En resonancia, las tres ramas del circuito paralelo de la Fig. 8-9 almacenan una energía constante. Teniendo en cuenta que cuando la intensidad de corriente por la bobina es máxima la tensión en el condensador es nula, y viceversa, podremos escribir $\frac{1}{2}LI^2_{max} = \frac{1}{2}CV^2_{max}$. Es decir,

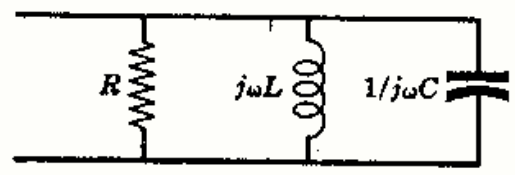

Fig. 8-9

$$Q_0 \simeq \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR$$

LUGARES GEOMETRICOS DE IMPEDANCIAS

El estudio de los circuitos que tienen un elemento variable se simplifica mucho mediante el análisis de los lugares geométricos de impedancias. Como **I** = **VY** y, normalmente, **V** es constante, el lugar geométrico de **Y** proporciona la variación de la intensidad **I** con el elemento variable del circuito.

El circuito serie de la Fig. 8-10(*a*) tiene una resistencia fija y una reactancia variable que podemos suponer toma valores cualesquiera, positivos o negativos. Si consideramos el plano **Z** con los ejes cartesianos R y X, el lugar geométrico de la impedancia **Z**, para el circuito dado, es una recta paralela al eje X que corta al eje R en R_1, como indica la Figura 8-10(*b*).

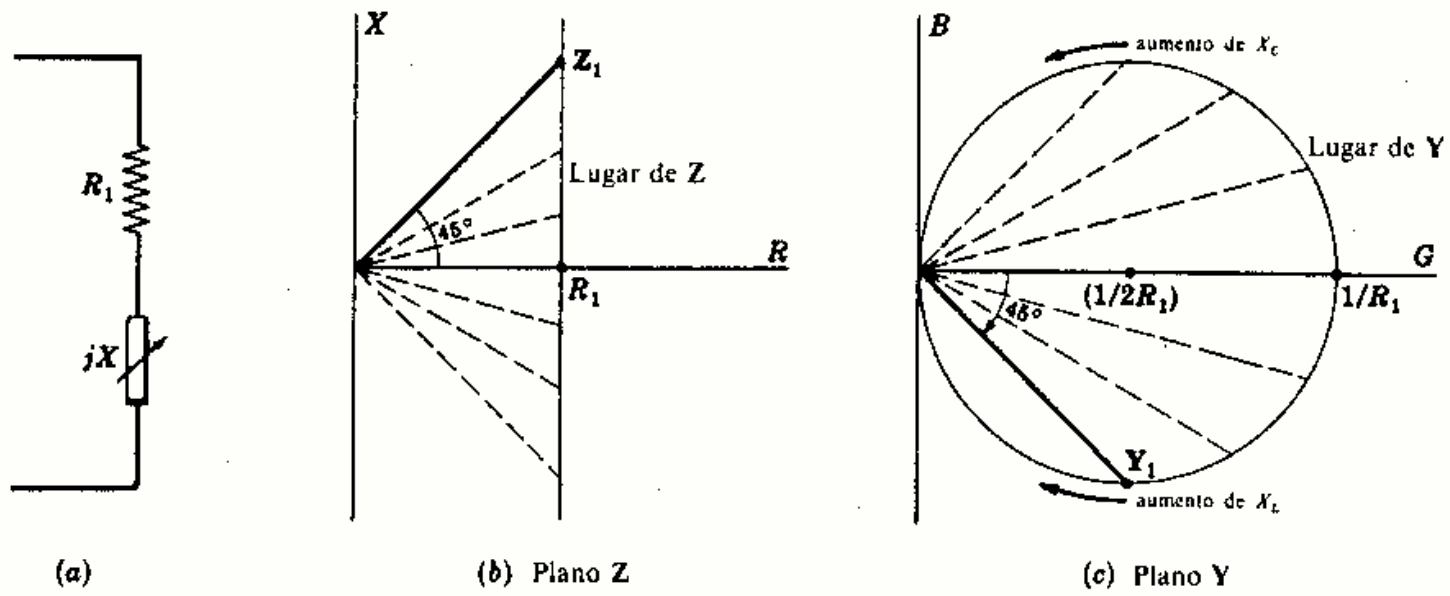

Fig. 8-10

En el plano **Y**, formado por los ejes cartesianos G y B, podemos determinar el lugar geométrico de la admitancia.

