TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL (TVMCD)

Sea $f : D \subset R^2 \to R$ diferenciable en $\overset{0}{D}$. Sean $A \in \overset{0}{D}$ y $B \in \overset{0}{D}$ tales que el segmento $\overline{AB} \subset \overset{0}{D}$. Entonces existe un punto $C \in \overline{AB}$ tal que $f(B) - f(A) = \vec{\nabla} f(C) \cdot (B - A)$.

SIN DEMOSTRACIÓN

Interpretación geométrica TVMCD

Suponemos que valen las hipótesis del Teorema del Valor Medio para $f : D \subset R^2 \to R$, $A \in \overset{0}{D}$ y $B \in \overset{0}{D}$. Luego obtenemos en S representación gráfica de f los puntos $A' = f(A)$, $B' = f(B)$.

Tomamos $A \neq B$ (ya que si $A = B$ el resultado es trivial) y por lo tanto $\|B - A\| \neq 0$.

Como vale la tesis del TVMCD existe $C \in \overline{AB}$ tal que: $f(B) - f(A) = \vec{\nabla} f(C) \cdot (B - A)$

la igualdad anterior se puede dividir miembro a miembro por $\|B - A\| \neq 0$ y se

obtiene $$\frac{f(B) - f(A)}{\|B - A\|} = \frac{\vec{\nabla} f(C) \cdot (B - A)}{\|B - A\|}$$

Pero sabemos que:

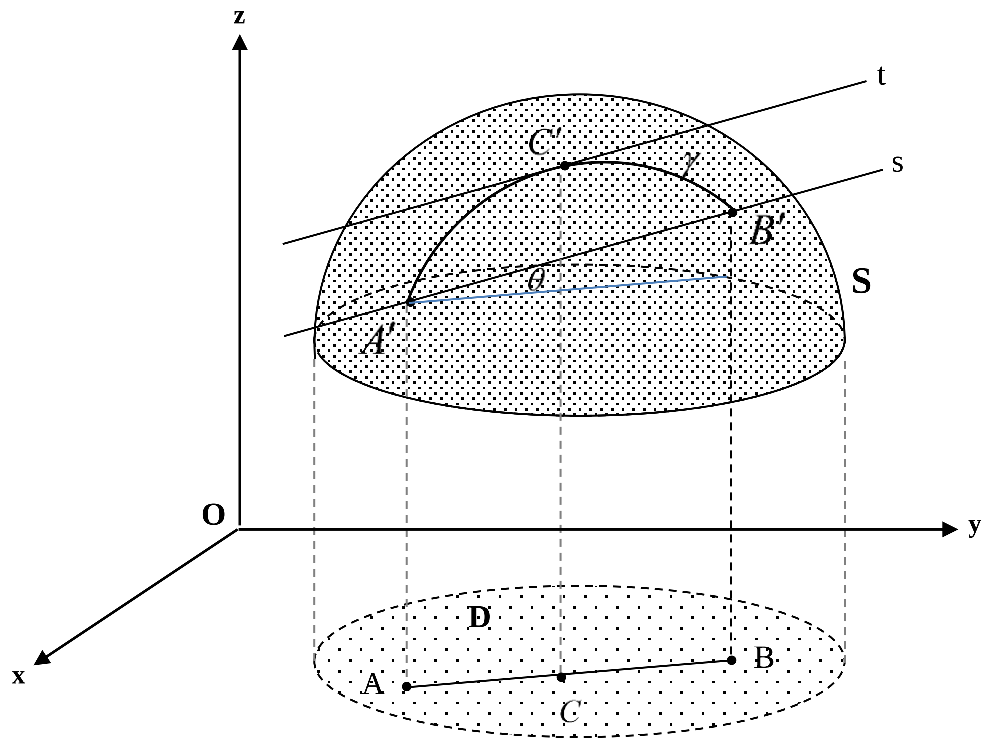
$\dfrac{f(B) - f(A)}{\|B - A\|}$ es la pendiente de la recta que pasa por A' y B' y está contenida en el plano vertical que contiene al segmento $\overline{AB}$.

