambda_{m(2)}]^{-1}\mathbf{V}^T \quad (41)$$

Ahora podemos usar la ecuación 41 para escribir la inversa generalizada,  $[\mathbf{G}^T\mathbf{G}]^{-1}.\mathbf{G}^T = \mathbf{G}^g$ . Primero consideremos  $\mathbf{G}^T$ . Mientras esta sea una matriz no cuadrada de dimensiones  $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ , podemos descomponerla usando la ecuación 29, si consideramos solo hasta los  $\mathbf{m}$  auto vectores en la matriz  $\Lambda_m$ . Esto nos permite utilizar la ecuación 29 como:

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\Lambda_m\mathbf{V}^T \quad (42)$$

$$\mathbf{G}^T = \mathbf{V}\Lambda_m\mathbf{U}^T \quad (43)$$

Combinando la ecuación 41 con la 43, y reconociendo que las matrices de los auto-vectores son las mismas para  $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^T$ , tenemos:

$$\mathbf{G}^g = [\mathbf{G}^T\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^T = \mathbf{V}[\Lambda_{m(2)}]^{-1}\mathbf{V}^T [\mathbf{V}\Lambda_m\mathbf{U}^T] \quad (44)$$

$$\mathbf{G}^g = \mathbf{V}[\Lambda_{m(2)}]^{-1}\Lambda_m\mathbf{U}^T \quad (45)$$

Recordando que los auto valores en  $\Lambda_{m(2)}$  son simplemente los cuadrados de los de  $\Lambda_m$ , encontramos que:

$$\mathbf{G}^g = [\mathbf{G}^T\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^T = \mathbf{V}\Lambda_m^{-1}\mathbf{U}^T \quad (46)$$

Donde la matriz de los auto vectores es de la forma de la ecuación 31. Los cuadrados de los auto valores de la ecuación 46 son llamados valores singulares (la mayoría de los algoritmos ajustan los cálculos de la inversa de  $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ , y estos son arreglados de modo que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n \geq 0$ ).

### Errores, Datos redundantes y Resolución.

En la discusión previa hemos supuesto que todos los datos son independientes y que cada parámetro del modelo afectó a todos los datos. Para el problema de la localización de un terremoto, esta suposición es válida, pero no para muchos otros problemas inversos de la geofísica. En estos casos,  $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$  será singular, con al menos un valor propio igual a cero, y la ecuación 46 se modifica ligeramente. Las matrices  $\mathbf{V}$ ,  $\Lambda$  y  $\mathbf{U}$  son redefinidas como sistemas de  $\mathbf{p}$  auto valores no nulos:

$$\Lambda_p = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_3 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \lambda_p \end{bmatrix} \quad (47)$$

$\mathbf{V}_p$  es la matriz de los auto-valores asociados con los auto valores no nulos de  $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ , mientras  $\mathbf{U}_p$  es la matriz de los auto-valores asociados con los auto valores no nulos de  $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ .  $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$  tienen los mismos p auto-valores no nulos, de modo que es posible escribir:

$$\mathbf{G}_p^{-1} = \mathbf{V}_p\Lambda_p^{-1}\mathbf{U}_p^T \quad (48)$$

donde  $\mathbf{G}_p^{-1}$  es ahora la inversa generalizada y  $\mathbf{G} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{V}^T = \mathbf{V}_p\Lambda_p\mathbf{U}_p^T$ . La restricción es para una limitada porción del modelo espacial expandido por los auto vectores  $\mathbf{V}_p$ , significa que hay una parte no única del modelo que no puede ser detectada por la inversión, mientras la limitación para la parte de los datos espaciales expandidos por los auto vectores  $\mathbf{U}_p$ , significa que hay aspectos de los datos que no pueden ser ajustados por el modelo. El problema puede ser resuelto, pero se debe estar al tanto de las limitaciones de la solución.

