

# **SIMULACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE MATERIALES BAJO CARGAS EXPLOSIVAS**

**MARIELA LUEGE**

Ingeniera Civil

Universidad Nacional de La Plata

Tesis presentada como requisito parcial para acceder al grado académico de  
**Magister en Ingeniería Estructural**

DIRECTOR : DR. ING. BIBIANA M. LUCCIONI

COMISIÓN DE SUPERVISIÓN:

DR. ING. BIBIANA LUCCIONI

DR. ING. DANIEL AMBROSINI

DR. ING. CARLOS PRATO

Laboratorio de Estructuras  
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología  
Universidad Nacional de Tucumán  
San Miguel de Tucumán, Noviembre de 1999

## RESUMEN

En el análisis de estructuras sometidas a acciones dinámicas de tipo impulsivo, como impacto o explosión, es necesario tener en cuenta la velocidad de deformación en los modelos constitutivos. Los estudios experimentales muestran que la resistencia, el endurecimiento o ablandamiento y la energía de fractura del material están significativamente influenciadas por la velocidad de deformación cuando ésta supera los  $0.1 \text{ s}^{-1}$ . Por otro lado, la incorporación de la dependencia del tiempo en los modelos constitutivos permite asegurar la unicidad y estabilidad de la solución en problemas dinámicos con ablandamiento.

En esta Tesis se propone un modelo de daño escalar dependiente del tiempo. El mismo está basado en una extensión de un modelo de daño independiente del tiempo a través de una regla de evolución del daño análoga a la de la deformación viscoplástica de Perzyna. La formulación propuesta permite simular la dependencia de la velocidad de deformación, en particular, la sobrerresistencia y modificación de la energía de fractura que presenta el hormigón bajo altas velocidades de deformación. Como caso extremos, el modelo es capaz de reproducir un comportamiento elástico o de daño independiente del tiempo.

El modelo propuesto se implementa en un programa de elementos finitos no lineal dinámico. La integración de la ecuación constitutiva se realiza mediante un algoritmo tipo *full Euler backward*. Las variables internas y la tensión se determinan en forma iterativa utilizando un único residuo en la variable de daño. Dado que el modelo no tiene una condición de consistencia en su formulación, el operador tangente consistente se deduce a partir de un sistema de ecuaciones implícitas dependientes de la deformación específica.

Los ejemplos de aplicación desarrollados muestran que el modelo es capaz de simular el comportamiento del hormigón bajo altas velocidades de deformación. Adicionalmente, del análisis de falla realizado, se desprende que la ecuación de movimiento se mantiene siempre bien condicionada.

## ABSTRACT

Rate dependence must be taken into account in the constitutive relations when used for the analysis of impact or blasting problems. Experimental studies show that the strength, the hardening/softening response of the material, and the fracture energy are significantly influenced by the strain rate when it exceeds  $0.1 \text{ s}^{-1}$ . On the other hand, rate dependency seems to be an elegant method to obtain uniqueness and stability of the solution for initial value problems with strain softening.

A rate dependent scalar damage model is proposed in this Thesis. The model is based on the extension of a rate independent damage model through a damage evolution law similar to that proposed by Perzyna for viscoplastic strains. The proposed formulation is able to simulate strain rate dependence, particularly the increase of material strength under high rate dynamics loads and the modification of fracture energy as a function of the strain rate. Elastic and rate independent damage behaviors can be simulated as extreme cases.

The model is implemented in a non linear finite element dynamic program. A sort of full Euler backward algorithm is developed for the integration of the resulting constitutive equations. Internal variables and stresses are obtained from an iterative scheme based on only one equation for damage variable. As the formulation of this model does not include a consistence condition, the consistent tangent operator is derived from an implicit system of equations as a function of strain.

Application examples developed show that the proposed model is able to simulate concrete behavior under high strain rates. Additionally, from failure analysis it can be seen that well conditioning of movement equation is also assured.

<b>INDICE</b>	<i>Pág.</i>
AGRADECIMIENTOS	I
RESUMEN	II
ABSTRACT	III
NOTACION	IV
INDICE	IX
LISTA DE FIGURAS	XIV
1. INTRODUCCION . . . . .	1
1.1 Importancia del tema . . . . .	1
1.2 Descripción de la acción explosiva . . . . .	2
1.3 Comportamiento estructural y material . . . . .	6
1.3.1 Nivel estructural . . . . .	6
1.3.2 Nivel material . . . . .	6
1.4 Métodos de análisis estructural . . . . .	9
1.4.1 Análisis estático equivalente . . . . .	9
1.4.2 Análisis dinámico . . . . .	9
1.5 Objetivos de la tesis . . . . .	10
1.6 Contenido de la tesis. . . . .	10
2. MODELOS CONSTITUTIVOS – ESTADO DEL ARTE . . . . .	12
2.1 Introducción . . . . .	12
2.2 Modelos constitutivos basados en la teoría de plasticidad . . . . .	12
2.2.1 Teoría clásica de plasticidad . . . . .	12

2.2.1.1	<i>Criterio de discontinuidad para materiales friccionales</i>	
	<i>o criterio de fluencia plástica para metales</i>	14
2.2.1.2	<i>Comportamiento elástico</i>	15
2.2.1.3	<i>Comportamiento elastoplástico</i>	15
2.2.1.4	<i>Comportamiento más allá del límite elástico</i>	16
2.2.1.5	<i>Superficie de carga plástica</i>	17
2.2.2	Modelos para hormigón bajo cargas de tipo explosivo,	
	basados en la teoría de plasticidad	17
2.2.2.1	<i>Acumulación del daño transversal</i>	20
2.2.2.2	<i>Daño volumétrico</i>	20
2.2.2.3	<i>Factor de mayoración radial</i>	20
2.3	Modelos constitutivos basados en la teoría de viscoplasticidad	21
2.3.1	Conceptos básicos de la teoría de viscoplasticidad	21
2.3.1.1	<i>Teoría viscoplástica de Perzyna</i>	21
2.3.1.2	<i>Teoría viscoplástica de Duvaut Lions</i>	22
2.3.2	Modelo viscoplástico para hormigón bajo cargas dinámicas de tipo	
	explosivo	23
2.4	Modelo viscoelástico acoplado con plasticidad para hormigón sometido a altas	
	velocidades de deformación	24
2.4.1	Acoplamiento viscoelástico	26
2.4.2	Sobrerresistencia simulada como endurecimiento viscoso	26
2.4.3	Ley de evolución viscosa	27
2.5	Modelos constitutivos basados en la teoría de daño	28
2.5.1	Conceptos básicos de la teoría de daño	28
2.5.2	Modelo de daño	30

2.5.3	Modelo de daño dependiente del tiempo . . . . .	31
2.5.4	Modelos viscosos . . . . .	32
2.6	Modelo de daño continuo para el análisis de rocas bajo cargas explosivas	34
2.7	Comentarios finales . . . . .	34
3.	MODELO DE DAÑO DEPENDIENTE	
	DE LA VELOCIDAD DE DEFORMACION . . . . .	36
3.1	Introducción . . . . .	36
3.2	Bases termodinámicas . . . . .	36
3.3	Modelo de daño independiente de la velocidad de deformación . . . . .	39
3.4	Modelo de daño escalar dependiente de la velocidad de deformación . . . . .	42
3.4.1	Criterio de daño . . . . .	43
3.4.2	Ley de evolución de la variable de endurecimiento en daño $\kappa^d$ . . . . .	43
3.4.3	Umbral de daño . . . . .	44
3.4.4	Regla de evolución de la variable interna de daño $d$ . . . . .	45
3.4.5	Ley constitutiva secante total . . . . .	46
3.4.6	Ley constitutiva tangente total . . . . .	46
3.4.7	Determinación de la energía de deformación según la velocidad de deformación . . . . .	46
3.5	Comentarios finales . . . . .	47
	ANEXO 3.1: Cálculo de la energía de deformación en función de la velocidad de deformación . . . . .	48
A.3.1.1	Estimación de la resistencia uniaxial del hormigón según el CEB-FIP' 90 . . . . .	48
A.3.1.2	Estimación de la energía de deformación . . . . .	49
	ANEXO 3.2 : Cálculo de la velocidad de deformación equivalente . . . . .	52

A.3.2.1	Introducción . . . . .	52
A.3.2.2	Deformación equivalente . . . . .	52
A.3.2.3	Velocidad de deformación en tracción y compresión . . . . .	53
4.	TRATAMIENTO NUMERICO . . . . .	54
4.1	Introducción . . . . .	54
4.2	Resolución de la ecuación de movimiento . . . . .	54
4.2.1	Método de Newmark . . . . .	59
4.2.2	Método de las diferencias centrales . . . . .	60
4.3	Integración de la ecuación constitutiva . . . . .	61
4.4	Operador tangente consistente . . . . .	66
4.5	Comentarios finales . . . . .	69
	ANEXO 4: Algoritmos de integración de la ecuación constitutiva . . . . .	70
5.	EJEMPLOS NUMERICOS . . . . .	73
5.1	Introducción . . . . .	73
5.2	Ejemplo cuasi-estático de deformación controlada . . . . .	73
5.3	Ejemplo dinámico . . . . .	77
5.4	Ejemplo de una barra empotrada-libre, bajo la acción de una carga de tipo impulsiva . . . . .	79
5.5	Comentarios finales . . . . .	82
6.	CONCLUSIONES . . . . .	84
6.1	Conclusiones . . . . .	84
6.2	Líneas futuras de investigación . . . . .	86
•	REFERENCIAS . . . . .	88
•	APENDICE: ANALISIS DE FALLA . . . . .	93
A.1	Introducción . . . . .	93

A.2 Fundamentos teóricos para el análisis de falla . . . . .	94
A.2.1 Condiciones de falla difusa o continua . . . . .	94
A.2.2 Condiciones de falla localizada o discontinua . . . . .	95
A.3 Análisis de falla aplicado al modelo de daño simple y al modelo de daño dependiente de la velocidad de deformación . . . . .	98
A.3.1 Análisis de la no asociatividad del modelo de daño . . . . .	98
A.3.2 Análisis de falla difusa . . . . .	100
A.3.2.1 Descripción de los ejemplos numéricos . . . . .	102
A.3.2.2 Modelo de daño escalar . . . . .	102
A.3.2.3 Modelo de daño escalar dependiente de la velocidad de deformación . . . . .	103
A.3.3 Análisis de falla localizada . . . . .	106
A.3.3.1 Análisis de la propagación de onda . . . . .	106
A.4 Comentarios finales . . . . .	109
ANEXO A.1: Desarrollo matemático del comportamiento de un continuo en etapa de relajación . . . . .	110



## LISTA DE FIGURAS

Pág.

Figura 1.1a - Sobrepresión a lo largo de una línea radial desde el punto de explosión	3
Figura 1.1b - Sobrepresión y presión dinámica en un punto del espacio a lo largo del tiempo	4
Figura 1.2- Evolución de la presión sobre la cara frontal de una estructura cerrada tipo caja, donde $P_r$ es la sobrepresión reflejada pico, $P_{so}$ es la sobrepresión pico, $t_t$ es la duración de la acción, $t_s=3.S/U$ , $S= H$ ó $B/2$ (la dimensión más pequeña), y $U$ es la velocidad de la onda	5
Figura 1.3 – Fuerzas viscosas en el hormigón bajo altas velocidades de carga	8
Figura 1.4 - Resistencia a la tracción vs. velocidad de carga	8
Figura 2.1 – Comportamiento uniaxial de un material elastoplástico	13
Figura 2.2 – Representación esquemática de una superficie de fluencia	16
Figura 2.3 – Esquema del comportamiento uniaxial	18
Figura 2.4 – Representación de las tres superficies de carga	19
Figura 2.5 - Hipótesis de deformación equivalente	30
Figura 2.6 – Ilustración de la flexibilidad adicional en modelos de daño	30
Figura 5. 1 – Ejemplo de compresión uniaxial cuasi- estático de deformación controlada	74
Figura 5. 2 – Curvas tensión $\sigma_1$ – deformación $\epsilon_1$ para distintas velocidades deformación, con $N=1$ y $\eta=0.001$ s	74
Figura 5. 3 – Influencia del parámetro $\phi$ en la sobrerresistencia y en la energía de deformación para $\dot{\epsilon} = 1 s^{-1}$	75

Figura 5. 4 – Variación de la resistencia y de la energía de deformación según la velocidad de deformación para $\varphi=1$	75
Figura 5. 5 – Relación entre la resistencia pico y el umbral inicial, $f_{cp}/f_{co}$ , en función de la velocidad de deformación $\dot{\epsilon}$ , para $\eta=0.001s$ y distintos valores de $N$	76
Figura 5. 6 - Relación entre la resistencia pico y el umbral inicial, $f_{cp}/f_{co}$ en función de la velocidad de deformación $\dot{\epsilon}$ , para distintos valores de $\eta$ y $N=2$	77
Figura 5. 7 – Ejemplo dinámico de compresión uniaxial, con $\Delta t=1.E-07 s$	77
Figura 5. 8 – Evolución de la variable interna de daño $d$ en el tiempo $t$ , para distintos valores de $\eta$ y $N$ , (I: $\eta=0.1 s$ y $N=1$ , II: $\eta=0.001s$ y $N=2$ , III: $\eta=0.0001 s$ y $N=2$ )	78
Figura 5. 9 – Evolución de la tensión $\sigma_1$ en el tiempo $t$ para distintos valores de $\eta$ y $N$ (I: $\eta=0.1 s$ y $N=1$ , II: $\eta=0.001 s$ y $N=2$ , III: $\eta=0.0001 s$ y $N=2$ )	78
Figura 5. 10 – Evolución de la tensión $\sigma_1$ en el tiempo $t$ para el caso elástico. Resolución implícita	79
Figura 5. 11 - Barra sometida a carga impulsiva en un extremo	80
Figura 5. 12 - Deformación $\epsilon_x$ a lo largo de la barra para distintas mallas en el tiempo $t=3t_0$ ( $t_0=5. \times 10^{-5} s$ y $\eta= 0.1s$ )	80
Figura 5. 13 - Deformación $\epsilon_x$ a lo largo de la barra en distintos instantes de tiempo, con $\eta= 0.001 s$ , 5 elem. y $t_0=5.E-05 s$	81
Figura 5. 14 - Deformación $\epsilon_x$ a lo largo de la barra en distintos instantes de tiempo, con $\eta= 0.0001 s$ , 5 elem. y $t_0=5.E-05 s$	81
Figura 5. 15 Deformación $\epsilon_x$ a lo largo de la barra en distintos instantes de tiempo, con $\eta=0.00001 s$ , 5 elem. y $t_0=5.E-05 s$	82
Figura 5. 16 - Evolución de la variable de daño $d$ a lo largo de la barra para $\eta=0.00001 s$ , 5 elem., $t_0=5.E-05 s$ y $t=6.5E-04$	82
Figura A.1 – Ejemplo de compresión uniaxial cuasi-estático de deformación controlada	102

Figura A. 2 –Variación de la tensión en función de la deformación axial	103
Figura A. 3 – Variación del indicador de falla difusa $e$ en función de la deformación axial $\epsilon_1$ , para el modelo de daño escalar	103
Figura A. 4 – Tensión $\sigma_1$ en función de la deformación $\epsilon_1$	104
Figura A. 5 – Trabajo de segundo orden $d^2W$ en función de la deformación $\epsilon_1$	104
Figura A. 6 - Indicador de falla difusa $e_{imp}$ en función de la deformación $\epsilon_1$	105
Figura A. 7 - Tensión $\sigma_1$ en función de la deformación $\epsilon_1$	105
Figura A. 8 - Trabajo de segundo orden $d^2W$ en función de la deformación $\epsilon_1$	105
Figura A. 9 - Indicador de falla difusa $e_{imp}$ en función de la deformación $\epsilon_1$	106

## CAPITULO 1

---

### INTRODUCCION

#### 1.1 Importancia del tema

La palabra explosión se utiliza, en sentido general, para designar cualquier reacción química que pueda causar un sustancial aumento de presión en el espacio circundante. Una explosión puede tomar la forma de una *deflagración*, que genera una presión moderada de velocidad del orden de m/seg, o de una *detonación*, que genera muy altas sobrepresiones en el espacio cercano con velocidades del orden de Km/seg (Smith et al. 1994). Dichas presiones inciden sobre las estructuras con velocidades 1000 veces mayores que para el caso de cargas sísmicas y las frecuencias de la respuesta estructural resultante son mucho más altas que las inducidas por cargas convencionales. En general, prácticamente ninguna norma o código de construcción en el mundo da guías de diseño para este tipo de cargas dinámicas.

Dentro de las cargas impulsivas, las cargas explosivas y de impacto han concitado sumo interés en los últimos años debido a diversos sucesos, accidentales o intencionales, sobre estructuras civiles importantes ocurridos en distintos lugares del mundo.

Hasta hace muy poco tiempo, la consideración de cargas explosivas debidas a ataques terroristas se limitaba principalmente a estructuras tales como estructuras militares, centrales nucleares, embajadas, etc.. La reciente explosión en el World Trade Center de Nueva York, causó serios daños, demostrando que, actualmente, el diseñador puede necesitar considerar cargas provenientes de ataques deliberados en otros tipos de estructuras civiles. Para mejorar la seguridad estructural, tanto de estructuras militares como civiles, es necesario disponer de información técnica apropiada. Con ese fin, en los últimos cinco años se formaron el Comité 370 del American Concrete Institute (ACI), para Efectos de Cargas Dinámicas Vibratorias y de Corta Duración, y un Comité de la American Society of Civil Engineering (ASCE), para Diseño Estructural para Seguridad

Física.

## 1.2 Descripción de la acción explosiva

La *detonación* es una forma de reacción del explosivo que produce ondas de choque de gran intensidad. La mayoría de los explosivos pueden ser detonados bajo un estímulo suficiente. Como reacción, se generan gases a alta temperatura bajo presiones entre 100kbar y 300kbar y temperaturas entre 3000°C y 4000°C. Dichos gases se expanden violentamente expulsando al aire circundante del volumen que ocupa.

Si el explosivo detonante se encuentra en contacto con un material sólido, la llegada de la onda explosiva a la superficie del explosivo genera ondas de presión muy intensas en el material produciendo el aplastamiento y la desintegración del material. Este efecto de golpe es lo que se conoce como “brisance” (Smith et al. 1994).

Si el explosivo está rodeado de un medio como el aire, se crea una onda de presión. El frente de onda de choque generado se aleja del lugar de la explosión a una velocidad  $U$  y a una sobrepresión pico  $p_{so}$  (por encima de la presión atmosférica) que decae con la distancia recorrida (Glasstone et al. 1997). Los *vientos* que acompañan el paso de la onda de choque generan la llamada presión dinámica  $q_s$ . Dicha presión es una medida de la energía cinética del volumen de aire detrás del frente de onda, es positiva cuando el aire está en movimiento y cero en caso de quietud, su dirección depende de la dirección del viento generado. Se retorna al estado de equilibrio cuando el aire y los gases expulsados vuelven a su lugar de origen.

En la figura 1.1a se esquematiza la distribución de sobrepresión a lo largo de una línea radial para un instante de tiempo cualquiera. En la figura 1.1b se presenta el comportamiento de la sobrepresión y de la presión dinámica a lo largo del tiempo, en cada punto del espacio.

Cuando un frente de onda se encuentra con una superficie sólida, se produce una modificación instantánea de la presión debido a la reflexión de la onda incidente y a la acción de la presión dinámica. El valor pico de la presión reflejada depende de la intensidad de la onda incidente, del ángulo con el cual se intercepta la superficie, y de la naturaleza de la superficie. Para el caso de una superficie ubicada normalmente a la dirección de desplazamiento del frente de onda, se pueden utilizar las siguientes

expresiones para simular la acción (Glasstone et al. 1994):

Presión reflejada: 
$$P_r = 2 p_s + (\gamma + 1) q_s \quad (1.1)$$

Presión dinámica máxima: 
$$q_s = \frac{5 p_s^2}{2(p_s + 7 p_o)} \quad (1.2)$$

Velocidad del frente de onda: 
$$U_s = \sqrt{\frac{6 p_s + 7 p_o}{7 p_o}} a_o \quad (1.3)$$

Densidad del aire detrás del frente de onda: 
$$\rho_s = \frac{6 p_s + 7 p_o}{p_s + 7 p_o} \rho_o \quad (1.4)$$

donde  $p_s$ , es la sobrepresión estática pico,  $p_o$  es la presión atmosférica delante de la onda explosiva,  $\gamma$  es la relación de temperatura específica del medio (toma el valor de 1.4 para temperaturas moderadas),  $\rho_o$  es la densidad del aire a presión atmosférica delante de la onda explosiva y  $a_o$  es la velocidad del sonido a presión atmosférica.

Dichas relaciones derivan de las condiciones de Rankine-Hugoniot basadas en la conservación de la masa, de la energía y de la cantidad de movimiento en el frente de choque, conjuntamente con las ecuaciones de estado del aire.

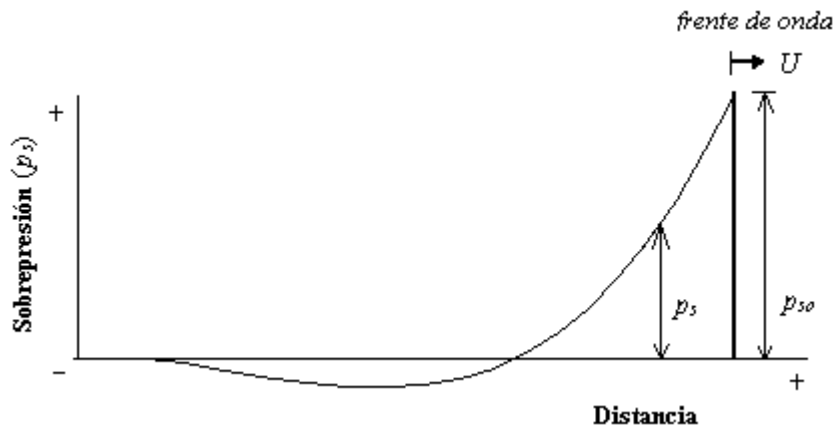


Figura 1.1a - Sobrepresión a lo largo de una línea radial desde el punto de explosión

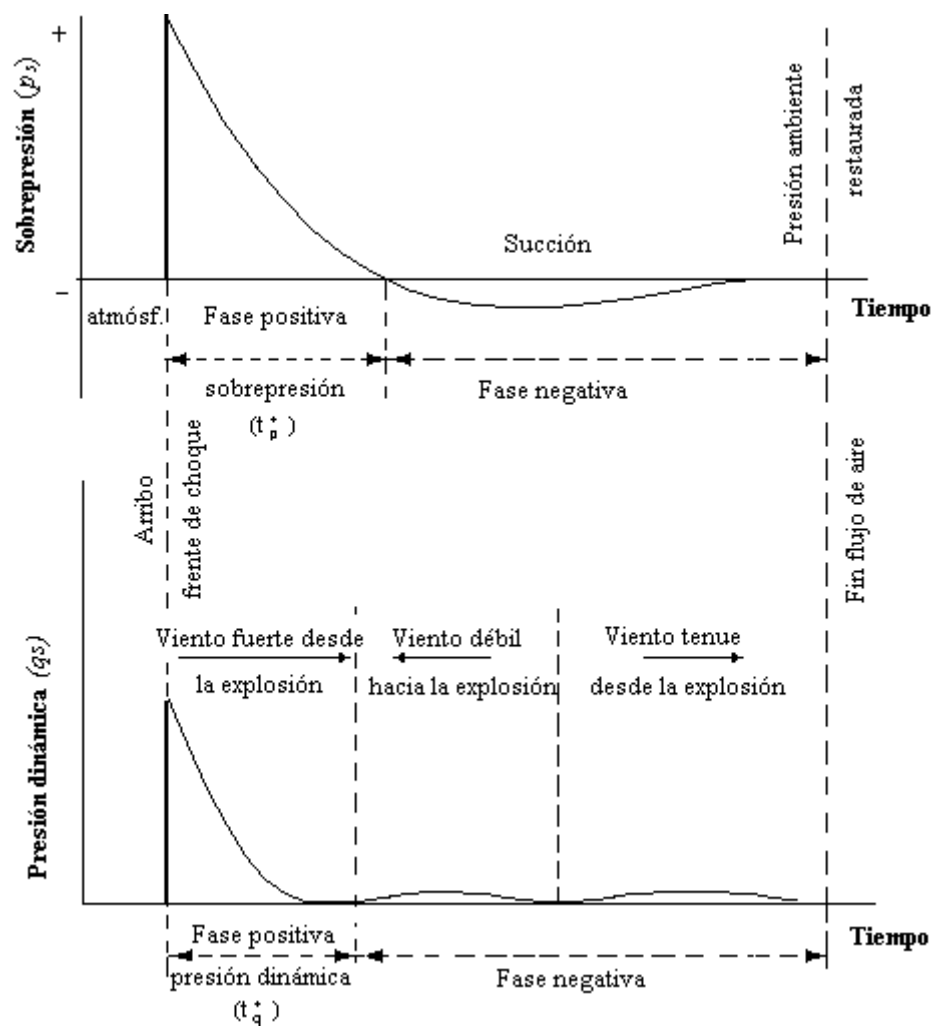


Figura 1.1b- Sobrepresión y presión dinámica en un punto del espacio a lo largo del tiempo

Para simular la acción de un explosivo sobre la cara frontal de una estructura cerrada tipo caja, se puede utilizar el esquema de la figura 1.2 (Autoridad Regulatoria Nuclear 1998):

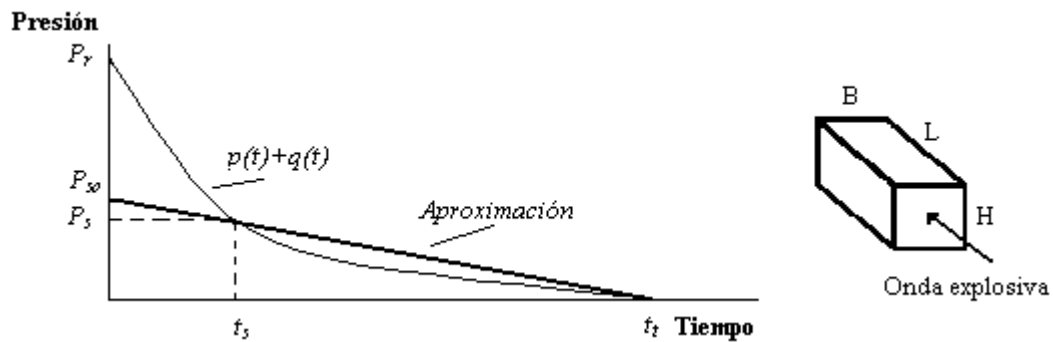


Figura 1.2- Evolución de la presión sobre la cara frontal de una estructura cerrada tipo caja, donde  $P_r$  es la sobrepresión reflejada pico,  $P_{so}$  es la sobrepresión pico,  $t_t$  es la duración de la acción,  $t_s = 3S/U$ ,  $S = H$  ó  $B/2$  (la dimensión más pequeña), y  $U$  es la velocidad de la onda.

Según la distancia del explosivo a una estructura, la acción sobre la misma se define como (Yi 1991):

- *Explosión libre*: la distribución de carga sobre la estructura se asume uniforme, ya que la explosión sucede a una distancia relativamente alejada de la estructura.
- *Explosión cercana*: la distribución de carga se considera no-uniforme, ya que la explosión actúa a una distancia corta de la estructura.
- *Explosión de contacto*: la explosión actúa directamente sobre la superficie de la estructura, generándose cargas de gran magnitud sobre la estructura.

Uno de los enfoques más utilizados para el escalado de las ondas de presión es la ley de Hopkinson (Baker et al. 1983). La misma establece que si dos cargas diferentes del mismo explosivo y de la misma geometría son detonadas en la misma atmósfera, a distancias escaladas idénticas, se producen ondas explosivas similares. De esta forma, cualquier distancia  $R$  de una carga explosiva  $W_e$ , puede transformarse en una distancia escalada  $Z$  como sigue:

$$Z = \frac{R}{W_e^{1/3}} \quad (1.5)$$

La utilización de  $Z$  permite representar en forma compacta y eficiente los datos de



ondas explosivas para un amplio rango de situaciones.

