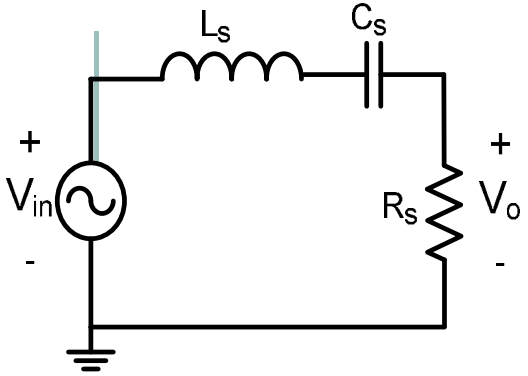
FUNDAMENTOS DE TELECOMUNICACIONES

ANEXO TEMA 3: CIRCUITOS RESONANTES

Resonancia Serie



$$Z_S(j\omega) = R_S + j\omega L_S + \frac{1}{j\omega C_S} = R_S + j\left(\omega L_S - \frac{1}{\omega C_S}\right)$$

$$\left|Z_S(j\omega)\right| = \sqrt{R_S{}^2 + \left(\omega L_S - \frac{1}{\omega C_S}\right)^2}$$

$$\varphi(j\omega) = arctg\,\frac{\omega^2 L_S C_S - 1}{\omega C_S R_S}$$

El circuito está en resonancia cuando la parte reactiva es cero, o sea cuando la parte imaginaria es nula:

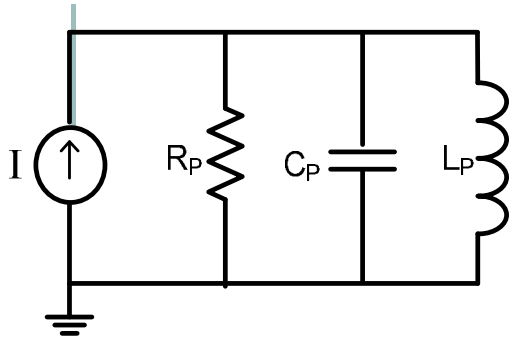
$$\omega_o L_S - \frac{1}{\omega_o C_S} = 0 \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{1}{L_S C_S}}$$

ω_o= Frecuencia de resonancia

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_S C_S}}$$

Para este valor de ω la impedancia del circuito en serie es: $\mathbf{Z}(j\omega_o) = R_S$

Circuito resonante paralelo



$$\mathbf{Y}(j\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$Y_P(j\omega) = \frac{1}{R_P} + j\omega C_P + \frac{1}{j\omega L_p} = \frac{1}{R_P} + j\left(\omega C_P - \frac{1}{\omega L_P}\right)$$

El circuito está en resonancia cuando la parte reactiva es cero, o sea cuando la parte imaginaria es nula:

$$\omega_o L_p - \frac{1}{\omega_o C_p} = 0 \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{1}{L_p C_p}}$$

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_p C_p}}$$

Y en este valor de ω la admitancia del circuito en paralelo es:

$$\mathbf{Y}(j\omega_o) = G = 1/R_P$$

Circuitos resonantes

Esta frecuencia ω_o, a la que la impedancia del circuito en serie o la admitancia del circuito en paralelo es puramente real, se llama frecuencia resonante, y los circuitos mismos, en esta frecuencia, se dice que están en resonancia.

En la resonancia, la tensión y la corriente están en fase y, por consiguiente, el ángulo de fase es cero y el factor de potencia es unitario.