El ecuación 48 es una herramienta muy general para resolver el problema inverso, pero necesitamos volver un paso atrás y evaluar el significado de la inversa. En particular, deberíamos preguntarnos, “¿Es única la solución, cuán bien podemos determinar cada uno de los parámetros del modelo? Y ¿Cuán importantes son las observaciones individuales para nuestra solución?”. Podemos escribir el modelo obtenido de la ecuación 48 como:

$$\mathbf{m}_p = \mathbf{G}_p^{-1} \mathbf{d} \quad (49)$$

Recordemos que  $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$  y  $\mathbf{m}$  es el modelo espacial completo. Luego  $\mathbf{m}_p$  se relaciona con  $\mathbf{m}$  por

$$\mathbf{m}_p = \mathbf{G}_p^{-1} \mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{V}_p\Lambda_p^{-1}\mathbf{U}_p^T\mathbf{U}_p\Lambda_p\mathbf{V}_p^T\mathbf{m} = \mathbf{V}_p \mathbf{V}_p^T\mathbf{m} \quad (50)$$

A la matriz  $\mathbf{R} = \mathbf{V}_p \mathbf{V}_p^T$  se la llama **Matriz Resolución**. Las columnas de esta matriz indican la calidad del modelo verdadero en los varios parámetros del modelo inversión. Idealmente, podríamos obtener una diagonal de la matriz resolución, recuperando el modelo completo. El cálculo de la matriz resolución es esencial para evaluar el resultado de la inversión.

Agregamos dos definiciones más. La **matriz densidad de información** es dada por:

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}_p\mathbf{U}_p^T \quad (51)$$

Y la **matriz covarianza** que es dada por

$$\mathbf{c} = \mathbf{V}_p\Lambda_p^{-2}\mathbf{V}_p^T \quad (52)$$

Donde los elementos de  $\Lambda_p^{-2}$  son  $(1/\lambda_1^2, 1/\lambda_2^2, \dots, 1/\lambda_p^2)$ . Las ecuaciones 50, 51 y 52 están todas relacionadas y pueden darnos una vista física interior de la solución de inversión. El rango de la matriz  $\mathbf{G}_p$ , se define como  $p$ , o el número no nulo de valores singulares. Pequeños valores singulares causan una mayor varianza en la solución (ver ecuación 52). Entonces pequeños auto valores reducen más la estabilidad de la inversa. Si se descartan los auto-valores más pequeños, aumenta la estabilidad. Sin embargo, esto disminuye la resolución. Si todos los parámetros del modelo son asociados con los valores singulares no nulos, entonces  $\mathbf{R}$  es una matriz identidad y tenemos una **resolución perfecta**. Si disminuye el número de valores singulares,  $\mathbf{R}$  se aleja de ser una matriz identidad.

Generalmente intentamos optimizar esta compensación entre resolución y estabilidad usando un corte en la razón entre un auto valor dado y el más grande. El **número condición** es definido como:

$$\gamma = \frac{\lambda_{\text{máx}}^{-1}}{\lambda_{\text{mín}}^{-1}} \quad (53)$$

Elegimos este número condición para determinar el número de valores singulares a conservar. Finalmente, es claro que los errores de medición causarán errores en la determinación de los parámetros del modelo. Se asume generalmente que los errores asociados con los datos son aleatorios con la **distribución gaussiana**. Esto significa que un dato cualquiera  $\mathbf{d}$  tiene un 95% de probabilidad de caer dentro de  $\pm 2\sigma$  del valor verdadero, donde  $\sigma$  es la desviación estándar. Los errores en los datos mapean a los errores en los parámetros del modelo por la ecuación:

$$\sigma_m^2 = \mathbf{G}^{-1} \sigma^2 [\mathbf{G}^{-1}]^T \quad (54)$$

### Ejemplo de la Inversa Generalizada para la localización de terremotos.

Los principios de la inversión generalizada son mejor ilustrados con un ejemplo. Consideremos el caso de un terremoto que ocurrió en un semiespacio homogéneo. Las ondas  $\mathbf{P}$  fueron registradas en seis estaciones sismológicas. La Tabla 1 muestra la ubicación de cada estación (en coordenadas) y los tiempos de arribo de las ondas  $\mathbf{P}$ . Los tiempos de arribo fueron calculados exactamente y se les agregó un ruido para simular errores no correlacionados en los datos.

Para comenzar el proceso de inversión, primero “estimamos” o predecimos una solución ( $\mathbf{x}_0=21, \mathbf{y}_0=21, \mathbf{z}_0=12, \mathbf{t}_0= 30.0$ ), desde la cual podemos calcular el vector de los datos.