En la ecuación (1.5),  $W_e$  es la carga explosiva expresada en Kg de TNT. Uno de los explosivos más conocidos es el TNT, el cual pertenece al grupo de los nitro-explosivos. Para cuantificar ondas de presión correspondientes a otras fuentes, la masa de explosivo puede convertirse en una masa equivalente de TNT, definida como la masa de TNT que contendría la misma energía y produciría la misma sobrepresión pico o el mismo impulso, que la masa del explosivo.

A modo de ejemplo, 100 Kg de RDX (Ciclonita) es equivalente a 118.5 Kg de TNT, ya que la relación de energías específicas es 5360/4520 (=1.185). Si el explosivo se ubica a una distancia de 10 m, resulta  $Z = 2.03 \text{ m/Kg}^{1/3}$ ,  $p_s = 15 \text{ MPa}$ ,  $t_s = 2 \text{ ms}$ ,  $U_s = 3 \text{ m/ms}$ . Es conveniente comparar el tiempo de duración  $t_s = 2 \text{ ms}$  de la fase positiva, con el período fundamental de estructuras convencionales que vale entre 0.1 a 0.03 seg en elementos vidriados, 0.5 a 0.065 seg en vigas y columnas, y 0.1 a 0.2 seg en pórticos (Autoridad Regulatoria Nuclear 1998; Smith et al. 1994).

### **1.3 Comportamiento estructural y material**

#### **1.3.1 Nivel estructural**

La onda de choque originada en la detonación cercana o libre de un explosivo, constituye una carga dinámica de corta duración sobre las estructuras que intercepta. La respuesta de una estructura sometida a una carga impulsiva depende no sólo de las características dinámicas de la carga sino también de las características de la respuesta dinámica de la estructura (Autoridad Regulatoria Nuclear 1998). Por ejemplo, una carga impulsiva de muy corta duración, en relación con el período natural dominante de la estructura, puede pasar antes de que la estructura tenga tiempo para responder a la carga transitoria.

#### **1.3.2 Nivel material**

En el caso de explosiones de contacto, la presión dinámica en el frente de onda de detonación es la presión de detonación que depende de la densidad del explosivo y de la velocidad de detonación. Dicha presión toma valores que exceden ampliamente la resistencia a compresión de la mayoría de los materiales y, en consecuencia, produce la desintegración del material en contacto.

Las cargas dinámicas asociadas con explosiones cercanas o libres provocan velocidades de deformación en el material del orden de  $10^{-1}$  a  $10^3$  1/seg. Eso da como resultado un comportamiento especial de los materiales afectados, observándose grandes sobrerresistencias y aumento de la rigidez respecto al comportamiento estático, o desintegración total en el caso de explosiones muy próximas. Esta dependencia de la velocidad de deformación debe ser incluida en los modelos teórico-numéricos. En general, existen varios modelos de este tipo para acero pero muy pocos para hormigón. A veces se utilizan métodos simplificados que consisten en aumentar el valor de la resistencia estática. De acuerdo a esto, parecería que si se ignora el efecto de la velocidad de deformación, se estaría del lado de la seguridad. Sin embargo, esto no siempre ocurre, ya que la respuesta de la estructura puede cambiar de dúctil a frágil debido a la elevada velocidad de carga.

El hormigón es un material cuya respuesta depende fuertemente la velocidad. Es decir, las propiedades mecánicas del hormigón a nivel macroscópico, resistencia y módulo de Young, dependen de la velocidad de aplicación de la carga. Si bien estos efectos han sido confirmados experimentalmente (Rossi et al. 1994, Toutlemonde et al. 1998), el origen de esta dependencia es un tema todavía en estudio.

Una de las teorías existentes está basada en trabajos experimentales realizados recientemente, en los cuales se ha estudiado la relación existente entre el grado de saturación de los nanoporos del hormigón y el aumento de la resistencia observada en tracción directa, para velocidades de carga variando desde  $10^{-5}$  hasta 100 Gpa/s. En el ámbito de la ingeniería civil, dichas velocidades de carga pueden encontrarse en numerosas condiciones de carga dinámica, como es el caso de sismos, automóviles que impactan en pilas de puentes y, en particular, explosiones. Sólo se observa aumento de la resistencia dinámica en hormigones cuyos nanoporos se encuentran saturados. Dichas observaciones experimentales confirman la existencia de efectos viscosos en la pasta cementicia, originados principalmente por el desarrollo de fuerzas viscosas a nivel microscópico en los nanoporos, como se observa en la figura 1.3 y 1.4 (Sercombe et al. 1998, Toutlemonde 1995). Es importante aclarar que cuando la velocidad de deformación supera los 10 1/seg, cobran importancia los efectos de tipo inerciales.

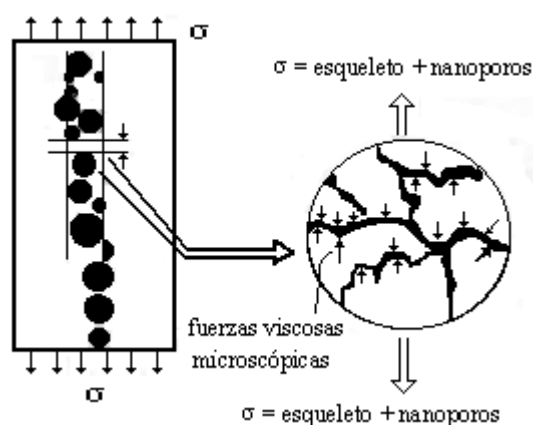


Figura 1.3 – Fuerzas viscosas en el hormigón bajo altas velocidades de carga

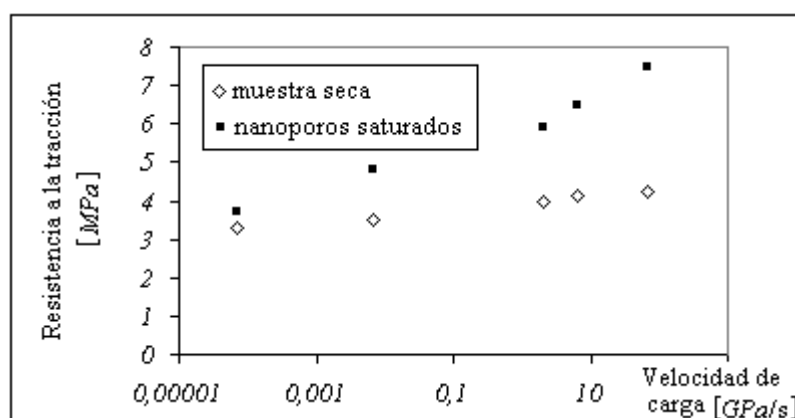


Figura 1.4 - Resistencia a la tracción vs. velocidad de carga

Los efectos viscosos en los nanoporos pueden explicar los resultados experimentales observados en el hormigón bajo altas velocidades de carga. En particular, la rigidización de la pasta cementicia deriva, en algunos casos, en planos de falla que atraviesan los agregados.

La resistencia a tracción, la resistencia a compresión y la energía de fractura en el hormigón pueden verse incrementadas con el aumento de la velocidad de deformación, mientras que el módulo de ablandamiento uniaxial decrece. El módulo elástico también resulta influenciado por la velocidad de carga (el aumento es del orden del 10%), pero los efectos más significativos yacen en la parte no lineal de la respuesta, una vez que la fisuración o la microfisuración ha comenzado (Dubé et al. 1996).

El código Europeo CEB-FIP90, contempla el aumento de la resistencia del hormigón bajo altas velocidades de deformación, y presenta una serie de expresiones algunas de las cuales se pueden encontrar en el capítulo 3 de esta tesis.

## **1.4 Métodos de análisis estructural**

A continuación se describen distintos métodos que se utilizan actualmente para el análisis de estructuras frente a este tipo de acciones.

### **1.4.1 Análisis estático equivalente**

Con el propósito de evaluar o diseñar una estructura con varios grados de libertad, sin realizar un análisis dinámico riguroso en el tiempo, se recomienda reducir la carga dinámica a una carga estática equivalente usando un modelo de un grado de libertad (Autoridad Regulatoria Nuclear 1998). Los parámetros que normalmente definen la respuesta de una estructura incluyen la duración de la carga, el amortiguamiento y el nivel máximo de ductilidad mostrado por la estructura durante la respuesta. La carga más significativa, está constituida por el pulso pico inicial, el amortiguamiento difícilmente tenga alguna influencia en la respuesta.

En este método se resuelve estáticamente la estructura, por lo cual se multiplica la acción dinámica incidente por un coeficiente que tiene en cuenta dicha simplificación.

### **1.4.2 Análisis dinámico**

En este caso el análisis se efectúa teniendo en cuenta la naturaleza dinámica de la carga explosiva, y planteando la ecuación de movimiento en forma diferencial. Existen distintos criterios de discretización de la estructura, entre los cuales pueden citarse los siguientes (Clough et al. 1975):

i. Sistema de masas discretas equivalente: se define el número de grados de libertad dinámicos de la estructura, como el número de componentes de desplazamientos necesarios para representar el efecto de todas las fuerzas de inercia significativas.

ii. Desplazamientos generalizados: se basa en la suposición de que la deformada de una estructura puede ser expresada como la suma de una serie de deformadas especificadas.

iii. Método de los elementos finitos: expresa los desplazamientos de la estructura en

términos de un número finito de desplazamientos nodales. La deformada de la estructura completa puede ser expresada en término de las coordenadas generalizadas, por medio de un conjunto de funciones apropiadas de desplazamientos (funciones de interpolación).

### **1.5 Objetivos de la tesis**

El objetivo final del presente trabajo es desarrollar una herramienta para la predicción de la respuesta de estructuras de hormigón simple, armado o pretensado, bajo cargas impulsivas como explosiones cercanas o libres.

Específicamente, el objetivo es formular un modelo constitutivo que permita simular el comportamiento del hormigón bajo cargas de tipo explosivo, contemplando los distintos efectos que se producen bajo altas velocidades de deformación y que han sido evidenciados experimentalmente. La explicación de dichos fenómenos escapa al alcance de esta tesis.

A fin de lograr el objetivo final, es necesario además, implementar el modelo propuesto en un programa de elementos finitos apto para problemas no lineales dinámicos, y realizar ensayos numéricos con el objeto de analizar y verificar el comportamiento del mismo.

### **1.6 Contenido de la tesis**

De acuerdo a los objetivos planteados, en esta tesis se propone e implementa un *modelo de daño dependiente de la velocidad de deformación, con una evolución del daño del tipo Perzyna*. El mismo permite simular la sobrerresistencia presente en el hormigón tanto en tracción como en compresión, la degradación del módulo elástico una vez comenzada la fisuración, y la modificación de la energía de fractura según la velocidad de deformación.

El contenido de la tesis se organiza de la siguiente manera:

En el capítulo 2, se presentan distintos modelos constitutivos disponibles en la bibliografía, para el caso de acciones de tipo explosivo.

En el capítulo 3, se formula un modelo de daño dependiente de la velocidad de deformación. Partiendo de un modelo de daño escalar independiente del tiempo, se define una regla de evolución de la variable interna de daño del tipo de la ley de evolución de la

deformación viscoplástica de Perzyna. La energía de fractura se define como una función dependiente de la velocidad de deformación.

El tratamiento numérico del modelo se desarrolla en el capítulo 4, en particular, se trata la resolución numérica de la ecuación de movimiento mediante métodos de integración en el tiempo, tanto implícitos como explícitos, la integración de la ecuación constitutiva y la obtención del módulo tangente consistente.

Con el objeto de estudiar el comportamiento del modelo propuesto, en el capítulo 5 se describen distintos ensayos numéricos.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones y propuestas para trabajos futuros.

En forma adicional, en el Apéndice se realiza el análisis de falla utilizando el modelo propuesto.

## CAPITULO 2

---

### MODELOS CONSTITUTIVOS – ESTADO DEL ARTE

#### 2.1 Introducción

En el presente capítulo se hace una revisión de modelos constitutivos desarrollados para simular el comportamiento de materiales de tipo cohesivo-friccionales, como el hormigón, frente a acciones de origen explosivo.

Las cargas dinámicas asociadas con explosiones provocan velocidades de deformación en el material del orden de  $10^{-1}$  a  $10^3 \text{ s}^{-1}$ . En el hormigón dicho efecto genera un comportamiento de la pasta cementicia de tipo viscoso, pudiéndose observar sobrerresistencia, modificación de la etapa de endurecimiento-ablandamiento y aumento de la energía de fractura cuando la velocidad de deformación supera  $0.1 \text{ s}^{-1}$  (Dubé et al. 1996, Bischoff et al. 1991, Bruhwiler 1990). En particular, lo que se modifica significativamente es la parte no lineal de la respuesta, cuando comienza la fisuración o la microfisuración.

En la bibliografía se encuentran distintos modelos para simular el comportamiento del hormigón bajo la acción de cargas dinámicas que originan altas velocidades de deformación. Las extensiones de modelos de plasticidad y de daño incorporan el efecto de tipo viscoso, por ejemplo, definiendo una regla de evolución de la variable interna de tipo viscosa o incorporando un mecanismo de disipación energético de tipo viscoso. A continuación se presentan algunas de las formulaciones existentes en la actualidad para este tipo de problemas, previa descripción de las teorías clásicas a partir de las cuales fueron desarrolladas.

#### 2.2 Modelos constitutivos basados en la teoría de plasticidad

##### 2.2.1 Teoría clásica de plasticidad

En la figura 2.1 se muestra la curva de comportamiento uniaxial de un punto correspondiente a un material elastoplástico ideal (Luccioni 1993). Al comienzo se observa

una zona lineal elástica hasta el punto A, llamado *límite de proporcionalidad*. A partir de él se inicia una etapa elástica no lineal hasta alcanzar el punto A', denominado *límite de elasticidad*. Seguidamente comienza un período elastoplástico con rigidez tangente decreciente debido a los mecanismos inelásticos irreversibles. Si se descarga en esta etapa, sólo se recupera la parte elástica  $\varepsilon^e$  de la deformación total  $\varepsilon$ , quedando una parte remanente, no recuperable, que recibe el nombre de deformación plástica  $\varepsilon^p$ .

Dentro de la zona elasto-plástica se distinguen tres regiones:

- Una zona donde hay crecimiento de la tensión (A'-C), que se denomina zona elasto-plástica con endurecimiento.
- Una zona sin cambio de tensiones (C-D), que se denomina zona perfectamente plástica o plástica con endurecimiento nulo.
- Una zona donde la tensión decrece bajo crecimiento sostenido de la deformación (D-E) que se denomina zona elastoplástica con ablandamiento.

La teoría de la elasticidad simula el comportamiento dentro del rango elástico. La teoría de la plasticidad permite simular el fenómeno de irreversibilidad de las deformaciones, el cual induce a un comportamiento energético no conservativo dependiente del camino recorrido.

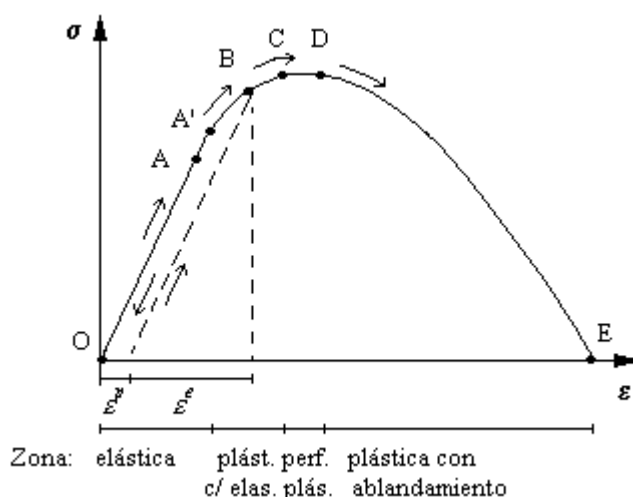


Figura 2.1 – Comportamiento uniaxial de un material elastoplástico



El desarrollo de los modelos elasto-plásticos con endurecimiento, mediante la teoría incremental de la plasticidad, comprende dos grandes aspectos:

- El *criterio de fluencia o discontinuidad*, que permite establecer durante el proceso de carga el comienzo del período inelástico y la posterior evolución de las fronteras del dominio elástico en el espacio de tensiones.
- El *comportamiento más allá del límite elástico o comportamiento elastoplástico*, que queda definido mediante:
  - Una descomposición de las deformaciones en una parte elástica y otra parte plástica.
  - Una regla de flujo plástico que será interpretada como una regla de evolución explícita de las variables internas.
  - Un conjunto de variables internas  $\alpha$ , escalares ó tensoriales, definidas internamente por el mismo proceso elastoplástico en forma implícita, a partir de una regla de evolución explícita.

#### 2.2.1.1 Criterio de discontinuidad para materiales friccionales o criterio de fluencia plástica para metales

En forma general, puede definirse el límite de discontinuidad a través de una función escalar que depende del estado de tensión  $\sigma_{ij}$ , y de un grupo de variables internas plásticas  $\alpha_i$ .

$$F(\sigma_{ij}(t), \alpha_i(t)) = 0 \quad (2.1)$$

donde  $\sigma_{ij}(t)$  es el tensor de tensiones actual y  $\alpha_i(t)$  es el conjunto de variables internas plásticas en el estado actual.

$$\alpha(t) = \{\kappa(t), \eta^p(t), \varepsilon_{ij}^p(t)\}^T \quad (2.2)$$

donde:

$\kappa(t)$ : variable de endurecimiento plástico isótropo

$\eta^p(t)$ : variable de endurecimiento plástico cinemático

$\varepsilon_{ij}^p(t)$ : tensor de deformación plástica

### 2.2.1.2 Comportamiento elástico

El comportamiento de un punto en un instante cualquiera  $t$ , antes de alcanzar el límite de discontinuidad, es elástico si cumple con las siguientes condiciones:

$$F(\sigma_{ij}(t), \alpha_i(t)) < 0 \quad (2.3)$$

o cuando descarga:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i < 0 \quad (2.4)$$

### 2.2.1.3 Comportamiento elastoplástico

Un punto que se encuentra en la etapa de carga se comporta de manera elastoplástica cuando se verifica:

$$F(\sigma_{ij}(t), \alpha_i(t)) = 0 \quad (2.5)$$

y

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i = 0 \quad (2.6)$$

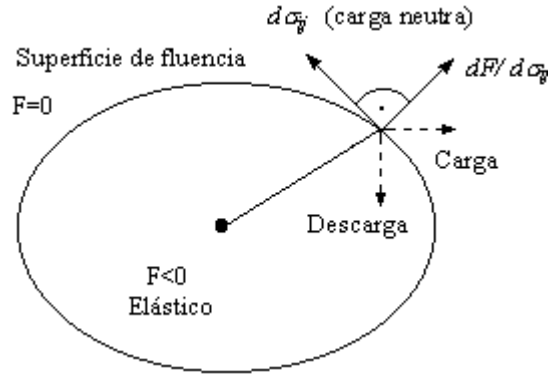


Figura 2.2 – Representación esquemática de una superficie de fluencia

#### 2.2.1.4 Comportamiento más allá del límite elástico

Una vez alcanzado el límite de discontinuidad, el comportamiento de un punto en el tiempo  $t$  se describe mediante las siguientes expresiones:

- Descomposición de las deformaciones: la teoría incremental de la plasticidad clásica sin degradación de rigidez, descompone la deformación total en una parte elástica y otra plástica:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (2.7)$$

- Regla de flujo: se define una *regla de flujo generalizada* que considera el incremento de deformación plástica temporal como una variable interna tensorial cuya regla de evolución está dada por:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G(\sigma_{kl}, \alpha_i)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.8)$$

$\dot{\lambda}$  es el parámetro de consistencia plástica y  $G$  es la función de potencial plástico. Dicha regla establece que  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  está dirigido según la normal a la superficie de potencial plástico.

#### 2.2.1.5 Superficie de carga plástica

El límite entre la zona elástica y la zona plástica se establece mediante una superficie de fluencia o superficie de discontinuidad, denotada como  $F$ . Dicha superficie adquiere movilidad en el espacio de tensiones a medida que evoluciona el proceso elasto-plástico, y se convierte en la llamada *superficie de carga plástica*. Esta función no es otra cosa que la actualización del límite de discontinuidad de acuerdo a la evolución de las variables internas plásticas  $\alpha_i$ . El fenómeno que gobierna el cambio de posición en el espacio de tensiones se denomina *endurecimiento plástico*, y puede ser *isótropo*, *cinemático* o *mixto*.

### 2.2.2 Modelos para hormigón bajo cargas de tipo explosivo, basados en la teoría de plasticidad

Un ejemplo de modelo para hormigón bajo cargas de tipo explosivo, basado en la teoría de plasticidad, es el desarrollado por Malvar et al. (1997) que utilizan un modelo de plasticidad modificado y lo implementan en un programa de elementos finitos con formulación Lagrangiana e integración temporal explícita, para el análisis de estructuras sometidas a cargas explosivas. Introducen un factor de mayoración de la superficie de falla dependiente de la velocidad de deformación. En los párrafos siguientes se describe brevemente la formulación de dicho modelo.

La respuesta se desacopla en una parte volumétrica y otra desviadora. A partir de la deformación específica volumétrica se determina la presión actual. Dicha presión se utiliza para determinar el umbral de carga  $\sigma$ , el cual limita el valor del segundo invariante del tensor de tensiones desviadoras  $J_2$ :

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \quad (2.9)$$

siendo:

$s_i = \sigma_i - p, \quad i = 1, 2, 3$ : tensiones desviadoras principales

$\sigma_i$ : tensiones principales

$p = -(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ : presión actual

En la etapa inicial de carga o recarga, las tensiones desviadoras permanecen en estado elástico mientras no se alcance la superficie de fluencia inicial definida por  $\sigma_y$ , es decir mientras:

$$\sqrt{3J_2} < \sigma = \sigma_y \quad (2.10)$$

Una vez alcanzada dicha superficie, la tensión desviadora puede seguir incrementándose hasta alcanzar la superficie de carga máxima, definida por  $\sigma_m$ . De allí en más, la respuesta puede ser perfectamente plástica ó comenzar la etapa de ablandamiento hasta alcanzar la superficie residual definida por  $\sigma_r$ .

En la figura 2.3 se indican los umbrales mencionados en un ensayo uniaxial.

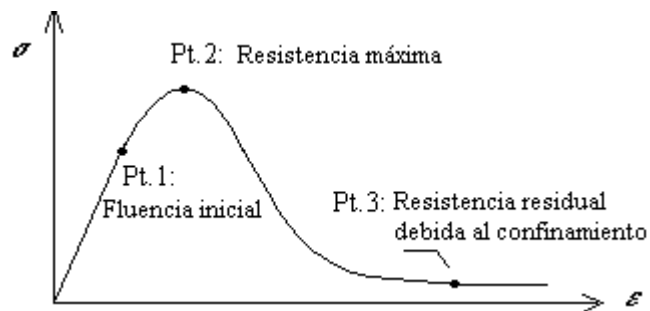


Figura 2.3 – Esquema del comportamiento uniaxial

Las siguientes ecuaciones describen las distintas superficies de carga descriptas:

$$\text{Superficie de fluencia inicial: } \sqrt{3J_2} = \sigma_y = a_{0y} + \frac{p}{a_{1y} + a_{2y}p} \quad (2.11)$$

$$\text{Superficie de carga máxima: } \sqrt{3J_2} = \sigma_m = a_0 + \frac{p}{a_1 + a_2p} \quad (2.12)$$

$$\text{Superficie residual: } \sqrt{3J_2} = \sigma_r = \frac{p}{a_{1f} + a_{2f}p} \quad (2.13)$$

donde  $a_0, a_1, a_2, a_{0y}, a_{1y}, a_{2y}, a_{1f}, a_{2f}$  son parámetros del modelo.

Estas superficies se han representado gráficamente en la figura 2.4, donde  $f'_c$  y  $f_t$  son las resistencias a compresión y a tracción del hormigón respectivamente.

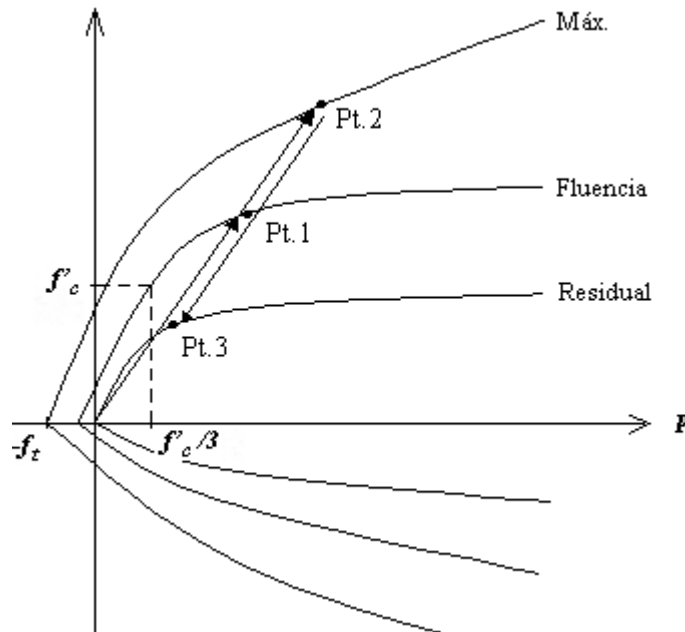


Figura 2.4 – Representación de las tres superficies de carga

Dado un estado tensional ubicado sobre la superficie de carga, un incremento de tensiones genera la fluencia del material. Este modelo utiliza la regla de flujo de Prandt-Reuss para definir el flujo plástico resultante.

### 2.2.2.1 Acumulación del daño transversal

Considerando que  $d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{(2/3)\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p}$  es la deformación plástica efectiva,  $b_1$  y  $b_2$  son parámetros de evolución del daño y  $r_f$  es el factor de mayoración dependiente de la velocidad de deformación, la deformación plástica efectiva modificada  $\lambda$  se calcula como sigue:

$$\lambda \begin{cases} = \int_0^{\bar{\varepsilon}^p} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{r_f (1 + p/r_f f_t)^{b_1}} & \text{para } p \geq 0, \\ = \int_0^{\bar{\varepsilon}^p} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{r_f (1 + p/r_f f_t)^{b_2}} & \text{para } p < 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

El umbral de comportamiento elástico se obtiene interpolando entre el correspondiente a la superficie de carga máxima y el de la superficie de fluencia o residual, según la deformación plástica efectiva modificada  $\lambda$  sea  $\lambda \leq \lambda_m$  o  $\lambda > \lambda_m$ , respectivamente. Es decir:

$$\sigma = \eta(\sigma_m - \sigma_{min}) + \sigma_{min} \quad (2.15)$$

donde  $\eta$  depende de  $\lambda$ , y  $\sigma_{min}$  corresponde a la superficie de fluencia cuando  $\lambda \leq \lambda_m$  o a la superficie residual cuando  $\lambda > \lambda_m$ , como se mencionó anteriormente.

### 2.2.2.2 Daño volumétrico

Cuando el camino de tensiones se acerca al eje hidrostático negativo, se suma al daño desviador un daño volumétrico determinado a partir de valor  $|\sqrt{3J_2/p}|$ .

