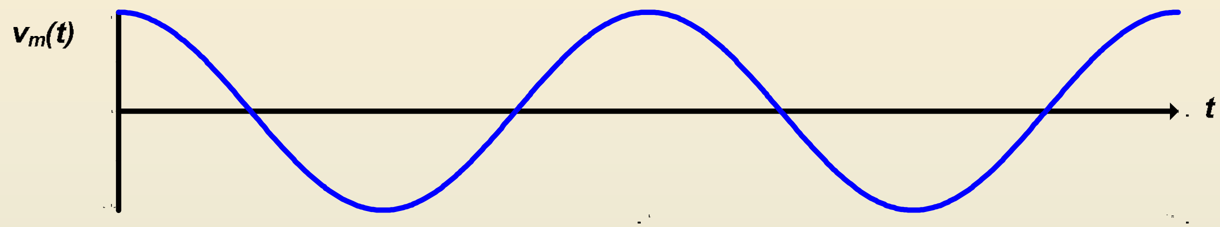
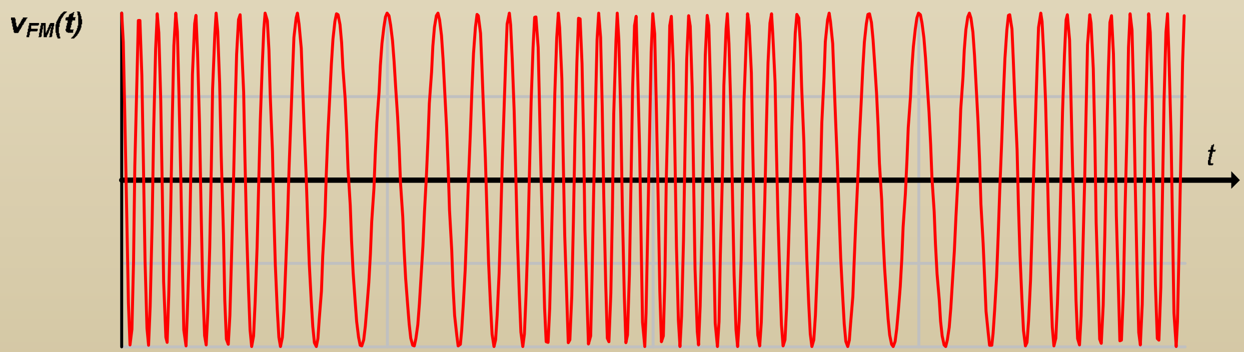
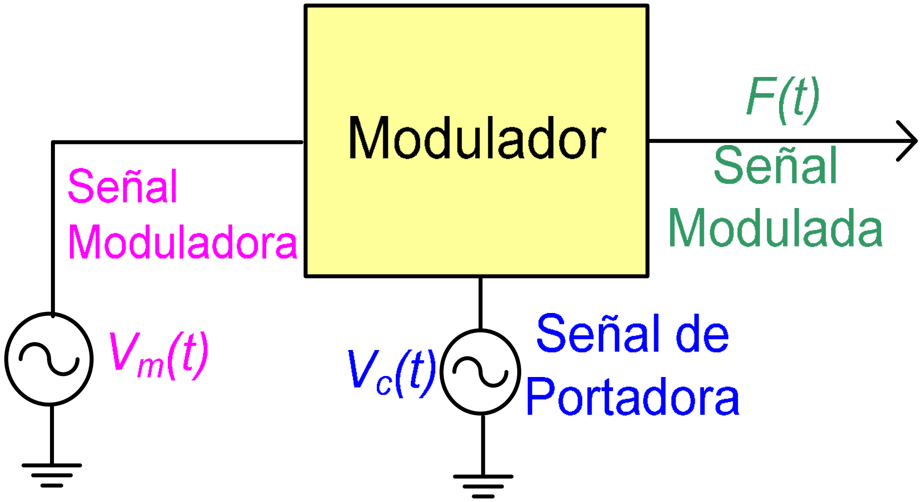


Tema10
Señales moduladas en Angulo



Modulación



Toda onda senoidal tiene 2 parámetros principales: Amplitud y Angulo.

$$F(t) = A(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)]$$

$$F(t) = A(t)\cos\phi(t)$$

Tanto si se varia la frecuencia como si se modifica la fase provocarán la modificación del ángulo.

$$\omega(t) \propto v_m(t) \quad y \quad A(t) = K_1 \wedge \theta(t) = \mathrm{K}_2$$ ⇨ **FM**

$$\theta(t) \propto v_m(t) \quad y \quad A(t) = K_1 \wedge \omega(t) = \mathrm{K}_2$$ ⇨ **PM**

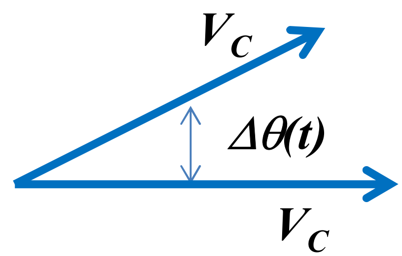
Modulación Angular - PM

$$F(t) = A(t)\cos\varphi(t) = A\cos[\omega_c t + \theta(t)]$$

SI: $\theta(t) \propto v_m(t)\ y\ A = V_C \wedge \omega = \omega_C$ → **PM**

El modulador de PM debe lograr: $\boxed{\Delta\theta(t) = K_p\ v_m(t) = [rad]}$

K_p Es una constante, representa la sensibilidad del modulador de fase. Su dimensión es: rad/voltios, e indica cuantos radianes se corre la portadora por voltio de señal moduladora.



El ángulo será: $\varphi(t) = \omega_c t + K_p\ v_m(t)$

Y la señal modulada: $\boxed{v_{PM}(t) = V_C\cos\left[\omega_c t + K_p v_m(t)\right]}$

La frecuencia angular: $$\omega(t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = \frac{\partial\left[\omega_c t + K_p\ v_m(t)\right]}{\partial t}$$

Por lo tanto: $$\boxed{\omega_i(t) = \omega_c + K_p\ \frac{\partial v_m(t)}{\partial t}} \Rightarrow \boxed{\Delta\omega = K_p\ \frac{\partial v_m(t)}{\partial t}}$$

SI: $$v_m(t) = V_m \; sen\omega_m \, t$$

El modulador de PM logrará que: $$\Delta\theta(t) = K_p \; v_m(t)$$

K_p es una constante y depende del circuito modulador. Su dimensión es rad/voltios

$$\Delta\theta(t) = K_p \; V_m sen\omega t \Rightarrow \Delta\theta_{máx} = m_p = K_p \; V_m$$

Entonces: $$\varphi(t) = \omega_c t + K_p \; V_m sen\omega_m t$$

La señal modulada: $$v_{PM}(t) = V_C \cos(\omega_c t + K_p V_m sen\omega_m t)$$

La frecuencia angular: $$\omega(t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = \frac{\partial\left[\omega_c t + K_p \; v_m(t)\right]}{\partial t}$$

Por lo tanto:

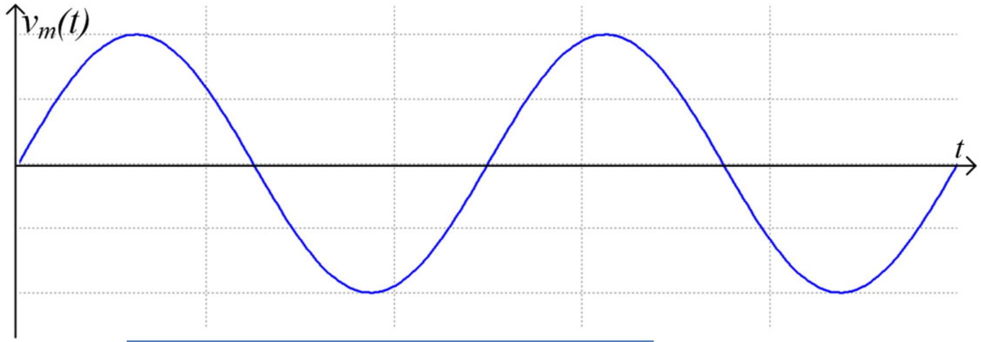
$$\omega(t) = \omega_c + K_p \; V_m \omega_m \cos\omega_m t \Rightarrow$$

$$\Delta\omega(t) = K_p \; V_m \omega_m \cos\omega_m t$$

$$\Delta\omega_{máx} = K_p \; V_m \omega_m = m_p \omega_m$$

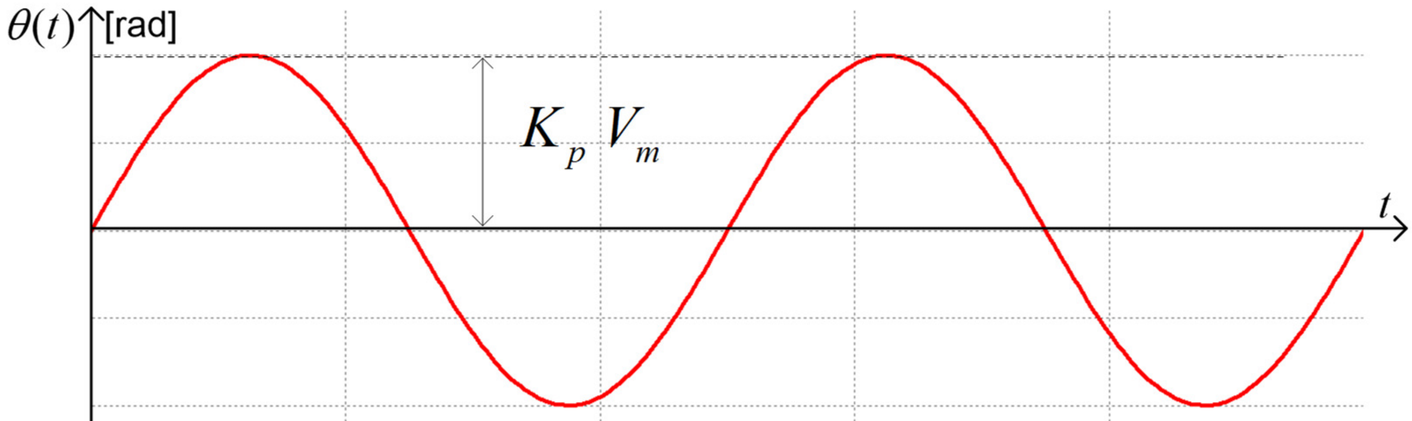
Modulación Angular- PM

SI: $v_m(t) = V_m \, sen\omega_m \, t$



El modulador de PM logrará que: $\Delta\theta(t) = K_p \, v_m(t)$

$\Delta\theta(t) = K_p \, V_m sen\omega t$



K_p es la sensibilidad del modulador y su dimensión es: rad/voltios

Muy importante!!

Una señal está modulada en fase cuando:

La desviación de fase de la señal modulada, respecto a su valor sin modular, es proporcional a la amplitud de la señal moduladora

Modulación Angular- PM

El máximo valor que alcanza θ(t) es:

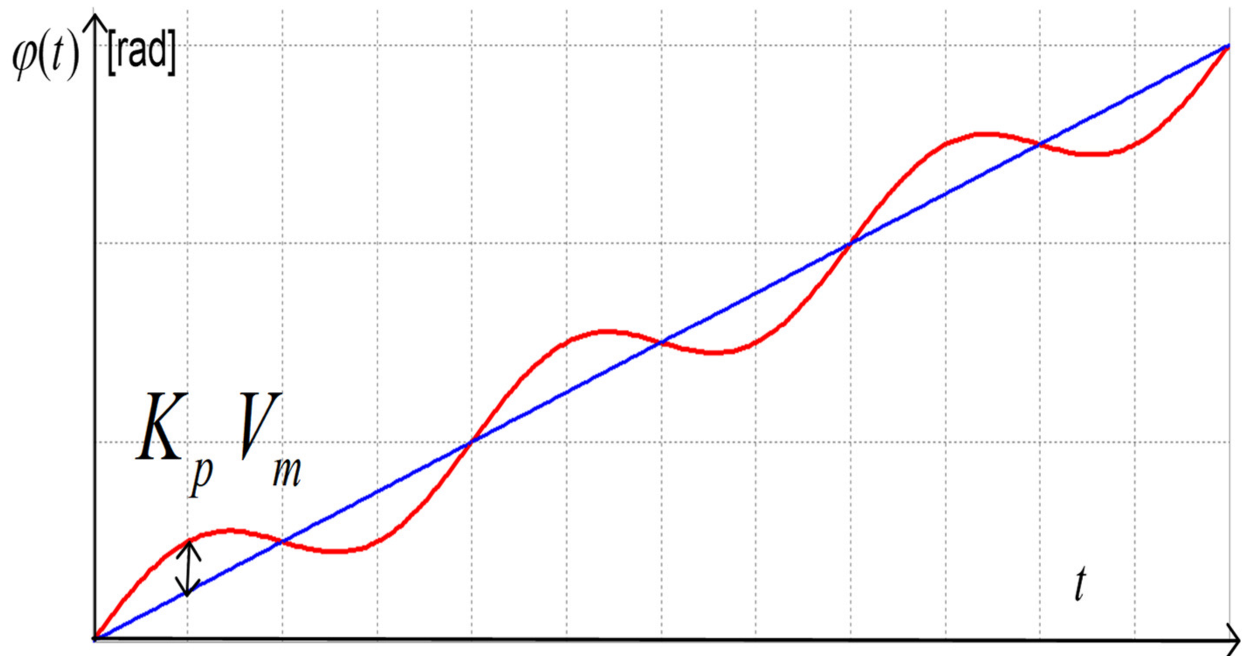
$$\Delta\theta_{máx} = K_p V_m = m_p \qquad \left[\Delta\theta_{máx}\right] = \left[m_p\right] = rad$$

Muy importante!!