**Tabla 1: Ejemplo de Localización de Epicentro**

Estación	X	Y	$T_p$	$d_i-d_0$
1	2.0	31.0	40.02	5.77
2	3.0	-5.0	42.76	6.93
3	50.0	58.0	41.07	2.70
4	55.0	47.0	40.38	2.78
5	81.0	3.0	45.05	4.05
6	-9.0	-18.0	45.75	7.02

Las diferencias entre los datos calculados y observados ( $\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_0$ ) dan el vector de los datos en la forma de la ecuación 12. Claramente se ve que nuestro valor inicial estimado no es muy bueno.

Ahora necesitamos determinar  $\mathbf{G}$ . En este ejemplo es muy sencillo puesto que las derivadas analíticas de la ecuación 6 evaluadas en cero son fáciles de obtener.

$$\frac{\partial t_i}{\partial x} = \frac{-(x_i - x_0)}{v^2(t_i - t_0)} ; \quad \frac{\partial t_i}{\partial y} = \frac{-(y_i - y_0)}{v^2(t_i - t_0)} ; \quad \frac{\partial t_i}{\partial z} = \frac{-(z_i - z_0)}{v^2(t_i - t_0)} ; \quad \frac{\partial t_i}{\partial t_0} = 1 \quad (55)$$

Lo que nos da:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.1331 & 0.0700 & 0.0841 & 1.000 \\ 0.0917 & 0.1325 & 0.0612 & 1.000 \\ -0.1030 & -0.1315 & 0.0426 & 1.000 \\ -0.1318 & -0.1004 & 0.0465 & 1.000 \\ -0.1621 & 0.0486 & 0.0324 & 1.000 \\ 0.1021 & 0.1327 & 0.0408 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Los auto-valores de  $\mathbf{G}$ , o los valores singulares no nulos están dados por:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2.452 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0342 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2101 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0199 \end{bmatrix} \quad (57)$$

con los correspondientes auto vectores

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.0117 & 0.7996 & -0.5854 & -0.1327 \\ 0.0018 & 0.5981 & 0.7961 & 0.0915 \\ 0.0512 & 0.0524 & -0.1528 & 0.9855 \\ 0.9986 & 0.0056 & -0.0005 & 0.0522 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Aún antes de obtener una solución,  $\mathbf{\Lambda}$  y  $\mathbf{V}$  dan una valiosa visión del problema a resolver. Cada elemento de un particular auto vector tiene dependencia con un auto valor a un dado parámetro del modelo. Por ejemplo, el mayor auto valor, 2.452, está asociado con el auto vector en la primera columna de  $\mathbf{V}$ . Cada elemento en este vector está relacionado a un parámetro del modelo. El cuarto parámetro del modelo,  $t_0$ , el tiempo origen, domina este auto vector. El vector “apunta” en la dirección de  $t_0$ , Este auto valor es mucho más grande que los tres restantes, y por lo tanto el parámetro del modelo estimado es más estable. En otras palabras, nuestra inversión estimada para los cambios en el tiempo origen es más estable. Por otro lado, el auto valor más pequeño es 0.0199, con el correspondiente auto vector dominado por el tercer parámetro del modelo,  $z$ , la profundidad de foco. Entonces, los cambios estimados para la profundidad son la parte menos estable del proceso de inversión. Como veremos brevemente, tenemos dificultad en determinar la verdadera profundidad dado el modelo inicial que elegimos.

Puesto que hay cuatro auto-valores no nulos, la resolución del modelo es perfecta, pero podemos observar la matriz densidad de datos para ver lo importante que es cada observación para obtener la solución (59):

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{0.8120} & 0.2605 & 0.0987 & 0.1328 & -0.2265 & 0.0775 \\ 0.2605 & \mathbf{0.5887} & -0.2663 & -0.0232 & 0.2741 & 0.1662 \\ 0.0987 & -0.2663 & \mathbf{0.6142} & 0.3450 & 0.0160 & 0.1922 \\ 0.1328 & -0.0232 & 0.3450 & \mathbf{0.3906} & 0.2881 & -0.1333 \\ -0.2265 & 0.2741 & 0.0160 & 0.2881 & \mathbf{0.6951} & -0.0467 \\ -0.0776 & 0.1662 & 0.1922 & -0.1333 & -0.0467 & \mathbf{0.8992} \end{bmatrix}$$