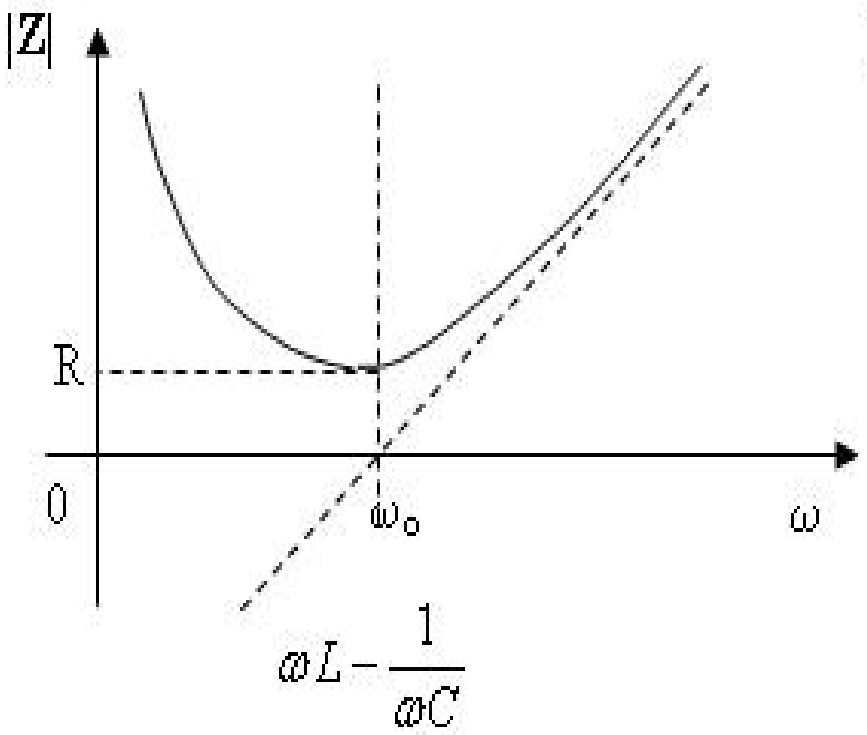
En el caso en serie, a la frecuencia de resonancia la impedancia es un mínimo y, por consiguiente, la corriente es máxima para una tensión determinada.

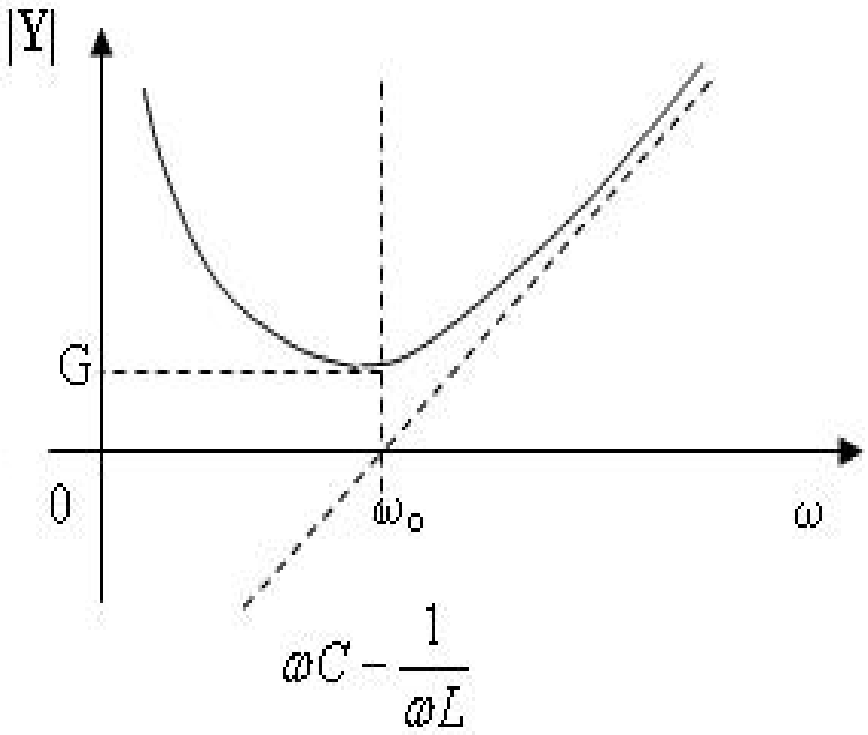
En el caso de resonante paralelo, a la frecuencia de resonancia la impedancia es máxima y por consiguiente la corriente es mínima para una tensión determinada

A bajas frecuencias, la impedancia del circuito en serie está dominado por el término capacitivo y la admitancia del circuito en paralelo está dominada por el término inductivo.

Circuitos resonantes

A altas frecuencias, la impedancia del circuito en serie está dominado por el término inductivo y la admitancia del circuito en paralelo está dominada por el término capacitivo.





Circuitos resonantes

Un circuito resonante es una combinación de elementos sensibles a la frecuencia, conectados para obtener una respuesta selectora de frecuencia.

El factor de calidad Q de un circuito resonante serie se define como la proporción de la potencia reactiva del inductor o el capacitor entre la potencia promedio del resistor en la resonancia, es decir:

$$Q = \frac{\text{P reactiva}}{\text{P resistor}} = \frac{I^2 \omega_o L_S}{I^2 R_S}$$

El factor de calidad también es una señal de cuanta energía se almacena (una transferencia continua de un elemento reactivo al otro), en comparación con la que se disipa. Entre más bajo es el nivel de disipación para la misma potencia reactiva, más grande es el factor Q, y más concentrada e intensa es la región de la resonancia

$$\mathbf{Q = 2\pi \frac{\text{energía máxima almacenada}}{\text{energía disipada por ciclo}}}$$

Circuitos resonantes

Q es un coeficiente adimensional. En esencia Q es una medida de la capacidad de almacenamiento de energía de un circuito en relación con su capacidad de disipación de energía.