El índice de modulación m_p representa la máxima desviación de fase que puede darse a la función $g_{PM}(t)$ y está dado por el valor máximo de la amplitud de la moduladora por la constante k_P

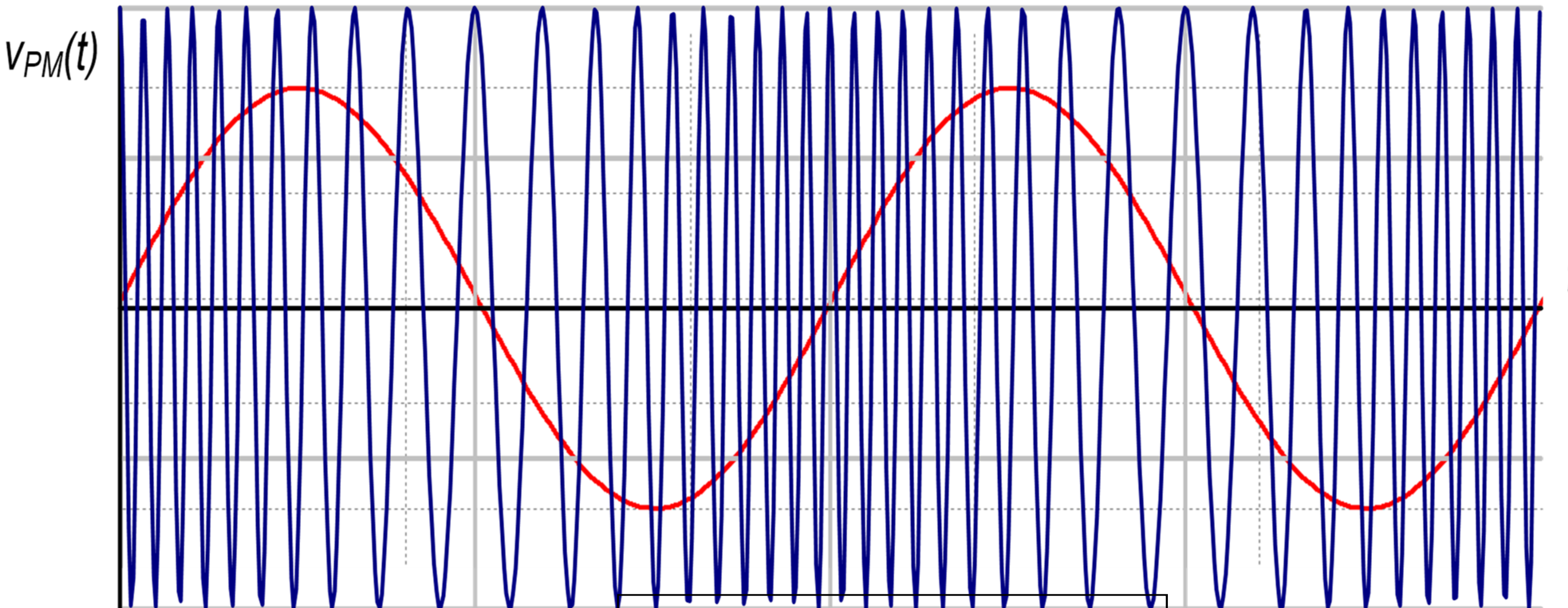
El ángulo será entonces:

$$\varphi(t) = \omega_c t + K_p V_m sen\omega_m t$$



Modulación Angular- PM

La señal modulada: $v_{PM}(t) = V_C \cos(\omega_c t + K_p V_m sen\omega_m t)$



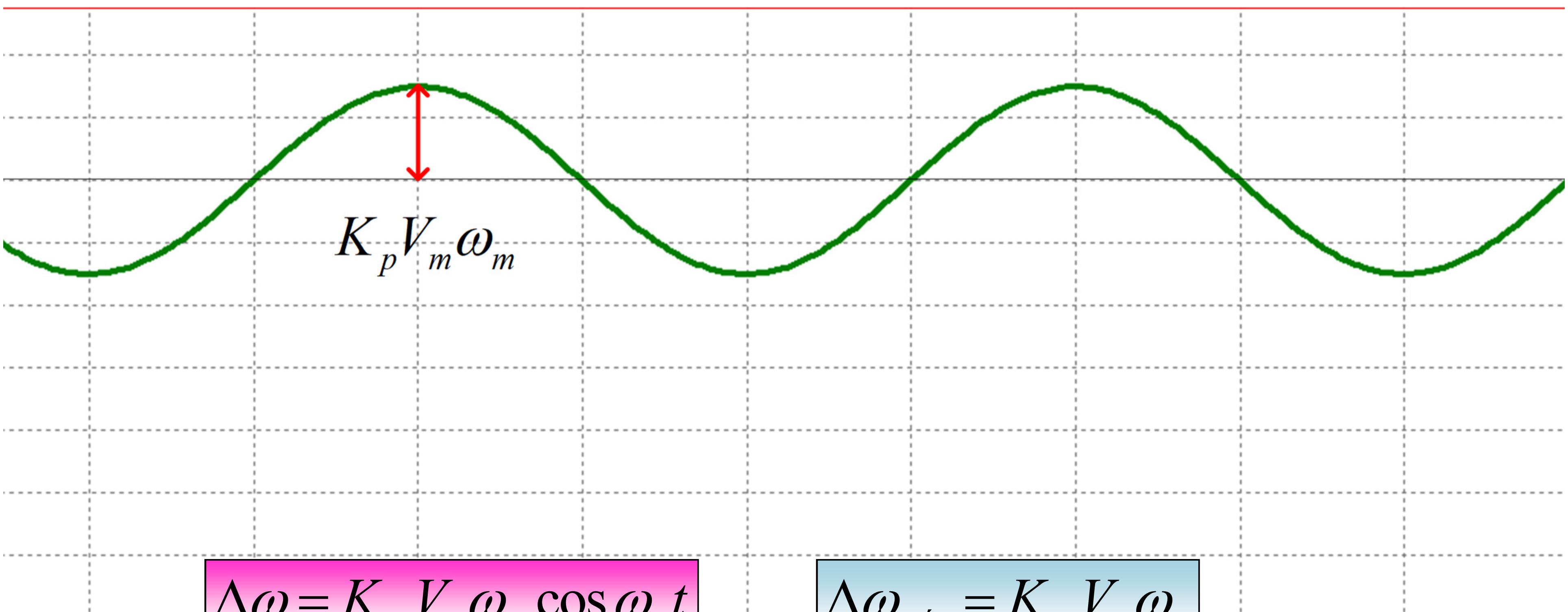
$$\omega_i(t) = \omega_c + K_p \frac{\partial v_m(t)}{\partial t}$$

- Cuando la moduladora va de un valor negativo a uno positivo, su derivada es positiva, entonces la frecuencia es máxima.
- Cuando la moduladora va de un valor positivo a un valor negativo su derivada es negativa, entonces la frecuencia es mínima.

Modulación Angular- PM

La frecuencia angular:

$$\omega(t) = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \frac{\partial\left[\omega_c t + K_\theta \, v_m(t)\right]}{\partial t}$$



$$\boxed{\Delta\omega = K_p \, V_m \omega_m \cos\omega_m t}$$

$$\boxed{\Delta\omega_{máx} = K_p \, V_m \omega_m}$$

$$\boxed{\Delta f = K_p \, V_m f_m \cos\omega_m t}$$

$$\boxed{\Delta f_{máx} = K_p \, V_m f_m}$$

Modulación Angular- PM

$$v_m(t) = V_m \operatorname{sen} \omega_m t$$

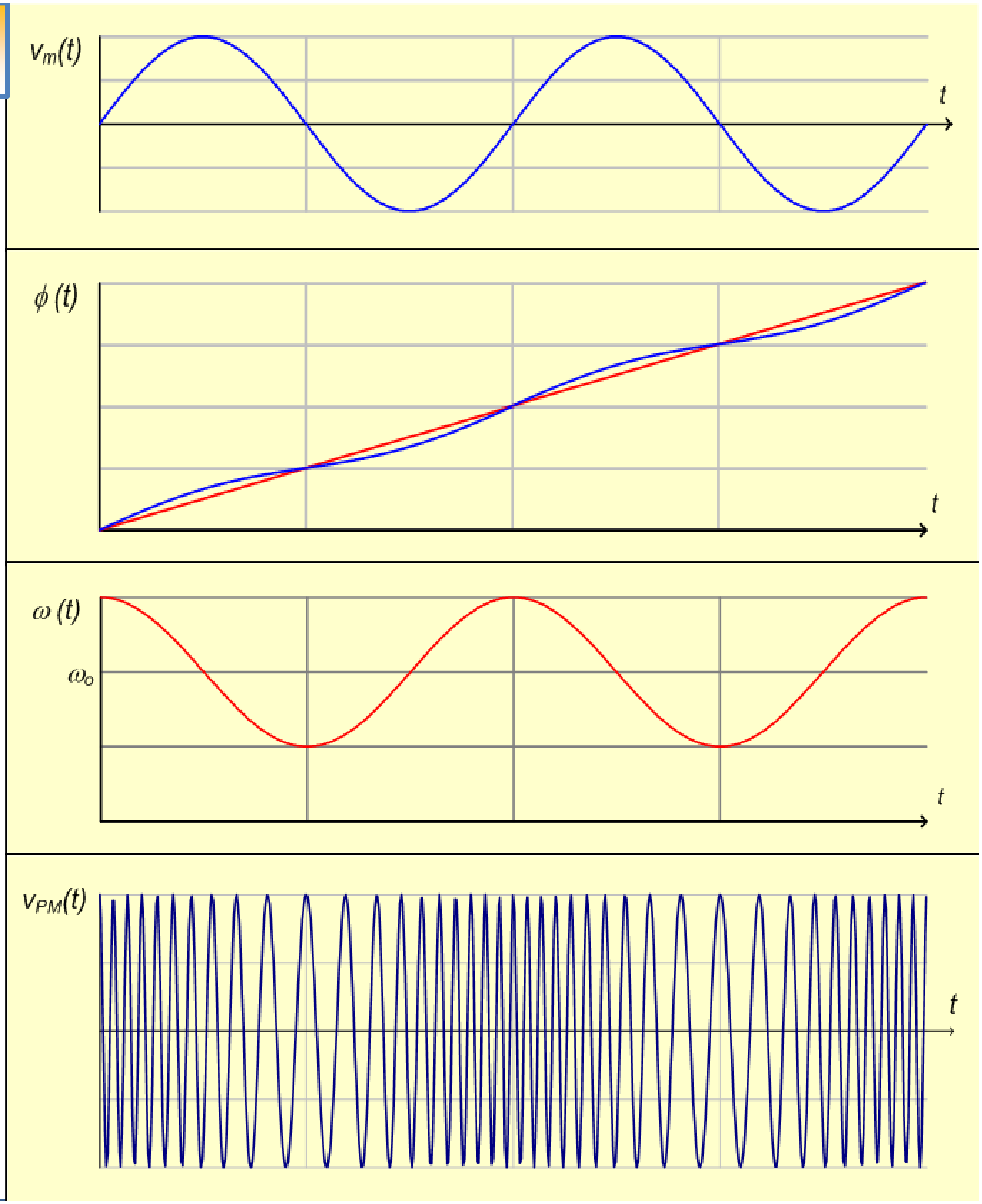
$$\varphi(t) = \omega_c t + K_p\, v_m(t)$$

$$\Delta\theta_{máx} = m_p = K_p\, V_m$$

$$\omega(t) = \omega_c + K_p\, V_m \omega_m \cos \omega_m t$$

$$\Delta\omega_{máx} = K_p\, V_m \omega_m = m_p \omega_m$$

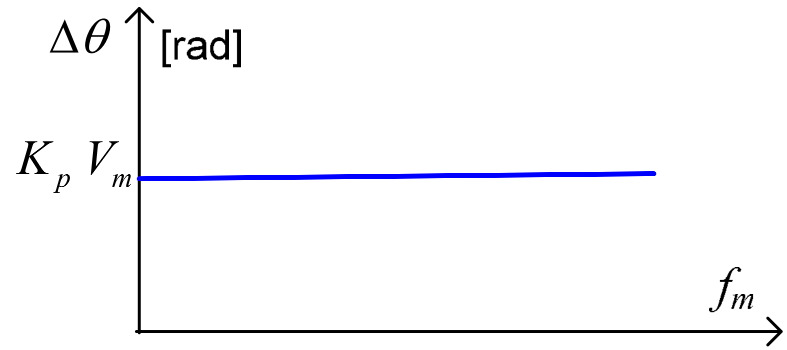
$$v_{PM}(t) = V_C \cos(\omega_c t + m_p\, sen\, \omega_m t)$$



Modulación Angular- PM

Si se grafica θ en función de la frecuencia moduladora:

$$\Delta\theta_{máx} = K_p\, V_m = m_p$$



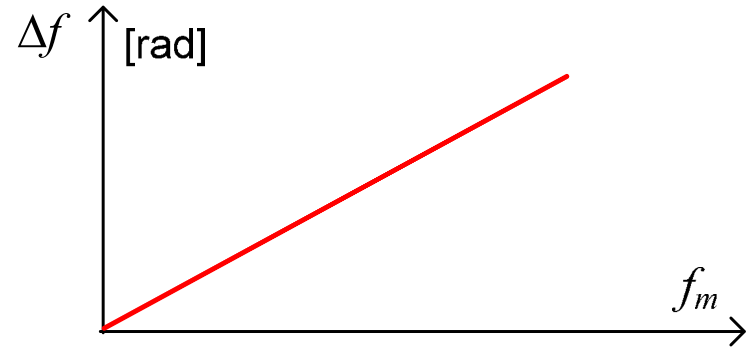
Todas las frecuencias se modulan igual

Muy importante!!