### 2.2.2.3 Factor de mayoración radial

Los ensayos experimentales a distintas velocidades se realizan generalmente a lo largo de caminos radiales desde el origen, en el plano de diferencia de tensiones

principales versus presión (Malvar et al. 1996). Se define el factor de mayoración  $r_f$  dependiente de la velocidad de deformación, y el valor mayorado  $\sigma_e$  del umbral de la superficie de carga a la presión actual  $p$ . El factor  $r_f$  se aplica radialmente y, siendo  $\sigma$  la superficie correspondiente a la presión no mayorada  $p/r_f$ , se obtiene  $\sigma_e$  como sigue:

$$\sigma_e = r_f \sigma(p / r_f) \quad (2.16)$$

## 2.3 Modelos constitutivos basados en la teoría de viscoplasticidad

### 2.3.1 Conceptos básicos de la teoría de viscoplasticidad

Las teorías viscoplásticas admiten valores de tensiones fuera de la superficie de fluencia. Si la carga externa se mantiene constante, las tensiones vuelven a la superficie de fluencia como una función del tiempo. Consecuentemente, las teorías viscoplásticas son conocidas como leyes de sobretensión (Carosio 1997). De manera análoga a las teorías plásticas independientes del tiempo, la velocidad de deformación se descompone en una parte elástica y una viscoplástica, de la siguiente manera:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{\varepsilon}_{kl}^{vp} \quad (2.17)$$

luego:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^o \cdot (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^{vp}) \quad (2.18)$$

Existen básicamente dos formas de definir la velocidad de deformación viscoplástica  $\dot{\varepsilon}_{kl}^{vp}$ , la teoría viscoplástica de Perzyna y la teoría viscoplástica de Duvaut-Lions, las cuales se describen brevemente a continuación.

#### 2.3.1.1 Teoría viscoplástica de Perzyna

La teoría propuesta por Perzyna (1966) define la velocidad de deformación como:



$$\dot{\varepsilon}_{kl}^{vp} = \gamma \left\langle \phi \left( F \left( \sigma_{ij}, q_i \right) \right) \right\rangle m_{kl} \quad (2.19)$$

donde  $\gamma$  es la fluidez del material,  $m_{kl} = \frac{\partial g^{vp}}{\partial \sigma_{kl}}$  es el gradiente de la función de potencial viscoplástico  $g^{vp}$ ,  $q_i$  es el vector de variables plásticas y  $\phi(F)$  es una función arbitraria de la función de fluencia  $F$ .

Como opciones para la función  $\phi(F)$  se tienen:

$$\phi \left( F \left( \sigma_{ij}, q_i \right) \right) = \left[ \frac{F \left( \sigma_{ij}, q_i \right)}{f_{co}} \right]^N \quad (2.20)$$

y

$$\phi \left( F \left( \sigma_{ij}, q_i \right) \right) = \left[ \frac{F \left( \sigma_{ij}, q_i \right)}{f_c} \right]^N \quad (2.21)$$

donde  $N$  es una constante que debe ser ajustada con resultados experimentales, y  $f_c$  y  $f_{co}$  son los umbrales de fluencia en compresión uniaxial, actual e inicial respectivamente.

### 2.3.1.2 Teoría viscoplástica de Duvaut Lions

Esta teoría está basada en la diferencia entre la respuesta del material independiente de la velocidad de deformación y la del material viscoplástico.

Para  $F(\sigma_{ij}, \kappa) > 0$ , la velocidad de deformación se define:

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^{vp} = \frac{1}{\eta} \left[ C_{ijkl}^o \right]^{-1} \left( \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^p \right) \quad (2.22)$$

y de forma similar, la velocidad de endurecimiento:

$$\dot{\kappa} = -\frac{1}{\eta}(\kappa - \kappa^p) \quad (2.23)$$

tanto  $\dot{\varepsilon}_{kl}^{vp}$  como  $\dot{\kappa}$  son nulas si  $F(\sigma_{ij}, \kappa) \leq 0$ .

El tensor  $\sigma_{ij}^p$ , puede interpretarse como la proyección de la tensión actual sobre la superficie de fluencia, y  $\kappa^p$  se determina mediante la historia de deformaciones plásticas independientes de la velocidad de deformación. El parámetro de viscosidad  $\eta$  representa el tiempo de relajación del material.

### 2.3.2 Modelo viscoplástico para hormigón bajo cargas dinámicas de tipo explosivo

Cela (1998) propone un modelo de hormigón basado en una ley elasto-viscoplástica cuya parte invíscida coincide con el modelo de Drucker-Prager. El mismo se formula para el análisis del comportamiento de estructuras de hormigón armado sometidas a cargas dinámicas de tipo impulsivo, como ser impactos y explosiones. La introducción de la regularización viscosa tiene el objetivo de independizar la respuesta, en la etapa de ablandamiento, de la malla de elementos finitos adoptada.

El modelo se define mediante las siguientes expresiones:

$$\text{Superficie de fluencia:} \quad \alpha\sigma + \tau - c = 0 \quad (2.24)$$

$$\text{Función de potencial plástico:} \quad \beta\sigma + \tau - c = 0 \quad (2.25)$$

donde:

$$\sigma = \frac{1}{3}tr(\sigma_{ij}) \quad (2.26)$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sigma'_{ij} : \sigma'_{ij}} \quad (2.27)$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} \quad (2.28)$$

Los parámetros materiales  $\alpha$  y  $c$  están relacionados con el ángulo de fricción interna y la cohesión respectivamente.

La implementación numérica se realiza en base a un algoritmo de tipo retorno mapeado. Una vez obtenida la solución invíscida, puede aplicarse la corrección viscoplástica. Utilizando la formulación propuesta por Duvaut-Lions, ajustando las variables de endurecimiento e integrando dicho modelo viscoplástico, se obtienen las siguientes expresiones:

$$(\sigma_{ij})_{n+1}^f = e^{-\Delta t / \eta} (\sigma_{ij})_n + [1 - e^{-\Delta t / \eta}] (\sigma_{ij})_{n+1} + \frac{1 - e^{-\Delta t / \eta}}{\Delta t / \eta} (\Delta \sigma_{ij})_{n+1} \quad (2.29)$$

$$(q_i)_{n+1}^f = e^{-\Delta t / \eta} (q_i)_n + [1 - e^{-\Delta t / \eta}] (q_i)_{n+1} \quad (2.30)$$

$q_i$  representa el vector de variables internas plásticas,  $\Delta t$  es el paso incremental de tiempo correspondiente al esquema de diferencias centrales, y  $\eta$  es el parámetro viscoplástico.

## 2.4 Modelo viscoelástico acoplado con plasticidad para hormigón sometido a altas velocidades de deformación

Este modelo mantiene el carácter instantáneo de la fisuración en el hormigón, y asocia los efectos de la velocidad con el endurecimiento de la pasta de cementicia (Sercombe et al. 1997 y 1998).

El planteo termodinámico para simular el comportamiento del hormigón bajo altas velocidades de deformación incluye efectos elásticos, de endurecimiento plástico y de evolución viscosa resueltos en forma acoplada.

Se considera un volumen elemental compuesto por un esqueleto y nanoporos. La deformación  $\varepsilon_{ij}$  que se observa, corresponde a la deformación del esqueleto. El tensor de deformaciones plásticas (o permanentes)  $\varepsilon_{ij}^p$ , y las variables de endurecimiento-ablandamiento  $\chi$ , representan a nivel macroscópico, la deformación irreversible del

esqueleto relacionada con la microfisuración. La deformación viscosa promedio  $x$ , definida en el volumen elemental, es producto de las fuerzas de cohesión existentes entre los nanoporos (figura 1.3).

Partiendo del planteo termodinámico, la disipación intrínseca expresada bajo condiciones isotérmicas se expresa:

$$\varphi = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\Psi} \geq 0, \quad (2.31)$$

donde la energía libre Helmholtz  $\Psi$ , es función de las variables de estado especificadas previamente, es decir:

$$\Psi = \Psi(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi, x) = \psi(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p, x) + U(\chi, x), \quad (2.32)$$

$\psi$  es la energía elástica de deformación, y  $U$  es la energía que contempla tanto el comportamiento plástico como el viscoso. Sustituyendo (2.32) en (2.31) se obtiene:

$$\varphi = \left( \sigma_{ij} - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \zeta \dot{\chi} + A \dot{x} \geq 0 \quad (2.33)$$

y las ecuaciones de estado:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^p}; \quad \zeta = \frac{\partial U}{\partial \chi}; \quad A = - \frac{\partial (\psi + U)}{\partial x} \quad (2.34)$$

siendo  $\zeta$  la fuerza de endurecimiento plástica estándar que describe la evolución del dominio elástico, y  $A$  la fuerza termodinámica asociada a la velocidad de deformación viscosa  $\dot{x}$ .

### 2.4.1 Acoplamiento viscoelástico

La deformación correspondiente a las fuerzas viscosas presentes en los nanoporos del hormigón, bajo altas velocidades de deformación, contribuye a la deformación total del esqueleto. En el segundo término de la expresión (2.35), se considera el acoplamiento entre el tensor de tensiones  $\sigma_{ij}$  y la deformación viscosa  $x$ , siendo  $C_{ijkl}$  el tensor de rigidez elástico:

$$d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^p = C_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} + \frac{\partial^2 (\sigma_{mn} (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^p) - \psi)}{\partial \sigma_{ij} \partial x} dx \quad (2.35)$$

### 2.4.2 Sobrerresistencia simulada como endurecimiento viscoso

Las tensiones admisibles en el dominio elástico  $C_e$ , se definen mediante la función de carga  $f$ , como:

$$\sigma_{ij} \in C_e \Leftrightarrow f(\sigma_{ij}, \zeta) < 0 \quad (2.36)$$

La forma incremental de la fuerza de endurecimiento se expresa:

$$d\zeta = -\frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} d\chi - \frac{\partial^2 U}{\partial \chi \partial x} dx \Leftrightarrow \zeta = \zeta(\chi, x) \quad (2.37)$$

Inicialmente se considera que el fenómeno viscoso de sobrerresistencia cuando la velocidad de carga es alta, implica un acoplamiento entre la variable de endurecimiento/ablandamiento  $\chi$  y la variable viscosa  $x$  (término  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \chi}$ ). Como consecuencia de este acoplamiento, la fuerza de endurecimiento  $\zeta$  (umbral de fisuración)

depende de la variable viscosa  $x$ , generando un endurecimiento no plástico. Dicho fenómeno de endurecimiento viscoso, se agrega al endurecimiento/ablandamiento plástico estándar asociado a la deformación irreversible del esqueleto (caracterizada mediante el término  $\frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2}$ ). Finalmente, el endurecimiento viscoso independiente de las evoluciones plásticas, lleva a un endurecimiento dependiente del tiempo e incorpora el efecto de sobrerresistencia en el modelo.

La evolución de las variables plásticas se escribe como:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{y} \quad d\chi = d\lambda \frac{\partial h}{\partial \zeta} \quad (2.38)$$

donde  $d\lambda$  es el multiplicador plástico,  $g(\sigma_{ij}, \zeta)$  y  $h(\sigma_{ij}, \zeta)$  son el potencial no asociado plástico y de endurecimiento, respectivamente.

La condición de consistencia se expresa de la siguiente manera:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{df}{d\zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \chi} d\chi + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx \right) = 0 \quad (2.39)$$

### 2.4.3 Ley de evolución viscosa

Como se mencionó previamente, las fuerzas viscosas microscópicas en los nanoporos generan un aumento de la resistencia a nivel macroscópico. En la modelación macroscópica, las fuerzas viscosas microscópicas se tienen en cuenta mediante la fuerza  $A$ . Como primera aproximación se adopta una expresión de tipo lineal:

$$\eta \dot{x} = A \quad (2.40)$$

donde  $\eta$  es la viscosidad y su valor se asume constante.

El primer efecto que se observa al introducir el endurecimiento viscoso, es el de modificar el umbral inicial plástico, ello se traduce en una sobrerresistencia dependiente de la velocidad de carga. El segundo efecto que se observa corresponde al régimen de postpico, donde la evolución de la deformación viscosa en el tiempo da lugar a un ablandamiento viscoso, y la evolución de la superficie de fluencia ocurre aún sin modificación de las deformaciones plásticas.

## **2.5 Modelos constitutivos basados en la teoría de daño**

### **2.5.1 Conceptos básicos de la teoría de daño**

La idea de daño es general en los materiales y existe tanto en los materiales homogéneos (que pueden ser isótropos, como los metales policristalinos, o anisótropos, como los cristales simples) y en los materiales heterogéneos como los compuestos. En general el término daño se utiliza para tener en cuenta cambios en las propiedades mecánicas en el sentido de una degradación. En esta tesis el daño se refiere a la degradación de las propiedades elásticas del material.

En el análisis de la respuesta mecánica de un material, se pueden definir tres niveles de daño (Ju 1988, Simo 1986):

1. *Nivel atómico* (vacíos y defectos cristalográficos): se utilizan modelos de la mecánica del discreto a escala atómica.
2. *Nivel micro* (microfisuras y microvacíos): se utilizan tanto modelos de daño de la micromecánica para modelar los cambios microestructurales y el crecimiento de microfisuras individuales, como modelos fenomenológicos de daño continuo para modelar fisuras distribuidas.
3. *Nivel macro* (macrofisuras): se utilizan modelos de la mecánica de fractura para modelar el crecimiento de macrofisuras discretas.

A continuación se describen las características fundamentales de los modelos de daño continuo, utilizados normalmente para describir microfisuras distribuidas, no microvacíos dúctiles, en modos de daño frágil.

En la mecánica del daño continuo, la degradación de las propiedades materiales se relaciona con la iniciación, crecimiento e interconexión de microvacíos. Una forma de interpretar el daño continuo, muy utilizada por diferentes autores, consiste en la definición de una *tensión efectiva* que sería la tensión en el material no dañado.

En la teoría de daño escalar de Kachanov (1958), la tensión efectiva  $\sigma_{ij}^o$  está relacionada con la tensión  $\sigma_{ij}$  de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij}^o \equiv \frac{\sigma_{ij}}{1-d} \quad (2.41)$$

donde  $d$  es la variable de daño escalar y:

$d = 0$ :	estado no dañado
$d = d_c \quad d_c \in [0,1]$ :	rotura local total
$d \in (0, d_c)$ :	estado de daño parcial

El coeficiente  $(1-d)$  es un factor de reducción asociado al daño sufrido por el material. Se trata de un escalar que afecta por igual a todas las componentes de tensión y es la forma más simple de daño que puede considerarse.

Adicionalmente, Lemaitre (1978), introdujo la siguiente hipótesis, que se conoce como hipótesis de deformación equivalente y que ha sido representada en la figura 2.5:

*“La deformación asociada al estado real dañado del material bajo la tensión aplicada, es equivalente a la deformación asociada al estado del material no dañado, pero bajo la tensión efectiva”.*



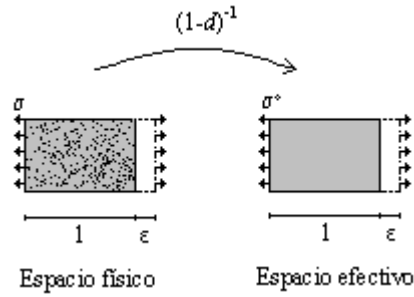


Figura 2.5 - Hipótesis de deformación equivalente

La presencia de microfisuras aumenta la flexibilidad del material. Se puede observar que en el caso simple de daño elástico de la figura 2.6,  $C^o$  constituye la rigidez no dañada, y  $(1-d)C^o$  la rigidez dañada en descarga. Se supone que las microfisuras se cierran en la descarga y, por lo tanto, no quedan deformaciones remanentes luego de la descarga completa.  $\varepsilon^e$  constituye la deformación reversible real (elástica), y  $\varepsilon^d$  la deformación inelástica debido a la apertura de microfisuras durante el proceso de carga.

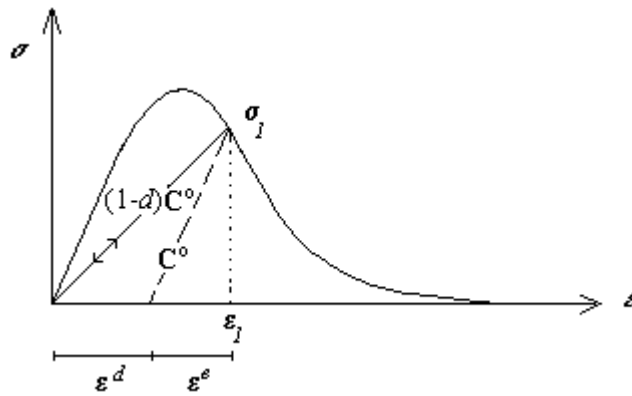


Figura 2.6 – Ilustración de la flexibilidad adicional en modelos de daño.  
 $\varepsilon^e$  y  $\varepsilon^d$  muestran la deformación elástica real y la deformación adicional debida a las microfisuras respectivamente.

### 2.5.2 Modelo de daño

Para describir la degradación progresiva de las propiedades mecánicas de los materiales, Simo y Ju (1986) utilizan un mecanismo de daño elastoplástico isótropo simple, empleando la función de energía no dañada  $\Psi^o$  (promediada localmente) para caracterizar el daño en condiciones de carga y descarga.

El estado de daño en un material se caracteriza en términos de la función de daño  $g$ :

$$g = \Psi_t^o - r_t, \quad t \in R_+ \quad (2.42)$$

El subíndice  $t$  se refiere al instante de tiempo actual,  $\Psi_t^o = 0,5 \sigma_{ij}^o \varepsilon_{ij}$  es la energía total libre no dañada, y  $r_t$  es el umbral de daño (barrera energética) en dicho instante de tiempo. El umbral inicial de daño  $r_o$  es una propiedad característica del material, siendo  $r_o \leq r_t$ . Mientras  $g \leq 0$ , el material se encuentra en régimen elástico o en descarga. Si en cambio resulta  $g > 0$ , es necesario especificar la evolución de  $d$  y  $r$  para describir el crecimiento de microfisuras y la expansión de la superficie de daño.

La dependencia de la velocidad de deformación y la regularización de problemas de localización, se pueden resolver mediante un mecanismo de daño viscoso. La estructura de dicha regularización es análoga a la regularización viscoplástica de tipo Perzyna (1966), y se detalla a continuación:

$$\dot{d} = \mu \langle \phi(g) \rangle H(\Psi_t^o, d_t, s, a, c, \rho) \quad (2.43)$$

$$\dot{r} = \mu \langle \phi(g) \rangle \quad (2.44)$$

La notación  $\langle x \rangle$  significa que  $\langle x \rangle = x$  cuando  $x > 0$ , y  $\langle x \rangle = 0$  cuando  $x \leq 0$ ;  $\mu$  es el coeficiente de daño viscoso;  $\phi(g)$  es la función de evolución del daño;  $s$  es el espaciamiento entre inclusiones;  $a$  es el tamaño del grano;  $c$  es el tamaño de las microfisuras y  $\rho$  es la porosidad (para el caso de hormigón es la relación agua-cemento).

### 2.5.3 Modelo de daño dependiente del tiempo

Partiendo de un modelo de daño independiente del tiempo, Dubé et al (1996) derivan un modelo de daño dependiente del tiempo, para el caso del hormigón bajo altas velocidades de deformación, eligiendo simplemente otra expresión para la evolución de la variable de daño. El

propósito de modificar dicha ley, radica en que, partiendo del mismo estado de deformación, la velocidad de daño depende de la velocidad de deformación. Cuanto mayor sea la velocidad de deformación, menor resulta la velocidad de daño.

Inspirándose en la teoría de plasticidad independiente del tiempo y de la viscoplasticidad de Perzyna, en las cuales la velocidad de deformación (visco)plástica decrece cuando aumenta la velocidad de deformación, utilizan la siguiente expresión para determinar el multiplicador de daño  $\dot{\lambda}$ :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{\langle f(Y, Z) \rangle}{Y_o} \right\}^N \quad (2.45)$$

$\eta$  y  $N$  son parámetros determinados a partir del ajuste de la respuesta del modelo a datos experimentales, correspondientes a distintas velocidades de deformación. La función de carga  $f=Y-Y_o-Z$  se define en términos de la energía libre  $Y$  no dañada, donde  $Y_o$  es el umbral de daño y  $Z$  es una variable de endurecimiento-ablandamiento.

La incorporación de la dependencia del tiempo al modelo original, no sólo modifica la resistencia según la velocidad de deformación, sino que mantiene bien condicionadas las ecuaciones de movimiento.

#### 2.5.4 Modelos viscosos

Dado un modelo de daño isótropo cuya ley constitutiva secante se expresa:

$$\sigma_{ij} = (1-d)C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl} \quad (2.46)$$

el incremento de daño se determina mediante la siguiente predicción *Euler forward* (Geers et al.):

$$\Delta d = \dot{d}^t \Delta t \quad \text{donde: } \dot{d}^t = \left[ \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{\bar{\sigma}^t}{(1-d^t)} - C \right\rangle \right]^N \quad (2.47)$$

$\bar{\sigma}^t$  es la tensión equivalente actual de Von Mises, y  $C$  representa un umbral de daño a partir del cual se inicia y evoluciona el daño. Los parámetros  $\eta$ ,  $N$  y  $C$  controlan el carácter viscoso (o creep) de la ley de evolución. *El incremento de daño se calcula en forma explícita* para simplificar el cálculo.

Para la formulación de un modelo de daño dependiente del tiempo en el caso unidimensional, o en términos de la deformación equivalente  $\varepsilon^{eq}$  en el caso multi-dimensional, se establece lo siguiente (Sluys 1992):

$$\sigma = f_t + h\varepsilon^{cr} + m\dot{\varepsilon}^{cr} \quad \text{si } \varepsilon > f_t / E \quad (2.48)$$

En dichas expresiones  $f_t$  representa la resistencia a tracción inicial bajo condiciones estáticas de carga, mientras que  $\varepsilon^{cr}$  denota la deformación dañada,  $m$  es un parámetro y  $E$  el módulo de Young.

La formulación clásica de daño plantea:

$$\sigma = (1-d)E\varepsilon = E\varepsilon - E\varepsilon^{cr} = E(\varepsilon - \varepsilon^{cr}) \quad (2.49)$$

luego:  $\varepsilon^{cr} = d \varepsilon \quad (2.50)$

A partir de un planteo incremental de las expresiones precedentes (con  $\Delta d = d^{t+\Delta t} - d^t$ ) se puede determinar la variable de daño  $d^{t+\Delta t}$  mediante un *método de resolución no-lineal incremental-iterativo*.

Otra opción para modelar el comportamiento del hormigón bajo altas velocidades de deformación, mediante una ley constitutiva de daño viscoso, es la planteada por Comi y Perego (1997). Para el caso uniaxial plantean:

$$\sigma = (1 - d)E\varepsilon \quad (2.51)$$

$$\dot{d} = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{f}{bd + k} \right\rangle^n \quad (2.52)$$

$$f = \frac{1}{2}(1 - d)E\varepsilon^2 - bd - k \quad (2.53)$$

donde  $E$  es el módulo de Young,  $f$  es la función de carga,  $\eta$  es el parámetro viscoso,  $n$  es el exponente viscoso,  $b$  y  $k$  son dos parámetros no negativos dependientes del material.

## 2.6 Modelo de daño continuo para el análisis rocas bajo cargas explosivas

Para predecir el daño y la fragmentación en roca debidos a la acción de una carga explosiva, Liqing Liu y Katsabanis (1997), plantean un modelo de daño basado en la *mecánica del continuo* y en la *mecánica de fractura 'estadística'*, suponiendo que el medio rocoso es isótropo, continuo y homogéneo con un estado de fisuración preexistente. El daño en el medio rocoso se define entonces a partir de la probabilidad de fractura para una dada densidad de fractura, lo cual se obtiene integrando una función de densidad de fractura en el tiempo. La distribución del tamaño de los fragmentos se determina considerando el equilibrio entre la energía cinética y la energía de superficie, teniendo en cuenta los cambios en la velocidad de carga, la rigidez material y el daño.

## 2.7 Comentarios finales

En este capítulo se han planteado distintos modelos de plasticidad, de viscoplasticidad y de daño para simular el comportamiento del hormigón bajo la acción de cargas dinámicas con altas velocidades de deformación. Las características principales de cada uno ellos, en lo que respecta a la simulación del efecto, se resumen a continuación:

- El modelo de plasticidad planteado por Malvar et al. (1997), utiliza un factor de mayoración dependiente de la velocidad de deformación para determinar la superficie de carga.
- Sercombe et al. (1997 y 1998) consideran el comportamiento viscoso observado en el hormigón, incorporando un mecanismo de disipación viscoso en el planteo termodinámico y resolviendo en forma acoplada un modelo viscoelástico con uno de plasticidad.
- El modelo viscoplástico planteado por Cela (1998), determina primeramente una solución invíscida, para luego realizar la corrección viscoplástica.
- En los modelos de daño, se define una regla de evolución de la variable interna de daño de tipo viscosa para tener en cuenta la velocidad de deformación.
- Finalmente, se hace mención a un modelo de daño que utiliza la mecánica de fractura ‘estadística’, con el objeto de simular el efecto de la acción de un explosivo sobre un medio rocoso.

Del análisis realizado, se puede concluir que una de las formas más simples de tener en cuenta la dependencia del tiempo en el comportamiento del hormigón, es extendiendo un modelo de daño. Centrando el objetivo en el análisis de estructuras bajo la acción de cargas de tipo explosivo, en esta tesis se incorpora la dependencia de la velocidad de deformación al modelo de daño escalar (Luccioni 1993). En problemas estáticos, dicho modelo independiente del tiempo describe satisfactoriamente la degradación de la rigidez elástica del hormigón debido a la fisuración.

Con respecto a la resolución numérica del modelo de daño escalar (Luccioni 1993), utilizado como punto de partida, la misma resulta simple y rápida, lo cual es particularmente conveniente para cargas explosivas que requieren de un gran número de intervalos de tiempo pequeños.

## CAPITULO 3

---

### MODELO DE DAÑO

### DEPENDIENTE DE LA VELOCIDAD DE DEFORMACION

#### 3.1 Introducción

El modelo constitutivo propuesto para simular el comportamiento material frente a cargas de tipo impulsivas, es un modelo de daño isótropo dependiente de la velocidad de deformación.

Los modelos de daño independientes de la velocidad de deformación describen satisfactoriamente la degradación de la rigidez elástica del hormigón debido a la fisuración, en problemas estáticos. Sin embargo, frente a cargas impulsivas de corta duración que generan velocidades de deformación mayores a  $0.1 \text{ s}^{-1}$ , debe considerarse la sobrerresistencia resultante en el hormigón.

En el capítulo anterior se describieron distintas formas de considerar el tiempo en la formulación de un modelo constitutivo. En el presente capítulo se propone incorporar la dependencia del tiempo a un modelo de daño escalar, definiendo una regla de evolución del daño análoga a la deformación viscoplástica de Perzyna. Primeramente se desarrolla el modelo de daño escalar, desde el planteo termodinámico (Luccioni 1993, Luccioni et al. 1996), y seguidamente se desarrolla el modelo propuesto.

#### 3.2 Bases termodinámicas

El modelo constitutivo de partida (Luccioni 1993, Luccioni et al. 1996) se basa en la hipótesis de *elasticidad desacoplada* (Lubliner 1990). Bajo dicha hipótesis, puede suponerse que la energía libre total  $\Psi$  está formada por dos partes independientes: la parte elástica  $\Psi^e$  y la parte plástica  $\Psi^p$ , en correspondencia con procesos elásticos y plásticos respectivamente. Es decir:

$$\Psi(\varepsilon_{ij}^e; \alpha; \beta) = \Psi^e(\varepsilon_{ij}^e; \beta) + \Psi^p(\alpha) \quad (3.1)$$

donde  $\varepsilon_{ij}^e$  es el tensor de deformaciones elásticas que representa la variable libre del problema, y  $\alpha$  y  $\beta$  son grupos de variables internas plásticas y no plásticas respectivamente.