Si observamos los términos de la diagonal, podemos obtener una medida relativa de la importancia de cada estación. Los valores más grandes (0.8992 y 0.8120) están asociados a las estaciones 1 y 6. Estas estaciones restringen la solución. La estación 4 da la menor restricción, aunque la mayoría de los datos son de igual importancia. Los términos de la diagonal dan una medida de la influencia que las otras estaciones tienen sobre un valor dado. La inversión predice un cambio para el modelo  $\mathbf{m}$ , que es dado por

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 8.268 \\ 9.704 \\ 9.063 \\ 4.480 \end{bmatrix} \quad (60)$$

La suma de los errores cuadráticos para el modelo inicial fue 161.8; para la solución inversa es 0.0579. La Tabla 2 compara los epicentros obtenidos con los valores del modelo verdadero para varias iteraciones. Note que aunque  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{t}$  son muy cercanos a los valores “verdaderos”,  $\mathbf{z}$  no lo es. En efecto, la inversión inicial “empujó”  $\mathbf{z}$  en la dirección errónea! Esto es consecuencia de nuestro pobre modelo inicial predicho. Después de seis iteraciones obtenemos un resultado que está muy próximo a la localización verdadera. Recordemos que hemos agregado ruido a los datos, de modo que la inversión no será exacta. Es común que las inversiones comiencen con un modelo pobre para poner dentro un mínimo local, nunca para aproximar la solución actual. Este es un resultado de la linealización del problema, y se usan varias estrategias para mover un rango más amplio de parámetros y buscar un mínimo global.

### Aplicación con MatLab.

El valor de la velocidad utilizado en el ejemplo es de 5.8 km/s y la ecuación 55 será evaluada de la siguiente forma

$$\frac{\partial t_i}{\partial x} = \frac{-(x_i - x_0)}{v\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2}}$$

Los datos del sismo serán cargados en el archivo SISMO.txt con el siguiente formato

$$\frac{\partial t_i}{\partial y} = \frac{-(y_i - y_0)}{v\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2}}$$

X	Y	Z	t
2.0	31.0	0.0	40.02
3.0	-5.0	0.0	42.76
50.0	58.0	0.0	41.07
55.0	47.0	0.0	40.38
81.0	3.0	0.0	45.05
-9.0	-18.0	0.0	45.75

$$\frac{\partial t_i}{\partial z} = \frac{-(z_i - z_0)}{v\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2}}$$

## Tabla de resultados obtenidos

Parámetros	Valor estimado	1era Iteración	2da Iteración	3er Iteración	4ta Iteración	5ta Iteración	6ta Iteración
X	21	29.3	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0
Y	21	30.7	30.2	30.2	30.2	30.2	30.2
Z	12	21.1	11.1	9.1	8.9	8.9	8.9
T	30	34.5	35.0	35.0	35.0	35.0	35.0

% Programa de LOCALIZACION DE HIPOCENTROS, basado en el Libro MODERN GLOBAL SEISMOLOGY de T. Lay, T. Wallace del año 1995, Páginas 217 a 235.

% Se realizaron modificaciones en las fórmulas 6.55 del libro.

% Es una aplicación de la TEORIA DE INVERSAS GENERALIZADAS en el CÁLCULO DEL HIPOCENTRO y TIEMPO ORIGEN de un SISMO.

% Programa desarrollado por el ING. JOSE R. GOLBACH

clc, clear, home

disp(' PROGRAMA LOCALIZACION DE HIPOCENTRO.')

disp(' Se calcula por el Método SVD')

disp(' ')

% Carga de los datos.