Si se grafica Δω en función de la frecuencia moduladora:

$$\Delta\omega_{máx} = K_p\, V_m \omega_m$$

$$\Delta f_{máx} = K_p\, V_m f_m$$



A mayor frecuencia de moduladora mayor variación de la frecuencia instantánea

$$f(t) = f_C + \Delta f_{máx}$$

Modulación Angular - FM

SI: $$F(t) = A(t)\cos\varphi(t) = A(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)]$$

SI: $$\omega(t) \propto v_m(t) \; y \; A = K_1 \wedge \theta = \mathrm{K}_2 \Rightarrow \textbf{FM}$$

El modulador de FM debe lograr que: $$\boxed{\omega_i(t) = \omega_c + K_\omega \, v_m(t)}$$

O lo que es lo mismo: $$\boxed{f_i(t) = f_c + K_f \, v_m(t)}$$

K_f es la sensibilidad del modulador y su dimensión es: Hz/voltios

Así como: $\omega = 2\pi f \longrightarrow K_\omega = 2\pi K_f$

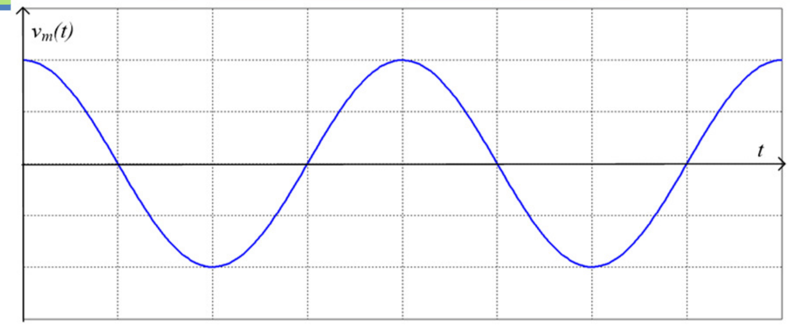
Como: $$\omega(t) = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}$$

El ángulo: $$\varphi(t) = \int \big(\omega_c + K_\omega \, v_m(t)\big) dt$$

Por lo tanto: $$\varphi(t) = \omega_c t + K_\omega \int v_m(t) dt$$

La señal modulada: $$\boxed{v_{FM}(t) = V_C \cos(\omega_c t + K_\omega \int v_m(t) dt}$$

SI: $$\boxed{v_m(t) = V_m \cos\omega_m t}$$

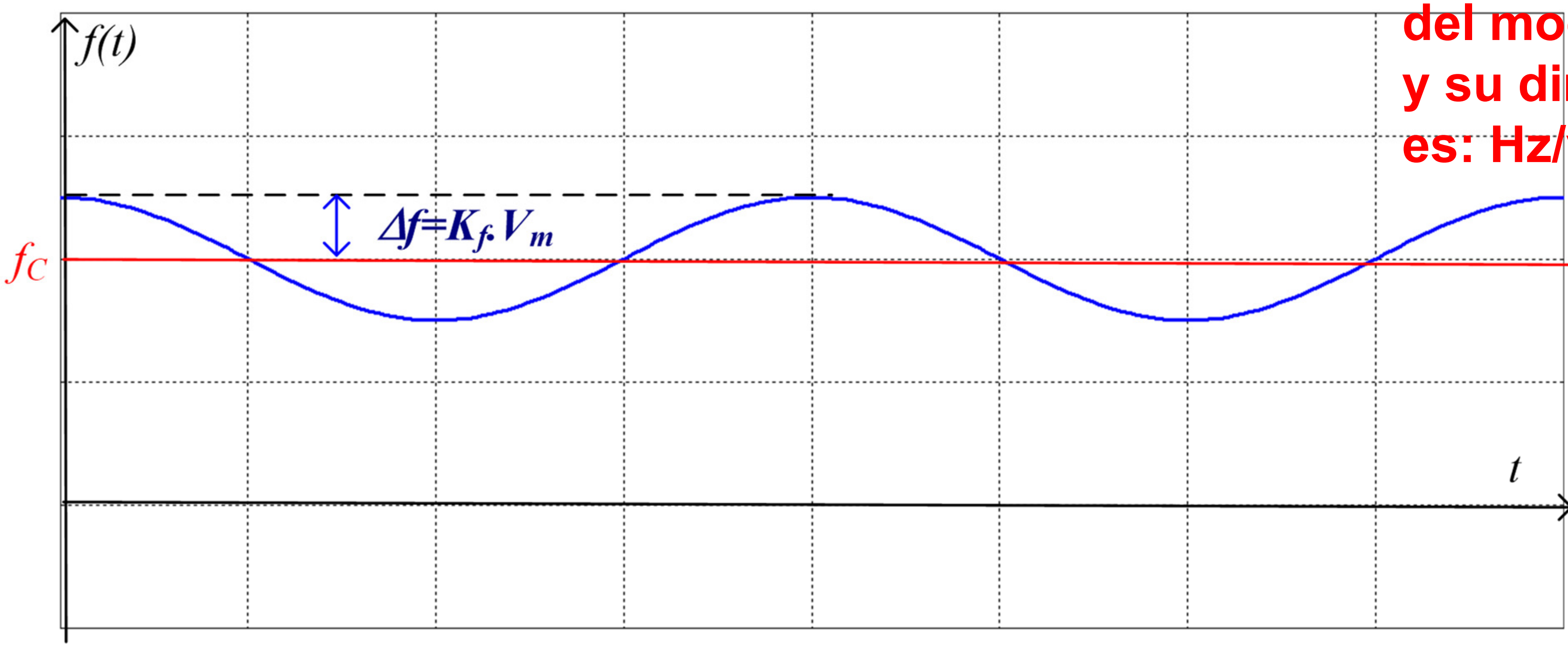


El modulador de FM logrará que:

$$\omega(t) = \omega_c + K_\omega\, v_m(t)$$

$$\boxed{\omega(t) = \omega_c + K_\omega\, V_m \cos\omega_m t} \rightarrow \boxed{f(t) = f_c + K_f\, V_m \cos\omega_m t}$$

K_f es la sensibilidad del modulador y su dimensión es: Hz/voltios



Modulación de Frecuencia- FM

La frecuencia instantánea varía, respecto a su frecuencia central:

$$\Delta\omega = K_{\omega} V_{m} \cos \omega_{m} t$$
$$\Delta f = K_{f} V_{m} \cos \omega_{m} t$$

La máxima desviación será:

$$\Delta\omega_{máx} = K_{\omega} V_{m}$$
$$\Delta f_{máx} = K_{f} V_{m}$$

Muy importante!!

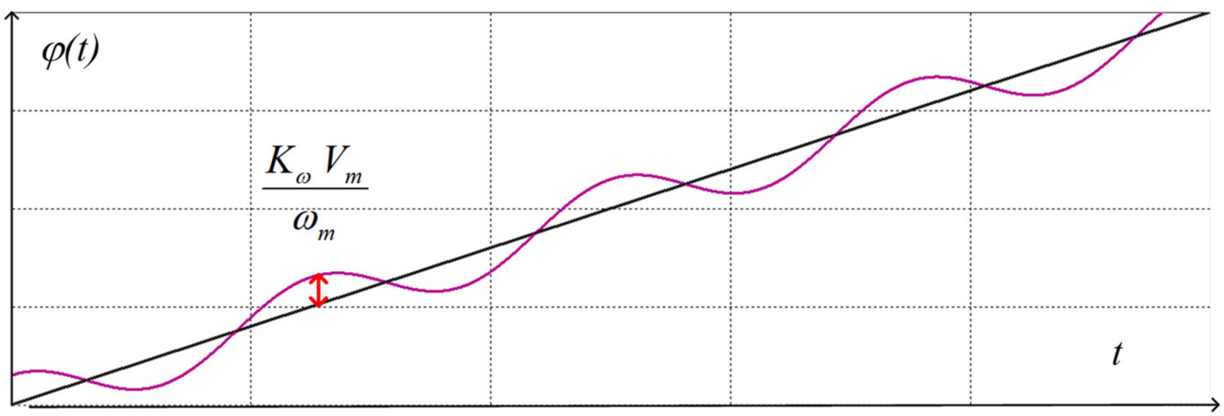
Una señal está modulada en frecuencia, cuando:

La desviación de la frecuencia de la señal modulada respecto a su valor sin modular es directamente proporcional a la amplitud de la señal moduladora

Modulación de Frecuencia- FM

El ángulo: $$\varphi(t) = \int \left(\omega_c + K_\omega V_m \cos \omega_m t \right) dt$$

$$\boxed{\varphi(t) = \omega_c t + \frac{K_\omega V_m}{\omega_m} sen\omega_m t}$$



El índice de modulación representa la <u>máxima desviación de fase</u> que puede darse a la función $g_{FM}(t)$

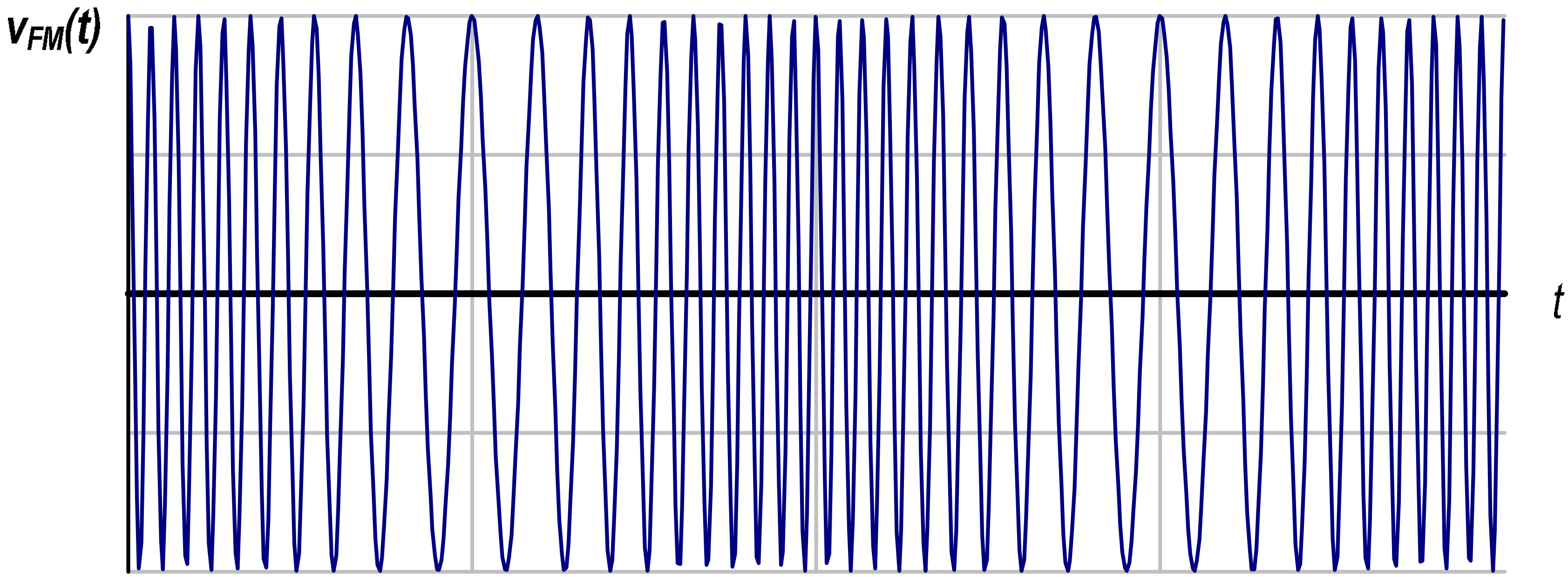
$$m_f = \Delta\theta_{máx} = \frac{K_\omega V_m}{\omega_m} = \frac{K_f V_m}{f_m}$$

$$\boxed{\left[m_f \right] = rad}$$

Modulación de Frecuencia- FM

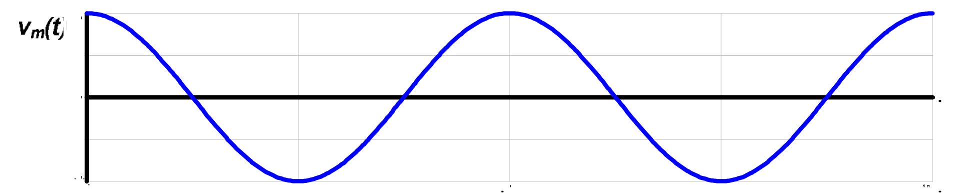
La señal modulada:

$$v_{FM}(t) = V_C \cos(\omega_c t + \frac{K_\omega V_m}{\omega_m} sen\omega_m t) = V_C \cos(\omega_c t + m_f sen\omega_m t)$$