Como **Z** = 1/**Y**

$$R_1 + jX = \frac{1}{G+jB} \tag{1}$$

Racionalizando e igualando las partes reales de (*1*),

$$R_1 = \frac{G}{G^2+B^2}$$

o bien

$$G^2 - G/R_1 + B^2 = 0 \tag{2}$$

Sumando $1/4R_1^2$ a ambos miembros de (*2*) y simplificando resulta,

$$\left(G - \frac{1}{2R_1}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R_1}\right)^2 \tag{3}$$

Esta Ecuación (*3*) representa una circunferencia, es decir, el lugar geométrico de **Y** es una circunferencia con centro el punto $(1/2R_1, 0)$ y radio $1/2R_1$. [Véase Figura 8-10(*c*).]

A cada punto del lugar geométrico de **Z** le corresponde un punto del lugar geométrico de **Y**. Los puntos del lugar de **Z** por encima del eje R se corresponden con los puntos de la semicircunferencia por debajo del eje G en el plano **Y**. Al punto $+\infty$ del lugar de **Z** le corresponde el origen del plano **Y**. Análogamente, los puntos del lugar geométrico de **Z** por debajo del eje R se corresponden con los puntos de la semicircunferencia por encima del eje G en el plano **Y**. Al punto $-\infty$ del lugar de **Z** le corresponde el origen en el plano **Y**. Conviene observar las posiciones relativas de $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Y}_1$. Las distancias de $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Y}_1$ a los orígenes respectivos son distintas, mientras que los ángulos que forman con el eje horizontal son iguales y de signo contrario.

En el caso de una reactancia inductiva fija y una resistencia variable, como indica la Fig. 8-11(*a*), el lugar geométrico de **Z** es una semirrecta horizontal situada en el primer cuadrante del plano **Z** a una distancia $X = X_{L_1}$ del origen. Por el mismo procedimiento que antes se obtiene la ecuación del lugar geométrico de **Y**:

$$G^2 + (B + 1/2X_{L_1})^2 = (1/2X_{L_1})^2 \tag{4}$$

El lugar geométrico de **Y** es, pues, una circunferencia de centro $(0, -1/2X_{L_1})$ y radio $1/2X_{L_1}$ en el plano **Y**. [Véase Fig. 8-11(*c*).] Sin embargo, como el lugar geométrico de **Z**, en la Fig. 8-11(*b*), es una semirrecta del primer cuadrante del plano **Z** el transformado del lugar geométrico de **Z**, para este circuito, es únicamente la semicircunferencia del cuarto cuadrante del plano **Y**.