Para el circuito serie:

$$Q = \frac{\text{P reactiva}}{\text{P resistor}} = \frac{I^2 \omega_o L_S}{I^2 R_S} \Rightarrow Q_S = \frac{\omega_o L_S}{R_S} = \frac{1}{\omega_o C_S R_S} \Rightarrow Q_S = \frac{1}{R_S}\sqrt{\frac{L_S}{C_S}}$$

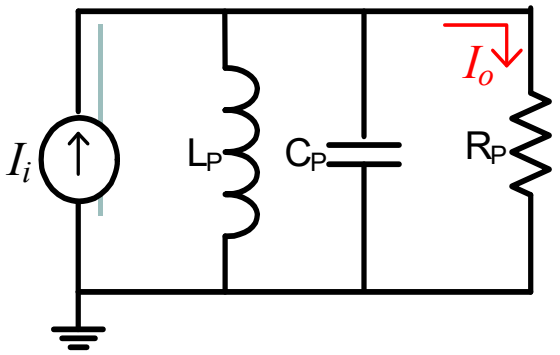
Para el circuito paralelo:

$$Q = \frac{\text{P reactiva}}{\text{P resistor}} = \frac{V^2 / \omega_o L_P}{V^2 / R_P} \Rightarrow Q_P = \frac{R_P}{\omega_o L_P} = \omega_o C_P R_P \Rightarrow Q_P = R_P\sqrt{\frac{C_P}{L_P}}$$

El factor de calidad Q también se define como:

$$Q = \frac{\omega_o}{AB}$$

Circuito resonante paralelo



La ganancia de corriente $\mathbf{I_o/I_i}$ del circuito paralelo es:

$$H = A_I = \frac{I_o}{I_i} = \frac{1}{R_p Y}$$

donde Y es la admitancia de los tres elementos en paralelo:

$$Y_P(j\omega) = \frac{1}{R_P} + j\omega C_P + \frac{1}{j\omega L_p} = \frac{1}{R_P} + j\left(\omega C_P - \frac{1}{\omega L_P}\right)$$

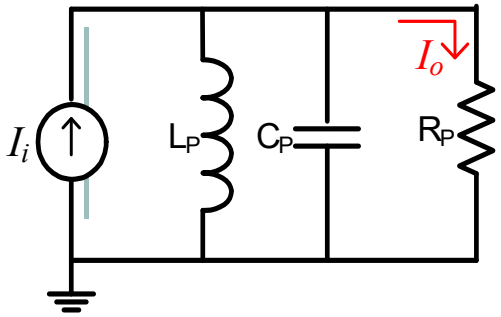
sustituyendo **Y** en la ecuación de la transferencia:

$$A_I = H = \frac{1}{1 + j(\omega C_P - 1/\omega L_P)R_P}$$

Reemplazando en la ecuación de **H**, para obtenerla en términos de Q y ω_o como sigue

$$\mathrm{H} = \frac{1}{1 + jQ(\omega/\omega_o - \omega_o/\omega)}$$

Circuito resonante paralelo



El módulo es:

$$|A_I| = |H| \frac{1}{\sqrt{\left[1 + Q^2(\omega/\omega_o - \omega_o/\omega)^2\right]}}$$

y la fase es

$$\phi = -\tan^{-1} Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)$$

Se calculan las frecuencias de media potencia ω_L y ω_H, que corresponden a $A_I=1/\sqrt{2}$. Reemplazando, se observa que $A_I=1/\sqrt{2}$ se cumple cuando:

$$Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 = 1$$

Despejando, se obtiene:

$$\omega_L = \omega_o\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)^2} - \frac{\omega_o}{2Q}$$

$$\omega_H = \omega_o\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)^2} + \frac{\omega_o}{2Q}$$

Circuito resonante paralelo

La tabla siguiente muestra la magnitud y fase de **H** a ciertas frecuencias.

ω	0	ω_L	ω_o	ω_H	∞
$\|\mathbf{H}\|$	0	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	0
ϕ	90^o	45^o	0^o	-45^o	-90^o

Circuito resonante paralelo

El ancho de banda (AB) del circuito se define como el intervalo que se encuentra entre las dos frecuencias donde la magnitud de la ganancia es 1/√2.

$$AB = \omega_H - \omega_L = \frac{\omega_o}{Q}$$

Esta ecuación muestra que el ancho de banda es inversamente proporcional a Q.