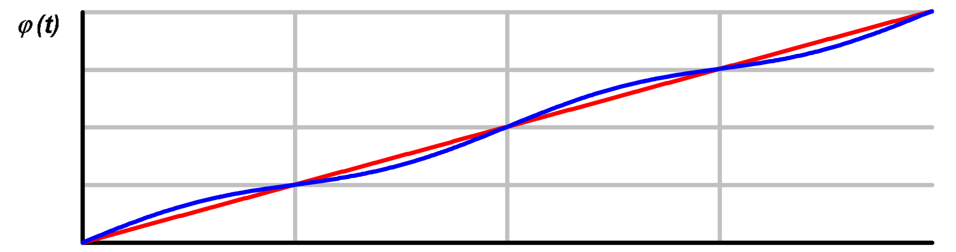


Modulación en Frecuencia - FM

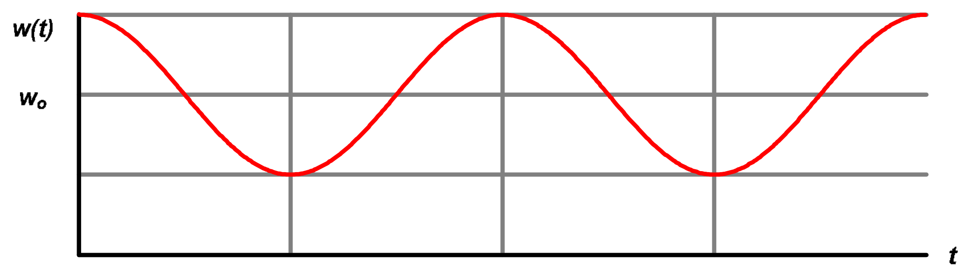
$$v_m(t) = V_m \cos \omega_m t$$



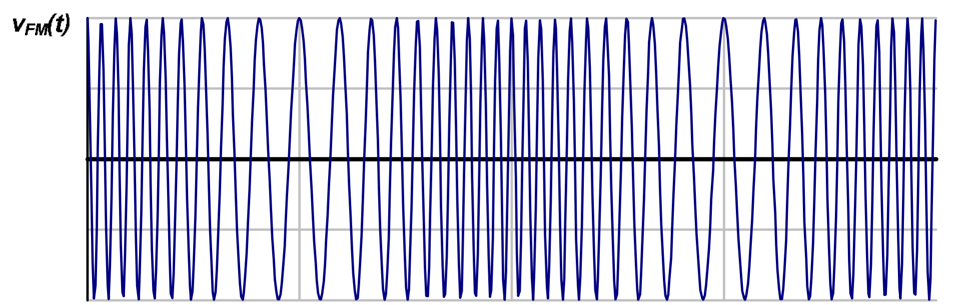
$$\varphi(t) = \omega_c t + \frac{K_\omega V_m}{\omega_m} sen \omega_m t$$



$$\Delta\omega(t) = K_\omega v_m(t)$$



$$v_{FM}(t) = V_C \cos(\omega_c t + m_f \, sen \, \omega_m t)$$



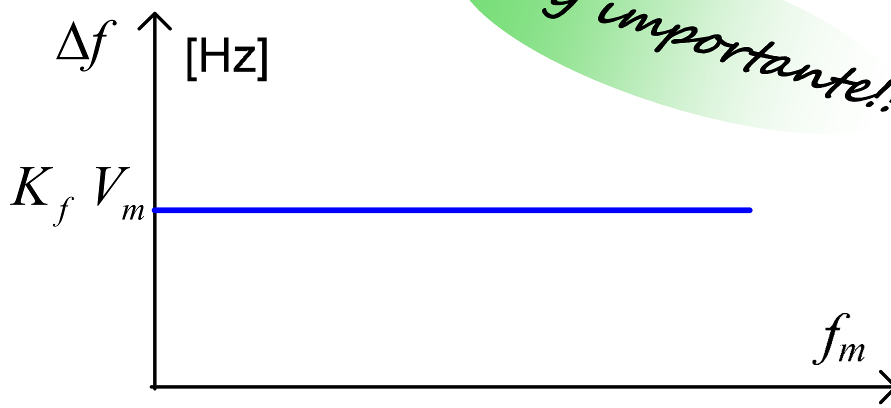
Modulación Angular- FM

Si se grafica Δf en función de la frecuencia moduladora:

$$\Delta f_{máx} = K_f \, V_m$$

Muy importante!!

Todas las frecuencias se desvian en igual valor

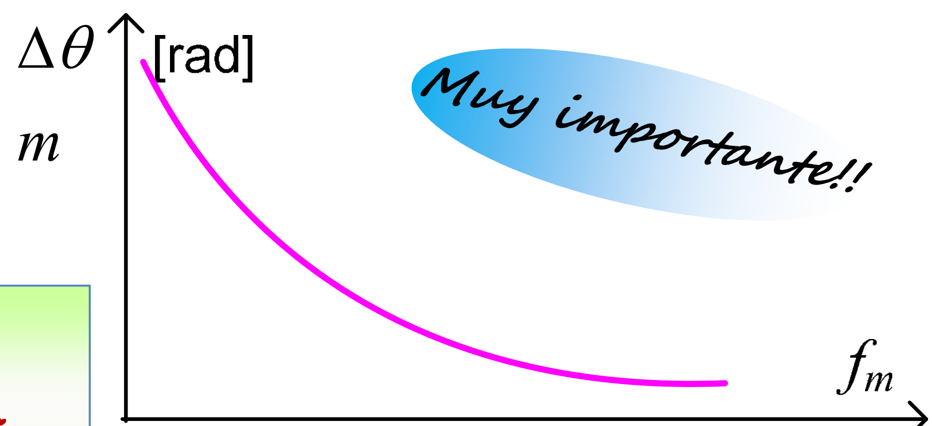


Si se grafica el índice de modulación en función de la frecuencia moduladora:

$$m_f = \Delta\theta_{máx} = \frac{K_f \, V_m}{f_m}$$

Muy importante!!

Los tonos de mayor frecuencia se modulan menos



Modulación en Angulo- COMPARACION

FM

$$F(t) = A(t)\cos\phi(t)$$

$$\omega(t) \propto v_m(t)\ y\ A = K_1 \wedge \theta = \mathrm{K}_2$$

$$\omega(t) = \omega_c + K_\omega\, v_m(t)$$

$$\boxed{\omega(t) = \omega_c + K_\omega\, V_m \cos\omega_m t}$$

$$\boxed{\Delta f_{máx} = K_f\, V_m}$$

$$\omega(t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}$$

$$\varphi(t) = \int\left(\omega_c + K_\omega\, V_m \cos\omega_m t\right)dt$$

$$\varphi(t) = \omega_c t + \frac{K_\omega\, V_m}{\omega_m} sen\omega_m t$$

$$\boxed{\Delta\theta(t) = \frac{K_\omega\, V_m}{\omega_m} sen\omega_m t}$$

$$\boxed{\Delta\theta_{máx} = \frac{\Delta_f}{f_m}}$$

$$\boxed{v_{FM}(t) = V_C \cos(\omega_c t + \frac{K_\omega\, V_m}{\omega_m} sen\omega_m t)}$$

PM

$$F(t) = A(t)\cos\phi(t)$$

$$F(t) = A(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)]$$

$$\Delta\theta(t) \propto v_m(t)\ y\ A = K_1 \wedge \omega = \mathrm{K}_2$$

$$\Delta\theta(t) = K_p\, v_m(t)$$

$$\boxed{\Delta\theta(t) = K_p\, V_m sen\omega t}$$

$$\boxed{\Delta\theta_{máx} = K_p\, V_m}$$

$$\varphi(t) = \omega_c t + K_p\, V_m sen\omega_m t$$

$$\omega(t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}$$

$$\boxed{\omega(t) = \omega_c + K_p\, V_m \omega_m \cos\omega_m t}$$

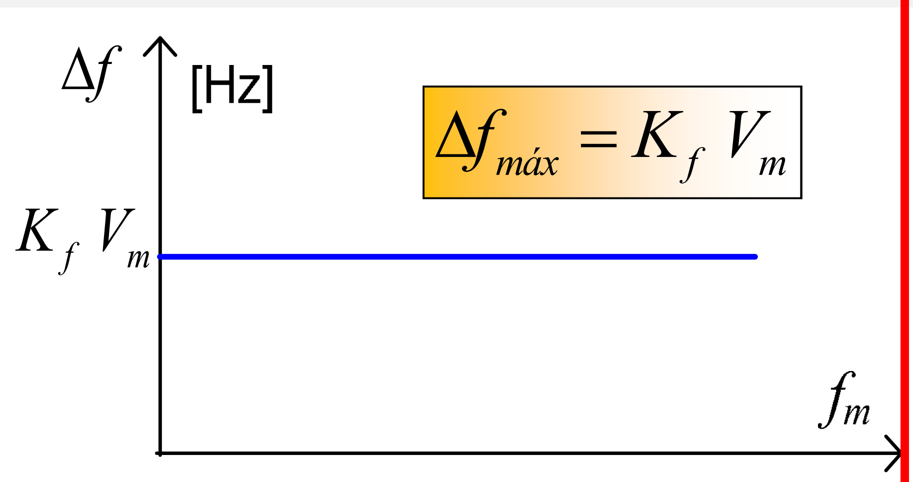
$$\boxed{\Delta f_{máx} = K_p\, V_m f_m}$$

$$\boxed{v_{PM}(t) = V_C \cos(\omega_c t + K_p V_m sen\omega_m t)}$$

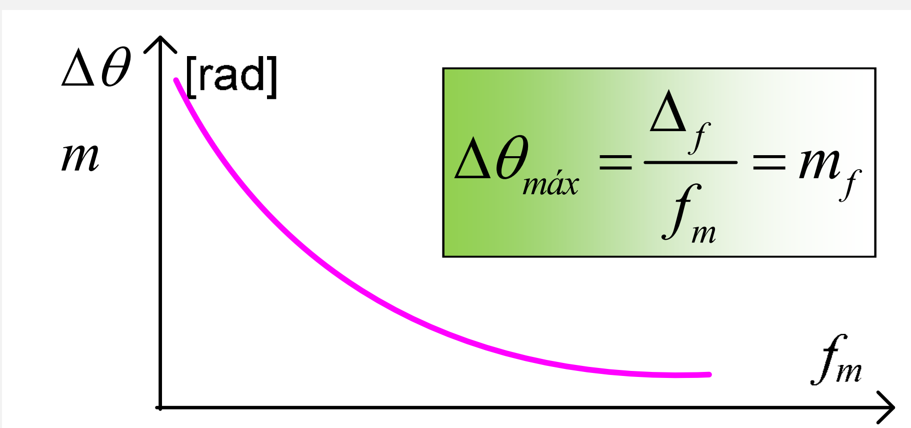
Modulación en Angulo- COMPARACION

FM

$$v_{FM}(t) = V_C \cos(\omega_c t + \frac{K_\omega V_m}{\omega_m} sen\omega_m t)$$



$$\Delta f_{máx} = K_f V_m$$

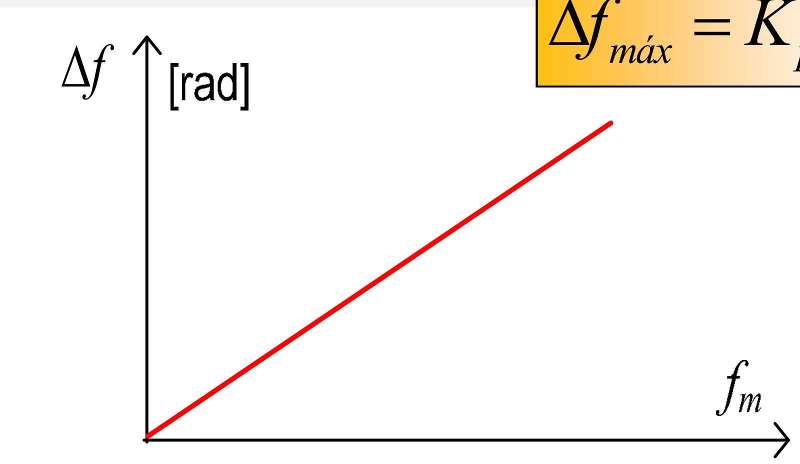


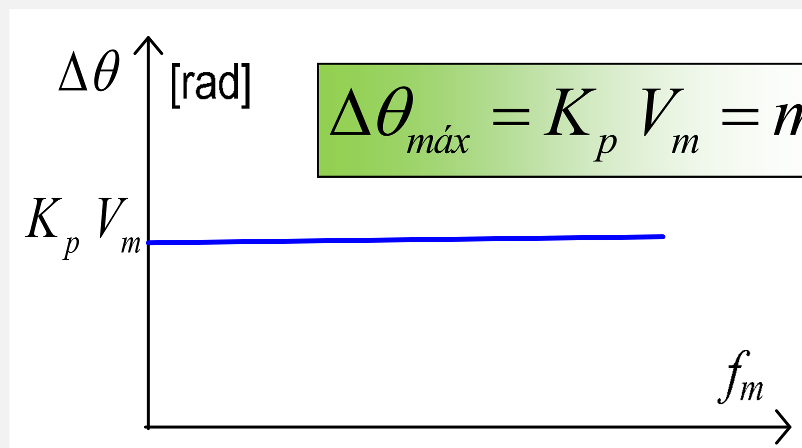
$$\Delta\theta_{máx} = \frac{\Delta_f}{f_m} = m_f$$

