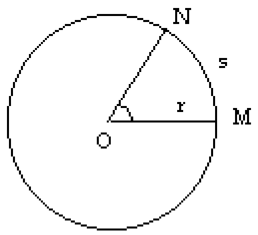
ÁNGULOS EN RADIANES

El **radián** es la unidad de ángulo plano en el Sistema Internacional de Unidades. Representa el ángulo central en una circunferencia y abarca un arco cuya longitud es igual a la del radio. Su símbolo es rad.

Se define el **radian** como el ángulo que en una circunferencia subtiende respecto del centro O un arco MN con igual longitud que el radio r.



Si la longitud *s* del arco MN coincide con la longitud de *r* , entonces el ángulo subtendido desde el centro O corresponde a 1 radian.

En general, si tenemos una circunferencia de radio *r*, y un cierto angulo α subtendiendo un arco de longitud *s*, el cociente *s/r* nos da el valor de ese ángulo en radianes.

Por otra parte, nosotros conocemos que la mitad de la circunferencia corresponde a un arco de longitud πr, mitad que equivale a un ángulo de 180° , lo cual nos permite hacer transformaciones entre radianes y ángulos:

Por ejemplo, ¿ cuántos radianes son 30° ?.

Respuesta: considerando la relación

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{x}{30}$$

tenemos que $x = \pi/6$ radianes.

Otro ejemplo, ¿ cuántos grados son 0,357 radianes ?.

Respuesta: considerando la relación

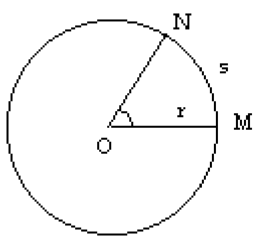
$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{0{,}357}{x}$$

tenemos que $x = 20{,}45°$.

* Es interesante también recordar que 1 radián son $180°/\pi$, es decir, 57,29... grados. Mientras que 1 grado son $\pi/180°$, o sea, 0,1745... radianes.

* PROPIEDADES INMEDIATAS

* Según esta definición de radian, puede establecerse la siguiente relación entre un ángulo α y el arco de circunferencia subtendido:



$$s = \alpha \cdot r$$

es decir, la longitud del arco s es el producto del ángulo α (en radianes) por el radio del circulo.

* Algunas equivalencias entre ángulos en grados y en radianes:

Grádos	Radian.
30°	$\pi/6$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
120°	$2\pi/3$
180°	π
270°	$3\pi/2$
360°	2π

NOTA: Es muy práctico conocer "de memoria" la tabla presente, pues con ello ganamos en "velocidad de cálculo". Algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Queremos conocer rápidamente a qué equivalen 75° , entonces:

$$75° = 60° + 15° \rightarrow \pi/3 + (1/2)\ \pi/6 \rightarrow 5\pi/12$$

Ejemplo 2: Queremos conocer rápidamente a qué equivalen 265° , entonces:

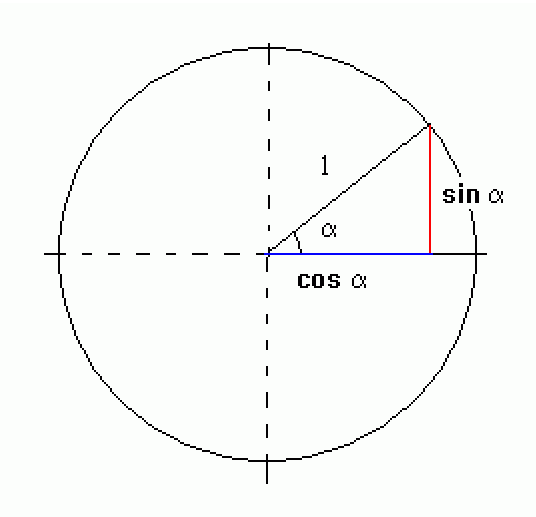
$$265° = 270° - 5° \rightarrow 3\pi/2 - (1/6)\ \pi/6 \rightarrow 53\pi/36$$

*** La circunferencia trigonométrica.**

Se trata de una circunferencia imaginaria de radio $r = 1$, lo cual conduce a que la relación $s = \alpha\ .\square r$, se reduzca a:

$$s = \alpha$$

Esta circunferencia además facilita que podamos trazar fácilmente sobre ella los valores del seno, coseno y tangente de un determinado ángulo en radianes:



Si tenemos un ángulo α en una *circunferencia trigonométrica* como la de la figura, la longitud del cateto vertical (marcado en rojo) será el valor de sin α, puesto que la hipotenusa vale 1. Análogamente, la longitud del cateto horizontal (marcado en azul) es el valor de cos α.

En el presente ejemplo tanto el seno como el coseno son positivos, pues se encuentran o bien arriba del eje horizontal, o bien a la derecha del vertical. Pero pueden darse otros casos:

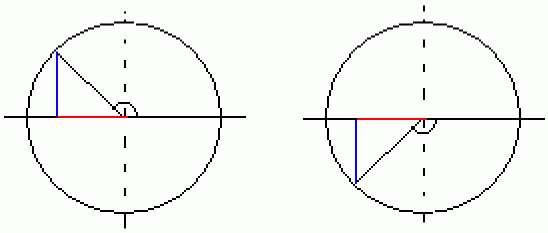


Fig. 1 Fig 2

El ángulo de la figura 1 se halla en el cuadrante II y tiene como seno un valor positivo (en azul), el coseno (en rojo) tiene un valor negativo. En la figura 2, el ángulo se halla en el cuadrante III y ambos valores son negativos.

