PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DIFERENCIABLES

Enunciamos y demostramos las siguientes propiedades para funciones reales de dos variables reales pero estas se generalizan para funciones reales de "n" variables reales.

TEOREMA

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P_0(x_0, y_0) \in D^0$

Si es f diferenciable en P_0 entonces:

i) f es continua en P_0.

ii) Existen las derivadas parciales $f_x(P_0)$ y $f_y(P_0)$ y vale que $f_x(P_0) = a$, $f_y(P_0) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

iii) $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ vector unitario, existe la derivada direccional de f en P_0 en la dirección del vector $\vec{u}$ y vale que $D_{\vec{u}} f(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \vec{u}$

Demostraciones

PROPIEDAD i) Queremos probar que si f es diferenciable en P_0 entonces f es continua en P_0.

Por ser P_0 pac de D probar que f es continua en P_0 es probar

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

lo que es igual a $\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$ **(*)**

Como f es diferenciable en P_0 existe $B_\delta(P_0) \subset D$ tal que si $P(x_0 + h, y_0 + k) \in B_\delta(P_0)$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + \omega(h, k)$$

Es decir: $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + \omega(h, k)$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

Calculemos el límite de **(*)**

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} [f(x_0, y_0) + ah + bk + \omega(h, k)] \quad \textbf{(**)}$$

El límite del corchete se distribuye en la suma si cada sumando tiene límite.

1) $\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$ por ser límite de una función constante

2) $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} (ah + bk) = 0$

3) $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \omega(h,k) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \left[\frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \sqrt{h^2 + k^2}\right] = 0$ pues

$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ por ser f diferenciable en P_0

y $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} = 0$ por ser función distancia del punto (h,k) al punto $(0,0)$.

Volviendo a **(**)** tenemos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0, y_0) + \lim_{(h,k)\to(0,0)} (ah + bk) + \lim_{(h,k)\to(0,0)} \omega(h,k) = f(x_0, y_0)$$

Luego f es continua en P_0 como queríamos probar.

PROPIEDAD ii) Queremos probar que si f es diferenciable en P_0 entonces

$\exists f_x(P_0) = a \quad \wedge \quad \exists f_y(P_0) = b$.

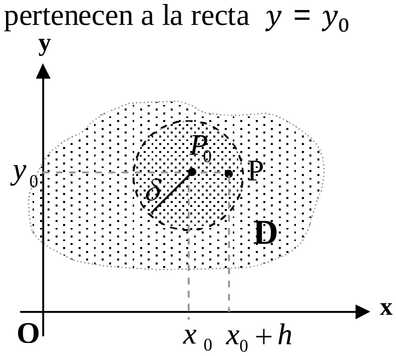
Por hipótesis f diferenciable en P_0 entonces existe $B_\delta(P_0) \subset D$ tal que para todo

$P(x_0 + h, y_0 + k) \in B_\delta(P_0)$ se cumple

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + \omega(h,k) \quad \textbf{(*)}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$.

La igualdad **(*)** vale en particular para $P(x_0 + h, y_0) \in B_\delta(P_0)$ con $h \neq 0$, es decir, en los puntos de $B_\delta(P_0)$ que pertenecen a la recta $y = y_0$



Entonces para estos puntos (*) es

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = ah + \omega(h, 0)$$

Calculemos $f_x(P_0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{ah+\omega(h,0)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[a+\frac{\omega(h,0)}{h}\right] \quad \textbf{(**)}$$

El límite del corchete se distribuye en la suma si los límites de los sumandos existen. Probemos dicha existencia:

1) $\lim_{h\to 0} a = a$ por ser límite de una función constante

2) $\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h,0)}{h} = ?$ Analizo sus laterales.

Por hipótesis $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ entonces TODOS sus límites radiales existen y valen cero, en particular cuando $k = 0$, es decir:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h,0)}{\sqrt{h^2+0^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h,0)}{|h|} = 0$$

Calculo laterales de 2)

$\lim_{h\to 0^+} \frac{\omega(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\omega(h,0)}{|h|} = 0$ limite lateral derecho del radial k=0.

$\lim_{h\to 0^-} \frac{\omega(h,0)}{h} = -\lim_{h\to 0^-} \frac{\omega(h,0)}{-h} = -\lim_{h\to 0^-} \frac{\omega(h,0)}{|h|} = 0$ límite lateral izquierdo del radial k=0.

Por lo tanto 2) $\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h,0)}{h} = 0$. (sus laterales existen y son iguales a 0)

Volviendo a **(**)** tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} a + \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h,0)}{h} = a + 0 = a$$

Por definición de derivada parcial respecto a “x” en P_0 probamos que $f_x(P_0) = a$.