PM

$$v_{PM}(t) = V_C \cos(\omega_c t + K_p V_m sen\omega_m t)$$

$$\Delta f_{máx} = K_p V_m f_m$$





$$\Delta\theta_{máx} = K_p V_m = m_p$$

Funciones de Bessel

En general una señal FM generada a partir de una señal moduladora sinusoidal no es periódica

$$v_{FM}(t) = V_C \cos(\omega_c t + m_f \, sen \, \omega_m t)$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - senA \cdot senB$$

$$v_{FM}(t) = V_C \left[\cos \omega_c t . \cos(m_f \, sen \, \omega_m t) - sen \omega_c t . sen(m_f \, sen \, \omega_m t) \right]$$

$$v = V_C \; \{ J_0(m) \cos \omega_c t + J_1(m)[\cos(\omega_c + \omega_m)t - \cos(\omega_c - \omega_m)t] +$$

$$+ J_2(m)[\cos(\omega_c + 2\omega_m)t + \cos(\omega_c - 2\omega_m)t] +$$

$$+ J_3(m)[\cos(\omega_c + 3\omega_m)t - \cos(\omega_c - 3\omega_m)t] +$$

$$+ J_4(m)[\cos(\omega_c + 4\omega_m)t + \cos(\omega_c - 4\omega_m)t] + ... \}$$

Espectro de una señal modulada en Angulo

- El espectro FM consiste en una componente portadora f_c y en un número infinito de bandas laterales ubicadas de forma simétrica con respecto a f_c a frecuencias f_m, $2f_m$, $3f_m$ y así sucesivamente.
- Esta es una diferencia importante con respecto a AM donde 1 tono genera solo 1 par de bandas laterales.

- Para el caso especial en el que m sea menor que la unidad, solo los coeficientes $J_0(m)$ y $J_1(m)$ son significativos, de modo que la señal FM (PM) está formada por una portadora a f_c y únicamente 1 par de bandas laterales a $f_c \pm f_m$. En este caso se llama FM (PM) de banda estrecha.
- En FM, la amplitud de la portadora modulada varía con el índice de modulación de acuerdo con $J_0(m)$.
- En AM, la amplitud de la portadora **no** depende del índice de modulación.

Señales Moduladas en Angulo

Índice de Modulación

Es el módulo de la frecuencia central

para valores de n

Desde J_1 Hasta J_{15} representan las bandas laterales

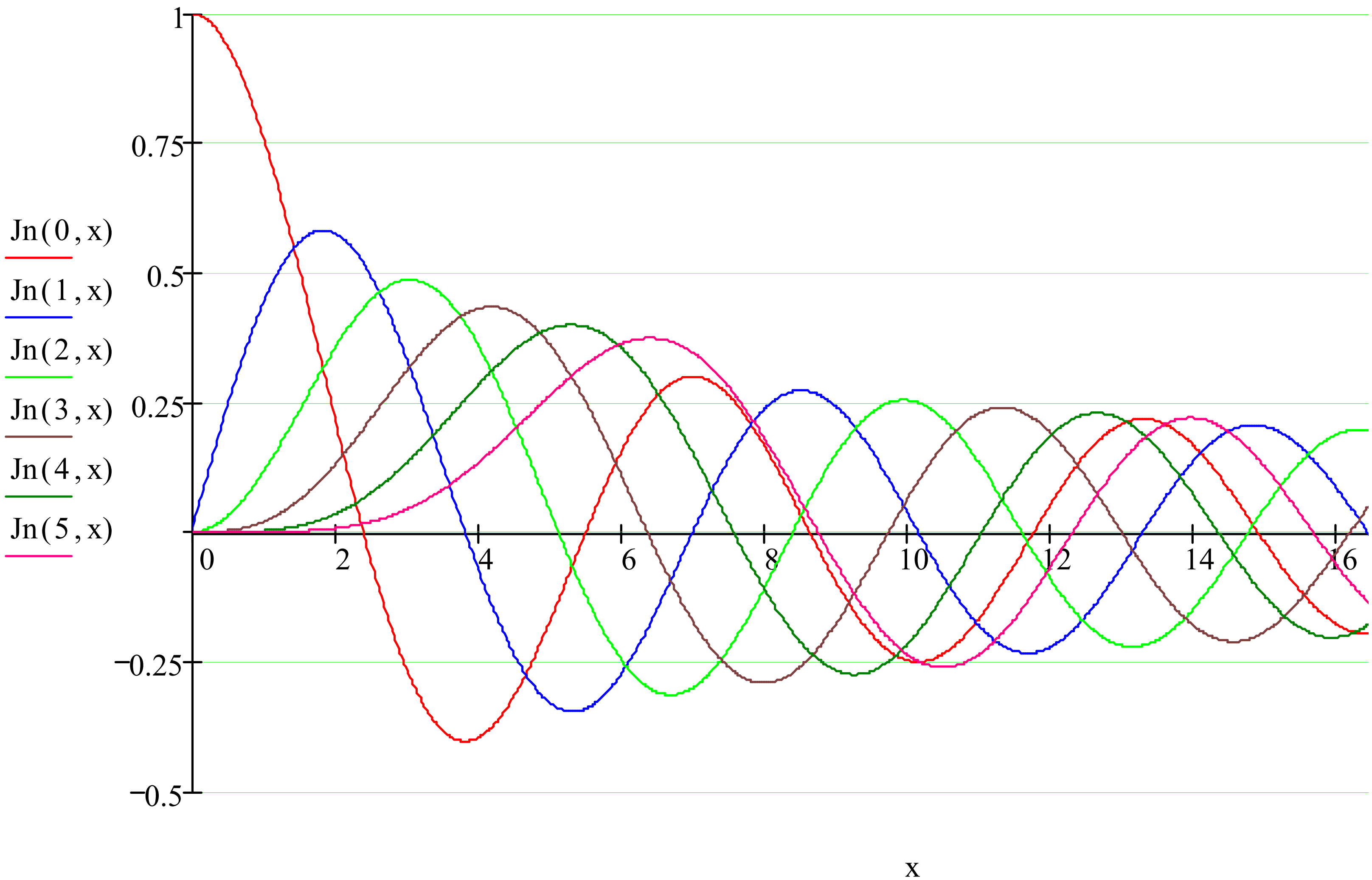
FUNCIÓN DE BESSEL

$m_f = \Delta\theta$	Portadora J0	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10	J11	J12	J13	J14	J15
								ORDEN DE LA FUNCIÓN								
0	1,00	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~
0,1	1,00	0,05	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~
0,2	0,99	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	~	~	~	~	~	~	~	~	~
0,25	0,98	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	~	~	~	~	~	~	~	~	~
0,5	0,94	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	~	~	~	~	~	~	~	~	~
0,75	0,86	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	~	~	~	~	~	~	~	~	~
1	0,77	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	~	~	~	~	~	~	~	~	~
1,5	0,51	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	~	~	~	~	~	~	~	~	~
2	0,22	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~
2,4	**0,00**	[illegible]	0,43	0,20	0,06	0,02	~	~	~	~	~	~	~	~	~	~
3	-0,26	0,34	0,49	0,31	0,13	0,04	0,01	~	~	~	~	~	~	~	~	~
4	-0,40	-0,07	0,36	0,43	0,28	0,13	0,05	0,02	~	~	~	~	~	~	~	~
5	-0,18	-0,33	0,05	0,36	0,39	0,26	0,13	0,05	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	0,15	-0,28	-0,24	0,11	0,36	0,36	0,25	0,13	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
7	0,30	0,00	-0,30	-0,17	0,16	0,35	0,34	0,23	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	0,17	0,23	-0,11	-0,29	-0,11	0,19	0,34	0,32	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	-0,09	0,25	0,14	-0,18	-0,27	-0,06	0,20	0,33	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	-0,25	0,04	0,25	0,06	-0,22	-0,23	-0,01	0,22	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	-0,17	-0,18	0,14	0,23	-0,02	-0,24	-0,20	0,02	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	0,05	-0,22	-0,08	0,20	0,18	-0,07	-0,24	-0,17	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	0,21	-0,07	-0,22	0,00	0,22	0,13	-0,12	-0,24	-0,14	[illegible]	[illegible]	0,29	0,26	0,19	0,12	0,07
14	0,17	0,13	-0,15	-0,18	0,08	0,22	0,08	-0,15	[illegible]	-0,11	0,09	0,24	0,29	0,25	0,19	0,12
15	-0,01	0,21	0,04	-0,19	-0,12	0,13	0,21	0,03	-0,17	-0,22	-0,09	0,10	0,24	0,28	0,25	0,18

Para este índice de modulación la portadora se hace CERO !

A mayor índice de Modulación, mayor numero de Bandas Laterales

Funciones de Bessel

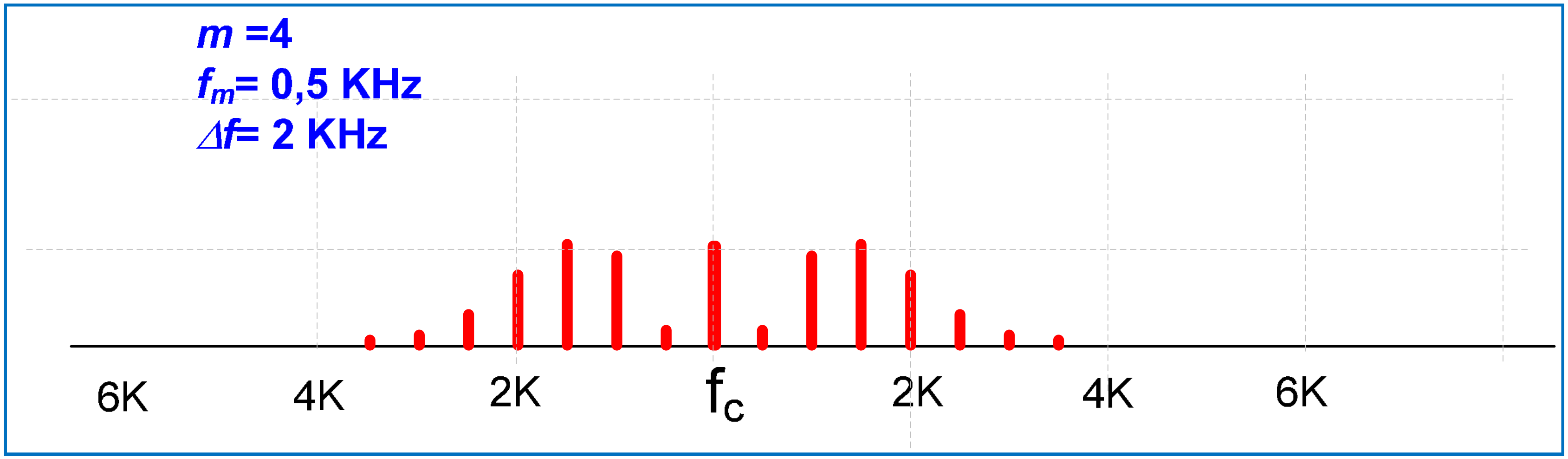


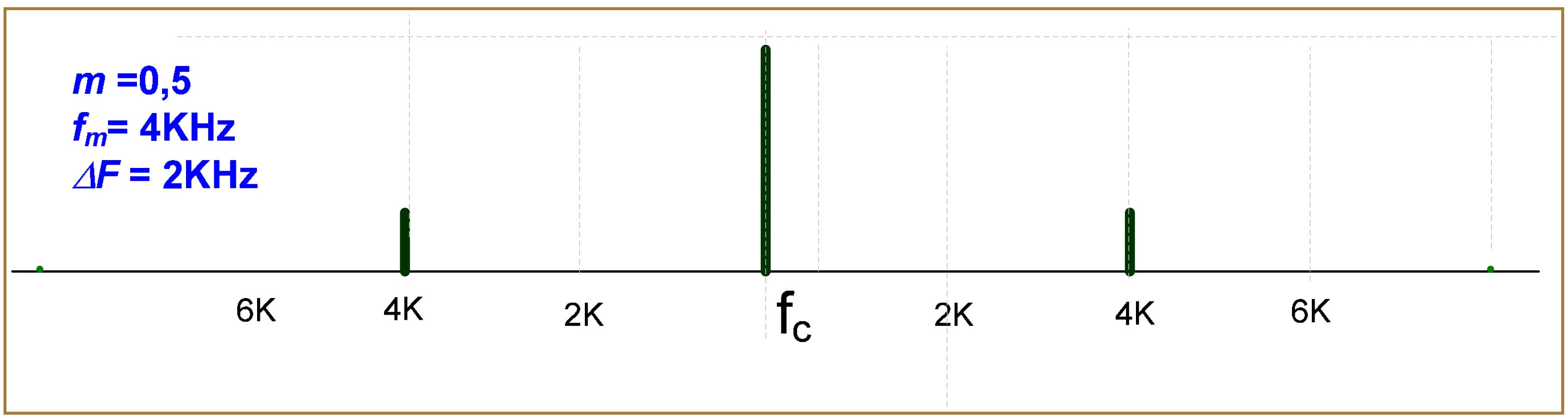
Funciones de Bessel

M	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
J_0	1.000	0.998	0.990	0.978	0.960	0.938	0.912	0.881	0.846	0.808	0.765	0.671	0.567	0.455	0.340	0.224
J_1	0.000	0.050	0.100	0.148	0.196	0.242	0.287	0.329	0.369	0.406	0.440	0.498	0.542	0.570	0.582	0.577
J_2	0.000	0.001	0.005	0.011	0.020	0.031	0.044	0.059	0.076	0.095	0.115	0.159	0.207	0.257	0.306	0.353
J_3	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.003	0.004	0.007	0.010	0.014	0.020	0.033	0.050	0.073	0.099	0.129
J_4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.002	0.005	0.009	0.015	0.023	0.034
J_5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.004	0.007
J_6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001
J_7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