Nosotros podemos trazar este tipo de *circunferencias trigonométricas* para hacer diversas consideraciones sobre *senos* y *cosenos* de ciertos ángulos.

Por ejemplo:

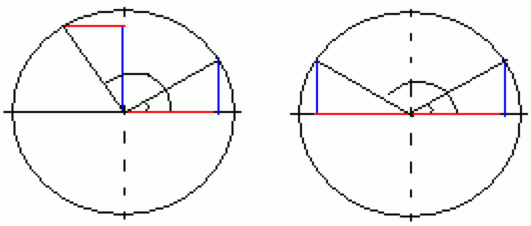


Fig. 1 Fig. 2

En la figura 1 tenemos dos ángulos que se diferencia en $\pi/2$, sean α, β, con el mayor siendo $\beta = \alpha + \pi/2$, entonces como puede apreciarse en la circunferencia trigonométrica los dos triángulos que aparecen sobre ella son iguales, <u>pero lo que es el seno para el ángulo pequeño es el coseno (con signo *negativo)* para el grande, y lo que es el coseno para el pequeño es es seno para el grande</u>. Por tanto podemos escribir:

$$\sin(\alpha + \pi/2) = \cos \alpha$$
$$\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin \alpha$$

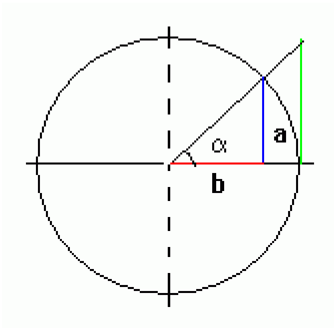
En la figura 2 tenemos dos ángulos cuya suma es π (llamados *ángulos suplementarios*), sean α, β, con el mayor siendo $\beta = \pi - \alpha$, entonces se puede apreciar que ambos senos coinciden, mientras que los cosenos tienen la misma longitud pero signos opuestos. Es decir:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

El alumno deberá acostumbrarse a manejar estas relaciones entre senos y cosenos de ángulos ayudándose de la circunferencia trigonométrica.

* **Un caso especial:** ***la tangente.***

También podemos utilizar la circunferencia trigonométrica para hacer evaluaciones de tangentes de ángulos, aunque en este caso puede ser suficiente la consideración de que la tangente es el cociente de seno entre coseno.

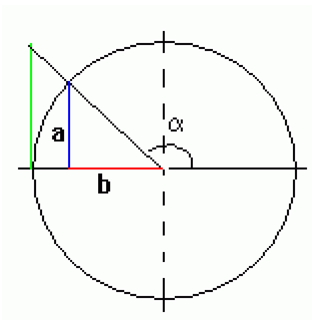


Tangente de un ángulo que se halle en el cuadrante I..

Si nos fijamos en la circunferencia de arriba, para el ángulo α tenemos que su tangente es la longitud del segmento marcado en verde, puesto que sabemos que: tg α = a/b, es decir, seno entre coseno, por lo tanto según el teorema de Tales aplicado a los triángulos semejantes:

$$\frac{\tan \alpha}{1} = \frac{a}{b}$$

ahora bien, la tangente es la línea verde de la figura de arriba que al estar sobre el eje horizontal es positiva, como efectivamente tiene que ser pues a/b es una cantidad positiva en el cuadrante I. Pero hay que tener cuidado con lo que sucede en los cuadrantes II y III. Veamos:



La tangente de un ángulo que se halle en el cuadrante II debe considerarse negativa.

Para estos casos la línea verde nos da el valor de la tangente (sin el signo), sin embargo hay que considerar que el sentido de la tangente puede diferir del de a/b. En el ejemplo de arriba, para un ángulo en el cuadrante II, la línea verde nos da el valor de la tangente sin embargo ésta es *negativa*, como así lo indica a/b. Una anomalía similar nos ocurre con los ángulos del cuadrante III, cuya línea de la tangente la tenemos que trazar hacia abajo y sin embargo esa tangente es positiva. En el cuadrante IV no hay esa anomalía.

* EJERCICIOS PARA EL ALUMNO

1) Dibuje una circunferencia trigonométrica con dos ángulos α y β, siendo α pequeño y siendo $\beta = \pi/2 - \alpha$ (dos ángulos complementarios). Establezca las relaciones entre senos y cosenos de los ángulos complementarios.

2) Considere una circunferencia trigonométrica con dos ángulos α y β, siendo α pequeño y siendo $\beta = \alpha + \pi$. Establezca las relaciones entre senos y cosenos de estos dos ángulos.

3) Sean dos ángulos α y β, siendo α pequeño y siendo $\beta = 3\pi/2 - \alpha$. Establezca con la ayuda de la circunferencia trigonométrica las relaciones entre senos y cosenos de estos dos ángulos.

4) Sean dos ángulos α y β, siendo α pequeño y siendo $\beta = -\alpha$ (también puede expresarse $\beta = 2\pi - \alpha$) . Establezca con la ayuda de la circunferencia trigonométrica las relaciones entre senos y cosenos de estos dos ángulos.