Por tanto, la selectividad de frecuencia del circuito esta determinada por el valor de Q.

Un circuito de Q alta tiene un ancho de banda pequeño y, por consiguiente, el circuito es muy selectivo.

Reemplazando el valor de Q:

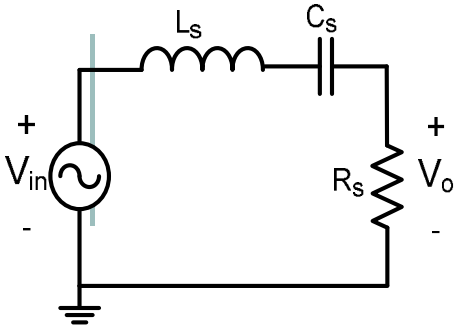
Para el circuito serie:

$$AB_S = \frac{R_S}{L_S}$$

Para el circuito paralelo:

$$AB_P = \frac{1}{R_P C_P}$$

Circuito resonante serie



La tensión de salida es:

$$V_O = R_S \frac{V_i}{R_S + j\left(\omega L_S - \frac{1}{\omega C_S}\right)} = \frac{j\omega R_S V_i}{-\omega^2 L_S + j\omega R_S + \frac{1}{C_S}}$$

La relación transferencia de tensión es:

$$Av = H = \frac{1}{1 + j(\omega L_S / R_S - 1/\omega C_S R_S)}$$

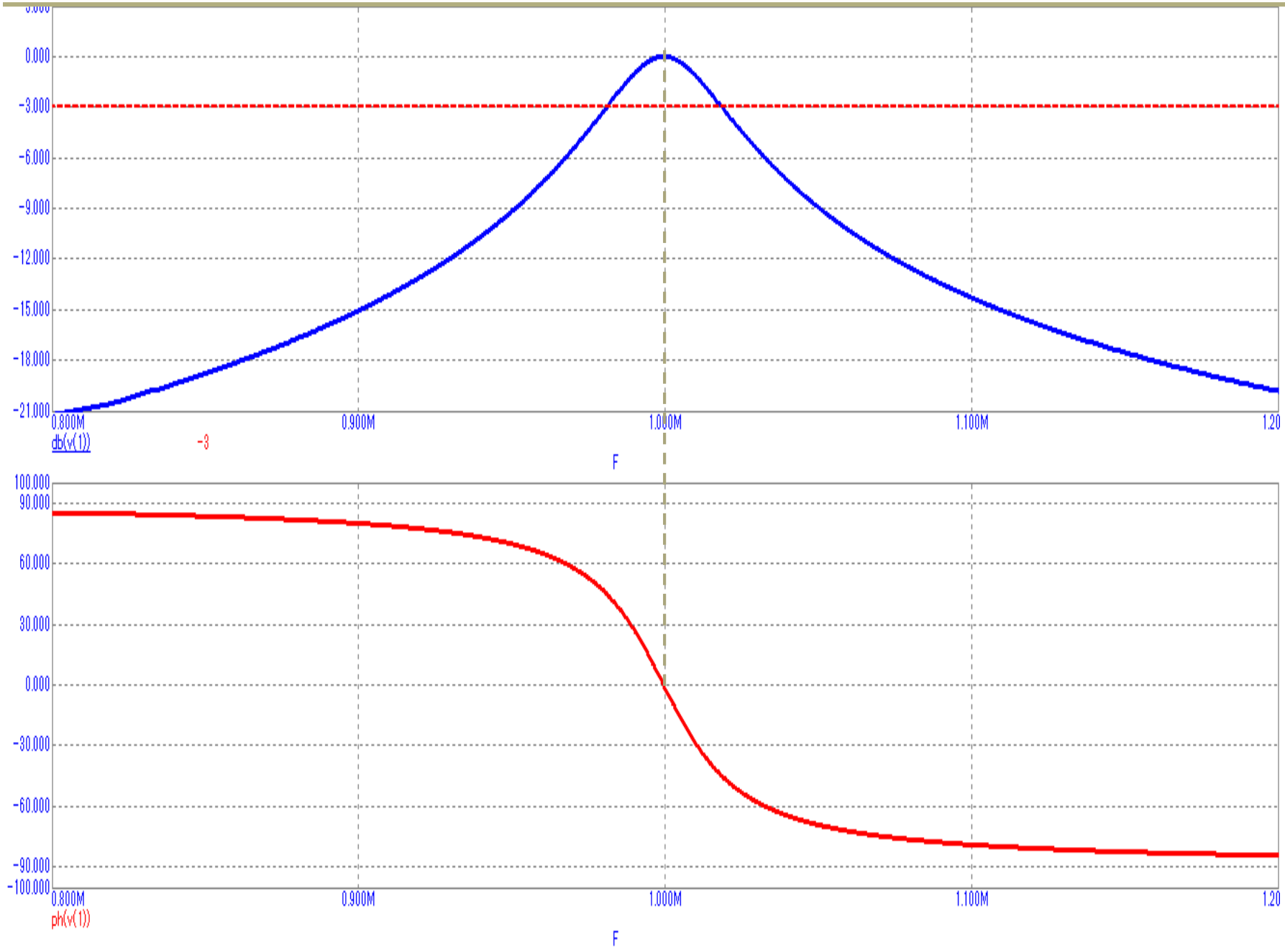
Reemplazando en la ecuación de **H**, para obtenerla en términos de Q y ω_o como sigue