M	2.25	2.4	2.5	2.75	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	7	8	9	10	11	13	15
J_0	0.083	0.003	-0.048	-0.164	-0.260	-0.380	-0.397	-0.321	-0.178	-0.007	0.151	0.300	0.172	-0.090	-0.246	-0.171	0.207	-0.014
J_1	0.548	0.520	0.497	0.426	0.339	0.137	-0.066	-0.231	-0.328	-0.341	-0.277	-0.005	0.235	0.245	0.043	-0.177	-0.070	0.205
J_2	0.405	0.431	0.446	0.474	0.486	0.459	0.364	0.218	0.047	-0.117	-0.243	-0.301	-0.113	0.145	0.255	0.139	-0.218	0.042
J_3	0.171	0.198	0.217	0.263	0.309	0.387	0.430	0.425	0.365	0.256	0.115	-0.168	-0.291	-0.181	0.058	0.227	0.003	-0.194
J_4	0.052	0.064	0.074	0.101	0.132	0.204	0.281	0.348	0.391	0.397	0.358	0.158	-0.105	-0.265	-0.220	-0.015	0.219	-0.119
J_5	0.012	0.016	0.020	0.030	0.043	0.080	0.132	0.195	0.261	0.321	0.362	0.348	0.186	-0.055	-0.234	-0.238	0.132	0.130
J_6	0.002	0.003	0.004	0.007	0.011	0.025	0.049	0.084	0.131	0.187	0.246	0.339	0.338	0.204	-0.014	-0.202	-0.118	0.206
J_7	0.000	0.001	0.001	0.001	0.003	0.007	0.015	0.030	0.053	0.087	0.130	0.234	0.321	0.327	0.217	0.018	-0.241	0.034

Ejemplos de Espectros de FM





Ancho de Banda de una señal de FM

El ancho de banda de una señal modulada en frecuencia por una onda seno, es infinito $AB = \infty$ ya que tiene un número de bandas laterales infinito.
Pero no todas las bandas laterales son significativas…….

Según Bessel solo algunas bandas laterales tienen magnitud significativas y en consecuencia el ancho de banda se hace finito.

Regla de Carson

Muy importante!!

$$AB = 2\left(\Delta f_{máx} + f_{m\,máx}\right)$$

$$AB = 2\left(m_f + 1\right) f_{m\,máx}$$

Numero de bandas Laterales Significativas

Una banda lateral es significativa si tiene magnitud igual ó mayor al 1 % de la magnitud de la portadora no modulada

$$N = m_f + 1$$

$$\left|J_n(\beta)\right| \geq 0.01Vc$$

Potencia de una señal modulada en ángulo

Cuando la señal está sin modular la potencia que desarrolla la portadora sin modular sobre una carga R es:

$$P_C = \frac{V_c^2}{2R}$$

Cuando la señal es modulada en ángulo:

$$v(t) = V_C \; \{J_0(m)\cos\omega_c t + J_1(m)[\cos(\omega_c+\omega_m)t - \cos(\omega_c-\omega_m)t] +$$
$$+ J_2(m)[\cos(\omega_c+2\omega_m)t + \cos(\omega_c-2\omega_m)t] +$$
$$+ J_3(m)[\cos(\omega_c+3\omega_m)t - \cos(\omega_c-3\omega_m)t] +$$
$$+ J_4(m)[\cos(\omega_c+4\omega_m)t + \cos(\omega_c-4\omega_m)t] + ...\}$$

La potencia, que desarrollará, será la suma de los aportes de las n bandas laterales:

$$P_{CM} = \frac{V_0^2}{2R} + 2\frac{V_1^2}{2R} + 2\frac{V_2^2}{2R} + 2\frac{V_3^2}{2R} + ... + 2\frac{V_n^2}{2R} + ...$$

Entonces:

$$P_{CM} = \frac{J_0^2(m)V_c^2}{2R} + 2\frac{J_1^2(m)V_c^2}{2R} + 2\frac{J_2^2(m)V_c^2}{2R} + 2\frac{J_3^2(m)V_c^2}{2R} + ... + 2\frac{J_n^2(m)V_c^2}{2R} + ...$$

$$P_{CM} = \frac{V_c^2}{2R}\left(J_0^2(m) + 2J_1^2(m) + 2J_2^2(m) + 2J_3^2(m) + ... + 2J_n^2(m) + ...\right)$$

Potencia de una señal modulada en ángulo

Por propiedades de las Funciones de Bessel de primera clase y argumento m:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n^2(m) = 1$$

O sea:

$$J_0^2(m) + 2J_1^2(m) + 2J_2^2(m) + 2J_3^2(m) + \ldots + 2J_n^2(m) + \ldots = 1$$

Reemplazando:

$$\boxed{P_{Cm} = \frac{V_c^2}{2R}}$$

Muy importante!!

Entonces la potencia, que desarrollará una señal modulada en ángulo sobre una resistencia R es idéntica a la que desarrolla la señal sin modular

$$P_{CM} = \frac{J_0^2(m)V_c^2}{2R} + 2\frac{J_1^2(m)V_c^2}{2R} + 2\frac{J_2^2(m)V_c^2}{2R} + 2\frac{J_3^2(m)V_c^2}{2R} + \ldots + 2\frac{J_n^2(m)V_c^2}{2R} + \ldots = \frac{V_c^2}{2R} = P_C$$

- La explicación de esta propiedad es debido a que la envolvente de la señal modulada en ángulo es constante por lo que es de esperar que la potencia de la portadora y de la señal FM es la misma.

Interpretación fasorial de una señal de FM

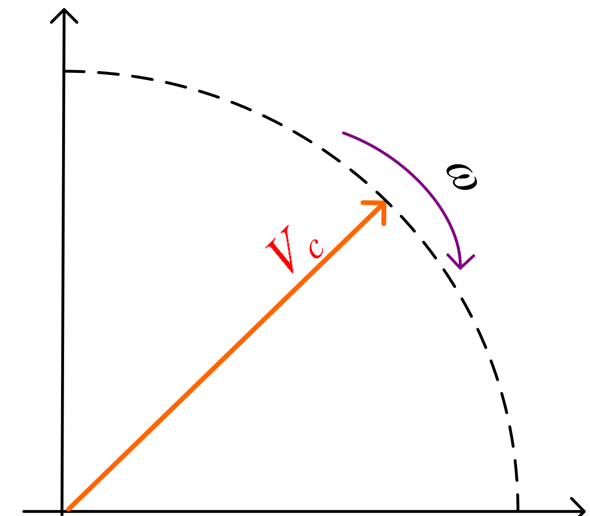
$$v_{FM}(t) = V_C \cos(\omega_c t + m_f \, sen\, \omega_m t)$$

$$\omega(t) = \omega_c + K_\omega V_m \cos\omega_m t$$

$$\Delta\omega = K_\omega V_m \cos\omega_m t$$

$$\Delta f = K_f V_m \cos\omega_m t$$

$$m_f = \frac{K_\omega V_m}{\omega_m} = \frac{K_f V_m}{f_m} = \frac{\Delta_f}{f_m} = \Delta\theta$$



$\omega(t) = \omega_c + K_\omega V_m \cos\omega_m t$

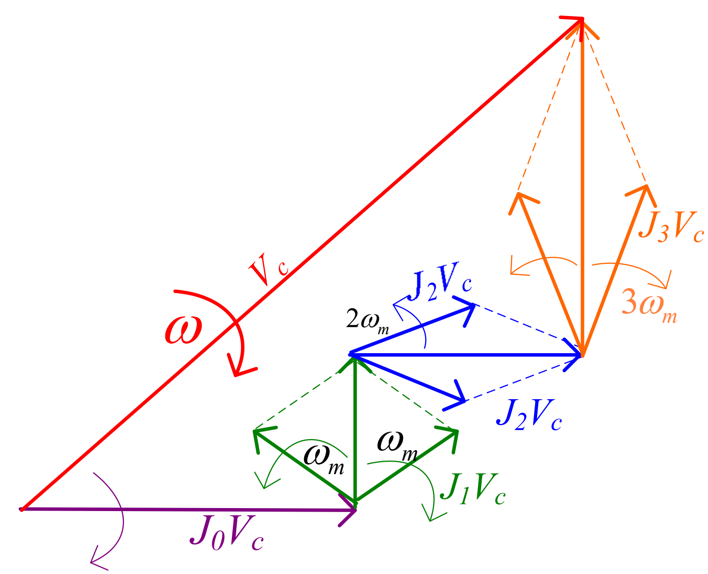
Suponga una señal con 3 pares de BL:

$$v = V_C \; \{J_0 \cos\omega_c t +$$

$$+J_1[sen(\omega_c + \omega_m)t + sen(\omega_c - \omega_m)t] +$$

$$+J_2[\cos(\omega_c + 2\omega_m)t + \cos(\omega_c - 2\omega_m)t] +$$

$$+J_3[sen(\omega_c + 3\omega_m)t + sen(\omega_c - 3\omega_m)t] +$$



Ejemplos de Señales Moduladas en Angulo

Modulador de fase

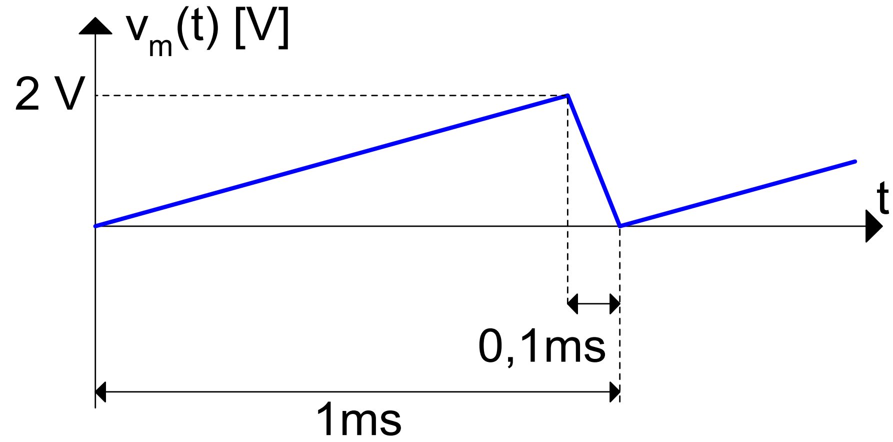
f_c= 10 MHz

$v_m(t)$ en figura

$\Delta\theta_{Máx} = 90°$.

Calcular y Dibujar:
k_p m_p , θ y f

$v_m(t)$= 2 cos 6280 t.