Para el caso de problemas térmicamente estables y de pequeñas deformaciones, la parte elástica de la energía libre se expresa como:

$$\Psi^e(\varepsilon_{ij}^e; \beta) = \frac{1}{2m} [\varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}^s(\beta) \varepsilon_{kl}^e] \quad (3.2)$$

donde  $m$  es la densidad del material, y  $C_{ijkl}^s(\beta)$  es el tensor constitutivo elástico secante que depende de las variables internas no-plásticas de la siguiente forma (Luccioni 1993):

$$C_{ijkl}^s(\beta) = f(\beta) C_{ijkl}^o \quad (3.3)$$

donde  $C_{ijkl}^o$  es el tensor secante inicial del material no dañado, y  $f(\beta)$  es una función de transformación tensorial de un espacio no dañado equivalente a un espacio real dañado. La forma más simple para dicha función coincide con la planteada por la teoría de Kachanov (1958) de daño isótropo (Luccioni 1993):

$$f(\beta) = (1 - d) \quad (3.4)$$

donde  $\beta = d$  es la variable de daño interno y:



$d=0$  para el material no dañado

$d=1$  para el material totalmente dañado

Para este caso particular, la parte elástica de la energía libre resulta:

$$\Psi^e = (1-d)\Psi^o = (1-d)\frac{1}{2m}\left[\varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^e\right] \quad (3.5)$$

donde  $\Psi^o$  es la energía elástica libre del material no dañado.

La desigualdad de Clasiuss-Duhem, 2º Principio de la termodinámica (Malvern 1969), puede escribirse en términos de la energía libre como:

$$\Xi = m\left(-\dot{\Psi} - \eta_e \dot{\theta}\right) + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \quad (3.6)$$

donde  $\eta_e$  es la entropía,  $\theta$  es una medida de la temperatura y  $q_i$  es el flujo de calor.

Reemplazando la expresión de la energía total libre (3.1) en la (3.6), y considerando al tensor de deformaciones específicas totales desacoplado en una parte elástica  $\varepsilon_{ij}^e$  y otra plástica  $\varepsilon_{ij}^p$ , se obtiene la siguiente inecuación:

$$\left(\sigma_{ij} - m \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e}\right) \dot{\varepsilon}_{ij}^e - m \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \eta_e\right) \dot{\theta} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - m \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i - m \frac{\partial \Psi}{\partial d_{kl}^{(i)}} \dot{d}_{kl} - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \quad (3.7)$$

Las relaciones de Coleman (Lubliner 1972) que se expresan a continuación, garantizan el cumplimiento de la inecuación de Clasiuss-Planck para un estado termodinámico dado.

$$\sigma_{ij} = m \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{ij}^e; d)}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad y \quad \eta_e = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (3.8)$$

Por otro lado, para problemas termomecánicos desacoplados, deben satisfacerse en forma independiente las inecuaciones de Clausius-Planck:

(a) Disipación mecánica:

$$\begin{array}{l} \Xi_m^p : \text{disip. plástica} \qquad \Xi_m^d : \text{disip. por daño} \\ \Xi_m = \overbrace{\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - m \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i} - \overbrace{m \frac{\partial \Psi}{\partial d_{kl}^{(i)}} \dot{d}_{kl}^{(i)}} \geq 0 \end{array} \quad (3.9)$$

(b) Disipación térmica:

$$\Xi_\theta = \frac{1}{\theta} m \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \dot{x}_i \leq 0 \quad (3.10)$$

La disipación puede descomponerse en una parte debida al proceso plástico  $\Xi_m^p$  y otra debida al proceso de daño  $\Xi_m^d$ .

Siguiendo la teoría clásica de Kachanov con  $f(\beta=d) = (1-d)$ , la disipación debida al daño resulta:

$$\Xi_m^d = m \Psi^o \dot{d} \quad (3.11)$$

### 3.3 Modelo de daño independiente de la velocidad de deformación

El criterio de daño definido en el espacio de tensiones reales se expresa (Luccioni 1993):

$$G^d = \bar{\sigma}(\sigma_{ij}) - f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d) \quad (3.12)$$

donde  $\bar{\sigma}(\sigma_{ij})$  es la tensión equivalente que puede calcularse usando funciones de fluencia de la teoría de plasticidad (Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb, etc),  $f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d)$  es el umbral de daño equivalente y  $\kappa^d$  es la variable de endurecimiento en daño.

La evolución de la *variable de endurecimiento en daño*  $\kappa^d$  se define normalizando a la unidad la energía disipada en el proceso de degradación, de la siguiente manera:

$$\dot{\kappa}^d = \left[ \frac{r}{g_f^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_c^{*d}} \right] m \Psi^o \dot{d} \quad (3.13)$$

$$g_f^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i| R^{od}}{\bar{\sigma}} g_f^d \quad g_c^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{\bar{\sigma}} g_c^d \quad (3.14)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (3.15)$$

siendo:  $\langle \pm x \rangle = \frac{1}{2}(x \pm |x|)$  la función rampa,  $R^{od}$  la relación entre los umbrales iniciales de degradación en compresión y en tracción uniaxial;  $g_f^d$  y  $g_c^d$  las energías específicas disipadas por daño máximas en procesos de tracción y compresión uniaxial respectivamente.

Las ecuaciones (3.14) y (3.15) tienen en cuenta el estado de tensiones real. Para el caso de un proceso termodinámico sin deformaciones permanentes,  $g_f^d$  y  $g_c^d$  pueden calcularse dividiendo la energía de fractura por unidad de área por la longitud característica

del dominio fracturado  $l_c$ , parámetro externo al modelo constitutivo que se introduce para lograr objetividad de la respuesta respecto al tamaño de la malla de elementos finitos, es decir:

$$g_f^d = G_F/l_c \quad g_c^d = G_C/l_c \quad (3.16)$$

El *umbral de daño* puede definirse como una función explícita de la variable de endurecimiento en daño:

$$f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d) = r(\sigma_{ij}) \sigma_t(\kappa^d) + [1 - r(\sigma_{ij})] \sigma_c(\kappa^d) \quad (3.17)$$

$\sigma_t(\kappa^d)$  y  $\sigma_c(\kappa^d)$  representan la evolución de la tensión en procesos de tracción y compresión uniaxial respectivamente, y pueden obtenerse a partir de las curvas  $\sigma_t-\varepsilon_t$  y  $\sigma_c-\varepsilon_c$  experimentales y de la definición de la variable de endurecimiento.

Las *condiciones de carga/ descarga* se derivan de las relaciones de Kuhn-Tucker formuladas para problemas con restricciones unilaterales y, para el caso de un proceso de daño solamente, resultan:

$$\begin{aligned} (a) \quad \dot{d} &= 0 \\ (b) \quad G^d &\leq 0 \\ (c) \quad \dot{d}G^d &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

La evolución de la *variable interna de daño* se obtiene de la *condición de consistencia de daño*  $\dot{G}^d = 0$  como:

$$\dot{d} = \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} (1-d) \dot{\sigma}_{ij}^o}{\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}} \dot{\sigma}_{mn}^o} \quad (3.19)$$

En ausencia de deformaciones permanentes, la *ley constitutiva secante total* puede escribirse de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = m \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{ij}^e; d)}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = C_{ijkl}^s \varepsilon_{kl}^e = (1-d) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^e \quad (3.20)$$

$$\sigma_{ij} = (1-d) \sigma_{ij}^o \quad (3.21)$$

donde  $\sigma_{ij}^o$  es el tensor de tensiones de un sólido no dañado ficticio. Dicha ecuación puede interpretarse como una transformación entre el espacio dañado real y uno ficticio no dañado.

La *ley constitutiva tangente* se determina diferenciando la ecuación (3.21) respecto al tiempo:

$$\dot{\sigma}_{ij} = (1-d) C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl}^e - \dot{d} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^e \quad (3.22)$$

Si se reemplaza en dicha ecuación la expresión de la evolución del daño (3.19), se puede obtener el *módulo tangente*:

$$C_{ijkl}^t = C_{ijkl}^s - \frac{1}{1-d} \sigma_{ij} \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{tu}} C_{iukl}^s}{\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{mn}^o} \quad (3.23)$$

### 3.4 Modelo de daño escalar dependiente de la velocidad de deformación

La formulación del modelo de daño propuesto parte de las mismas bases

termodinámicas, elasticidad desacoplada, estabilidad térmica, pequeñas deformaciones y ausencia de deformaciones permanentes. Las expresiones utilizadas para el cálculo de la función de daño  $G^d$ , de la ley evolución de la variable de endurecimiento en daño  $\kappa^d$  y del umbral de daño, coinciden con las del modelo de daño simple desarrollado precedentemente. La propuesta incorpora a dicho modelo una ley de evolución del daño tipo Perzyna y una función de energía de deformación dependiente de la velocidad de deformación. A continuación se presenta la formulación del modelo.

### 3.4.1 Criterio de daño

El criterio de daño se define en el espacio de tensiones reales y se expresa:

$$G^d = \bar{\sigma}(\sigma_{ij}) - f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d) \quad (3.24)$$

En este caso, la variable  $\kappa^d$  incorpora la dependencia de la velocidad de deformación  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ .

Este modelo, a diferencia de lo que ocurre en el modelo de daño independiente del tiempo antes descrito, no es tan restrictivo en el sentido de que no se debe cumplir necesariamente la condición  $G^d \leq 0$ , sino que se aceptan estados para los cuales  $G^d > 0$ . La definición de una función de daño en este modelo, tiene el siguiente sentido:

Si  $G^d \leq 0$  entonces  $\dot{d} = 0$  (no hay progreso del daño)

Si  $G^d > 0$  entonces  $\dot{d} > 0$  (hay progreso del daño)

### 3.4.2 Ley de evolución de la variable de endurecimiento en daño $\kappa^d$

La variable de endurecimiento se calcula normalizando la disipación en procesos de degradación, es decir, dividiendo la energía disipada  $\Xi_m^d$  (ecuación 3.11) por una energía de deformación como se muestra a continuación:

$$\dot{\kappa}^d = \left[ \frac{r}{g_F^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_C^{*d}} \right] m \Psi^o \dot{d} \quad (3.25)$$

$$g_F^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i| R^{od}}{\sigma} g_F^d \quad g_C^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{\sigma} g_C^d \quad (3.26)$$

$$r(\sigma_i) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (3.27)$$

Como puede observarse, las expresiones coinciden con las del modelo de daño independiente del tiempo. Sin embargo, las energías específicas de deformación  $g_F^d$  y  $g_C^d$  dependen, en este caso, de la velocidad de deformación:

$$g_F^d = G_{Fimp} / l_c \quad g_C^d = G_{Cimp} / l_c \quad (3.28)$$

donde las energías de deformación  $G_{Cimp}$  y  $G_{Fimp}$  tienen en cuenta el efecto de la velocidad de deformación. Las expresiones utilizadas se describen en el punto 3.4.7 y en los Anexos 3.1 y 3.2.

### 3.4.3 Umbral de daño

Para definir el umbral de daño se utiliza la siguiente expresión, análoga a la (3.17):

$$f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d) = r(\sigma_{ij}) \sigma_t(\kappa^d) + [1 - r(\sigma_{ij})] \sigma_c(\kappa^d) \quad (3.29)$$

donde  $\sigma_t$  y  $\sigma_c$  representan la evolución de los umbrales de daños en ensayos cuasi-

estáticos de tracción y compresión simple respectivamente.

### 3.4.4 Regla de evolución de la variable interna de daño $d$

En los modelos de daño independientes del tiempo, la evolución de la variable de daño se obtiene a partir de la condición de consistencia de daño  $\dot{G}^d = 0$ . En los modelos de daño dependientes del tiempo esa condición no existe porque se permiten estados para los cuales  $G^d > 0$ , debido a ello es necesario definir una regla de evolución del daño.

Con el objeto de tener en cuenta la sobrerresistencia y rigidización bajo cargas de tipo impulsivas, se define una regla de evolución del daño similar a la deformación viscoplástica propuesta por Perzyna (1966). Dicha teoría viscoplástica admite valores de tensión fuera de la superficie de fluencia. Análogamente, la adopción de una regla de evolución del daño análoga a la de la deformación viscoplástica en la teoría de Perzyna (1966), permite simular la sobrerresistencia existente en un material bajo altas velocidades de deformación, a partir de la existencia de tensiones por encima del umbral de daño. Dicha regla puede escribirse de la siguiente manera:

$$\dot{d} = \frac{1}{\eta} \left[ \frac{\langle G^d \rangle}{f_c} \right]^N \quad (3.30)$$

Los parámetros  $\eta$  y  $N$  pueden determinarse mediante ensayos experimentales con velocidades de deformación controlada.  $N$  es un parámetro adimensional, mientras que  $\eta$  tiene dimensiones de tiempo y representa una especie de viscosidad.

De acuerdo a la ec.(3.30) el daño sólo crece cuando  $G^d > 0$ , es decir, un estado tensional cuya tensión equivalente  $\bar{\sigma}(\sigma_{ij})$  supere al umbral de degradación  $f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d)$ , inicia el proceso de degradación en el material. La velocidad de dicha degradación depende de la sobretensión existente y de los parámetros  $\eta$  y  $N$  que identifican al material. Por ejemplo, a un material de comportamiento cuasi-elástico, le corresponde un valor muy grande de  $\eta$ , resultando la velocidad de daño prácticamente nula. En el capítulo 5 se analiza cómo influye el valor de dichos parámetros en los valores de resistencia y de



deformación específica .

### 3.4.5 Ley constitutiva secante total

La ley constitutiva secante toma la misma forma que en los modelos de daño independiente del tiempo:

$$\sigma_{ij} = m \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{ij}^e; d)}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = C_{ijkl}^s \varepsilon_{kl}^e = (1-d) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^e \quad (3.31)$$

$$\sigma_{ij} = (1-d) \sigma_{ij}^o \quad (3.32)$$

### 3.4.6 Ley constitutiva tangente total

La ley constitutiva tangente tiene la forma:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (3.33)$$

Sin embargo, este modelo de daño con una evolución del daño análoga a la deformación viscoplástica de Perzyna, no posee una condición de consistencia en su formulación. Debido a ello, el operador tangente no puede ser deducido derivando la expresión secante, sino que debe obtenerse numéricamente, a partir de la resolución de un sistema no lineal de ecuaciones. El sistema surge de plantear un residuo en tensiones y otro residuo en daño, y de diferenciar dichos residuos. En el capítulo 4 se detalla el cálculo del mismo.

### 3.4.7 Determinación de la energía de deformación según la velocidad de deformación

Los resultados experimentales (Sercombe et al. 1998) demuestran que cuando la carga es de tipo impulsivo, la energía disipada en el proceso de daño depende de la velocidad de deformación. En consecuencia, las energías por unidad de área  $G_F$  y  $G_C$  no toman ya valores fijos, y la evolución de la variable de endurecimiento  $\kappa^d$  depende de la velocidad de deformación cuando ésta toma valores altos. A continuación se propone una

forma de contemplar dicho fenómeno.

El Código Europeo de Hormigón (CEB-FIP' 90) da expresiones para estimar la resistencia a compresión y a tracción del hormigón, bajo velocidades de deformación mayores que  $30 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$  y  $3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ , respectivamente. Con respecto a la energía de deformación, dicho Código la estima mediante una expresión que tiene en cuenta la resistencia del hormigón a compresión simple. En el Anexo 3.1 se muestran dichas expresiones, y se propone una forma para determinar la energía de deformación según la velocidad de deformación. En el Anexo 3.2 se presenta una forma de evaluar las velocidades de deformación equivalentes en tracción y compresión, necesarias para el cálculo de las energías de deformación.

### **3.5 Comentarios finales**

El modelo de daño escalar elegido, simula satisfactoriamente la degradación elástica del hormigón. Sin embargo, para poder simular el comportamiento del hormigón bajo cargas de tipo impulsivo, es necesario incorporarle a dicho modelo constitutivo la dependencia del tiempo.

La adopción de una regla de evolución de la variable interna de daño análoga a la ley de evolución de la deformación viscoplástica de Perzyna, permite obtener tensiones por encima de la superficie de daño para ensayos cuasi-estáticos. De esta manera se puede simular un comportamiento dependiente de la velocidad de deformación, en particular, se obtiene la sobrerresistencia del hormigón bajo altas velocidades de deformación.

La degradación elástica se obtiene una vez superada la tensión umbral de daño, ya que la variable de daño evoluciona cuando la función de daño toma valores positivos.

## ANEXO 3.1

### CÁLCULO DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN EN FUNCIÓN DE LA VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN

#### A.3.1.1 Estimación de la resistencia uniaxial del hormigón según el CEB-FIP' 90

##### a) Compresión uniaxial

$$\frac{f_C}{f_{cm}} = \left( \frac{\dot{\epsilon}_c}{\dot{\epsilon}_{co}} \right)^{1.026\alpha_s} \quad \text{si } \dot{\epsilon} > \dot{\epsilon}_o \quad \left| \dot{\epsilon}_c \right| \leq 30 s^{-1} \quad (\text{A.3.1})$$

$$\frac{f_C}{f_{cm}} = \gamma_s \left( \frac{\dot{\epsilon}_c}{\dot{\epsilon}_{co}} \right)^{1/3} \quad \text{si } \left| \dot{\epsilon}_c \right| > 30 s^{-1} \quad (\text{A.3.2})$$

donde:

$$\log \gamma_s = 6.156\alpha_s - 2 \quad (\text{A.3.3})$$

$$\alpha_s = \frac{1}{5 + 9 \frac{f_{cm}}{f_{cmo}}} \quad (\text{A.3.4})$$

Para el caso de compresión, ec. (A.3.1) y (A.3.2), se considera  $\dot{\epsilon}_{co} = 30 \cdot 10^{-6} s^{-1}$ ,  $\dot{\epsilon}_c$  la velocidad de deformación,  $f_{cm}$  la resistencia a compresión uniaxial del hormigón cuasi-estática,  $f_C$  la resistencia a compresión del hormigón por impacto y  $f_{cmo}=10\text{Mpa}$ .

b) Tracción uniaxial

$$\frac{f_{CT}}{f_{ctm}} = \left( \frac{\dot{\varepsilon}_{ct}}{\dot{\varepsilon}_{cto}} \right)^{1.016\delta_s} \quad \text{si } \dot{\varepsilon} > \dot{\varepsilon}_{co} \text{ y } \left| \dot{\varepsilon}_{ct} \right| \leq 30 \text{ s}^{-1} \quad (\text{A.3.5})$$

$$\frac{f_{CT}}{f_{ctm}} = \beta_s \left( \frac{\dot{\varepsilon}_{ct}}{\dot{\varepsilon}_{cto}} \right)^{1/3} \quad \text{si } \left| \dot{\varepsilon}_{ct} \right| > 30 \text{ s}^{-1} \quad (\text{A.3.6})$$

donde:

$$\log \beta_s = 7.112\delta_s - 2.33 \quad (\text{A.3.7})$$

$$\delta_s = \frac{1}{10 + 6 \frac{f_{cm}}{f_{cmo}}} \quad (\text{A.3.8})$$

Para el caso de tracción, ec. (A.3.5) y (A.3.6), se considera  $\dot{\varepsilon}_{cto} = 3.10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ct}$  la velocidad de deformación,  $f_{ctm}$  la resistencia a tracción uniaxial del hormigón cuasi-estática,  $f_{CT}$  la resistencia a tracción del hormigón por impacto y  $f_{cmo}=10\text{Mpa}$ ..

**A.3.1.2 Estimación de la energía de deformación**

La energía de fractura  $G_F$  del hormigón puede estimarse mediante la siguiente expresión, dada por el CEB-FIP' 90:

$$G_F = G_{Fo} \left( \frac{f_{cm}}{f_{cmo}} \right)^{0.7} \quad (\text{A.3.9})$$

donde  $f_{cmo} = 10 \text{ Mpa}$  y  $G_{Fo}$  es el valor base de la energía de fractura dependiente del tamaño máximo del agregado. Por ejemplo, para un tamaño máximo de agregado de 16 mm, corresponde  $G_{Fo}=0.03\text{Nmm/mm}^2$ .

Para estimar la energía de deformación cuando la velocidad de deformación supera los  $3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$  en el caso de tracción, o los  $30 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$  en caso de compresión, se propone adoptar una expresión análoga a la (A.3.9), reemplazando en dicha ecuación el valor de la resistencia uniaxial del hormigón por impacto, ecuaciones (A.3.1) a (A.3.8), en lugar de la resistencia uniaxial determinada en ensayos cuasi-estáticos:

$$G_{Cimp} = G_C \left( \frac{f_c}{f_{cmo}} \right)^\varphi ; \quad G_{Fimp} = G_F \left( \frac{f_{CT}}{f_{ctmo}} \right)^\varphi \quad (\text{A.3.10})$$

siendo:  $G_{Cimp}$  y  $G_{Fimp}$  las energías de deformación en procesos con altas velocidades de deformación;  $G_C$  y  $G_F$  las energías de deformación en procesos cuasi-estáticos;  $f_c$  y  $f_{CT}$  las resistencias a compresión y a tracción del hormigón por impacto respectivamente;  $f_{cmo}$  y  $f_{ctmo}$  valores base de resistencia en compresión y tracción respectivamente;  $\varphi$  un parámetro a ajustar.

En forma más detallada, a continuación se deducen las expresiones resultantes para el caso uniaxial de compresión y de tracción:

#### a) Compresión uniaxial

$$G_{Cimp} = G_C \left( \frac{f_{cm}}{f_{cmo}} \right)^{\varphi-0.7} \left( \frac{\dot{\epsilon}_c}{\dot{\epsilon}_{co}} \right)^{1.026\varphi\alpha_s} \quad \text{si } \dot{\epsilon} > \dot{\epsilon}_o \text{ y } \left| \dot{\epsilon}_c \right| \leq 30 \text{ s}^{-1} \quad (\text{A.3.11})$$

$$G_{Cimp} = G_C \gamma_s^\varphi \left( \frac{f_{cm}}{f_{cmo}} \right)^{\varphi-0.7} \left( \frac{\dot{\epsilon}_c}{\dot{\epsilon}_{co}} \right)^{\varphi/3} \quad \text{si } \left| \dot{\epsilon}_c \right| > 30 \text{ s}^{-1} \quad (\text{A.3.12})$$

b) Tracción uniaxial

$$G_{Fimp} = G_F \left( \frac{f_{ctm}}{f_{ctmo}} \right)^{\varphi-0.7} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_{ct}}{\dot{\varepsilon}_{cto}} \right)^{1.016\varphi\delta_s} \quad \text{si } \dot{\varepsilon} > \dot{\varepsilon}_{cto} \quad \text{y } \dot{\varepsilon}_{ct} \leq 30 s^{-1} \quad (\text{A.3.13})$$

$$G_{Fimp} = G_F \left( \frac{f_{ctm}}{f_{ctmo}} \right)^{\varphi-0.7} \beta_s^\varphi \left( \frac{\dot{\varepsilon}_{ct}}{\dot{\varepsilon}_{cto}} \right)^{\varphi/3} \quad \text{si } \dot{\varepsilon}_{ct} > 30 s^{-1} \quad (\text{A.3.14})$$

## ANEXO 3.2

### CÁLCULO DE LA VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN EQUIVALENTE

#### A.3.2.1 Introducción

Para el cálculo de la evolución de la variable de endurecimiento en daño  $\dot{\kappa}^d$ , para un estado de tensiones cualquiera se emplea la siguiente expresión:

$$\dot{\kappa}^d = \left[ \frac{r}{g_F^{*d}(\dot{\varepsilon}_t)} + \frac{(1-r)}{g_C^{*d}(\dot{\varepsilon}_c)} \right] m_o \Psi^o \dot{d} \quad (\text{A.3.15})$$

donde las energías de deformación dependen de la velocidad de deformación en tracción y compresión como se describió en el Anexo 3.1. Sin embargo, resta aún definir cómo se calculan las velocidades de deformación ( $\dot{\varepsilon}_t$  y  $\dot{\varepsilon}_c$ ). A continuación, se describe la forma propuesta en esta tesis.

#### A.3.2.2 Deformación equivalente

En primer lugar, se define una deformación equivalente, como sigue:

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2\Psi^o}{E}} \quad (\text{A.3.16})$$

donde  $\Psi^o$  es la energía libre elástica potencial libre del material no dañado, y  $E$  módulo de elasticidad longitudinal.

En el caso multiaxial, esta deformación equivalente es un promedio ponderado de deformaciones y tiene un sentido termodinámico claro. Teniendo en cuenta la expresión de

la disipación debida al daño, ec.(3.11),  $\bar{\varepsilon}^2$  representa la variable conjugada del daño.

### A.3.2.3 Velocidad de deformación en tracción y compresión

En forma aproximada se puede suponer que en  $t + \Delta t$ , la velocidad de deformación en compresión y tracción resultan:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_t = \Delta \bar{\varepsilon}_t / \Delta t \quad \text{y} \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_c = \Delta \bar{\varepsilon}_c / \Delta t \quad (\text{A.3.17})$$

donde:

$$\Delta \bar{\varepsilon}_t = r_e(\Delta \varepsilon_i) \Delta \bar{\varepsilon}; \quad \Delta \bar{\varepsilon}_c = (1 - r_e(\Delta \varepsilon_i)) \Delta \bar{\varepsilon} \quad (\text{A.3.18})$$

y

$$\Delta \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^t \quad \text{y} \quad r_e(\Delta \varepsilon_i) = \frac{\sum_1^3 \langle \Delta \varepsilon_i \rangle}{\sum_1^3 |\Delta \varepsilon_i|} \quad (\text{A.3.19})$$

donde  $\bar{\varepsilon}^t$  es la deformación equivalente en el tiempo  $t$ ,  $\Delta \bar{\varepsilon}$  es el incremento de deformación equivalente en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  y  $r_e$  depende del incremento de las deformaciones principales  $\Delta \varepsilon_i$ , ec. A.3.19.



## CAPITULO 4

---

### TRATAMIENTO NUMERICO

#### 4.1 Introducción

La resolución de una estructura mediante el método de los elementos finitos constituye una aproximación discreta a la solución real del problema, ya que surge de una discretización en el espacio y otra en el tiempo.

Para resolver la ecuación de equilibrio dinámico que define el problema, primero, se aproxima el campo de desplazamientos de la estructura mediante una discretización espacial, y luego, se integran las ecuaciones diferenciales semidiscretas en el tiempo. Para realizar la integración en el tiempo es necesario subdividir el intervalo de tiempo total en varios subintervalos y aplicar algún método de integración numérico explícito o implícito.

En lo que sigue, se esquematiza la resolución de la ecuación de movimiento por el método de los elementos finitos, la integración de la ecuación constitutiva y la determinación del operador tangente consistente. La integración de la ecuación constitutiva en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , se realiza mediante un algoritmo tipo *full Euler backward*, resolviendo en forma iterativa un residuo en términos del incremento de daño. Dado que el modelo propuesto no posee una condición de consistencia en su formulación, el operador tangente consistente es deducido en forma algorítmica, una vez determinados los valores de las variables del modelo.

#### 4.2 Resolución de la ecuación de movimiento

La ecuación diferencial de movimiento puede expresarse como:

$$m(x; y; z)\ddot{\mathbf{u}}(x; y; z; t) + \mathbf{f}_{\sigma}(x; y; z; t; \dot{\mathbf{u}}; \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_F(x; y; z; t; \mathbf{u}; \dot{\mathbf{u}}; \ddot{\mathbf{u}}) \quad (4.1)$$

donde  $m$  es la densidad,  $\mathbf{f}_\sigma$  es la fuerza interna resistente por unidad de volumen,  $\mathbf{f}_F$  es la fuerza externa por unidad de volumen, y  $(\mathbf{u}; \dot{\mathbf{u}}; \ddot{\mathbf{u}})$  son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración respectivamente.