$$H = \frac{1}{1 + jQ(\omega/\omega_o - \omega_o/\omega)}$$

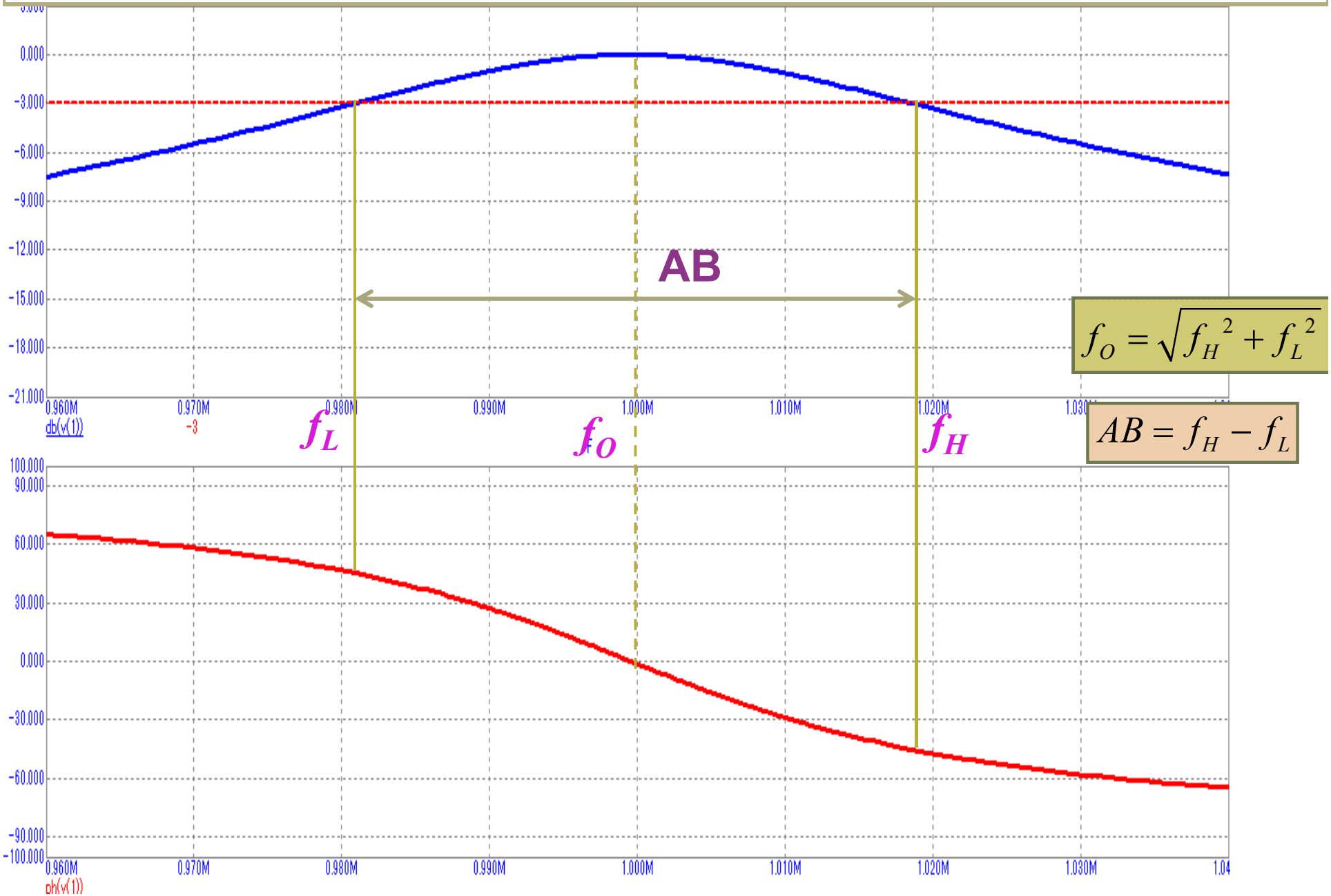
Observación: esta ecuación es igual a la ecuación obtenida para el circuito resonante en paralelo. Sin embargo, note que la definición del factor de calidad para el circuito serie es diferente de la del circuito resonante paralelo.