Ejemplos de Señales Moduladas en Angulo

Modulador de fase (PM)

f_c= 10 MHz

$v_m(t)$ en figura

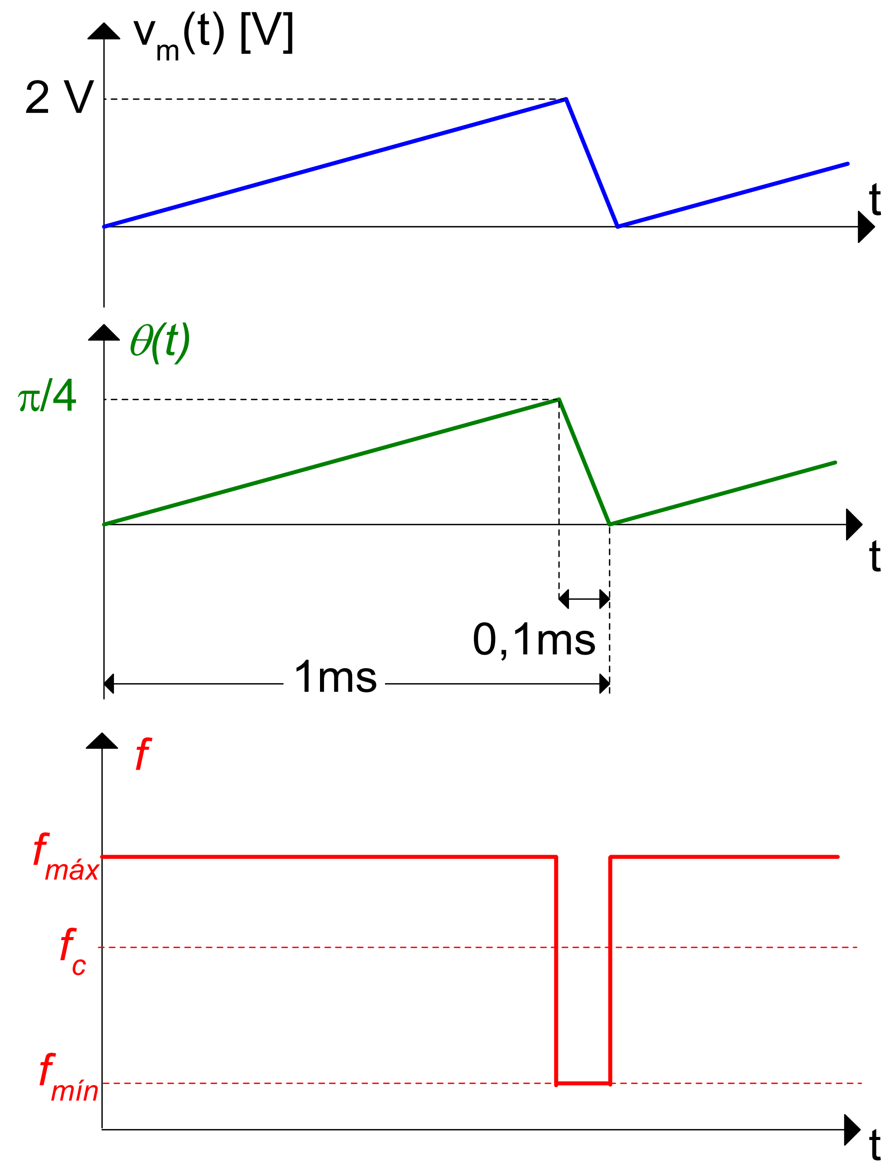
$\Delta\theta_{Máx}$ = 45°.

Calcular y Dibujar:
k_p m_p , θ y f

$v_m(t)$= 2 cos 6280 t.

$$\theta(t) = K_p\, v_m(t) = [rad]$$

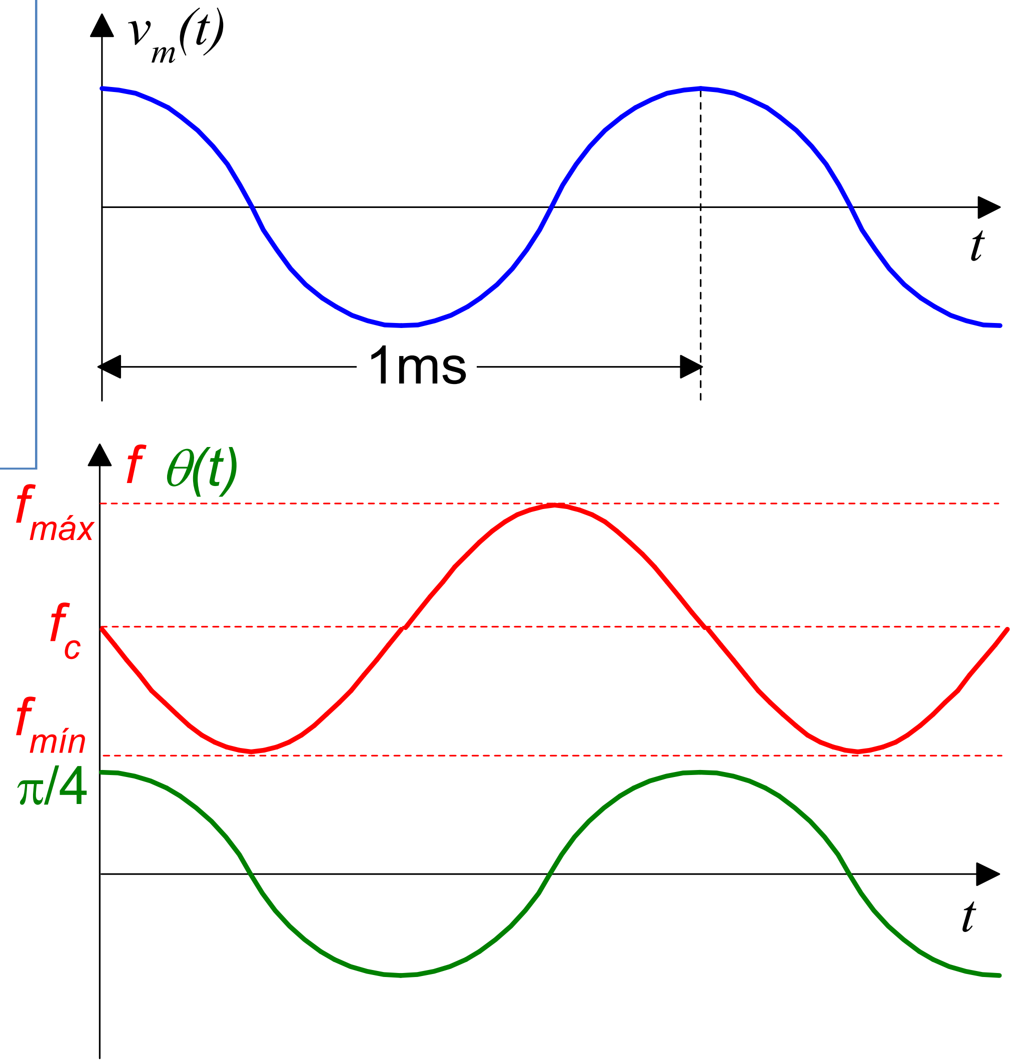
$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} K_p \frac{\partial v_m(t)}{\partial t}$$



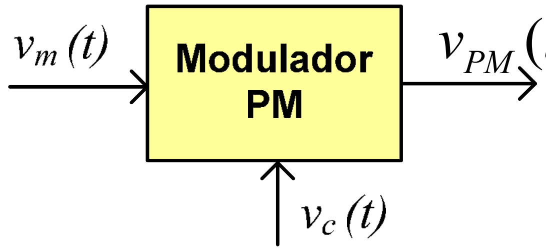
Ejemplos de Señales Moduladas en Angulo

Modulador de fase

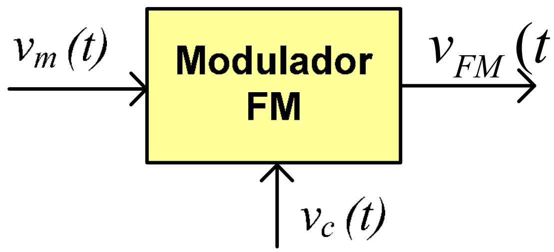
$v_m(t) = 2\cos 6280\, t.$



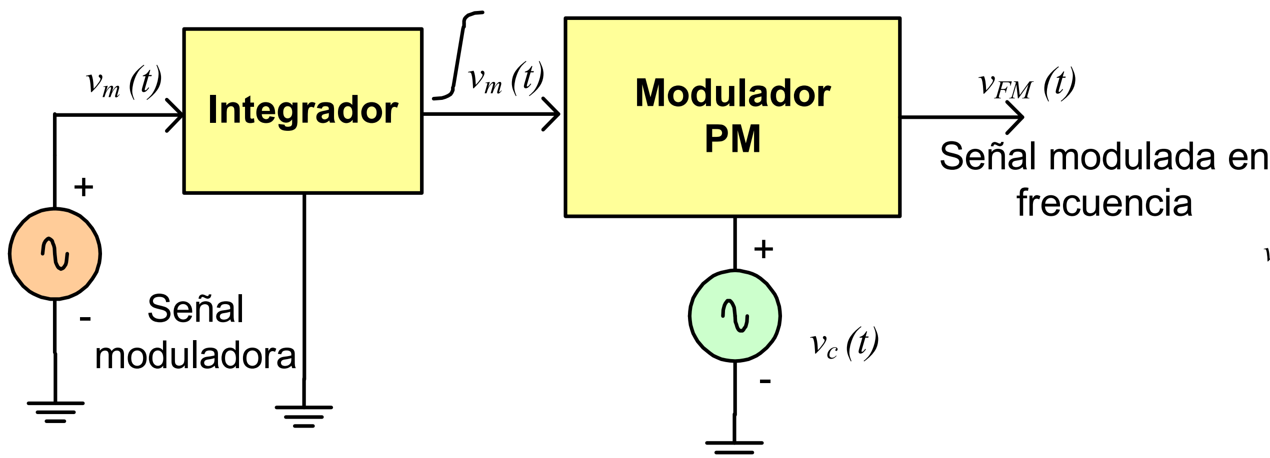
Modulación de FM Usando Modulador de PM

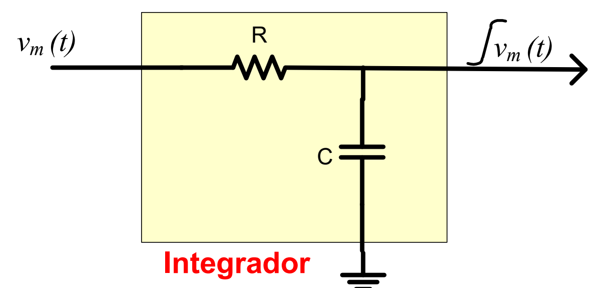


$$v_{PM}(t) = A\cos[\omega_c t + K_p v_m(t)]$$

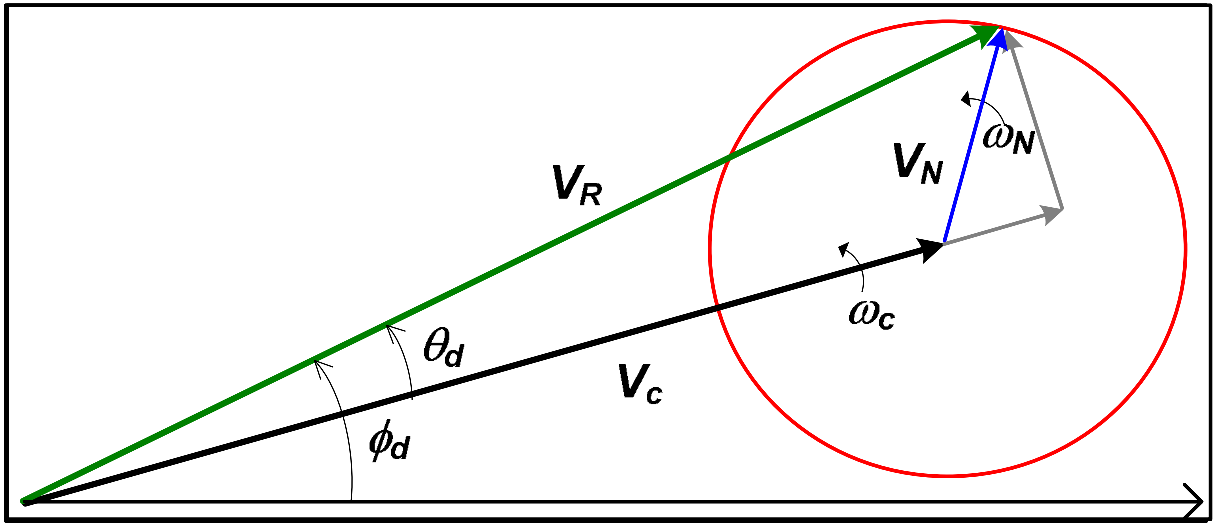


$$v_{FM}(t) = A\cos[\omega_c t + K_\omega \int_0^t v_m(t)\,dt]$$





Influencia del Ruido en las señales Moduladas en Angulo



Suponga V_c=1V y frecuencia ω_c. La señal de ruido que interfiere tiene una amplitud V_N y una frecuencia angular ω_N con $\omega_N=\omega_c+\omega_d$

Entonces:

$$tg\theta_d = \frac{V_N\, sen\,\omega_d t}{V_C + V_N \cos\omega_d t} = \frac{V_N\, sen\,\omega_d t}{1 + V_N \cos\omega_d t}$$

Si se cumple que $1 >> V_N \cos\omega_d t$ Entonces: $tg\theta_d = V_N\, sen\,\omega_d t$

Para θ pequeño: $tg\theta_d \cong \theta_d \Rightarrow \theta_d = V_N\, sen\,\omega_d t$

El ángulo será: $\varphi_d(t) = \omega_c t + V_N\, sen\,\omega_d t$

Influencia del Ruido en las señales Moduladas en Angulo

Y la frecuencia: $$\omega(t) = \frac{\varphi(t)}{dt} = \omega_c + V_N\,\omega_d \cos \omega_d t$$

La desviación de frecuencia producida por el ruido:

$$\Delta\omega_d = V_N\,\omega_d \cos \omega_d t$$

$$\Delta\omega_{d\,máx} = V_N\,\omega_d \Rightarrow \Delta f_{d\,máx} = V_N\, f_d$$

Las frecuencias de ruido que producen componentes en el extremo alto del espectro de frecuencias de señal moduladora producen más desviación de frecuencia, para la misma desviación de fase, que las frecuencias que están en el extremo bajo.