Para obtener una solución aproximada del problema, se realizan dos discretizaciones independientes:

a) Discretización espacial:  $u(x, y, z) \rightarrow \{U_1; U_2 \dots\}$

El método de los elementos finitos consiste en dividir un medio continuo mediante líneas o superficies en dominios más pequeños denominados elementos. Dentro del dominio de un elemento, los desplazamientos  $\mathbf{u}^e(x, y, z)$  de cualquier punto se aproximan de la siguiente forma (Zienkiewicz 1980):

$$\mathbf{u}^e(x, y, z) \cong \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{U}^e \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{N}$  es una matriz formada por funciones de forma, las cuales interpolan los desplazamientos de ciertos puntos nodales del elemento contenidos en el vector  $\mathbf{U}^e$ . Una vez conocidos los desplazamientos pueden evaluarse las deformaciones en un punto cualquiera del sólido.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \nabla^s \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{U}^e = \mathbf{B}(x, y, z) \mathbf{U}^e \quad (4.3)$$

Aplicando esta técnica de discretización a la ecuación de movimiento (4.1) e integrando en el volumen, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias espacialmente discretas:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{F}_\sigma(\dot{\mathbf{U}}; \mathbf{U}) = \mathbf{F}_F(\ddot{\mathbf{U}}; \dot{\mathbf{U}}; \mathbf{U}) \quad (4.4)$$

donde :

$\mathbf{U}(t); \dot{\mathbf{U}}(t); \ddot{\mathbf{U}}(t)$ : Vectores nodales n-dimensionales de desplazamiento, velocidad y aceleración respectivamente

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \int_V \mathbf{N}.m.\mathbf{N} dV : \text{Matriz de masa}$$

$$\mathbf{F}_\sigma = \mathbf{A} \int_V \mathbf{B} : \boldsymbol{\sigma} dV : \text{Fuerzas internas resistentes}$$

$$\mathbf{A} : \text{Indica ensamblaje sobre todos los elementos}$$

$$\mathbf{F}_F : \text{Fuerzas externas}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \text{Tensor de tensiones}$$

La ecuación de movimiento discreta en el espacio puede escribirse también como:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{F}_\sigma(\dot{\mathbf{U}}; \mathbf{U}) - \mathbf{F}_F(\mathbf{U}; t) = \mathbf{R}(\mathbf{U}; t) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

donde  $\mathbf{R}$  es un residuo de fuerzas.

En general, la ecuación (4.5) es una ecuación no lineal que puede ser resuelta en forma iterativa. Una forma de hacerlo es a través del *método de Newton Raphson* (Crisfield 1991). Linealizando el residuo en la vecindad de la solución, se obtiene:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_{k+1}^{t+\Delta t}) = \mathbf{R}(\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}) + \mathbf{J}_T(\mathbf{U}_k^{t+\Delta t})(\mathbf{U}_{k+1}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}_k^{t+\Delta t}) = 0 \quad (4.6)$$

$$\mathbf{U}_{k+1}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}_k^{t+\Delta t} - [\mathbf{J}_T(\mathbf{U}_k^{t+\Delta t})]^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}) \quad (4.7)$$

donde:

$$\mathbf{J}_T(\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}) = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}} \quad (4.8)$$

es la matriz Jacobiana que se calcula como:

$$\mathbf{J}_T(\mathbf{U}) = \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{F}_\sigma}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{F}_\sigma}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{F}_F}{\partial \mathbf{U}} \quad (4.9)$$

$\frac{\partial \mathbf{F}_\sigma}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{K}^T$  es la matriz de rigidez tangente global que puede reemplazarse por la matriz inicial a expensas de la pérdida de la velocidad de convergencia, y

$$\mathbf{K}^T = \sum_{e=1}^n \int_V \mathbf{B}^t \mathbf{C}^T \mathbf{B} dV \quad (4.10)$$

donde  $\mathbf{C}^T$  es el tensor de rigidez tangente. En la sección 4.4 se determina el operador tangente consistente para el modelo desarrollado.

En problemas cuasi-estáticos, la ecuación de movimiento (4.4) se reduce a:

$$\mathbf{F}_\sigma(\dot{\mathbf{U}}; \mathbf{U}) - \mathbf{F}_F(\mathbf{U}; t) = \mathbf{R}(\mathbf{U}; t) = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

b) Discretización temporal:  $g(t) \rightarrow \{g_1; g_2, \dots\}$

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales (4.4) puede ser obtenida mediante el método del desacoplamiento modal o mediante el método de integración directa de la ecuación de equilibrio dinámico. Este último tiene la ventaja de ser aplicable a problemas no lineales (grandes desplazamientos, grandes deformaciones o comportamiento no lineal del material) (Barbat 1982).

Los métodos de integración directa se utilizan para encontrar la variación de la

respuesta en el tiempo. Sin embargo, la respuesta no se obtiene como una función del tiempo, sino en una serie de tiempos predeterminados  $t^n$ . La forma general de proceder es expresar las velocidades y aceleraciones para un instante de tiempo determinado, en función únicamente del desplazamiento correspondiente al tiempo en que se quiere hallar la solución y de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones ya conocidos correspondientes a tiempos anteriores. Estas ecuaciones en diferencias, juntamente con la ecuación diferencial particularizada para  $t = t^{n-1}$  ó para  $t^{n-1} + \Delta t$ , permiten obtener la solución.

Existen fundamentalmente dos grupos de esquemas de integración directa paso a paso (Barbat 1982), los esquemas *implícitos* (p.ej. : método de Newmark) y los esquemas *explícitos* (p.ej. : método de las diferencias centrales). En el primer caso, el corrimiento  $\mathbf{U}^n$  correspondiente al tiempo  $t^n = t^{n-1} + \Delta t$ , se obtiene a partir de la ecuación diferencial planteada para el tiempo  $t^n$ . La respuesta de la estructura se obtendrá, por tanto, como solución de un sistema de ecuaciones algebraicas. Por el contrario, en los métodos explícitos la solución en el tiempo  $t^n$  se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio en el tiempo  $t^{n-1}$ , sin la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones, pero limitando el intervalo de tiempo elegido para la integración.

Para la *discretización temporal* se supone la aproximación de  $\mathbf{U}(t)$  y  $\dot{\mathbf{U}}(t)$  en el tiempo  $t^n$ , utilizando una aproximación lineal en diferencias finitas de la forma general:

$$\dot{\mathbf{U}}^n = \frac{\alpha}{\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^n + \mathbf{l}(\dot{\mathbf{U}}^{n-1}; \ddot{\mathbf{U}}^{n-1}; \dots) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{U}^n = \frac{\beta}{\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^n + \mathbf{m}(\mathbf{U}^{n-1}, \dot{\mathbf{U}}^{n-1}; \ddot{\mathbf{U}}^{n-1}; \dots) \quad (4.13)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes.

Suponiendo que en el instante inicial, los vectores  $(\mathbf{U}^o, \dot{\mathbf{U}}^o, \ddot{\mathbf{U}}^o)$  de desplazamiento, velocidad y aceleración respectivamente son conocidos, la solución en el tiempo  $T$  se obtiene empleando un esquema de integración que aproxima la solución en los tiempos  $t^o$ ,  $t^1 = t^o + \Delta t$ , ...,  $t^n = t^{n-1} + \Delta t$ , ...,  $T$  (Bathe 1982). A continuación se describen dos esquemas de integración paso a paso utilizados en esta tesis, uno explícito y otro implícito.

#### 4.2.1 Método de Newmark

Uno de los métodos de integración implícita más utilizado es el denominado *Método de Newmark* que utiliza las siguientes expresiones en diferencias (Bathe 1982):

$$\dot{\mathbf{U}}^n = \dot{\mathbf{U}}^{n-1} + \left[ (1 - \delta) \ddot{\mathbf{U}}^{n-1} + \delta \ddot{\mathbf{U}}^n \right] \Delta t \quad (4.14)$$

$$\mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n-1} + \dot{\mathbf{U}}^{n-1} \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{U}}^{n-1} + \alpha \ddot{\mathbf{U}}^n \right] \Delta t^2 \quad (4.15)$$

donde  $\alpha$  y  $\delta$  son parámetros que aseguran la estabilidad del método cuando valen 0.25 y 0.5 respectivamente.

De las ecuaciones (4.14) y (4.15) surgen las expresiones de Newmark:

$$\dot{\mathbf{U}}^n = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}) + \left( 1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \dot{\mathbf{U}}^{n-1} + \left( 1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}^{n-1} \quad (4.16)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^n = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1} - \dot{\mathbf{U}}^{n-1} \Delta t) - \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}^{n-1} \quad (4.17)$$

Si se reemplazan las ecuaciones (4.16) y (4.17) en la ecuación de movimiento particularizada en  $t^n$ , se obtiene una ecuación no lineal en  $\mathbf{U}^n$ . Esta ecuación puede resolverse, por ejemplo, mediante el *método de Newton Raphson* actualizando los desplazamientos en forma iterativa de la siguiente manera:

$$\mathbf{U}_{k+1}^n = \mathbf{U}_k^n - [\mathbf{J}_T(\mathbf{U}_k^n)]^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{U}_k^n) \quad (4.18)$$

donde:

$$\mathbf{J}_T(\mathbf{U}_k^n) = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M} + \left( \frac{\partial \mathbf{F}_\sigma}{\partial \mathbf{U}} \right)_k^n + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_\sigma}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \right)_k^n - \left( \frac{\partial \mathbf{F}_F}{\partial \mathbf{U}} \right)_k^n \quad (4.19)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_k^n) = \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (\mathbf{U}_k^n - \mathbf{U}^{n-1}) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{n-1} - \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}^{n-1} \right] + (\mathbf{F}_\sigma)_k^n - (\mathbf{F}_F)_k^n \quad (4.20)$$

#### 4.2.2 Método de las diferencias centrales

Uno de los métodos explícitos más simples es el método de las diferencias centrales. En este método se obtiene la respuesta en el tiempo  $t^n$  a partir de la ecuación de equilibrio en el tiempo  $t^{n-1}$ . Ello implica que no es necesario iterar ni siquiera en problemas no lineales y, más aún, si la matriz de masa es diagonal, tampoco es necesario resolver un sistema de ecuaciones. Debido a ello, la solución del problema se simplifica notablemente. Sin embargo, el método es condicionalmente estable. Para intervalos de integración mayores que un cierto incremento de tiempo crítico  $\Delta t_{cr}$  la solución se hace inestable y no converge.

La aceleración y la velocidad en  $t^{n-1}$  se pueden aproximar en diferencias finitas centrales como sigue:

$$\ddot{\mathbf{U}}^{n-1} = \frac{1}{\Delta t^2} [\mathbf{U}^n - 2\mathbf{U}^{n-1} + \mathbf{U}^{n-2}] \quad (4.21)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{n-1} = \frac{1}{2\Delta t} [\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-2}] \quad (4.22)$$

Reemplazando las expresiones (4.21) y (4.22) en la ecuación de movimiento planteada en el instante  $t^{n-1}$ :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}^{n-1} + \mathbf{F}_\sigma(\mathbf{U}^{n-1}, \dot{\mathbf{U}}^{n-1}) = \mathbf{F}_F(\mathbf{U}^{n-1}; t^{n-1}) \quad (4.23)$$

se obtiene:

$$\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} [\mathbf{U}^n - 2\mathbf{U}^{n-1} + \mathbf{U}^{n-2}] + \mathbf{F}_\sigma \left( \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-2}), \mathbf{U}^{n-1} \right) = \mathbf{F}_F (\mathbf{U}^{n-1}; t^{n-1}) \quad (4.24)$$

Si las fuerzas internas no dependen la velocidad y la matriz de masa es diagonal, la solución del sistema (4.24) puede obtenerse término a término ya que la misma resulta:

$$\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{U}^n = \hat{\mathbf{R}}^{n-1} \quad (4.25)$$

donde:

$$\hat{\mathbf{R}}^{n-1} = \mathbf{R}^{n-1} - \left( \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{U}^{n-1} - \left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{U}^{n-2} \quad (4.26)$$

Con respecto al intervalo de tiempo crítico, según Bathe (1982), puede calcularse a partir de la masa y la rigidez de la estructura. Se puede demostrar que, para tener una solución válida, debe cumplirse:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} \quad (4.27)$$

donde  $T_n$  es el menor período de la discretización de elementos finitos con  $n$  grados de libertad.

### 4.3 Integración de la ecuación constitutiva

Para resolver la ecuación de equilibrio dinámico es necesario calcular la contribución de los esfuerzos internos  $\mathbf{F}_\sigma$  que aparece en la ecuación (4.4). Como resultado de la discretización espacial, las ecuaciones de evolución que determinan el estado tensional  $\boldsymbol{\sigma}$  son ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo (Ibrahimbegovic et al. 1998).



Integrando dichas ecuaciones en el intervalo de tiempo elegido, se puede trazar la evolución de las variables del problema.

Partiendo de un estado inicial conocido en el instante de tiempo  $t^{n-1}$ , se busca la solución del problema en  $t^n$  debido a un incremento de desplazamientos  $\Delta \mathbf{U}^n$  correspondiente al intervalo de tiempo  $\Delta t = t^n - t^{n-1}$ . Para el caso particular del modelo de daño escalar dependiente de la velocidad de deformación, en cada punto de Gauss se conoce:

$$\left\{ \varepsilon_{ij}, d, \kappa^d \right\}^{n-1} \quad (\Delta u_i)^n = u_i^n - u_i^{n-1} \quad (\Delta \varepsilon_{ij})^n = \nabla^s (\Delta u_i)^n$$

El algoritmo numérico propuesto, pertenece a la familia de los esquemas tipo *full Euler backward*. La tensión al final del intervalo de tiempo  $\Delta t$  puede calcularse como:

$$\sigma_{ij}^n = C_{ijkl}^o (1 - d^n) \varepsilon_{ij}^n = (1 - d^n) \sigma_{ij}^o \quad (4.28)$$

o también puede expresarse en forma incremental:

$$\sigma_{ij}^n = C_{ijkl}^o (1 - d^{n-1}) \varepsilon_{ij}^{n-1} + C_{ijkl}^o (1 - d^{n-1}) \Delta \varepsilon_{ij}^n - \Delta d^n C_{ijkl}^o \varepsilon_{ij}^n \quad (4.29)$$

es decir:

$$\sigma_{ij}^n = \sigma_{ij}^{n-1} + \Delta \sigma_{ij}^n \quad (4.30)$$

con :

$$\Delta \sigma_{ij}^n = C_{ijkl}^o (1 - d^{n-1}) \Delta \varepsilon_{ij}^n - \Delta d^n C_{ijkl}^o \varepsilon_{ij}^n \quad (4.31)$$

Aquí se observa que, para determinar la tensión al final del paso, sólo falta conocer el incremento de daño  $\Delta d^n$ . A partir de la evolución del daño de tipo viscosa definida en el

capítulo anterior, y aproximando:

$$\dot{d}^n = \frac{\Delta d^n}{\Delta t} \quad (4.32)$$

se tiene:

$$\Delta d^n = \frac{\Delta t}{\eta} \left\langle \frac{(G^d)^n}{f_c^n} \right\rangle^N \quad (4.33)$$

Esta última ecuación depende también de  $\sigma_{ij}^n$ . La condición que debe verificarse para el instante  $t = t^n$  puede escribirse en forma de residuo como:

$$\tilde{R}[\sigma_{ij}^n, (\kappa^d)^n, \dot{\varepsilon}_{ij}^n] = \Delta d^n - \frac{\Delta t}{\eta} \left\langle \frac{(G^d)^n}{f_c^n} \right\rangle^N = 0 \quad (4.34)$$

donde:

$$(G^d)^n = \bar{\sigma}(\sigma_{ij}^n) - f_c[\sigma_{ij}^n, (\kappa^d)^n] \quad (4.35)$$

$$\sigma_{ij}^n = C_{ijkl}^o (1 - d^n) \varepsilon_{ij}^n \quad (4.36)$$

$$d^n = d^{n-1} + \Delta d^n \quad (4.37)$$

$$(\kappa^d)^n = (\kappa^d)^{n-1} + (\Delta \kappa^d)^n \quad (4.38)$$

$$(\Delta \kappa^d)^n = \left[ \frac{r}{(g_F^{*d})^n} + \frac{(1-r)}{(g_C^{*d})^n} \right] m \Psi^o \Delta d^n \quad (4.39)$$

$$(g_F^{*d})^n = g_F^{*d}(\sigma_{ij}^n, G_F, \dot{\varepsilon}_{ij}^n) \quad ; \quad (g_C^{*d})^n = g_C^{*d}(\sigma_{ij}^n, G_c, \dot{\varepsilon}_{ij}^n) \quad (4.40)$$

Utilizando las expresiones (4.35) a (4.40), la ecuación (4.34) resulta:

$$\tilde{R} = \tilde{R}[\Delta d^n] = 0 \quad (4.41)$$

En general, para la integración de la ecuación constitutiva en los modelos viscoplásticos se plantean dos residuos, uno en términos de tensiones y otro en términos del parámetro de endurecimiento (Carosio 1997). En este caso de daño viscoso, sólo se utiliza el residuo en término del incremento de daño  $\tilde{R}$ , el cual surge de la ecuación no lineal en  $\Delta d$  (4.41). No es necesario el planteo de un residuo en tensiones, ya que el cálculo de  $\sigma_{ij}^n$  (ecuación 4.36) se realiza multiplicando el escalar  $(1-d^{n-1}-\Delta d^n)$  por la tensión no dañada  $\sigma_{ij}^o$  conocida. Debido a ello, el proceso de integración de la ecuación constitutiva resulta mucho más simple que en el caso viscoplástico.

Para resolver la ecuación (4.41), se expande el residuo en *serie truncada de Taylor* alrededor de la posición de iteración  $k$  y se lo iguala a cero, es decir:

$$\tilde{R}_{k+1} = \tilde{R}_k + \frac{\partial \tilde{R}_k}{\partial \Delta d} \delta \Delta d_k = 0 \quad (4.42)$$

donde:

$$\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Delta d} = 1 + \frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \frac{\bar{\sigma} - f_c}{f_c} \right\rangle^{N-1} \left( \frac{1}{f_c} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}^o + \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2} \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \left[ \frac{r}{g_F^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_C^{*d}} \right] \Psi^o \right) \quad (4.43)$$

Resulta entonces:

$$\delta \Delta d_k = \frac{-\tilde{R}_k}{\frac{\partial \tilde{R}_k}{\partial \Delta d}} = \frac{-\tilde{R}_k}{1 + \frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \frac{\bar{\sigma} - f_c}{f_c} \right\rangle_k^{N-1} \left( \frac{1}{f_c} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}^o + \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2} \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \left[ \frac{r}{g_F^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_C^{*d}} \right] \Psi^o \right)_k} \quad (4.44)$$

$$\Delta d_{k+1}^n = \Delta d_k^n + \delta \Delta d_k \quad (4.45)$$

Reordenando y tomando  $N=1$ , resulta:

$$\delta \Delta d_k = \frac{-\tilde{G}_k}{\frac{\partial \tilde{G}_k}{\partial \Delta d}} = \frac{-\frac{\eta}{\Delta t} \Delta d_k^n + \left\langle \frac{\bar{\sigma} - f_c}{f_c} \right\rangle_k}{\frac{\eta}{\Delta t} + \left( \frac{1}{f_c} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}^o + \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2} \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \left[ \frac{r}{g_F^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_C^{*d}} \right] \Psi^o \right)_k} \quad (4.46)$$

El algoritmo de integración correspondiente se desarrolla en el Anexo 4.

Cuando  $\Delta t/\eta$  tiende a infinito, es decir para carga cuasi-estática, la ec. (4.46) resulta idéntica a la expresión para calcular el incremento de daño correspondiente al modelo de daño independiente de la velocidad de deformación (Anexo 4).

Para el caso en que  $\Delta t/\eta$  tiende a cero, la ec. (4.46) conduce a

$$\delta \Delta d_k = \frac{-\tilde{R}_k}{\frac{\partial \tilde{G}_k}{\partial \Delta d}} = \frac{-\tilde{R}_k}{1+0} = -\Delta d_k^n \quad \text{y} \quad \Delta d_{k+1}^n = \Delta d_k^n + \delta \Delta d_k = 0$$

O sea que el comportamiento coincide con el elástico dañado, resultando nula la evolución del daño.

#### 4.4 Operador tangente consistente

Cuando la resolución de la ecuación de movimiento en el tiempo se realiza mediante un método implícito, el cálculo de la matriz Jacobiana requiere del operador tangente consistente:

$$C_{ijkl}^T = \frac{d\sigma_{ij}}{d\varepsilon_{kl}} \quad (4.47)$$

El cálculo de la matriz tangente consistente para el caso elástico es simplemente la derivada de la relación constitutiva elástica:

$$C_{ijkl}^T = \frac{d(C_{ijmn}^o \varepsilon_{mn})}{d\varepsilon_{kl}} = C_{ijkl}^o \quad (4.48)$$

Sin embargo, cuando la tensión está implícitamente definida mediante un sistema de ecuaciones no lineal, como ocurre en los modelos de plasticidad, viscoplasticidad y daño, el cálculo se complica de alguna manera. En dichos modelos el operador tangente se determina utilizando la ecuación de consistencia. El modelo de daño dependiente de la velocidad de deformación, desarrollado en el capítulo anterior, no posee una condición de consistencia en su formulación, por lo cual el operador tangente se determina en forma numérica en consistencia con el algoritmo de integración, como se detalla a continuación.

Si se expresan en forma implícita las ecuaciones que definen el modelo y dependen de la deformación específica  $\varepsilon_{kl}$ , se tiene (Hartmann et al. 1997):

$$R_{ij}^\sigma(\varepsilon; \sigma(\varepsilon), d(\varepsilon)) = \sigma_{ij}^n - (1 - d^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n = 0 \quad (4.49)$$

$$R^d(\varepsilon; \sigma(\varepsilon), d(\varepsilon)) = d^n - d^{n-1} - \frac{\Delta t}{\eta} \left[ \frac{(G^d)^n}{(f_c)^n} \right]^N = 0 \quad (4.50)$$

Las variables de estado se determinan mediante el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva.

Si se diferencian los sistemas de ecuaciones (4.49) y (4.50), se deduce lo siguiente:

$$\frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} \frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}} + \frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial d} \frac{dd}{d\varepsilon_{mn}} = - \frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial \varepsilon_{mn}} \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial R^d}{\partial \sigma_{kl}} \frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}} + \frac{\partial R^d}{\partial d} \frac{dd}{d\varepsilon_{mn}} = - \frac{\partial R^d}{\partial \varepsilon_{mn}} \quad (4.52)$$

con:

$$\frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial \Delta d} = C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl} = \sigma_{ij}^o \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial \varepsilon_{mn}} = -(1-d) C_{ijmn}^o \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial R^d}{\partial \sigma_{ij}} = - \frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \frac{\bar{\sigma} - f_c}{f_c} \right\rangle^{N-1} \frac{1}{f_c} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial R^d}{\partial \Delta d} = 1 + \frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \frac{\bar{\sigma} - f_c}{f_c} \right\rangle^{N-1} \left( \frac{1}{f_c} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}^o + \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2} \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \left[ \frac{r}{g_F^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_C^{*d}} \right] \Psi^o \right) \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial R^d}{\partial \varepsilon_{mn}} = - \frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \frac{\bar{\sigma} - f_c}{f_c} \right\rangle^{N-1} \left( \frac{1}{f_c} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} (1-d) C_{ijmn}^o - \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2} \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \frac{\partial \kappa^d}{\partial \varepsilon_{mn}} \right)$$

$$\frac{\partial R^d}{\partial \varepsilon_{mn}} = - \frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \frac{\bar{\sigma} - f_c}{f_c} \right\rangle^{N-1} \left( \frac{1}{f_c} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} (1-d) C_{ijmn}^o - \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2} \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \left[ \frac{r}{g_f^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_c^{*d}} \right] \sigma_n^o \right) \quad (4.58)$$

Despejando  $\frac{\partial d}{\partial \varepsilon_{mn}}$  de la ec. (4.52) y reemplazando en la ec. (4.51), se puede despejar

el operador tangente  $C_{klmn}^T = \frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}}$ , el cual resulta:

$$C_{klmn}^T = \frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}} = \left[ \frac{\partial R_{ij}^\sigma}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial R_{ij}^\sigma}{\partial d} \left( \frac{\partial R^d}{\partial d} \right)^{-1} \frac{\partial R^d}{\partial \sigma_{kl}} \right]^{-1} \left[ -\frac{\partial R_{ij}^\sigma}{\partial \varepsilon_{mn}} + \frac{\partial R_{ij}^\sigma}{\partial d} \left( \frac{\partial R^d}{\partial d} \right)^{-1} \frac{\partial R^d}{\partial \varepsilon_{mn}} \right] \quad (4.59)$$

Para el caso de  $N=1$ , queda  $N \left\langle \frac{\bar{\sigma} - f_c}{f_c} \right\rangle^{N-1} = 1$  y el tensor tangente consistente:

$$C_{klmn}^T = \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \sigma_{ij}^o H \frac{\Delta t}{\eta} \frac{1}{f_c} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{-1} \left[ C_{ijmn}^s - \sigma_{ij}^o H \frac{\Delta t}{\eta} \left( \frac{1}{f_c} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ab}} C_{abmn}^s - \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2} \frac{\partial f_c}{\partial \varepsilon_{mn}} \right) \right] \quad (4.60)$$

donde:

$$H = \left( 1 + \frac{\Delta t}{\eta} \left( \frac{1}{f_c} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}^o + \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2} \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \left[ \frac{r}{g_F^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_C^{*d}} \right] \Psi^o \right) \right)^{-1} \quad (4.61)$$

$$\sigma_{ij}^o = C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n \quad (4.62)$$

Se puede observar que cuando  $\frac{\Delta t}{\eta} \rightarrow 0$ ,  $C_{ijkl}^t \rightarrow C_{ijkl}^s = (1-d)C_{ijkl}^o$  ó sea que coincide con el operador secante.

Si en cambio  $\frac{\Delta t}{\eta} \rightarrow \infty$ , se obtiene el operador tangente consistente correspondiente al modelo de daño independiente del tiempo (Luccioni 1993).

#### 4.5 Comentarios finales

Este capítulo muestra la resolución, mediante elementos finitos, de la ecuación de equilibrio. Las cargas de origen explosivo, constituyen un problema dinámico de tipo

impulsivo. El esquema de integración explícito es, para dicho tipo de acciones, el más conveniente ya que se trata de grandes presiones en intervalos de tiempo muy pequeños. Un esquema explícito calcula el desplazamiento del tiempo actual, a partir del desplazamiento del paso anterior.

La integración de la ecuación constitutiva se realiza mediante un algoritmo tipo *full Euler backward*. Si el criterio de daño resulta mayor que cero, los valores de las variables internas y de la tensión resultante se determina en forma iterativa, controlando el residuo de la ecuación no lineal en  $\Delta d$ . En los casos extremos, según  $\Delta t/\eta$  tienda a cero o a infinito, se obtiene un incremento nulo del daño o el daño correspondiente al modelo independiente del tiempo, respectivamente.

Con respecto al operador tangente consistente, deducido a partir de un sistema de ecuaciones implícitas dependientes de la deformación específica, coincide con el operador tangente secante cuando  $\Delta t/\eta$  tiende a cero y con el correspondiente al modelo independiente del tiempo cuando  $\Delta t/\eta$  tiende a infinito.