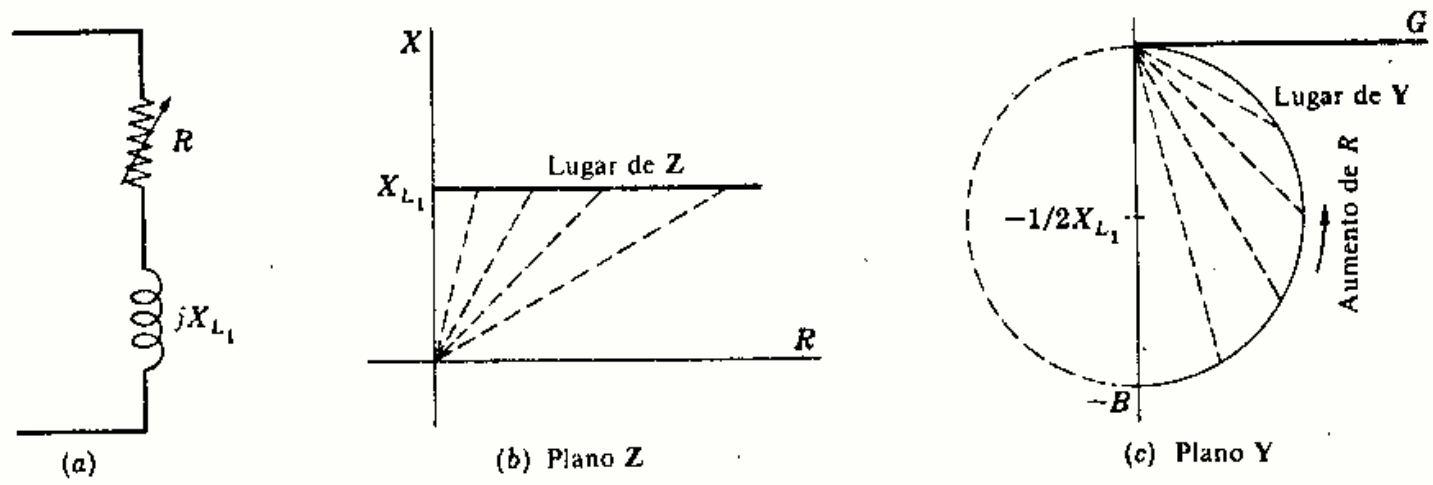

Fig. 8-11

En el caso de una reactancia capacitiva fija en serie con una resistencia variable, como indica la Fig. 8-12(*a*), el lugar geométrico de **Z** es una semirrecta horizontal situada en el cuarto cuadrante del plano Z a una distancia $X = -X_{C_1}$ del origen. [Véase Fig. 8-12(*b*).] Por el mismo procedimiento que antes se obtiene la ecuación del lugar geométrico de **Y**:

$$G^2 + (B - 1/2X_{C_1})^2 = (1/2X_{C_1})^2 \tag{5}$$

El lugar geométrico de **Y** es, pues, una semicircunferencia de centro $(0, 1/2X_{C_1})$ y radio $1/2X_{C_1}$, situada en el primer cuadrante del plano **Y**. [Véase Figura 8-12(*c*).]

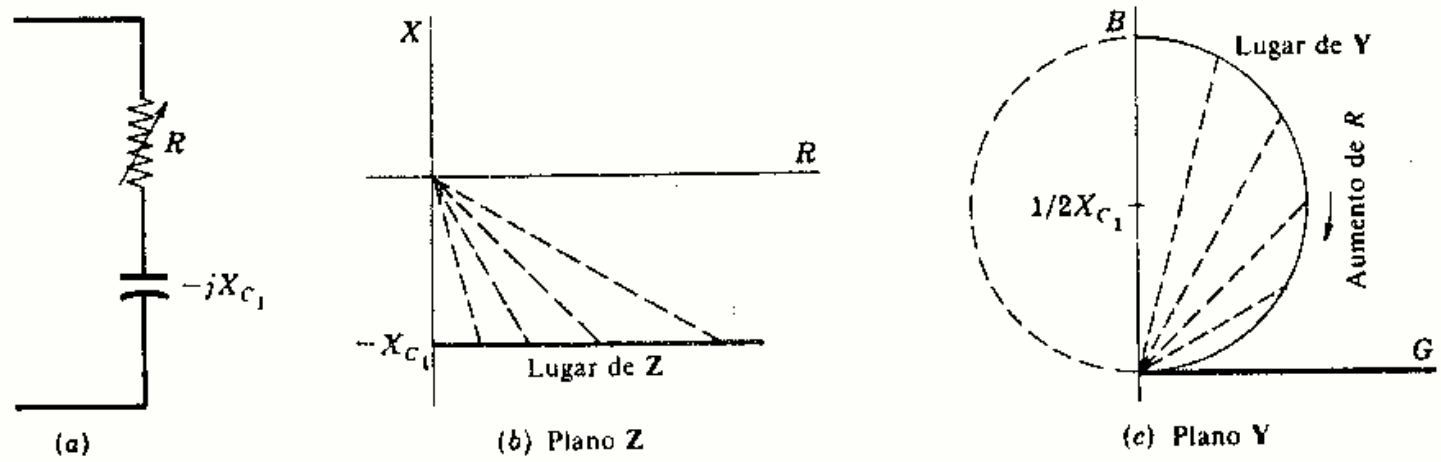

Fig. 8-12

LUGARES GEOMETRICOS DE INTENSIDADES DE CORRIENTE

Consideremos el circuito paralelo de la Fig. 8-13(*a*) con una rama constituida por la resistencia R_1 y reactancia jX_L fijas, y una resistencia R_2 fija y reactancia $-jX_C$ variable en la otra. La admitancia total de las dos ramas en paralelo es

$$\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$$

Sumando el lugar de $\mathbf{Y}_2$ de la segunda rama al punto fijo $\mathbf{Y}_1$ se obtiene el lugar de $\mathbf{Y}_T$, como muestra la Figura 8-13(*b*).