No obstante las demás relaciones para el ancho de banda, ω_H , ω_L son válidas para ambos circuitos.

Curva de $H=g(f)$ y $\varphi=g(f)$



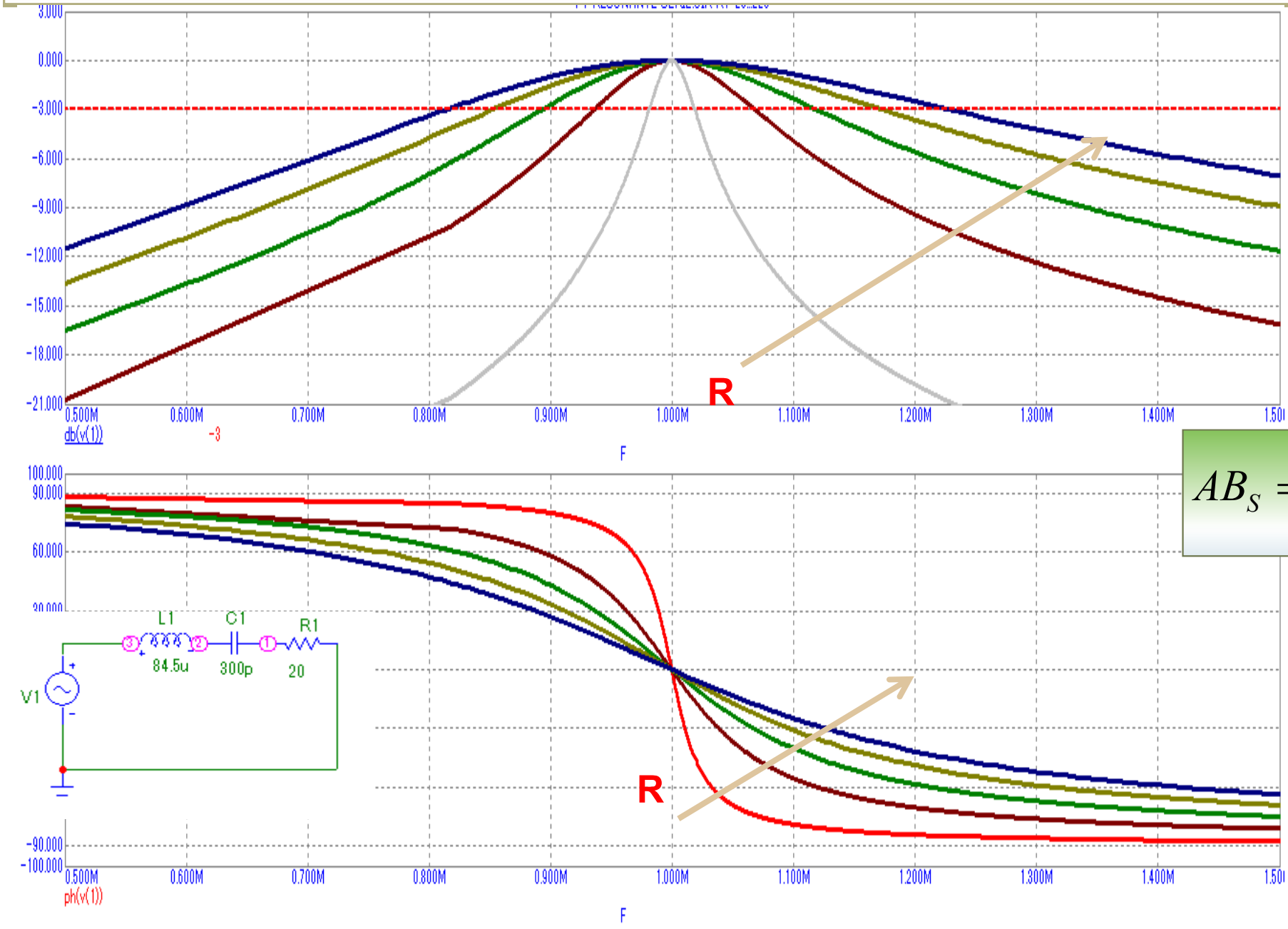
Curva de $H=g(f)$ y $\varphi=g(f)$



$$f_O = \sqrt{f_H^{\,2} + f_L^{\,2}}$$

$$AB = f_H - f_L$$

Circuito resonante serie



$$AB_S = \frac{R_S}{L_S}$$

Circuitos resonantes

Para pequeñas desviaciones de frecuencias con respecto a ω_o Q es relativamente alta y se define δ como

$$\delta = \frac{\omega - \omega_o}{\omega_o} = \frac{\omega}{\omega_o} - 1$$

δ : Desviación de frecuencia. representa la cantidad proporcional por la que la frecuencia se desvía de ω_o.

Entonces:
$$\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} = (\delta + 1) + \left(\frac{1}{\delta + 1}\right) = \frac{(\delta+1)^2 - 1}{\delta + 1} = \frac{\delta^2 + 2\delta}{\delta + 1}$$

Usando δ«1 para pequeñas desviaciones de ω_o:; o sea para frecuencias dentro del AB:

$$\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \cong 2\delta$$

Entonces **H** es

$$\mathbf{H} = \frac{1}{1 + j2Q\delta}$$

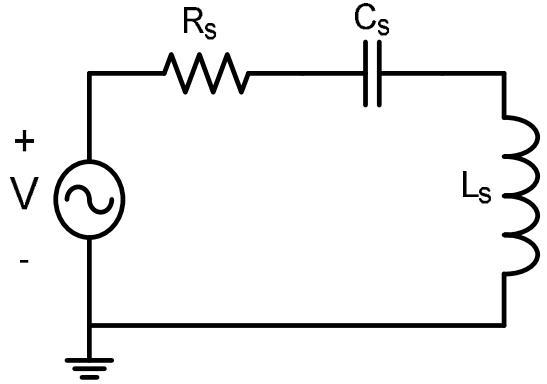
En forma polar:

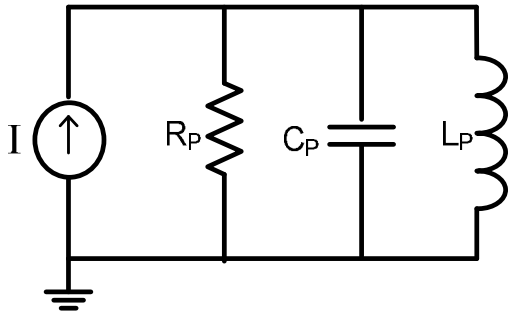
$$H = \left|\frac{V_{sal}}{V_f}\right| = \left|\frac{1}{1 + j2Q\delta}\right|$$

$$\varphi = -\tan^{-1}(2Q\delta)$$

que es una aproximación válida siempre que δ«1.