## ANEXO 4

### ALGORITMOS DE INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN CONSTITUTIVA

#### a) Modelo de daño escalar dependiente de la velocidad de deformación

0) *Datos del incremento:*

$$\Delta u_k^n, \Delta \varepsilon_{kl}^n, \varepsilon_{kl}^n$$

1) *Predictor,  $k=0$ :*  $d_o^n = d^{n-1}$ ,  $\Delta d_o^n = 0$ ,  $(f_c)_o^n = (f_c)^{n-1}$ ,  $(\kappa^d)_o^n = (\kappa^d)^{n-1}$

$$(\sigma_{ij}^o)^n = C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n, \quad (\sigma_{ij})_o^n = (1 - d_o^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n$$

2) *Verificación de la condición de daño:*  $(G^d)_o^n = \bar{\sigma} [(\sigma_{ij})_o^n] - (f_c)_o^n$

Si  $(G^d)_o^n < 0$  vaya a **10)**

3) *Cálculo del residuo:*

$$\tilde{R}_o = \Delta d_o^n - \frac{\Delta t}{\eta} \left\langle \frac{(G^d)_o^n}{(f_c)_o^n} \right\rangle^N$$

4) *Corrección de la variable de daño:*

$$(\delta \Delta d)_k = - \left( \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Delta d} \right)_{k-1}^{-1} \tilde{R}_{k-1}, \quad \Delta d_k^n = \Delta d_{k-1}^n + (\delta \Delta d)_k, \quad d_k^n = d^{n-1} + \Delta d_k^n$$

5) *Cálculo de la tensión:*

$$(\sigma_{ij})_k^n = (1 - d_k^n) (\sigma_{ij}^o)^n$$

6) *Actualización de la variable de endurecimiento en daño:*

$$(\Delta \kappa^d)_k^n = \left[ \frac{r}{g_F^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_C^{*d}} \right]_k^n (\Psi^o)^n \Delta d_k^n, \quad (\kappa^d)_k^n = (\kappa^d)^{n-1} + (\Delta \kappa^d)_k^n$$

**7) Actualización del umbral de daño:**  $(f_c)_k^n = r(\sigma_k^n) \sigma_t [(\kappa^d)_k^n] + [1-r(\sigma_k^n)] \sigma_c [(\kappa^d)_k^n]$

**8) Cálculo de la función de daño:**  $(G^d)_k^n = \bar{\sigma} [(\sigma_{ij})_k^n] - (f_c)_k^n$

**9) Cálculo del residuo:** 
$$\tilde{R}_k = \Delta d_k^n - \frac{\Delta t}{\eta} \left\langle \frac{(G^d)_k^n}{(f_c)_k^n} \right\rangle^N$$

Si  $\tilde{R}_k > \text{tolerancia}$ , entonces:  $k=k+1$ , vuelva a **4)**

**10) Actualización de las variables:**

$$(\sigma_{ij})^n = (\sigma_{ij})_k^n, \quad d^n = d_k^n, \quad (f_c)^n = (f_c)_k^n, \quad (\kappa^d)^n = (\kappa^d)_k^n$$

**11) Cálculo del operador tangente consistente  $C_{ijkl}^t$**

**12) FIN**

**b) Modelo de daño escalar independiente del tiempo****0) Datos del incremento:**

$$\Delta u_k^n, \Delta \varepsilon_{kl}^n, \varepsilon_{kl}^n$$

**1) Predictor,  $k=0$ :**  $d_o^n = d^{n-1}$ ,  $\Delta d_o^n = 0$ ,  $(f_c)_o^n = (f_c)^{n-1}$ ,  $(\kappa^d)_o^n = (\kappa^d)^{n-1}$ 

$$(\sigma_{ij}^o)^n = C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n, \quad (\sigma_{ij})_o^n = (1 - d_o^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n$$

**2) Verificación de la condición de daño**  $(G^d)_o^n = \bar{\sigma} [(\sigma_{ij})_o^n] - (f_c)_o^n$ Si  $(G^d)_o^n < 0$  **vaya a 8)****3) Corrección de la variable de daño:**

$$(\delta \Delta d)_k = \frac{(G^d)_k^{n-1}}{\left( \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \right)_{k-1} \left( \frac{\partial \kappa^d}{\partial d} \right)_{k-1} + \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{k-1} \sigma_{ij}^o}$$

$$\Delta d_k^n = \Delta d_{k-1}^n + (\delta \Delta d)_k, \quad d_k^n = d^{n-1} + \Delta d_k^n$$

**4) Cálculo de la tensión:**

$$(\sigma_{ij})_k^n = (1 - d_k^n) (\sigma_{ij}^o)^n$$

**5) Actualización de la variable de endurecimiento en daño:**

$$(\Delta \kappa^d)_k^n = \left[ \frac{r}{g_f^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_c^{*d}} \right]_k^n (\psi^o)^n \Delta d_k^n, \quad (\kappa^d)_k^n = (\kappa^d)^{n-1} + (\Delta \kappa^d)_k^n$$

**6) Actualización del umbral de daño:**  $(f_c)_k^n = r(\sigma_k^n) \sigma_t [(\kappa^d)_k^n] + [1-r(\sigma_k^n)] \sigma_c [(\kappa^d)_k^n]$ **7) Cálculo de la función de daño:**Si  $(G^d)_k^n > \text{tolerancia}$ , entonces:  $k=k+1$ , **vuelva a 3)****8) Actualización de las variables:**

$$(\sigma_{ij})^n = (\sigma_{ij})_k^n, \quad d^n = d_k^n, \quad (f_c)^n = (f_c)_k^n, \quad (\kappa^d)^n = (\kappa^d)_k^n$$

**9) Cálculo del operador tangente**  $C_{ijkl}^t$ **10) FIN**

## CAPITULO 5

---

### EJEMPLOS NUMERICOS

#### 5.1 Introducción

El modelo de daño dependiente del tiempo descrito en el capítulo 3 fue implementado en un programa de elementos finitos planos dinámico para problemas con no linealidad física y geométrica. Para ello se incorporó una nueva rutina de comportamiento material en la que se incluyeron los algoritmos desarrollados en el capítulo 4, tanto para la integración de la ecuación constitutiva como para la determinación del operador tangente consistente. Adicionalmente, se introdujo al programa la posibilidad de hacer una integración explícita en el tiempo de la ecuación diferencial de equilibrio dinámico. Para ello se utilizó el método de diferencias finitas centrales, descrito también en el capítulo 4.

Con el objeto de analizar el comportamiento del modelo presentado en el capítulo 3 y los algoritmos desarrollados en el capítulo 4, se realizan distintos ejemplos numéricos utilizando el programa de elementos finitos mencionado. Primero, se simula un ensayo cuasi- estático de deformación controlada, en particular bajo una sollicitación uniaxial de compresión, y se analiza la respuesta para distintos valores de los parámetros. Luego, se realiza el ejemplo dinámico del mismo elemento y el de una barra bajo una acción dinámica. El ejemplo de la barra es clásico para el caso de modelos dependientes del tiempo, ya que facilita el análisis de propagación de una onda en el tiempo. Finalmente, pueden extraerse algunas conclusiones en lo que respecta a la implementación numérica y a la adopción de los parámetros.

#### 5.2 Ejemplo cuasi-estático de deformación controlada

Se considera un elemento plano de cuatro nodos y cuatro puntos de integración, vinculado como se muestra en la figura 5.1. De esta forma se simula el comportamiento de un cuarto de probeta simétrica ensayada, en este caso, a compresión uniaxial.

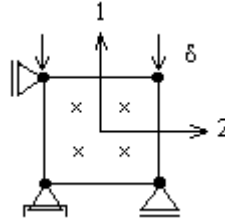


Figura 5. 1 – Ejemplo de compresión uniaxial cuasi- estático de deformación controlada

Las propiedades mecánicas del hormigón utilizado son las siguientes:

Módulo de Elasticidad:  $E=30.000 \text{ MPa}$

Módulo de Poisson:  $\nu=0.2$

Umbral de daño inicial en compresión uniaxial:  $f_{co}=22 \text{ MPa}$

Como punto de partida para el análisis, se adopta  $N=1$  y  $\eta=0.001s$ , y se grafican en la figura 5.2 las curvas tensión- deformación específica para distintas velocidades de deformación, verificándose el aumento de resistencia con la velocidad de deformación.

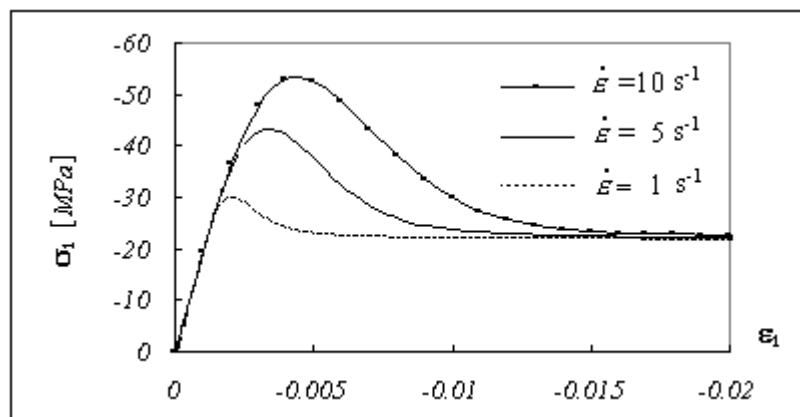


Figura 5. 2 – Curvas tensión  $\sigma_1$  - deformación  $\epsilon_1$  para distintas velocidades de deformación, con  $N=1$  y  $\eta=0.001 s$

A fin de realizar una correcta elección de los parámetros  $N$  y  $\eta$ , es conveniente estudiar el efecto que los mismos tienen en el comportamiento, ya que determinan la

velocidad de daño. El código europeo CEB-FIP'90 da expresiones para el cálculo de la resistencia pico del hormigón según la velocidad de deformación (ec. A.3.1 a A.3.8), y como se presentó en el capítulo 3, pueden utilizarse expresiones análogas para el cálculo de la energía de fractura (ec. A.3.11 a A.3.14 ). En las figuras 5.3 y 5.4, se grafican dichas expresiones, en función del exponente  $\phi$  y de la velocidad de deformación respectivamente, con el objeto de utilizarlas de referencia para la elección de los valores de los parámetros.

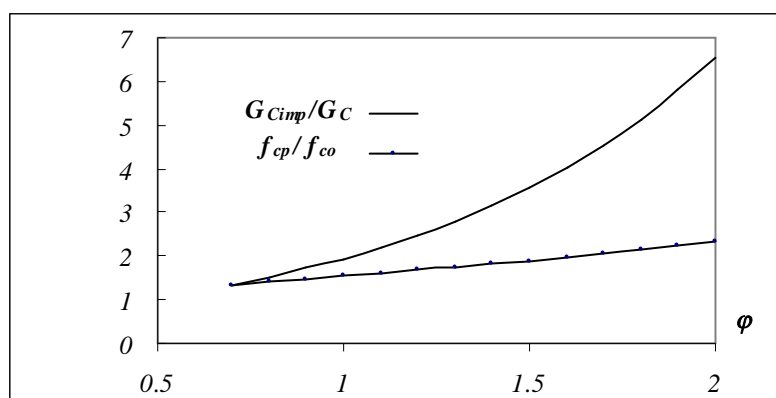


Figura 5. 3 – Influencia del parámetro  $\phi$  en la sobrerresistencia y en la energía de deformación para  $\dot{\epsilon} = 1 s^{-1}$

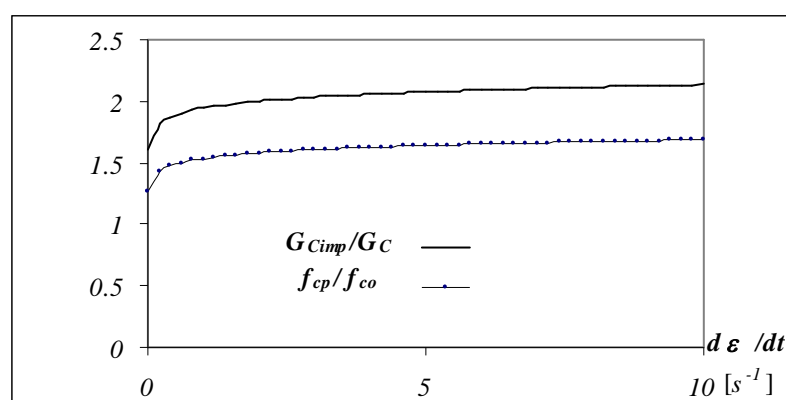


Figura 5. 4 – Variación de la resistencia y de la energía de deformación según la velocidad de deformación para  $\phi=1$

Como se mencionó anteriormente, en la figura 5.2 se muestran curvas tensión –

deformación para distintas velocidades de deformación, con  $N=1$  y  $\eta=0.001$  s. De cada una de dichas curvas se obtiene un valor de resistencia uniaxial pico  $f_{cp}$ , es decir se obtiene un valor de  $f_{cp}$  para cada velocidad de deformación.

En la figura 5.5 se grafica el valor la relación  $f_{cp}/f_{co}$ , en función de la velocidad de deformación, cuyos valores de resistencia uniaxial pico  $f_{cp}$ , se obtienen de los mismos ejemplos de compresión cuasi-estática antes realizados, pero considerando distintos valores del parámetro  $N$ . En la figura 5.5 se puede observar el aumento de la resistencia pico del hormigón con la velocidad de deformación. Para valores de  $N$  mayores que uno, y para velocidades de deformación mayores a  $6 \text{ s}^{-1}$ , la resistencia resultante es prácticamente constante y el doble de la resistencia original.

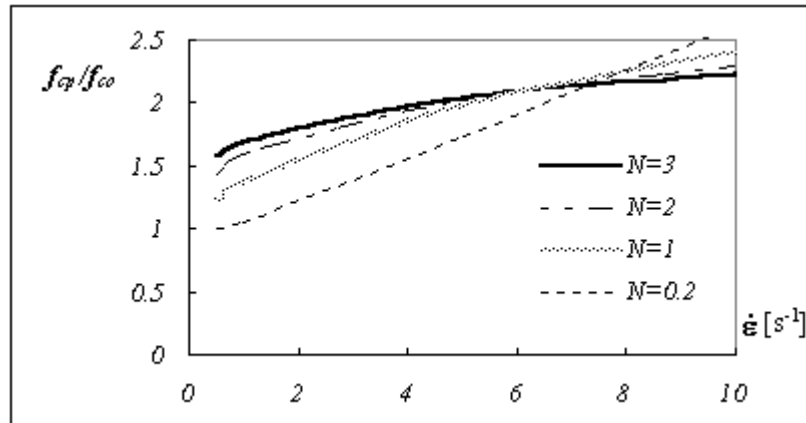


Figura 5. 5 – Relación entre la resistencia pico y el umbral inicial,  $f_{cp}/f_{co}$ , en función de la velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}$ , para  $\eta=0.001$  s y distintos valores de  $N$

En forma análoga, en la figura 5.6 se representa la relación  $f_{cp}/f_{co}$  pero para distintos valores del parámetro  $\eta$ . Valores altos de dicho parámetro llevan a un gran incremento de la resistencia con la velocidad de deformación. Sin embargo, para valores bajos de  $\eta$  del orden de  $0.001$  s, y velocidades de deformación mayores a  $2 \text{ s}^{-1}$ , la relación de resistencias  $f_{cp}/f_{co}$  tiende a 1.7. El incremento de resistencia es mayor cuanto mayor sea el valor de  $\eta$ , eso se debe a la disminución de la velocidad de daño (ec. 3.30). Es decir, el comportamiento se aleja del correspondiente al modelo de daño independiente del tiempo y se acerca al elástico, debido al retardo en la degradación del material.

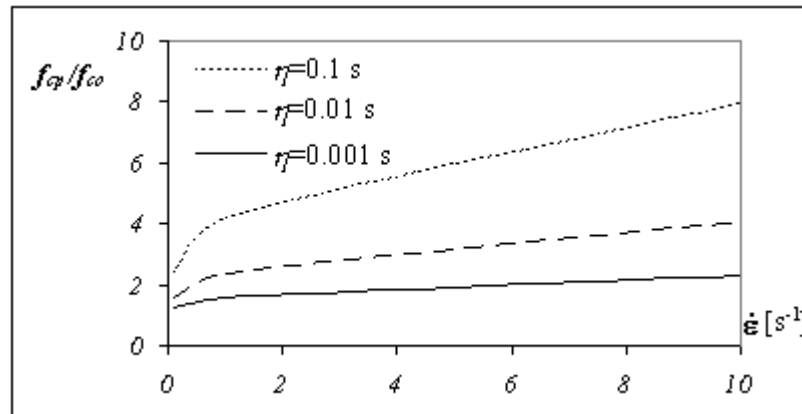


Figura 5. 6 - Relación entre la resistencia pico y el umbral inicial,  $f_{cp}/f_{co}$  en función de la velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}$ , para distintos valores de  $\eta$  y  $N=2$

### 5.3 Ejemplo dinámico

En este punto se analiza la respuesta dinámica, sin amortiguamiento, del elemento del ejemplo anterior. Se utiliza el método explícito de integración descrito en el capítulo 4 con  $\Delta t=10^{-7}$  s. El elemento es sometido a fuerzas dinámicas  $P$  que varían en el tiempo como se ilustra en la figura 5.7. En las figuras 5.8 y 5.9 se muestra la variación de la variable interna de daño  $d$  y de la tensión en el tiempo, respectivamente, para distintos valores de  $\eta$  y  $N$ .

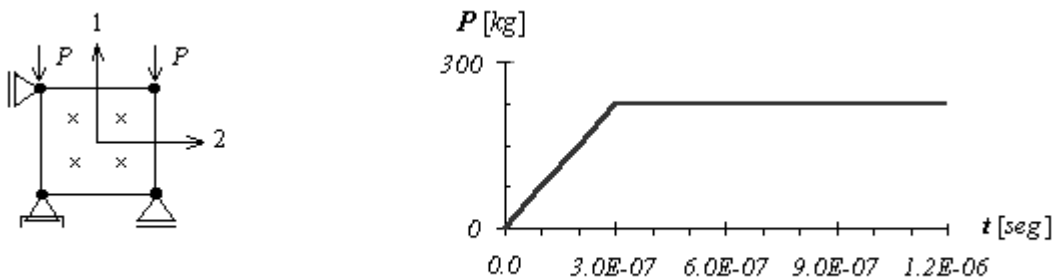


Figura 5. 7 – Ejemplo dinámico de compresión uniaxial, con  $\Delta t=1.E-07$  s



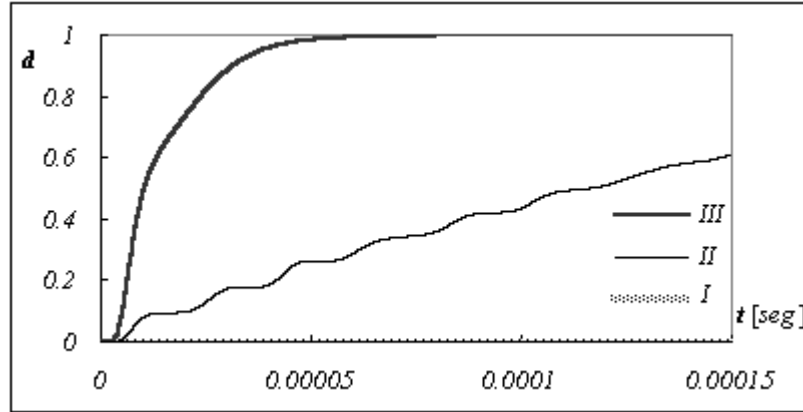


Figura 5. 8 – Evolución de la variable interna de daño  $d$  en el tiempo  $t$ , para distintos valores de  $\eta$  y  $N$ , (I:  $\eta=0.1$  s y  $N=1$ , II:  $\eta=0.001$  s y  $N=2$ , III:  $\eta=0.0001$  s y  $N=2$ )

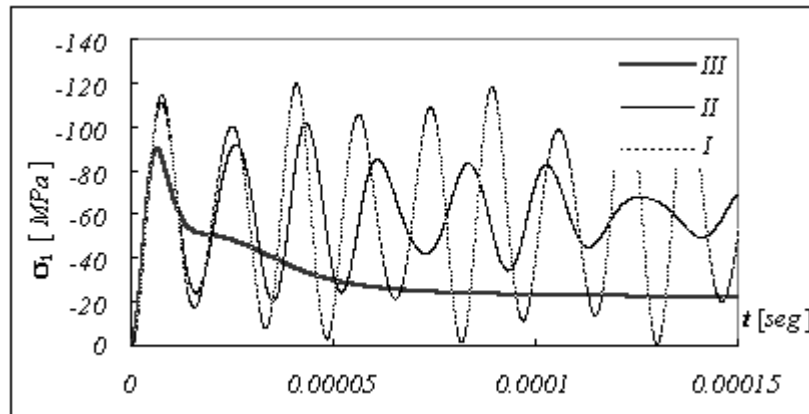


Figura 5. 9–Evolución de la tensión  $\sigma_1$  en el tiempo  $t$  para distintos valores de  $\eta$  y  $N$  (I:  $\eta=0.1$  s y  $N=1$ , II:  $\eta=0.001$  s y  $N=2$ , III:  $\eta=0.0001$  s y  $N=2$ )

El ensayo I, donde  $\eta=0.1$  s y  $N=1$ , coincide con el comportamiento de un material elástico, ya que la variable de daño resulta casi nula y la tensión oscila como en un material elástico lineal.

La adopción de menores valores de  $\eta$ , ensayos II y III, aumenta la velocidad de daño del material, disminuyendo consecuentemente el valor de las tensiones. Es importante destacar que, para el caso III con  $\eta=0.0001$  s y  $N=2$ , el efecto oscilatorio resulta prácticamente despreciable y se observa el daño gradual que va sufriendo el material a medida que pasa el tiempo y la pérdida de capacidad resistente.

Con el objeto de verificar los resultados obtenidos mediante el método explícito de

integración, en la figura 5.10, se grafica la evolución de la tensión para el caso elástico resuelto mediante un método implícito. Se observa que los valores son prácticamente coincidentes con los de la figura 5.9 para el caso de  $\eta=0.1$  s y  $N=1$ , el cual coincide a su vez con la respuesta elástica.

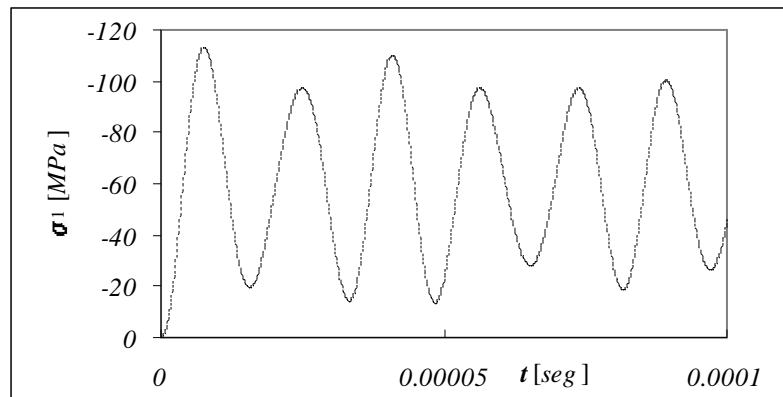


Figura 5. 10 – Evolución de la tensión  $\sigma_1$  en el tiempo  $t$  para el caso elástico.  
Resolución implícita

#### 5.4 Ejemplo de una barra empotrada-libre, bajo la acción de una carga de tipo impulsiva

En este ejemplo se plantea el problema uniaxial de una barra sometida a tensiones de tracción, ver fig.5.11 . La integración en el tiempo de las ecuaciones de campo se realiza mediante el esquema de Newmark ( $\alpha=0.25$ ,  $\delta=0.5$ ).

Se considera la barra fija en un extremo y sometida en el extremo opuesto a una carga dinámica que varía en el tiempo como se muestra en la figura 5.11 . Se resuelve el problema como estado plano de tensiones. Se utiliza el modelo constitutivo propuesto, con una curva de endurecimiento que presenta ablandamiento en la etapa posterior al pico, y se estudia su comportamiento en lo que respecta a la propagación de onda a lo largo de la barra.

Se discretiza la barra en 5, 10 y 20 elementos finitos de 8 nodos y 2x2 puntos de integración.

El escalón de carga se define como  $P_o=0.75(Af_t)$ , donde  $A$  es el área de la barra y  $f_t$

la resistencia a tracción del hormigón en un ensayo cuasi-estático (ver fig. 5.11)

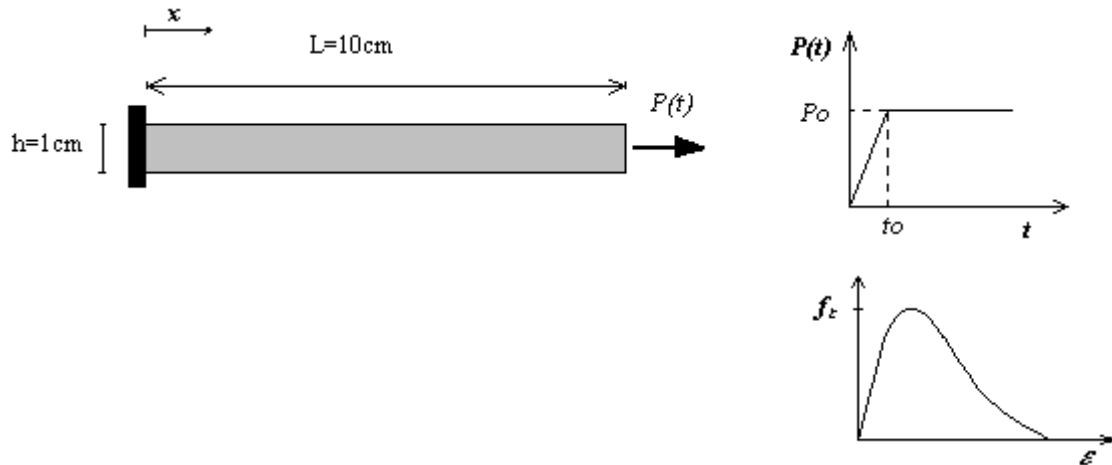


Figura 5. 11 - Barra sometida a carga impulsiva en un extremo

En la figura 5.12 se grafica la deformación específica a lo largo de la barra, en  $t=3t_0$ , para mallas de 5, 10 y 20 elementos. Cuando la onda llega al extremo fijo de la barra, la misma rebota duplicando el valor de la acción, y el material entra en la etapa de ablandamiento posterior al pico. Se observa que, una vez que retorna la onda, los resultados obtenidos con las distintas discretizaciones resultan similares, ya que las deformaciones se localizan en un ancho de banda independiente del tamaño del elemento.

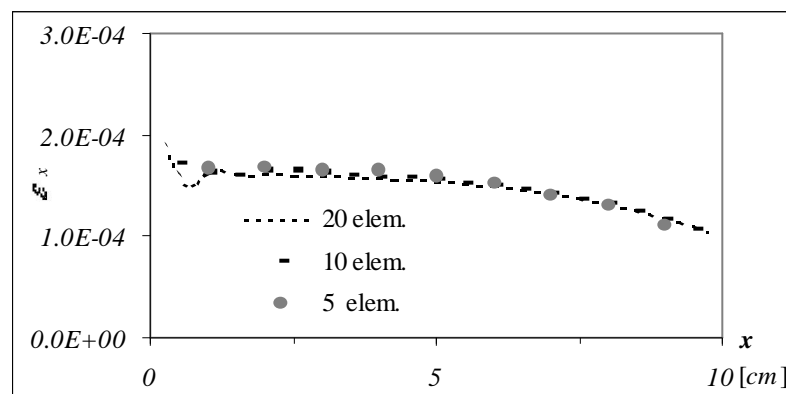


Figura 5. 12 - Deformación  $\epsilon_x$  a lo largo de la barra para distintas mallas en el tiempo  $t=3t_0$  ( $t_0=5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  y  $\eta=0.1 \text{ s}$ )

En las figuras 5.13, 5.14 y 5.15 se representa la evolución de la deformación a lo largo de la barra de 5 elementos con  $\eta$  igual a  $0.001s$ ,  $0.0001s$  y  $0.00001s$  respectivamente. En todos los casos se considera  $N=1$ ,  $t_o=5.E-05$  y el comportamiento en los tiempos  $t_n=nt_o$ , con  $n$  de 0 a 4.