De manera análoga se prueba que $f_y(P_0) = b$ considerando los puntos de $B_\delta(P_0)$ donde $k \neq 0$, $h = 0$, es decir, en los puntos de $B_\delta(P_0)$ que pertenecen a la recta $x = x_0$.
Queda como ejercicio para alumno formalizar esta parte de la demostración.

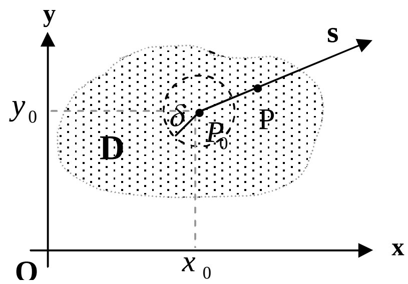
PROPIEDAD iii) Queremos probar que si f es diferenciable en P_0 entonces $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ vector unitario, $\exists D_{\vec{u}} f(P_0)$ y vale que $D_{\vec{u}} f(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \vec{u}$

Como f es diferenciable en P_0 existe $B_\delta(P_0) \subset D$ tal que si $P(x_0+h, y_0+k) \in B_\delta(P_0)$

$$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = ah + bk + \omega(h,k) \quad \textbf{(*)}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

La igualdad **(*)** vale en particular para los puntos $P \in B_\delta(P_0)$ que están en la semirrecta de ecuación $P = P_0 + t\vec{u}$, $t \geq 0$.



Es decir, la igualdad **(*)** para estos puntos es:

$$f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0) = atu_1 + btu_2 + \omega(tu_1, tu_2)$$

Luego

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{atu_1 + btu_2 + \omega(tu_1, tu_2)}{t}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[(au_1 + bu_2) + \frac{\omega(tu_1,tu_2)}{t}\right] \quad \textbf{(**)}$$

Este último límite se distribuye en la suma si los límites de los sumandos existen. Probemos dicha existencia:

1) $\lim_{t\to 0^+} (au_1 + bu_2) = au_1 + bu_2$ por ser límite de una función constante

2) $\lim_{t\to 0^+} \frac{\omega(tu_1,tu_2)}{t} =?$

Por hipótesis $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ entonces TODOS los límites radiales existen y valen cero. En particular para la recta

$$(h, k) = (0,0) + t(u_1, u_2) \; t \in \mathbb{R}$$

tenemos

$$\lim_{(tu_1,tu_2)\to(0,0)} \frac{\omega(tu_1,tu_2)}{\sqrt{(tu_1)^2+(tu_2)^2}} = 0$$

$$\boxed{\sqrt{t^2u_1^2 + t^2u_2^2} = \sqrt{t^2(u_1^2 + u_2^2)} = |t|\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |t|}$$

$\vec{u}$ es unitario

Lo que es igual a: $\lim_{t\to 0} \frac{\omega(tu_1,tu_2)}{|t|} = 0$.

Como existe este radial, su límite lateral derecho existe y vale cero: $\lim_{t\to 0^+} \frac{\omega(tu_1,tu_2)}{t} = 0$ con lo cual queda probado 2).

Volviendo a **(**)** tenemos

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+tu_1,y_0+tu_2)-f(x_0,y_0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}(au_1+bu_2)+\lim_{t\to 0^+}\frac{\omega(tu_1,tu_2)}{t}=au_1+bu_2$$

Por lo tanto

$$\exists D_{\vec{u}}f(P_0)=au_1+bu_2$$

Como f es diferenciable en P_0 por **Propiedad ii)** sabemos $f_x(P_0)=a$, $f_y(P_0)=b$ entonces

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(P_0) &= f_x(P_0)u_1+f_y(P_0)u_2 \\ &= \left(f_x(P_0),f_y(P_0)\right)\cdot(u_1,u_2) \\ &= \vec{\nabla}f(P_0)\cdot\vec{u} \end{aligned}$$

Observaciones

1. La primera implicación de la tesis puede leerse así: "La continuidad de f en P_0, punto interior de su dominio, es *condición necesaria* para la diferenciabilidad de f en P_0" ó "La diferenciabilidad de f en P_0, punto interior de su dominio, es *condición suficiente* para la continuidad de f en P_0"

2. La segunda implicación de la tesis puede leerse así: "La existencia de todas las derivadas parciales de f en P_0, punto interior de su dominio, es *condición necesaria* para la diferenciabilidad de f en P_0" ó "La diferenciabilidad de f en P_0, punto interior de su dominio, es *condición suficiente* para la existencia de las derivadas parciales de f en P_0".

3. La tercera implicación de la tesis puede leerse así:"La existencia de todas las derivadas direccionales de f en P_0, punto interior de su dominio, es *condición necesaria* para la diferenciabilidad de f en P_0" ó "La diferenciabilidad de f en P_0, punto interior de su dominio, es *condición suficiente* para la existencia de todas las derivadas direccionales de f en P_0".