% Se crea un archivo en el editor de textos con nombre SISMO.TXT

% Los datos son las coordenadas X,Y,Z,t, (Coordenadas de la estación y el tiempo)

load ('SISMO.txt')

disp(' ')

pause

Datos=SISMO

% n es el número de estaciones y m el número de incógnitas

[n,m] = size(Datos);

G=zeros(n,m);

disp(' ')

disp(' Ingrese las Coordenadas aproximadas del Hipocentro (Km)')

disp(' ')

m0(1,1)=input('X0= ');

m0(2,1)=input('Y0= ');

m0(3,1)=input('Z0= ');

disp(' ')

m0(4,1)=input(' Ingrese tiempo origen aproximado en (s) t0= ');

disp(' ')

Vp=input(' Ingrese Valor de Velocidad de onda P(Km/s) ');

disp(' ')

%Vp=input(' Vp= ');

disp(' ')

% Construcción de la matriz de ecuaciones de observación. Se modifica el cálculo de la

% derivada de la ecuación (6.55) por la siguiente:  $\partial t/\partial x = -(x_i-x_0)/(v*\sqrt{((x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2+(z_i-z_0)^2)})$

% Lo mismo para las variables x,y,z, particularizadas para los valores aproximados x0,y0,z0.

k1=1;

NroIt=input(' ¿Cuántas Iteraciones Realiza? ');

while k1<=NroIt

G=ones(n,4);

d=zeros(n,1);

Aux=0;

for i=1:n

Aux=0;

for j=1:m-1

```

        coef0=-(Datos(i,j)-m0(j,1));
        Aux=Aux+coef0*coef0;
        G(i,j)=coef0;
    end
    for j=1:m-1
        G(i,j)=G(i,j)/(Vp*sqrt(Aux));
    end
    d(i)=Datos(i,m)-(m0(m,1)+(sqrt(Aux))/Vp);
end
disp(' Matriz de coeficientes ')
G
pause
disp(' ')
disp(' Matriz de términos independientes ')
d
pause
% Aplicación de la descomposición del valor singular SVD a la matriz G. Se podría haber
% usado directamente la opción [U,S,V]=SVD(G,0) para el cálculo, la cual da resultados sin
% los ceros, pero se presenta tal cual se da en el libro.
[u,s,v]=svd(G);
%[u,s,v]=svd(G,0)
% Se eliminan los ceros de la diferencia entre n-m.
for k=n:-1:m+1
    s(k,:)=[];
    u(:,k)=[];
end
% D es la matriz densidad de datos
disp(' ')
disp(' Matriz de Densidad de Datos ')
D=u*u'
pause
disp(' ')
% R es la matriz resolución
disp(' ')
disp(' Matriz de Resolución ')
R=v*v'
pause
disp(' ')
% Determinación si un autovalor es igual a cero
l0=0;
for k=1:m
    if abs(s(k,k))<0.0
        l0=l0+1;
        NRC(l0)=k;
    end
end
% Eliminación de filas y columnas de autovalores iguales a cero.
% Eliminación del correspondiente autovector
if l0 ~= 0
    for k=length(NRC):-1:1
        NFC=NRC(k);
        s(NFC,:)=[];
        s(:,NFC)=[];
    end
end

```

```

        u(:,NFC)=[];
        v(:,NFC)=[];
    end
end
% FC es la relación de corte entre el mayor y mínimo valor ecuación 6.53
FC=s(length(s),length(s))/s(1,1);
I0=0;
for k=1:m
    if abs(s(k,k))<FC
        I0=I0+1;
        NRC(I0)=k;
    end
end
% Si se encuentra un autovalor menor a FC, se lo elimina con su correspondiente autovector.
if I0 ~= 0
    for k=length(NRC):-1:1
        NFC=NRC(k);
        s(NFC,:)=[];
        s(:,NFC)=[];
        u(:,NFC)=[];
        v(:,NFC)=[];
    end
end
% s Es la matriz de autovalores sin valores nulos.
disp(' ')
disp(' Matriz de Autovalores ')
s
pause
for k=1:length(s)
    s(k,k)=1/s(k,k);
end
% m1 Es la solución del sistema
disp(' ')
disp(' Matriz Solución ');k1
m1= v*s*u*d
% Se modifican los valores aproximados sumando la solución
for i2=1:4
    m0(i2,1)=m0(i2,1)+m1(i2);
end
disp(' ')
disp(' Valores Solución de los parámetros ')
m0
pause
k1=k1+1;
clc
end
m0
disp(' FIN...')
```