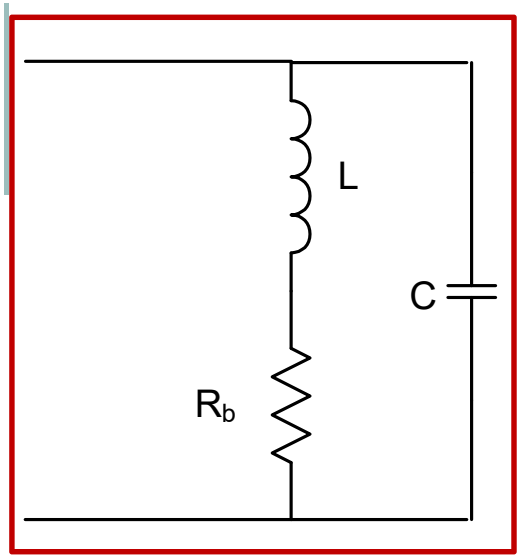
Resumen

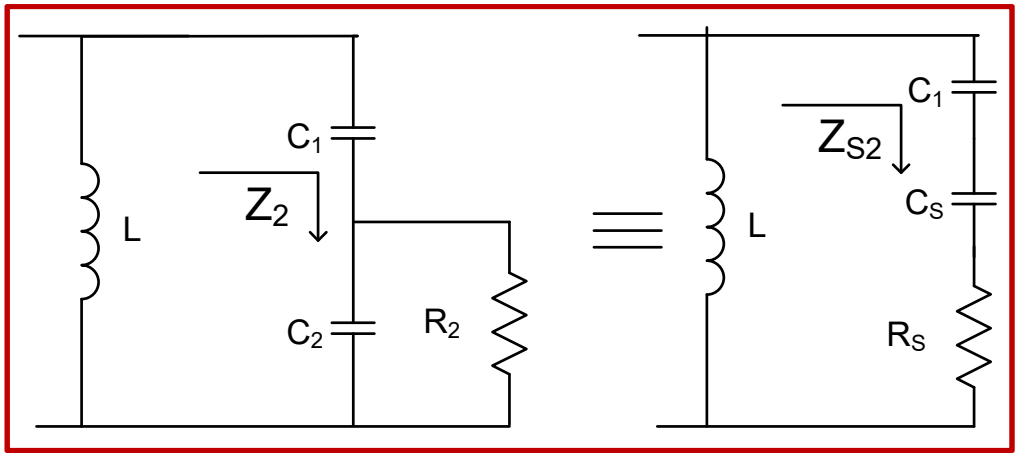


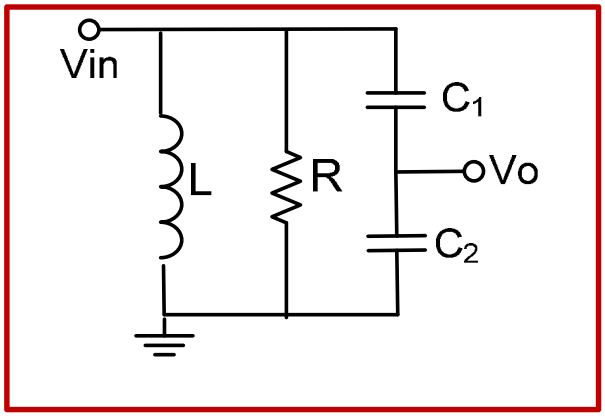


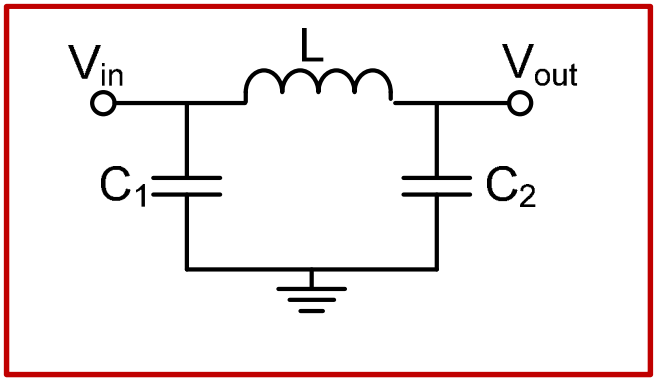
Tipo Circuito	RLC serie	RLC paralelo
frecuencia de resonancia	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
ancho de banda	$\beta = \frac{R}{L}$	$\beta = \frac{1}{RC}$
factor de calidad $Q = \frac{\omega_0}{\beta}$	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$
tensiones y corrientes	$\lvert V_L \rvert = Q \cdot V$ $\lvert V_C \rvert = Q \cdot V$ $V_L = -V_C$	$\lvert I_L \rvert = Q \cdot I$ $\lvert I_C \rvert = Q \cdot I$ $I_L = -I_C$

Otras configuraciones de circuitos resonantes

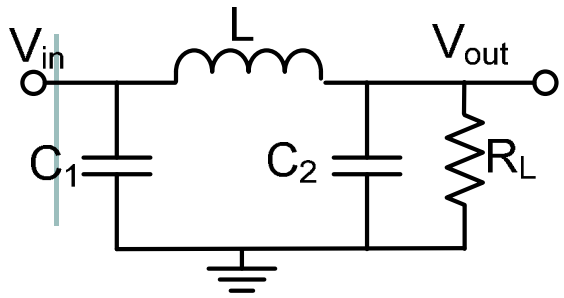








Otras configuraciones de circuitos resonantes



En resonancia se debe cumplir:

$$\sum X = 0$$

$$\frac{1}{j\omega_o C_1} + \frac{1}{j\omega_o C_2} + j\omega_o L = 0$$

$$f_o = \frac{1}{2.\pi.\sqrt{LC_{eq}}}$$

siendo:

$$C_{eq} = \frac{C_1.C_2}{C_1 + C_2}$$

La función transferencia es:

$$A_I = H = \frac{1}{1 + j(\omega C_P - 1/\omega L_P)R_P}$$