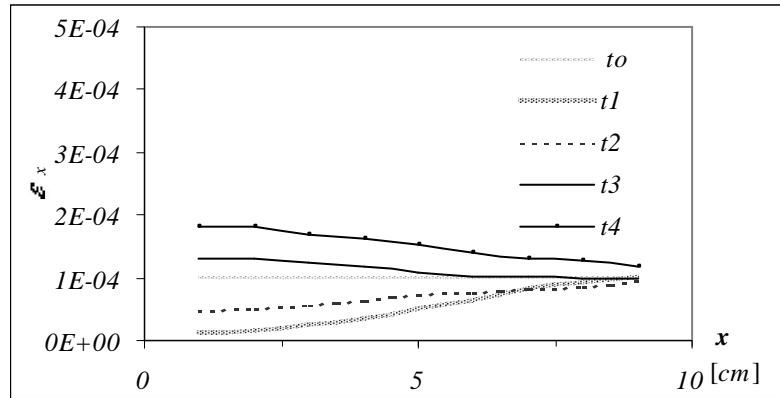


Figura 5. 13 - Deformación  $\epsilon_x$  a lo largo de la barra en distintos instantes de tiempo, con  $\eta= 0.001 s$ , 5 elem. y  $t_o=5.E-05 s$

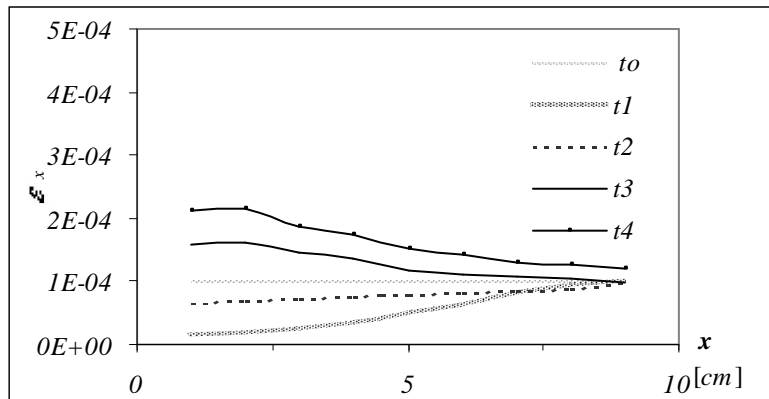


Figura 5. 14 - Deformación  $\epsilon_x$  a lo largo de la barra en distintos instantes de tiempo, con  $\eta= 0.0001 s$ , 5 elem. y  $t_o=5.E-05 s$

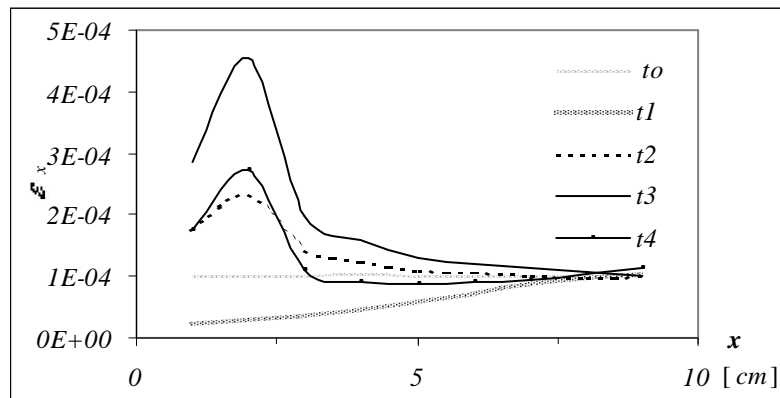


Figura 5. 15 - Deformación  $\varepsilon_x$  a lo largo de la barra en distintos instantes de tiempo, con  $\eta = 0.00001$  s, 5 elem. y  $t_o = 5.E-05$  s

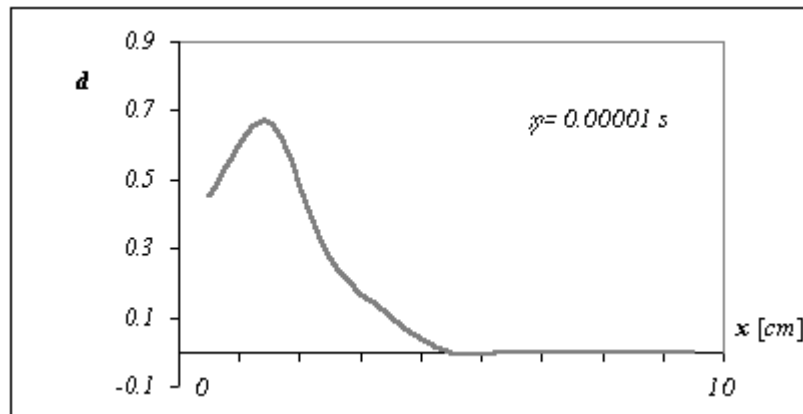


Figura 5. 16 - Evolución de la variable de daño  $d$  a lo largo de la barra para  $\eta = 0.00001$  s, 5 elem.,  $t_o = 5.E-05$  s y  $t = 6.5E-04$  s

La variable interna de daño, evoluciona en mayor medida en la zona cercana al extremo fijo de la barra y para  $t_o = 5.0E-05$  N=1 y  $\eta = 0.00001$  s, en  $t = 6.5E-04$  s toma los valores observados en la figura 5.16.

Es importante hacer notar, que cuanto menor sea la velocidad de daño mayor es la resistencia obtenida y menor la deformación específica, lo cual ocurre bajo altas velocidades de deformación y depende de cómo hayan sido elegidos los parámetros materiales.

## 5.5 Comentarios finales

La realización de distintos ensayos numéricos, permite verificar la capacidad del

modelo para simular el comportamiento del hormigón bajo acciones de gran magnitud y muy corta duración.

En este capítulo se analiza primeramente, un ensayo cuasi- estático de deformación controlada considerando distintas velocidades de deformación. La sobrerresistencia del hormigón existente bajo velocidades de deformación mayores de  $10^{-1} \text{ s}^{-1}$ , se puede representar satisfactoriamente. La velocidad de daño depende de la sobretensión resultante y de los parámetros  $N$  y  $\eta$  que ajustan el modelo.

La expresión utilizada para la energía de deformación y la resistencia del hormigón en función de la velocidad de deformación, planteada por el Código Europeo CEB-FIP90, permite estimar la elección de los parámetros del modelo que mejor ajustan al comportamiento del material. Los resultados obtenidos se aproximan satisfactoriamente a los ensayos experimentales realizados por Toutlemonde et al. (1995), figura 1.4.

Las acciones de origen explosivo, constituyen cargas de muy corta duración y gran magnitud, con lo cual pueden requerir del uso de métodos explícitos de integración de la ecuación de movimiento. Debido a ello es que se implementa, en el programa de elementos finitos utilizado, el método explícito expuesto en el capítulo anterior y se analiza el comportamiento del modelo para distintos valores de sus parámetros. Se verifica que los resultados coinciden con el método implícito de integración si los intervalos de tiempo son lo suficientemente pequeños.

Finalmente, mediante el análisis de la propagación de onda producida por una carga dinámica actuante en el extremo de una barra empotrada, se verifica que la resolución de la ecuación de movimiento se mantiene bien condicionada. Los resultados no dependen de la densificación de la malla. Sin embargo, la adopción de los parámetros del modelo modifican la evolución de las deformaciones y de la variable interna de daño.

## CAPITULO 6

---

### CONCLUSIONES

#### 6.1 Conclusiones

En esta tesis se propone e implementa un *modelo de daño dependiente de la velocidad de deformación, con una evolución del daño del tipo Perzyna*. El mismo permite simular la sobrerresistencia presente en el hormigón tanto en tracción como en compresión, la degradación del módulo elástico una vez comenzada la fisuración, y la modificación de la energía de fractura según la velocidad de deformación.

Del desarrollo de la tesis se pueden extraer las siguientes conclusiones:

##### *a) Modelos existentes para simular la dependencia de la velocidad de deformación*

- Existen distintos modelos de plasticidad, de viscoplasticidad y de daño para simular el comportamiento del hormigón bajo la acción de cargas dinámicas con altas velocidades de deformación. Sin embargo, los modelos constitutivos basados en la mecánica del daño son los más adecuados para simular la respuesta frente a este tipo de acciones. La resolución numérica de los mismos resulta significativamente más simple que la correspondiente a otros modelos.

##### *b) Modelo constitutivo propuesto*

- El modelo de daño escalar independiente del tiempo, utilizado como punto de partida, describe satisfactoriamente la degradación de la rigidez elástica del hormigón debido a la fisuración en problemas estáticos. Por otro lado, el mismo ha sido extendido para simular plasticidad acoplada con daño en materiales compuestos con anisotropía inicial e inducida.
- La dependencia de la velocidad de deformación se incorpora al mismo a través de una regla de evolución de la variable interna de daño de tipo viscosa, análoga a la ley de

evolución de la deformación viscoplástica de Perzyna.

- Esta regla de evolución del daño reemplaza a la condición de consistencia de daño del modelo original. La degradación elástica se obtiene una vez superada la tensión umbral de daño, ya que la variable de daño evoluciona cuando la función de daño toma valores positivos. Sin embargo, se pueden obtener tensiones por encima de la superficie de daño para ejemplos cuasi-estáticos.
- De esta manera, se puede simular un comportamiento dependiente de la velocidad de deformación, en particular, se obtiene la sobrerresistencia que presenta el hormigón bajo altas velocidades de deformación. La velocidad de daño resulta menor cuanto mayor es la sobrerresistencia.
- Se define la energía de deformación como una función dependiente de la velocidad de deformación.
- Ajustando adecuadamente los parámetros intervinientes, el modelo puede reproducir, como casos extremos, comportamientos elásticos o de daño independientes del tiempo.

*c) Implementación numérica del modelo propuesto*

- La resolución numérica resulta simple y rápida, lo cual es particularmente conveniente para cargas explosivas que requieren un gran número de intervalos pequeños de tiempo.
- La integración de la ecuación constitutiva se realiza mediante un algoritmo tipo *full Euler backward*, basado en la corrección iterativa de un único residuo en términos de la variable de daño. Ello representa una ventaja importante frente al tratamiento numérico de otros modelos, en particular, el de los modelos viscoplásticos.
- El operador tangente consistente puede ser deducido a partir de un sistema de ecuaciones implícitas dependientes de la deformación específica. El mismo coincide con el operador tangente secante (elástico degradado) cuando  $\Delta t/\eta$  tiende a cero y con el de daño independiente del tiempo cuando  $\Delta t/\eta$  tiende a infinito.

La realización de distintos ejemplos numéricos, permite verificar la capacidad del modelo para simular el comportamiento del hormigón bajo acciones de gran magnitud y



muy corta duración. De los resultados de los mismos se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- El modelo permite simular satisfactoriamente la sobrerresistencia del hormigón existente bajo velocidades de deformación del orden de  $10^{-1}$  a  $10 \text{ s}^{-1}$ .
- La velocidad de daño depende de la sobretensión resultante y de los parámetros  $N$  y  $\eta$  que ajustan el modelo.
- Las expresiones planteadas por el Código Europeo CEB-FIP' 90, para el cálculo de la energía de deformación y de la resistencia del hormigón en función de la velocidad de deformación, permiten estimar los parámetros del modelo. Los resultados obtenidos se aproximan satisfactoriamente a los obtenidos experimentalmente por otros autores.
- El análisis de la propagación de onda, en una barra empotrada en un extremo y sometida en el otro extremo a la acción de una carga dinámica, permite verificar que la ecuación de movimiento se mantiene bien condicionada. Los resultados no dependen de la densificación de la malla. Sin embargo, los valores de los parámetros del modelo adoptados modifican la evolución de las deformaciones y de la variable interna de daño.

## 6.2 Líneas futuras de investigación

En primer lugar, sería importante verificar el modelo desarrollado realizando comparaciones con resultados experimentales de estructuras de hormigón sometidas a cargas explosivas. Dichas comparaciones no pudieron ser hechas en esta tesis porque requieren la implementación del modelo desarrollado en un programa de elementos finitos dinámico explícito 3D.

El modelo desarrollado es simple ya que no tiene en cuenta las deformaciones permanentes ni la anisotropía. Sería importante extender la formulación desarrollada para incorporar la dependencia de la velocidad de deformación al caso de plasticidad acoplada con daño y anisotropía inicial e inducida. Ello ampliaría las posibilidades de aplicación del modelo a otros materiales estructurales.

El trabajo realizado abarca sólo la respuesta material ante una acción dinámica simplificada. Debe hacerse notar que la acción de un explosivo sobre una estructura es bastante compleja, no sólo en lo referente a la propagación de la onda en un medio fluído, como el aire, sino a la interacción entre el medio y la estructura. Es importante remarcar, finalmente, la importancia de continuar en el estudio del fenómeno en forma integral.

## REFERENCIAS

- AUTORIDAD REGULATORIA NUCLEAR (1998). “Efectos de Explosiones y Acciones Mitigantes Aplicables a Estructuras, Sistemas y Componentes de Instalaciones Civiles”, Reporte del curso dictado por los Prof. J. Stevenson y C. Prato, Buenos Aires, Agosto de 1998.
- BAKER WE, COX PA, WESTINE PS, KULESZ JJ, STREHLOW RA (1983). “Explosion hazards and evaluation”. Elsevier, Amsterdam.
- BARBAT, A.H. (1982). “Cálculo Sísmico de Estructuras”. Editores Técnicos Asociados S.A. Barcelona. España.
- BATHE, K. J., (1982). “Finite Element Procedures in Engineering Analysis”. Prentice-Hall. New Jersey.
- BIGGS, J.M. (1964). “Introduction to Structural Dynamics”. Mac Graw Hill Book Company. New York.
- BISCHOFF, P. H. AND PERRY, S. H., (1991). “Compressive Behavior of Concrete a high Strain Rates”. *Mat and Struc*, 24, 425-450.
- CAR E, OLLER S., OÑATE E. “Matrices tangentes algorítmicas en el problema elastoplástico”. Universitat Politècnica de Catalunya, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
- CAROSIO A. N. (1997). “Análisis Teórico-Computacional del Comportamiento Tiempo Dependiente de Materiales”. Tesis presentada como requerimiento parcial para la obtención del grado académico de Magister en Ingeniería Estructural, Universidad Nacional de Tucumán.
- CLOUGH R.W.,PENZIEN J. (1975). “Dynamics of Structures”. Mac Graw Hill Book Company, Singapore.
- COMI. C. and PEREGO (1997). “On visco-damage models for concrete at high strain rates”. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*. D.R.J. Owen, Oñate

- and E. Hinton (Eds.) CIMNE, Barcelona.
- CRAWFORD J. E., MALVAR L. J., WESEVICH J. W., VALANCIUS J. , REYNOLDS A. D. (1997). "Retrofit of Reinforced Concrete Structures to Resist Blast". *ACI Structural Journal*, pp 371-377.
- CRISFIELD, M.A., (1991). "Non Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures". John Wiley and Sons Ltd., England.
- DE BORST R. , SLUYS L.J., H.-B- MÜHLHAUS and PAMIN J. (1993). "Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation". *Engineering Computations*, Vol. 10, 99-121.
- DUBÉ J. F., PIJUDIER CABOT, G. (1996). "Rate Dependent Damage Model for Concrete in Dynamics". *Journal of the Engineering Mechanics, ASCE*, Vol 122, No. 10, pp. 939-947.
- ETSE G. (1992). "Theoretische un numerische Untersuchung zum diffusen und lokalisierten Versagen in Beton". Zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH).
- GEERS M.G.D., BREKELMANS W.A.M.and DE BORST R. (1994). "Viscous regularization of strain-localization for damaging materials". "DIANA Computational Mechanics'94" G.M.Kusters and M.A.N. Hendriks (eds.),1994 Kluwer Academic Publishers. Printed in Netherlands. Pag. 127-138.
- GLASSTONE S. and DOLAN P.J. (1997). "The Effects of Nuclear Weapons". United States Departments of Defence and Energy (Third Edition).
- HARTMANN S., LÜHRS G. and HAUPT P. (1997) "An Efficient Stress Algorithm with Applications in Viscoplasticity and Plasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, 991-1013.
- HILL R., (1967). "The Mathematical Theory of Plasticity". Oxford University Press, Ely House, London.
- HILL R., (1958). "A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids", *J. of Mech. And Physics of Solids*, Vol. 6, S. 236-249.

- IBRAHIMBEGOVIC A., GHARZEDDINE F. and CHORFI L. (1998). "Classical Plasticity and viscoplasticity models reformulated: Theoretical basis and numerical implementation". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, 1499-1535.
- JU, J.W., (1989). "On Energy-Based Coupled Elastoplastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspects". *Int. Jour. Solids & Structures*, 25(7), 803-833.
- KACHANOV L. M. (1958). "Time of the rupture process under creep conditions". *IVZ Akad Nauk - S.S.R. - Otd Tech Nauk* 8.
- KENEDY R.P. , BLEJWAS T.E. , BENETT David E. (1983). "Capacity of Nuclear Power Plant Structures to Resist Blast Loadings". Prepared for U.S. Nuclear Regulatory Commission, pp 1-48.
- LEMAITRE J. and CHABOCHE J.L. (1978), "Aspects Phenoménologique de la Rupture par Endommagement". *Journal of Mecanique Théorique et Appliquée*, pp.317-365.
- LUBLINER, J. (1990). "Plasticity Theory, Mc. Millan Publishing". U.S.A.. New York.
- LUCCIONI B.M. (1993). "Formulación de un Modelo Constitutivo para Materiales Ortótropos". Tesis presentada como requerimiento parcial para la obtención del grado académico de Doctor en Ingeniería, Universidad Nacional de Tucumán.
- LUCCIONI, B.M (1994). "Manual PLCD2". Universidad Nacional de Tucumán.
- LUCCIONI B., OLLER S., DANESI R. (1996). "Coupled Plastic-Damaged Model". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 129 (1996) 81-89.
- LUCCIONI, B., MARTIN, P.E. (1997). "Modelo Elastoplástico para Materiales Ortótropos". *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Diseño y Cálculo en Ingeniería*, Vol. 13, 4, 603-614.
- MALVERN L. E., (1969). Introduction to the Mechanics of Continuous Medium, Prentice Hall, USA.
- MALVAR L. J., CRAWFORD J. E., WESEVICH J. W., DON SIMONS (1997). "A Plasticity Concrete Material Model for DYNA3D". *International Journal Impact Engineering*, Vol. 19, Nos. 9-10, pp. 847-873,1997.
- NEEDLEMANN, A., (1987). "Material Dependence and Mesh Sensitivity in Localisation

- Problems". *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 67, 69-86.
- PERZYNA, P., (1966), "Fundamental Problems in Viscoplasticity". *Recent Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, New York, N.Y..
- YI P. , (1991). "Explosionseinwirkungen auf Stahlbetonplatten". Zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH).
- ROSSI P. , TOUTLEMONDE F., (1994). "Effet de vitesse dans le comportement en traction du béton, Description des mécanismes physiques". *Bull. Liaison Laboratoire Central des Ponts et Chaussées*, Paris, France. 193-Sept.-Oct. 1994- Réf. 3844.
- RIZZI E., CAROL I., WILLAM K.. "Localization Analysis of Elastic Degradation with Application to Scalar Damage". *Journal of the Engineering Mechanics*, ASCE, Vol 121, No. 4, April 1995. Paper No. 7665.
- RIZZI E., MAIER G., WILLAM K.E. "On failure indicators in multi-dissipative materials", *Int. Jour. Solids Structures*. 23(7), 841-869.
- SERCOMBE J., F.-ULM J (1997). "Viscous Hardening Plasticity for Concrete in High Rate Dynamics". *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*. D.R.J. Owen, Oñate and E. Hinton (Eds.) CIMNE, Barcelona.
- SERCOMBE J., F.-ULM J. y TOUTLEMONDE (1998). "Viscous Hardening Plasticity for Concrete in High Rate Dynamics". *Journal of the Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 124, No. 9, September 1998, pp. 1050-1057.
- SIMO, J.C., and JU, J. W., (1987a). "Strain and Stress Based Continuum Damage Models. Part I: Formulation". *Int. Jour. Solids & Structures*, 23(7), 821-840.
- SIMO, J.C., and JU, J. W., (1987b). "Strain and Stress Based Continuum Damage Models. Part II: Computational Aspects". *Int. Jour. Solids & Structures*, 23(7), 841-869.
- SLUYS, L. J., (1992). "Wave Propagation, Localisation and dispersion in strain softening solids". Doctoral Dissertation, Delft Univ. Of Technology, Delft, The Netherlands
- SMITH P.D., HETHERINGTON J.G. (1994). "Blast and Ballistic Loading of Structures". Butterworth-Heinemann Ltd..
- STEVENSON J. D. (1993). "Impact of Extreme Load Requirements and Quality Assurance

- on Nuclear Power Plant Costs”. *Proceedings of the SMIRT 12 Post Conference Seminar No 16* Organised by the International Atomic Energy Agency, pp 649-658.
- STEVENSON J. D. (1995). “Assesment of NPP Against the Hazard Due to a “Malevolent Vehicle”. *Proceedings of the Regional Training Course on Assesment and Upgrading of NPP in Relation to External Hazards*. Organised by the International Atomic Energy Agency.
- TOUTLEMONDE F., PIERRE R. (1995). “ Major Parameters Governing Concrete Dynamic Behaviour and Dynamic Failure of Concrete Structures”. *DYMAT Journal*, Vol. 2, nº 1, March, 1995, 69-77.
- TOUTLEMONDE F., BOULAY, SERCOMBE J., LE MAOU F., RENWEZ S., ADELIN R. (1998). “Characterization of reactive powder concrete in direct tension at medium to high loading rates”. CONSEC’98 Trou 21-24 jun..
- WILLAM K. and ETSE G.. “Failure assesment of the extended Leon Model for plane concrete”.
- WINNICKI A., PEARCE C.J. & BICANIC N.(1998). “Viscoplastic Hoffman model for concrete under dynamic loading”. *Computational Modelling of Concrete Structures*, Balkema, Rotterdam, pag. 685-695.
- ZIENKIEWICZ O. C. (1980). “El Método de los Elementos Finitos”, Ed. Reverté, Barcelona, España.

## APENDICE

---

### ANALISIS DE FALLA

#### A.1 Introducción

Una vez que el hormigón alcanza su resistencia máxima, puede presentar una disminución gradual de la tensión ante un aumento de la deformación. Dicho fenómeno es conocido como relajación, y se observa bajo un ensayo de deformación controlada como el que se esquematiza en la figura A.1.

Por ejemplo, supóngase un ensayo de una probeta hormigón a compresión uniaxial con deformación controlada. En una primera etapa, la carga crece linealmente con el incremento de desplazamiento aplicado. Cuando comienza la fisuración en la interfase agregado- mortero, se observa una disminución del aumento de la carga con respecto al aumento de la deformación. A mayores niveles de carga ocurre la fisuración del mortero. La carga máxima en el hormigón se alcanza con el desarrollo de microfisuras debidas a la interacción entre ambos tipos de fisuras. A partir de allí, todo incremento de la deformación ocurre para niveles decrecientes de la carga aplicada. Por otro lado, la microfisuración lleva a una reducción del área efectiva disponible para transmitir dicha fuerza.

A nivel constitutivo, pueden distinguirse dos modos de fractura, uno asociado con una falla distribuida o difusa, y otro con una falla discontinua, localizada o desarrollada a lo largo de una banda de corte.

Ensayos experimentales han demostrado que la zona de localización de las deformaciones a nivel estructural tiene dimensiones finitas, y que el consumo de energía en la zona de relajación también toma valores finitos.

En este capítulo se describen distintos criterios para determinar la falla del hormigón a nivel constitutivo en ejemplos numéricos, y se los aplica al modelo de daño escalar simple y al modelo de daño dependiente de la velocidad de deformación, desarrollado en el



capítulo 3.

## A.2 Fundamentos teóricos para el análisis de falla

### A.2.1 Condiciones de falla difusa o continua

Cuando comienza el ablandamiento, deja de cumplirse el criterio de estabilidad local (Hill 1958):

$$d^2W = \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} C_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} > 0 \quad \forall \dot{\varepsilon}_{ij} \neq 0 \quad (\text{A.1})$$

Como puede observarse en la ecuación (A.1), según el criterio de Hill, cuando el producto interno del incremento de tensión por el de deformación resulta negativo, se genera inestabilidad a nivel material. Sin embargo, no necesariamente se produce pérdida de la hiperbolicidad, como se explica en el Anexo A.1. En otras palabras, cuando en el camino de deformación de un material el tensor de rigidez tangente se singulariza, para un dado incremento de deformación no nulo, se obtiene lo siguiente:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} = 0 \quad \forall \dot{\varepsilon}_{ij} \neq 0 \quad (\text{A.2})$$

Dicha situación estacionaria de tensiones, puede asociarse con una *bifurcación del equilibrio*.

Desde el punto de vista mecánico, la inestabilidad según Hill correspondiente a  $d^2W = 0$ , puede ocurrir cuando:

$$\det \left[ \mathbf{C}_{sim}^t \right] = 0 \quad (\text{A.3})$$

donde  $\left( \mathbf{C}_{sim}^t \right)_{ijkl} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{C}_{ijkl}^t + \mathbf{C}_{klji}^t \right)$  es el tensor de rigidez tangente simetrizado.

La inestabilidad material puede llevar a una inestabilidad estructural cuando:

$$\delta^2 W = 1/2 \int_V \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} dV < 0 \quad (\text{A.4})$$

es decir, cuando la matriz de rigidez tangente estructural  $\mathbf{K}^T$  deja de estar definida positiva, lo cual se traduce en:

$$\det[\mathbf{C}^t] = 0 \quad (\text{A.5})$$

Como indicadores de las inestabilidades antes mencionadas se utilizan las siguientes relaciones:

$$e_s = \min_{\varepsilon_{ij}} \left\{ \frac{\det[\mathbf{C}_{sim}^t]}{\det[\mathbf{C}^o]} \right\} \quad e = \min_{\varepsilon_{ij}} \left\{ \frac{\det[\mathbf{C}^t]}{\det[\mathbf{C}^o]} \right\} \quad (\text{A.6})$$

donde el indicador  $e_s$  marca un punto de *bifurcación del equilibrio*, mientras que el indicador  $e$  marca un *punto límite* a partir del cual la inestabilidad a nivel material se traduce en una inestabilidad a nivel estructural (Etse 1992).

### A.2.2 Condiciones de falla localizada o discontinua

Si el modelo material incluye ablandamiento y/o no asociatividad, el campo de velocidades continuo  $v_i = \dot{u}_i$  puede transformarse abruptamente en una solución discontinua dada por un campo primario  $(v_1)_i$  y otro bifurcado  $(v_2)_i$ , (Sluys 1992). A través de la superficie característica de normal  $N_i$ , la velocidad de campo es discontinua. Sin embargo la diferencia:  $\|v_i\| = (v_2)_i - (v_1)_i$  es constante a lo largo de dicha superficie.

Bajo la hipótesis de existencia de discontinuidades débiles de segundo orden en el

campo continuo  $v_i$ , a través de la superficie de discontinuidad definida por la normal a  $N_i$  en cada punto, las condiciones de compatibilidad de Maxwell requieren que el salto no-nulo del gradiente de velocidades y de la velocidad de deformación a través de la superficie sean de la forma (Rizzi et al. 1995):

$$\dot{u}_{i,j} = \dot{\gamma} \left( M_i N_j \right) \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\gamma} \frac{1}{2} \left( M_i N_j + M_j N_i \right) \quad (\text{A.7})$$

donde  $M_i$  es el vector unitario que define la dirección de movimiento (dirección de polarización),  $\dot{\gamma} \neq 0$  es la amplitud desconocida del salto,  $u_i = \gamma (x_k N_k - ct) \cdot M_i$  es la perturbación admisible, y  $c$  es la velocidad de fase de propagación en la dirección definida por el vector  $N_k$ .

El planteo de la condición de equilibrio de las tracciones a través de la superficie,  $\left\| \dot{t}_j \right\| = 0$ , bajo la hipótesis de que el estado de carga a ambos lados de la discontinuidad se encuentra en la etapa inelástica, resulta:

$$\dot{t}_j = N_i \dot{\sigma}_{ij} = N_i C_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} = N_i C_{ijkl}^t \left( \dot{\gamma} N_k M_l \right) \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, puede definirse el tensor de localización como:

$$Q_{ik}^t = N_j C_{ijkl}^t N_l \quad (\text{A.9})$$

y para el caso plano:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} \cos(xv) \\ \cos(yv) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\dot{t}_j = N_i \cdot C_{ijkl}^t \cdot \dot{\gamma} \cdot N_k \cdot M_l$$

$$\begin{aligned}
\dot{t}_j &= \dot{\gamma} \left( (N_x \cdot C_{xjxl}^t + N_y \cdot C_{yjxl}^t) N_x + (N_x \cdot C_{xjyl}^t + N_y \cdot C_{yjyl}^t) N_y \right) M_l \\
\dot{t}_j &= \dot{\gamma} \left( C_{xjxl}^t (N_x)^2 + C_{yjxl}^t (N_y N_x) + C_{xjyl}^t (N_y N_x) + C_{yjyl}^t (N_y)^2 \right) M_l \\
\dot{t}_j &= \dot{\gamma} Q_{il}^t M_l
\end{aligned} \tag{A.11}$$

luego, la condición de falla discontinua se expresa:

$$Q_{il}^t M_l = 0 \Rightarrow \det[\mathbf{Q}^t] = 0 \tag{A.12}$$

Otra forma de obtener dicha condición de localización, es reemplazando en la ecuación de onda la expresión de la velocidad de deformación que cumple con las condiciones de compatibilidad de Maxwell, obteniendo:

$$Q_{il}^t M_l = (mc^2) M_i \tag{A.13}$$

donde  $m$  es la densidad de masa y  $c$  la velocidad de onda. La condición de discontinuidad estacionaria se alcanza cuando se anula el menor autovalor  $mc^2$ .