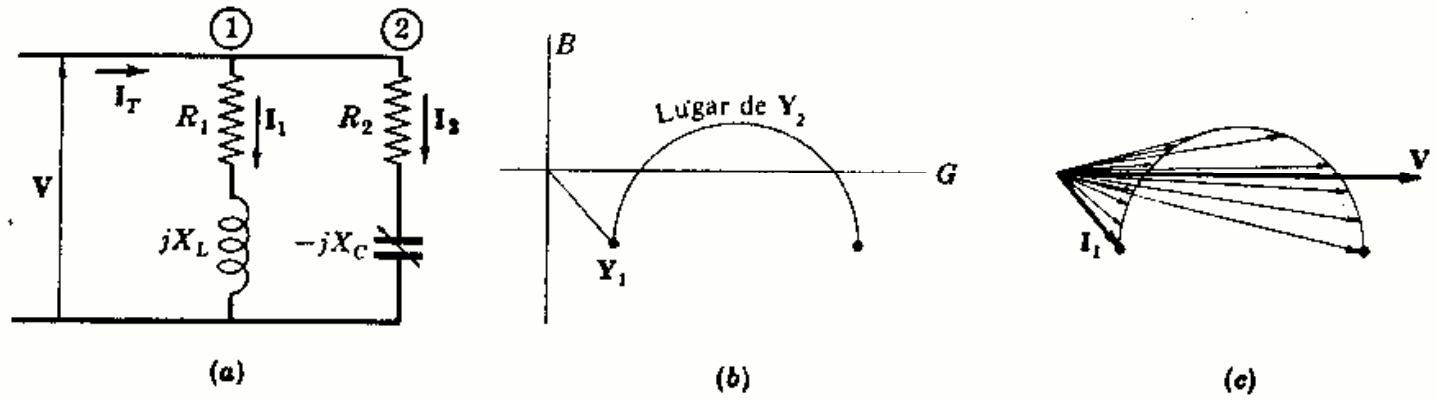

Fig. 8-13

La intensidad de corriente viene dada por $\mathbf{I} = \mathbf{VY}$ y, en la Fig. 8-13(*c*), puede observarse cómo al sumar la intensidad fija $\mathbf{I}_1$ a la corriente variable $\mathbf{I}_2$ se obtiene el lugar geométrico de la intensidad total. Este diagrama muestra que existen dos valores de C para los cuales la intensidad de corriente total está en fase con la tensión $\mathbf{V}$.

Examinando la Fig. 8-13(*c*) se desprende cómo se puede dar el caso de que no exista ningún valor de C para el que el circuito entre en resonancia. Si el radio, $1/2R_2$, de la semicircunferencia del lugar es tal que la curva no corta al eje $\mathbf{V}$, no existirá ningún valor de C que produzca resonancia. En los problemas que siguen veremos más aplicaciones de estos diagramas de lugares geométricos.

Problemas resueltos

8-1 En un circuito serie RLC, $R = 10$ ohmios, $L = 5$ milihenrios y $C = 12{,}5$ microfaradios. Deducir la variación del módulo y del argumento de la impedancia del circuito en función de ω en el intervalo $0{,}8\omega_0$ a $1{,}2\omega_0$.

En resonancia,

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{(5\times10^{-3})(12{,}5\times10^{-6})} = 4000 \text{ rad/s}$$

$$X_{L_0} = \omega_0 L = 4000(5\times10^{-3}) = 20\ \Omega$$

$$X_{C_0} = 1/\omega_0 C = 1/(4000\times12{,}5\times10^{-6}) = 20\ \Omega$$

Entonces,

$$\mathbf{Z}_0 = R + j(X_{L_0} - X_{C_0}) = 10 + j(20-20) = \underline{10/0^\circ}$$

Ahora bien, $X_L = \omega L$ y $X_C = 1/\omega C$, con lo que $X_L/X_{L_0} = \omega/\omega_0$ y $X_C/X_{C_0} = \omega_0/\omega$. Por consiguiente, podremos calcular los valores de X_L, X_C y $\mathbf{Z}$ para otras frecuencias.

En la Fig. 8-14(*a*) se da una tabla de reactancias e impedancias, y en la Fig. 8-14(*b*) se encuentra el diagrama pedido.