TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL

Antes de enunciar el teorema, vamos a señalar las propiedades de las funciones continuas en regiones cerradas y acotadas las cuales usaremos en la demostración del teorema y en la interpretación geométrica del mismo.

1. Teorema de Weierstrass

Toda función continua f definida en un conjunto D cerrado y acotado, alcanza el **mínimo absoluto m** y el **máximo absoluto M**. Es decir:

$\exists\, \widetilde{\mathbf{P}} \in D : \forall P \in D \quad f(P) \geq f(\widetilde{P}) = \mathbf{m}$ y $\exists\, \overline{\boldsymbol{P}} \in D : \forall P \in D \quad f(P) \leq f(\overline{\boldsymbol{P}}) = \mathbf{M}$

2. Teorema

Si D es una región cerrada y acotada y f continua en D entonces f toma todos los valores comprendidos entre **m** y **M**. Esto es: $\forall \mu \in [m, M], \exists P^* \in D : f(P^*) = \mu$.

Teorema V.M.C.I.

Sea D una región cerrada y acotada, $f : D \subset R^2 \to R$ y $g : D \subset R^2 \to R$ continuas en D y $\forall P \in D\ g(P) \geq 0$. Entonces existe un número real μ entre el mínimo absoluto **m** y el máximo absoluto **M** de f en D, tal que

$$\iint_D f(P)\, g(P)\, dA = \mu \iint_D g(P)\, dA .$$

Demostración.

Como f y g son continuas en D, el producto f . g es continuo en D, luego integrable en D. Como g es continua en D es integrable en D. Es decir, existen las integrales de la tesis.

Por teorema 1 existen **m** =mín{ f(P) | P∈D} y M = máx{ f(P) | P∈D} y vale:

$\forall P \in D \quad m \leq f(P) \leq M$. Como por hipótesis g es no negativa en D, tenemos:

$$\forall P \in D \qquad m\, g(P) \leq f(P)\, g(P) \leq M\, g(P) \quad \text{(la desigualdad no cambia)}$$

Por monotonía y linealidad de la integral doble podemos escribir:

(monotonía) $\iint_D m\, g(P) dA \leq \iint_D f(P)g(P)dA \leq \iint_D M\, g(P)dA$

(linealidad) $m \iint_D g(P)dA \leq \iint_D f(P)g(P)dA \leq M \iint_D g(P)dA$. (1)

Como $\forall P \in D\ g(P) \geq 0$ entonces $\iint_D g(P)dA \geq 0$. Puede ocurrir:

a) $\iint_D g(P)dA > 0$ o b) $\iint_D g(P)dA = 0$

Si ocurre a) podemos dividir en (1) por dicha integral y obtenemos:

$$m \leq \frac{\iint_D f(P)g(P)dA}{\iint_D g(P)dA} \leq M$$

Si llamamos $\mu = \dfrac{\iint_D f(P)g(P)dA}{\iint_D g(P)dA}$ obtenemos $\iint_D$ f(P) g(P) dA = μ $\iint_D$ g(P) dA ,

que es la tesis.

Si ocurre b), reemplazando en (1) tenemos:

$$0 \leq \iint_D f(P)g(P)dA \leq 0 \Rightarrow \iint_D f(P)g(P)dA = 0$$

Si elegimos como valor de μ a cualquier número real entre **m** y **M**, obtenemos nuevamente la tesis: $\iint_D f(P)g(P)dA = 0 = \mu \,.\, \underbrace{\iint_D g(P)\, dA}_{0}$.

Interpretación geométrica del T.V.M.C.I.

La interpretación geométrica se realiza para el caso particular g(P) =1 $\forall$ P $\in$D y f no negativa .

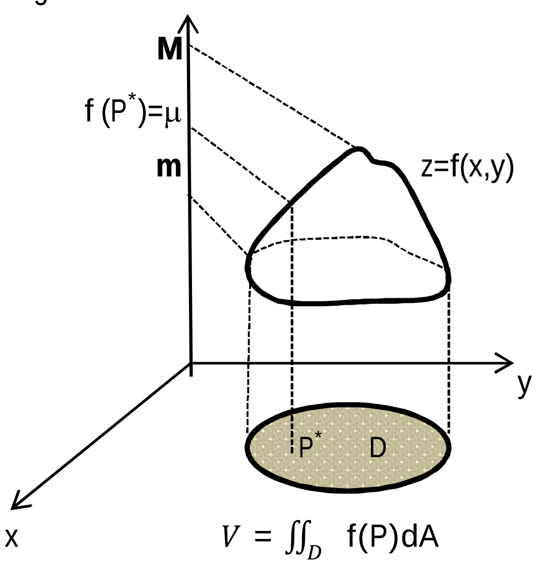
Supongamos que valen las hipótesis del teorema y que g(P) =1 y f(P)$\geq$ 0 $\forall$ P $\in$D.

Entonces el teorema V.M.C.I. afirma que existe un número real μ entre el mínimo absoluto **m** y el máximo absoluto **M** de f en D, tal que

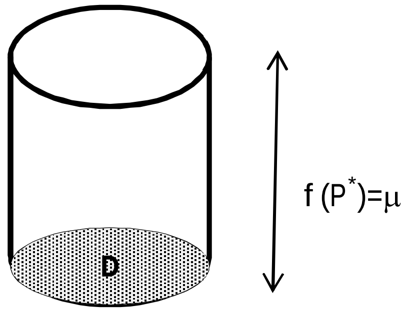
$$\iint_D f(P)\, dA = \mu \iint_D dA\,.$$

Como f es continua en D, por teorema 2, toma todos los valores comprendidos entre **m** y **M**. Luego existe P^* $\in$D tal que f (P^*)=μ. Por otro lado $\iint_D$ dA = $A(D)$. Entonces podemos escribir: $\exists\, \boldsymbol{P}^* \in$ D : $\iint_D$ f(P)dA = $f(\boldsymbol{P}^*).A(D)$.

Como f es no negativa, el primer miembro de esta igualdad es el volumen del sólido limitado superiormente por la gráfica de f e inferiormente por la región plana D. El segundo miembro es el volumen del cilindro de altura f (P^*) y base D.



$V = \iint_D$ f(P)dA



$V = f(\boldsymbol{P}^*).A(D)$