Para el caso de operadores tangentes no simétricos, una condición más fuerte se expresa en término de la energía de localización, es decir de la forma cuadrática:

$$d^2 W_{loc} = \dot{\gamma}^2 M_i Q_{ij}^t M_j = 0 \Rightarrow \det[\mathbf{Q}_{sim}^t] = 0 \tag{A.14}$$

Finalmente los indicadores de localización se definen mediante las expresiones siguientes:

$$q_s = \min_{\dot{\varepsilon}, N} \left\{ \frac{\det[\mathbf{Q}_{sim}^t]}{\det[\mathbf{Q}^o]} \right\} \quad q = \min_{\dot{\varepsilon}, N} \left\{ \frac{\det[\mathbf{Q}^t]}{\det[\mathbf{Q}^o]} \right\} \quad (\text{A.15})$$

donde  $\mathbf{Q}^o$  se determina utilizando en la ec. A.9 el tensor de rigidez elástico.

### A.3 Análisis de falla aplicado al modelo de daño simple y al modelo de daño dependiente de la velocidad de deformación

A continuación se analiza el comportamiento del modelo de daño escalar, desde el punto de vista matemático. El modelo presenta no asociatividad, con no linealidad desarrollada a partir de una tensión umbral de daño, y relajación de tensiones una vez alcanzada la resistencia pico del hormigón. La relajación permite describir la fisuración progresiva que se produce mientras disminuye la capacidad de carga del material a medida que crece la deformación. Primeramente se analiza el origen de la no asociatividad del modelo y luego la ocurrencia de falla difusa y localizada para el caso de daño independiente del tiempo y de daño dependiente de la velocidad de deformación, para el caso de altas velocidades de deformación.

#### A.3.1 Análisis de la no asociatividad del modelo de daño

Como se definió anteriormente:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^s \varepsilon_{kl} = (1-d) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}$$

$$\varepsilon_{kl} = \left( C_{ijkl}^s \right)^{-1} \sigma_{ij} \quad (\text{A.16})$$

Luego, la expresión de la velocidad de deformación resulta:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \left( C_{ijkl}^s \right)^{-1} \dot{\sigma}_{ij} + \left( \dot{C}_{ijkl}^s \right)^{-1} \sigma_{ij} = \dot{\varepsilon}_{kl}^o + \dot{\varepsilon}_{kl}^d \quad (\text{A.17})$$

donde  $(\dot{\varepsilon}_{kl}^o, \dot{\varepsilon}_{kl}^d)$  corresponden al comportamiento elástico y de daño respectivamente.

Desarrollando la expresión de  $(\dot{\varepsilon}_{kl}^d)$  se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^d = \left( \dot{C}_{ijkl}^s \right)^{-1} \sigma_{ij} = \frac{\dot{d}}{1-d} \left( C_{ijkl}^o \right)^{-1} \sigma_{ij} = \frac{\dot{d}}{1-d} \varepsilon_{kl} \quad (\text{A.18})$$

En forma genérica, se puede describir a la velocidad de deformación por daño, a través de una regla de flujo similar a la correspondiente a la deformación plástica de la teoría de plasticidad:

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^d = \dot{\lambda} m_{kl}^d \quad (\text{A.19})$$

$$\left( \dot{C}_{ijkl}^s \right)^{-1} = \dot{\lambda} M_{ijkl} \quad (\text{A.20})$$

donde:  $\dot{\lambda} = \dot{d} \quad (\text{A.21})$

y el flujo de daño resulta:  $m_{kl}^d = \frac{\varepsilon_{kl}}{1-d} \quad (\text{A.22})$

$$M_{ijkl} = \frac{\left( \dot{C}_{ijkl}^s \right)^{-1}}{\dot{d}} \quad (\text{A.23})$$

entonces:

$$m_{kl}^d = M_{ijkl} \sigma_{ij} \quad (\text{A.24})$$

La función umbral de daño,  $G^d$ , depende, en general, del primer invariante del tensor de tensiones  $I_1$ , y del segundo y tercer invariante del tensor de tensiones desviadoras  $J_2$  y  $J_3$

respectivamente.

$$G^d = G^d(\sigma_{ij}, \kappa^d) = G^d(I_1, J_2, J_3, \kappa^d) = \bar{\sigma}(\sigma_{ij}) - f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d) = \bar{\sigma}(I_1, J_2, J_3, \kappa^d) - f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d)$$

Para analizar la asociatividad del modelo se considera la dirección de evolución de la superficie de daño  $n_{ij}^d = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}}$  y la dirección del flujo de daño  $m_{ij}^d = M_{klij} \sigma_{kl}$ . Si para calcular la tensión equivalente  $\bar{\sigma}$  se utiliza alguno de los modelos clásicos de Von Mises, o Mohr Coulomb, por ejemplo, se observa que:

$$n_{ij}^d \neq m_{ij}^d \Rightarrow \text{el flujo es No Asociado}$$

El módulo tangente del modelo de daño independiente del tiempo,  $C_{ijkl}^t$ , se deduce a partir de la condición de consistencia de daño  $\dot{G}^d = 0$ , y es no simétrico. Con respecto al modelo de daño dependiente de la velocidad de deformación propuesto, tiene un módulo tangente consistente  $(C_{imp}^t)_{ijkl}$  que también es no simétrico (ec. 4.60 a 4.62).

### A.3.2 Análisis de falla difusa

Utilizando las ecuaciones (3.23), (4.60) a (4.62) y la (A.6), y llamando  $e$  y  $e_{imp}$  al indicador de falla difusa correspondiente al modelo de daño escalar original y al modelo de daño escalar dependiente de la velocidad de deformación respectivamente, se obtiene:

$$e = \min_{\varepsilon} \left\{ (1-d)^4 \det[\mathbf{D}] \right\} \quad e_{imp} = \min_{\varepsilon} \left\{ (1-d)^4 \det[\mathbf{D}_{imp}] \right\} \quad (\text{A.25})$$

donde

$$\det[\mathbf{D}] = 1 - \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{st}} \sigma_{st}^o}{\frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{mn}} \sigma_{mn}^o} \quad (\text{A.26})$$

y

$$\det[\mathbf{D}_{imp}] = \left( 1 - \sigma_{ij}^o H \frac{\Delta t}{\eta} \frac{1}{f_c} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{-1} \left[ 1 - \frac{\varepsilon_{ij}}{1-d} H \frac{\Delta t}{\eta} \left( \frac{1}{f_c} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ab}} C_{abij}^s - \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2} \frac{\partial f_c}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \right] \quad (\text{A.27})$$

$$H = \left( 1 + \frac{\Delta t}{\eta} \left( \frac{1}{f_c} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}^o + \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2} \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \left[ \frac{r}{g_F^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_C^{*d}} \right] \Psi^o \right) \right)^{-1}$$

$$\sigma_{ij}^o = C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n$$

Los tensores  $\left( D_{imp} \right)_{ijkl}$  y  $D_{ijkl}$ , de las ec A.25 son tales que:

$$\left( C_{imp}^t \right)_{klmn} = (1-d) \left( D_{imp} \right)_{ijkl} C_{ijmn}^o \quad (\text{A.28})$$

$$C_{klmn}^t = (1-d) D_{ijkl} C_{ijmn}^o \quad (\text{A.29})$$

y los determinantes se calculan mediante las siguientes expresiones:

$$\det[\mathbf{C}_{imp}^t] = (1-d)^4 \det[\mathbf{D}_{imp}] \det[\mathbf{C}^o] \quad (\text{A.30})$$



$$\det[\mathbf{C}^t] = (1-d)^4 \det[\mathbf{D}] \det[\mathbf{C}^o] \quad (\text{A.31})$$

#### A.3.2.1 Descripción de los ejemplos numéricos

Con los modelos de daño implementados en el programa de elementos finitos mencionado en el capítulo 5, se realiza un ejemplo numérico en el que se determina el indicador de falla difusa  $e$ , y el trabajo de segundo orden  $d^2W = \Delta\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}$ . En el ejemplo resuelto mediante el modelo dependiente de la velocidad de deformación, se utiliza una velocidad de deformación de 0.1 1/s. Las características del hormigón se detallan a continuación:

*Características del hormigón:*

Módulo de Elasticidad:  $E=30.000 \text{ MPa}$

Módulo de Poisson:  $\nu=0,2$

Tensión umbral de daño:  $f_{co}=22 \text{ MPa}$

Energía de deformación:  $G_f=0.05 \text{ N.mm/mm}^2$

*Características del ejemplo numérico:*

Se analiza un ejemplo cuasi-estático de deformación controlada, sobre un elemento plano de cuatro nodos y cuatro puntos de integración, vinculado de modo que la compresión resulte uniaxial, como se muestra en la siguiente figura:

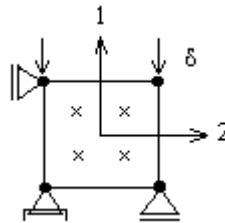


Figura A.1 – Ejemplo de compresión uniaxial cuasi-estático de deformación controlada

### A.3.2.2 Modelo de daño escalar

Los resultados obtenidos utilizando el modelo de daño escalar original se muestran en las figuras A.2 y A.3.

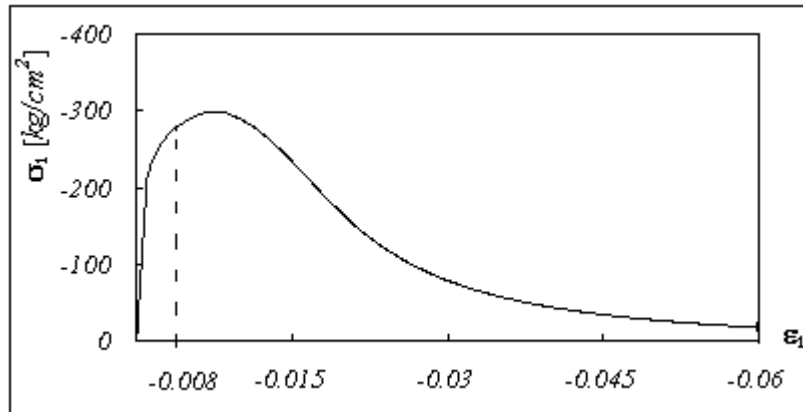


Figura A. 2 –Variación de la tensión en función de la deformación axial

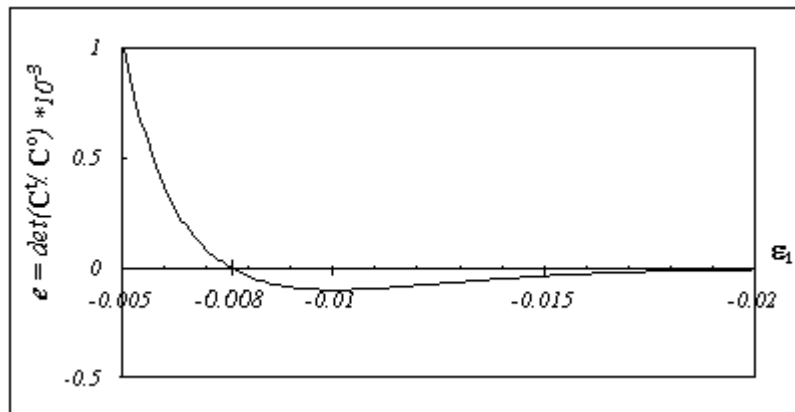


Figura A. 3 – Variación del indicador de falla difusa  $e$  en función de la deformación axial  $\epsilon_1$  para el modelo de daño escalar

Puede observarse el indicador de falla difusa toma valores negativos para una deformación específica de  $-0.008$ , en correspondencia se observa un punto de inestabilidad en la etapa de endurecimiento antes de alcanzar el pico.

### A.3.2.3 Modelo de daño escalar dependiente de la velocidad de deformación

Si se analiza el comportamiento del mismo elemento, pero utilizando el modelo de daño escalar dependiente de la velocidad de deformación propuesto, se obtienen las curvas de tensión en función de la deformación específica A.4 y A.7. En dichas curvas se han tomado distintos valores de los parámetros  $N$  y  $\eta$  que definen el modelo, con el objeto de

estudiar la influencia de los mismos en los indicadores de falla difusa.

En las figuras A.5 y A.8 se verifica el cambio de signo en el trabajo de segundo orden al comenzar la etapa de ablandamiento, es decir una vez alcanzado el valor pico de tensiones. Con respecto al valor del indicador  $e_{imp}$  de las figuras A.6 y A.9, a diferencia del modelo de daño escalar original, se observa que toma siempre valores positivos.

#### a) Análisis de la influencia del parámetro $N$

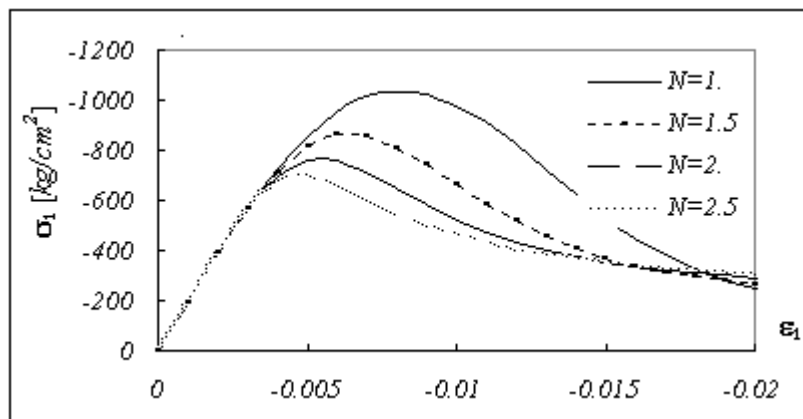


Figura A. 4 – Tensión  $\sigma_I$  en función de la deformación  $\epsilon_I$

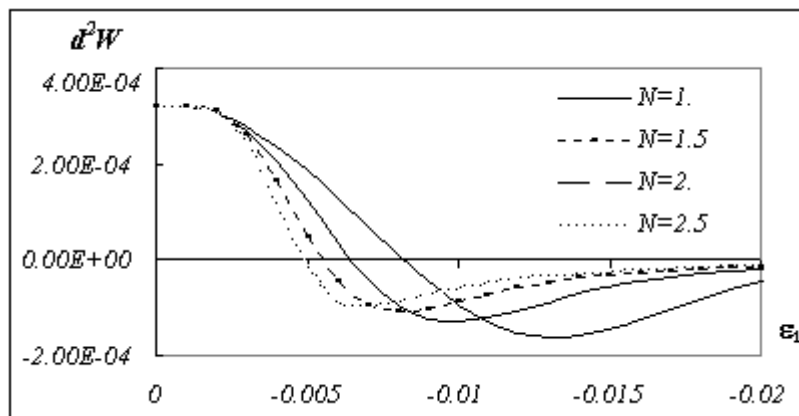


Figura A. 5 – Trabajo de segundo orden  $d^2W$  en función de la deformación  $\epsilon_I$

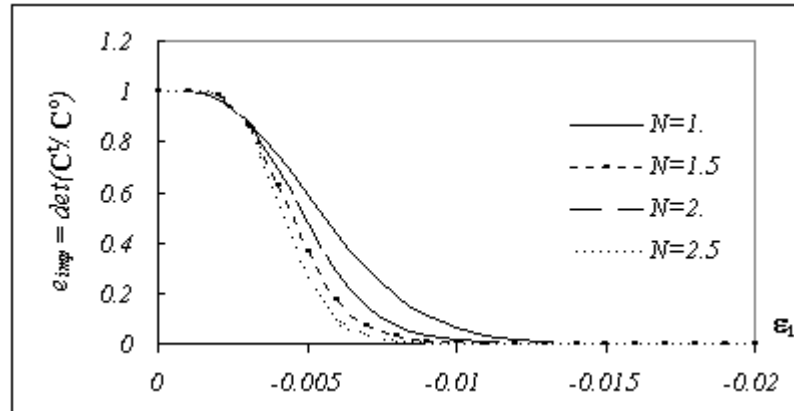


Figura A. 6 - Indicador de falla difusa  $e_{imp}$  en función de la deformación  $\varepsilon_I$

b) Análisis de la influencia del parámetro  $\eta$

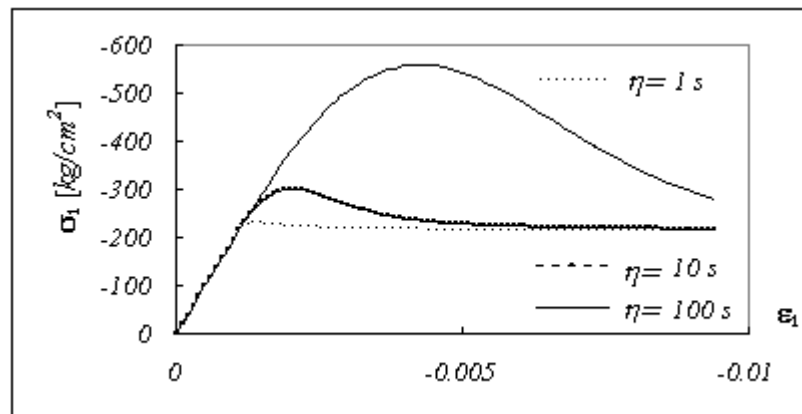


Figura A. 7 - Tensión  $\sigma_I$  en función de la deformación  $\varepsilon_I$

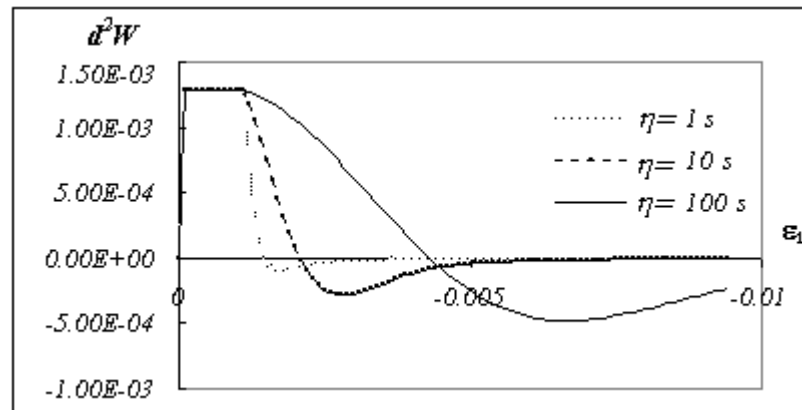


Figura A. 8 - Trabajo de segundo orden  $d^2W$  en función de la deformación  $\varepsilon_I$

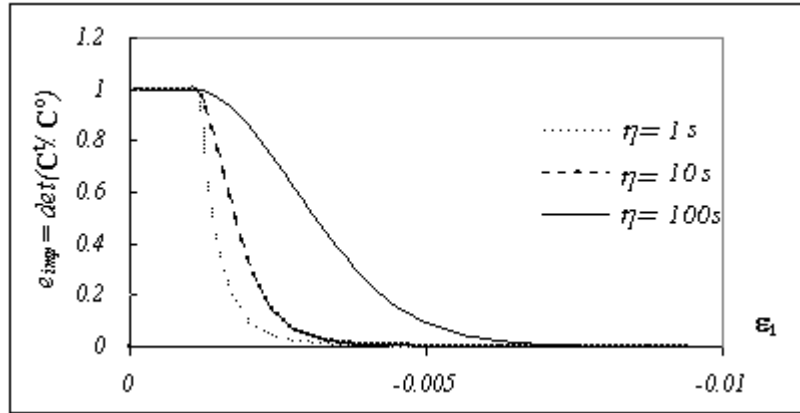


Figura A. 9 - Indicador de falla difusa  $e_{imp}$  en función de la deformación  $\varepsilon_I$

Las curvas A.4 a A.9, permiten analizar la influencia de los parámetros en la respuesta. El aumento del valor de  $N$  incrementa la velocidad de daño, con lo cual disminuye tanto el valor de la tensión pico como la deformación en el pico, y los indicadores de falla disminuyen más rápidamente. En forma análoga, la disminución del valor de  $\eta$  aumenta la velocidad de daño, y en consecuencia los indicadores disminuyen más rápidamente tendiendo al comportamiento de daño original.

### A.3.3 Análisis de falla localizada

Como se explicó precedentemente, la localización puede analizarse considerando pequeñas perturbaciones a partir de un estado inicial de equilibrio o movimiento y luego linealizando las ecuaciones constitutivas suponiendo carga monotónica.

#### A.3.3.1 Análisis de la propagación de onda

Partiendo de las ecuaciones de movimiento y continuidad para un continuo tridimensional genérico, sin amortiguamiento y sin fuerzas de masa, se obtienen las siguientes ecuaciones de onda infinitesimal (Dubé et al. 1996):

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = m \ddot{v}_i \quad (\text{A.32})$$

$v_i = \dot{u}_i$  : componente i del vector de velocidades (perturbaciones admisibles)

Tomando la derivada respecto del tiempo de la ecuación (3.31) , para  $G^d(\sigma, d) > 0$  resulta:

$$\dot{\sigma}_{ij} = (1 - d^o) C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl} - C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^o \dot{d} \quad (\text{A.33})$$

donde  $d^o$  y  $\varepsilon^o$  se refieren al estado de daño y deformación a partir del cual se considera la perturbación.

Sustituyendo la ecuación (A.33) en la ecuación de onda, se obtiene la siguiente expresión:

$$(1 - d^o) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl,j} - \dot{d}_{,j} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^o - \dot{d}_{,j} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^o - \dot{d} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl,j}^o = m \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \quad \text{con} \quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}) \quad (\text{A.34})$$

Esta ecuación es válida para un modelo de daño tanto independiente como dependiente del tiempo. Dicha ecuación de movimiento contiene explícitamente los gradientes espaciales de las variables de estado iniciales  $(\varepsilon_{ij}^o, d^o)$  a partir de las cuales se considera la perturbación. Se puede observar que los términos en que aparecen las derivadas espaciales de  $(\varepsilon_{ij}^o, d^o)$  no contienen las derivadas de mayor orden de la perturbación  $v_i$ . Luego, no modifican la naturaleza de las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el problema. Se puede entonces suponer, como simplificación, un estado inicial de daño y deformación homogéneo.

En el caso del modelo de daño dependiente del tiempo la evolución del daño (ecuación (3.30)) no depende de la perturbación  $v_i$  (Dubé et al. 1996):

$$\dot{d}_{,j} = 0$$

En la ecuación de onda sólo quedan los términos en que aparece la perturbación:

$$(1-d^o)C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl,j} = \left[ (1-d^o)C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl} \right]_{,j} = m \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \quad (\text{A.35})$$

Esta ecuación es similar a la de un sólido elástico de rigidez  $(1-d^o)C_{ijkl}^o$ , positiva definida en todo el dominio, luego, la ecuación de onda resulta incondicionalmente hiperbólica. Puede concluirse, que el problema de onda en este modelo constitutivo es estable y bien condicionado, independientemente del estado de daño y deformación a partir del cual se considera la deformación.

Como ejemplo puede tomarse un elemento con ablandamiento unidimensional, donde la ecuación de onda resulta:

$$(1-d^o)E \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.36})$$

La ecuación de onda (A.36) sólo está controlada por la rigidez de descarga del material, y la velocidad de propagación de onda  $c$  es:

$$c = \sqrt{\frac{(1-d^o)E}{m}} \quad (\text{A.37})$$

Luego, en este modelo de daño dependiente del tiempo la inestabilidad material ocurrida cuando  $\dot{\varepsilon}_{ij} \left( C_{imp}^t \right)_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} < 0$ , no implica pérdida de la hiperbolicidad como ocurre en un modelo de daño simple.

En el Anexo A.1, se desarrolla la resolución de la ecuación de onda unidimensional

considerando un modelo constitutivo de daño independiente del tiempo con ablandamiento, allí se demuestra en un caso sencillo la pérdida de hiperbolicidad.

#### A.4 Comentarios finales

En este capítulo se analizaron los modos de fractura que se observan a nivel constitutivo, es decir, la ocurrencia de falla difusa y localizada. En particular, se estudió la extensión del modelo de daño escalar original, considerando los indicadores de falla para distintos valores de los parámetros.

En el análisis de falla difusa, se determinaron el trabajo de segundo orden y el indicador  $e$ , el cual identifica al operador tangente. Cabe resaltar, que en el modelo de daño original el indicador  $e$  comienza a tomar valores negativos en la etapa de endurecimiento antes de superara el valor pico, mientras que en la extensión del modelo, la cual incorpora la dependencia del tiempo,  $e_{imp}$  se mantiene siempre dentro de valores positivos, es decir sin presentarse inestabilidades.

El comportamiento en lo que respecta a la falla localizada se analiza mediante la ecuación de onda, que en el caso de daño dependiente del tiempo se regulariza y el valor de la velocidad de propagación de onda depende del módulo secante.



## ANEXO A.1.

### DESARROLLO MATEMÁTICO DEL COMPORTAMIENTO DE UN CONTINUO EN ETAPA DE RELAJACIÓN

La ecuación de movimiento unidimensional se expresa (Sluys 1992):

$$\frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial x} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (\text{A.A.1})$$

y

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.A.2})$$

donde  $v = \dot{u}$ . Interesa analizar un modelo con ablandamiento y descomposición de la deformación total en una elástica  $\varepsilon^e$  y otra inelástica  $\varepsilon^i$ , es decir:

$$\sigma = f(\varepsilon^i) \quad (\text{A.A.3})$$

$$\dot{\sigma} = f' \dot{\varepsilon}^i \quad (\text{A.A.4})$$

cuando  $f' < 0$ , se tiene ablandamiento. Considerando la ecuación (A.A.4),  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^i$  y  $\dot{\varepsilon}^e = \dot{\sigma} / E$  la ecuación de movimiento para un elemento con ablandamiento unidimensional, resulta:

$$\frac{E + f'}{c_e^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - f' \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{A.A.5})$$

donde  $c_e = \sqrt{E/m}$  que corresponde a la velocidad de onda longitudinal de un medio elástico con módulo  $E$ . Esta ecuación en derivadas parciales de segundo orden, es lineal si  $f'$  es constante y cuasi-lineal si  $f'$  es función de  $\varepsilon^i$ . Para hallar la solución del problema se plantea:

$$d\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dt + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} dx \quad (\text{A.A.6})$$

$$d\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} dt + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \quad (\text{A.A.7})$$

se calcula el determinante  $D$  del sistema formado por las ecuaciones (A.A.5), (A.A.6) y (A.A.7). Si  $D \neq 0$  se encuentra una única solución en el espacio  $u$ - $x$ - $t$ . Si en cambio,  $D=0$ , se obtiene un sistema de ecuaciones dependiente y la curva en el plano  $u$ - $x$ - $t$  coincide con la direcciones características:

$$\frac{dx}{dt} = \pm c_e \sqrt{\frac{f'}{E + f'}} \quad (\text{A.A.8})$$

Se puede observar que si ocurre  $f' < 0$  (ablandamiento) y  $f' > -E$ , la velocidad de onda resulta imaginaria y la ecuación de onda pierde hiperbolicidad, resulta elíptica, no permitiendo la propagación de onda. La pérdida de hiperbolicidad significa que el problema resulta mal condicionado, y consecuentemente no es posible describir satisfactoriamente el problema físico.