Muy importante!!

Los demoduladores de FM generan una tensión de salida que es proporcional a la Δf, y es igual a la diferencia entre la frecuencia de la portadora y la frecuencia de la señal de interferencia. Por esto, los componentes de ruido de alta frecuencia producen más ruido al ser demodulado, que los componentes de baja frecuencia.

La relación Señal/Ruido en el demodulador es :

$$\frac{S}{N} = \frac{\Delta\omega_S}{\Delta\omega_N} = \frac{K_\omega V_m}{V_N\,\omega_d}$$

Influencia del Ruido en las señales Moduladas en Angulo

1) **El ruido en las frecuencias más altas de señal moduladora tiene, en forma inherente, mayor amplitud que en las frecuencias más bajas . O sea, que el ruido afecta, más a los tonos altos que a los tonos bajos**

$$\Delta\omega_{d\,máx} = V_N\,\omega_d \Rightarrow \Delta f_{d\,máx} = V_N\,f_d$$

Muy importante!!

2) Por ello, para señales moduladoras con nivel uniforme amplitud (respuesta plana), se produce una relación no uniforme de señal /ruido, y **las frecuencias más altas de señal moduladora tienen menor relación de señal/ ruido que las frecuencias más bajas.**

Para compensar esto, las señales moduladoras se *enfatizan* o refuerzan en amplitud, en el transmisor, antes de hacer la modulación.

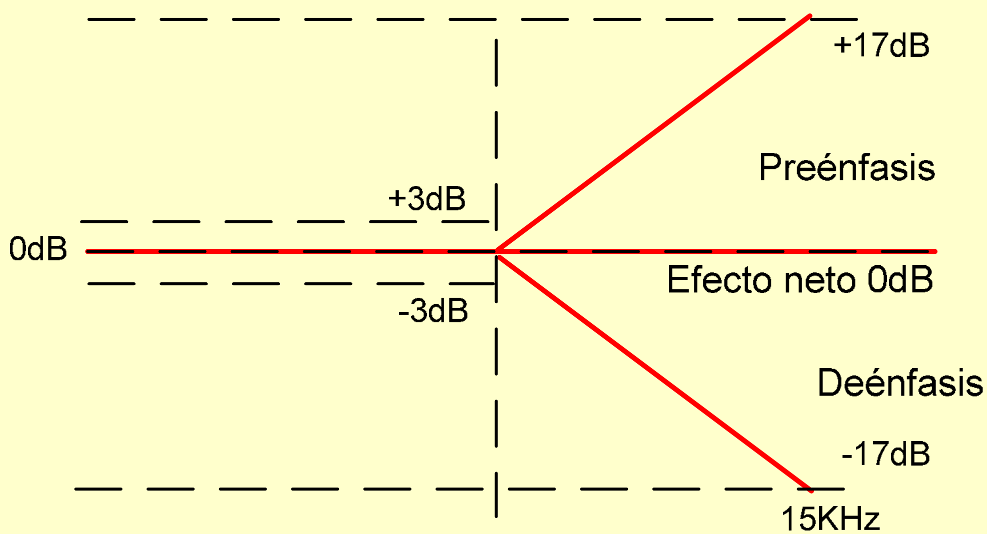
Para compensar este refuerzo, se atenúan, o desenfatizan las señales de alta frecuencia en el receptor, después de hacer la demodulación.

En esencia, la red de preénfasis permite que las señales moduladoras de alta frecuencia modulen a la portadora a un grado mayor y así causen mayor desviación de frecuencia que la que producirían sus amplitudes originales.

Influencia del Ruido en las señales Moduladas en Angulo

Una red de preénfasis proporciona un aumento constante de amplitud de la señal moduladora con el aumento de la frecuencia moduladora

Una red de deénfasis proporciona una disminución constante de amplitud de la señal moduladora con el aumento de la frecuencia moduladora



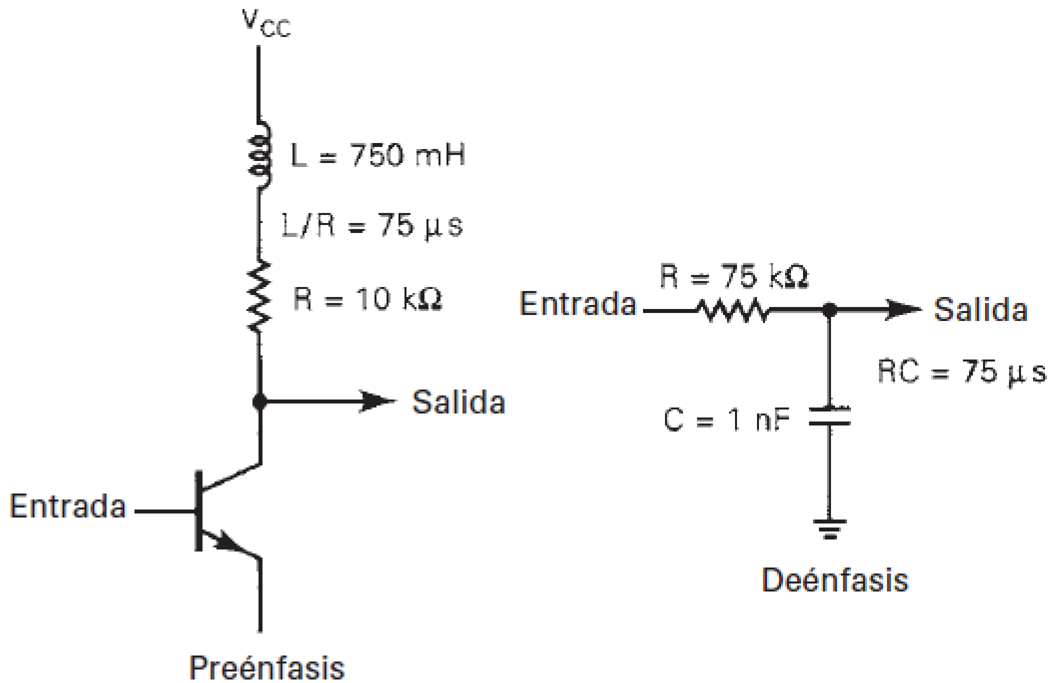
$$f_C = \frac{1}{2\pi 75\mu s} = \frac{1}{2\pi RC} = 2{,}12KHz$$

En FM, se logra aproximadamente una mejora de 12 dB en cuanto a desempeño contra ruido, cuando se usa preénfasis y deénfasis.

Influencia del Ruido en las señales Moduladas en Angulo

Una red de preénfasis es un filtro pasaaltos, es decir, un diferenciador.

Una red de deénfasis es un filtro pasabajos, o sea un integrador.



$$\tau_C = RC = \frac{L}{R} = 75\mu s$$

$$f_C = \frac{1}{2\pi RC} = 2{,}12KHz$$

La frecuencia de corte se determina con la constante de tiempo *RC* o *L/R* de la red.

Para la banda comercial de FM, se usa una constante de tiempo de 75µs. Por consiguiente, la frecuencia aproximada de corte es 2,12 KHz

Objetivo:

Obtener a la salida una señal cuya frecuencia sea doble de la frecuencia de entrada

$$v_i(t) = V_1 \cos \omega_1 t$$

La corriente de salida io es:

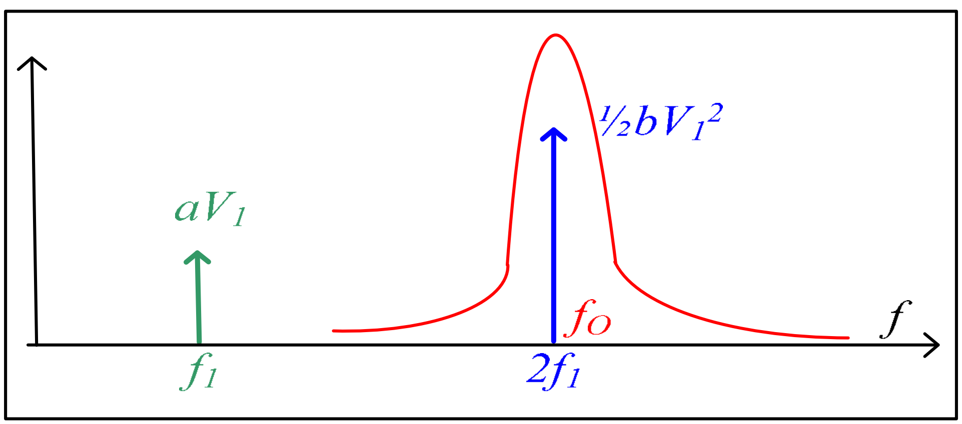
$$i_O(t) = I_o + a\,v_i(t) + b\,v_i^2(t) + c\,v_i^3(t)$$

Reemplazando:

$$i_O(t) = a V_1 \cos \omega_1 t + b V_1^2 \cos^2 \omega_1 t$$

$$b V_1^2 \cos^2 \omega_1 t = \frac{b}{2} V_1^2 (1 + \cos 2\omega_1 t)$$

Amplitud	Frecuencia
aV_1	f_1
$\frac{1}{2}\, bV_1^2$	$2f_1$



La carga es un circuito sintonizado a $2f_1$

Multiplicadores: Repaso

Recuerde:

- Un multiplicador es un amplificador no lineal (polarizado en zona cuadrática o cubica) cargado con un circuito sintonizado al valor de una armónica, Así si se sintoniza 3° armónica es un triplicador.

- Solo se usan duplicadores y triplicadores

$$f_{FM}(t) = f_c + K_f\, V_m \cos \omega_m t = f_c + \Delta_f \cos \omega_m t$$

$$v_{FM}(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\textbf{Multiplicador}\\ \textbf{x2}\end{array}} \longrightarrow v_{FM}(t)$$

$$f(t) = f_C + \Delta f \dashrightarrow 2f(t) = 2\left(f_C + \Delta f\right)$$

$$fc \dashrightarrow 2\,fc$$

$$\Delta f \dashrightarrow 2\,\Delta f$$

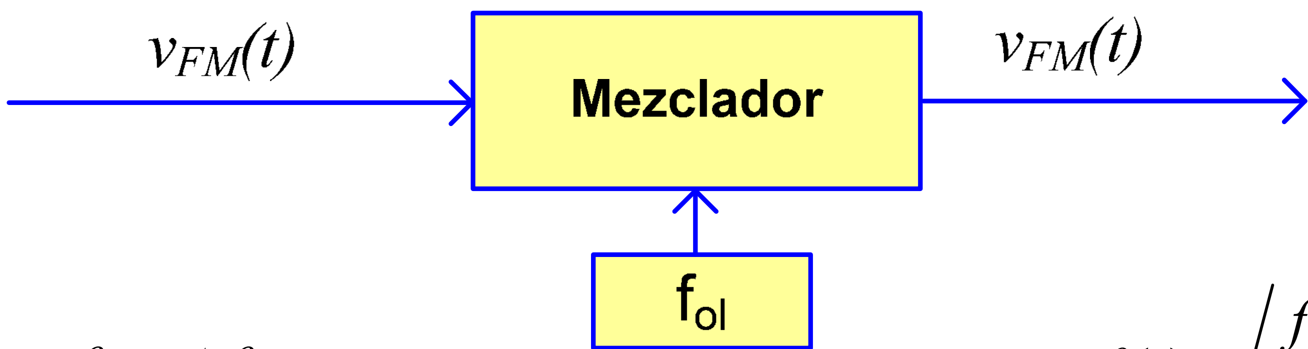
$$m_f \dashrightarrow 2\,m_f$$

$$AB=2(\Delta f+f_m) \dashrightarrow AB=2(2\Delta f+f_m)$$

$$f_m \dashrightarrow f_m$$

Mezcladores: Repaso

- Entonces: Al pasar una señal de FM a través de un multiplicador de frecuencias, se multiplica n veces la frecuencia de la portadora, se efectúa también una multiplicación por n de la desviación.
- Debe hacerse la diferenciación entre mezclador y multiplicador



$$f(t) = f_C + \Delta f \longrightarrow f(t) = \left\langle \begin{matrix} f_{OL} + (f_C + \Delta f) \\ f_{OL} - (f_C + \Delta f) \end{matrix} \right\rangle$$

$$fc \longrightarrow fc + f_{OL}$$

$$\Delta f \longrightarrow \Delta f$$

$$m_f \longrightarrow m_f$$

$$AB = 2(\Delta f + fm) \longrightarrow AB = 2(\Delta f + fm)$$

$$fm \longrightarrow fm$$