Además:

$\dfrac{\vec{\nabla} f(C) \cdot (B - A)}{\|B - A\|} = \vec{\nabla} f(C) \cdot \dfrac{B - A}{\|B - A\|} = D_{\frac{B-A}{\|B-A\|}} f(C)$ es la derivada direccional de f en C en la dirección unitaria $\dfrac{B - A}{\|B - A\|}$ que sabemos es la pendiente de la recta tangente a la curva γ en $C' = f(C)$.

La tesis del teorema dice que si $A \neq B$, la curva γ intersección de la superficie representación gráfica de f con el plano vertical que contiene al segmento $\overline{AB}$ tiene un punto C' en el cual la recta tangente tiene la misma pendiente que la recta secante que une los puntos A' y B' de dicha curva.

Este resultado admite la siguiente representación gráfica



GENERALIZACIÓN DE LA DIFERENCIABILIDAD

Generalizaremos la noción de diferenciabilidad a funciones reales de variable vectorial y luego a funciones vectoriales de variable vectorial.

1º CASO) FUNCIONES REALES DE "*n*" VARIABLES REALES

La generalización de la noción de diferenciabilidad a estas funciones es inmediata, a partir de la definición dada para funciones de dos variables reales. Se expresa como sigue:

Definición: Sea $\begin{array}{l} f : A \subset R^n \to R \\ (x_1, ..., x_n) \mapsto f(x_1, ..., x_n) \end{array}$ y $P_0 = \left(x_1{}^0, ..., x_n{}^0\right) \in \overset{0}{A}$

f es diferenciable en $P_0 \Leftrightarrow \exists \; B_\delta(P_0) \; : \; \forall P\left(x_1{}^0 + h_1, ..., x_n{}^0 + h_n\right) \in B_\delta(P_0)$

$$f(P) - f(P_0) = a_1 h_1 + a_2 h_2 + \ldots + a_n h_n + \omega(h_1, h_2, \ldots, h_n) \quad \text{con}$$

$$a_i \in R \;\; \forall i = 1, \ldots, n \quad y \quad \lim_{(h_1, \ldots h_n) \to (0, \ldots, 0)} \frac{\omega(h_1, ..., h_n)}{\sqrt{h_1{}^2 + ... + h_n{}^2}} = 0$$

Observación: Si f es diferenciable en $P_0 \in \overset{0}{A}$ entonces es continua en P_0, existen todas las derivadas parciales y direccionales en dicho punto. Además vale el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.

2º CASO) FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE VECTORIAL

Generalizaremos la noción de diferenciabilidad a funciones vectoriales de variable vectorial. Para ello, recordemos que la definición de diferenciabilidad para $f : A \subset R^2 \to R$ la reescribimos en torno a la diferencial de f en P_0.

Observación: Por ser la diferencial una transformación lineal podemos asociarle una matriz respecto a las bases canónicas de R^2 y R : $\{(1,0),(0,1)\}$ y $\{1\}$. Luego tenemos la siguiente matriz

$$M_{1\times 2} = \begin{pmatrix} f_x(P_0) & f_y(P_0) \end{pmatrix}$$

Además $(h,k) = (x - x_0, y - y_0) = P - P_0$ entonces $\sqrt{h^2 + k^2} = \|P - P_0\|$

Luego $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(P) - f(P_0) - df_{P_o}(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{P\to P_0} \frac{f(P) - f(P_0) - df_{P_o}(P - P_0)}{\|P - P_0\|}$$

Esta expresión es la que nos permite generalizar la noción de diferenciabilidad para funciones vectoriales de variable vectorial.

Definición

Sea $f : A \subset R^n \to R^m$ con $f_i : R^n \to R$ y $P_0 \in \overset{0}{A}$

$$P \mapsto (f_1(P), f_2(P), ..., f_m(P))$$

f es diferenciable en $P_0 \Leftrightarrow \exists\ \lambda : R^n \to R^m$

$$\vec{h} = (h_1, h_2, ..., h_n) \mapsto (\lambda_1(\vec{h}), \lambda_2(\vec{h}), ..., \lambda_m(\vec{h}))$$

transformación lineal tal que $\lim_{\vec{h}\to\vec{\theta}} \frac{f(\vec{P}) - f(\vec{P}_0) - \lambda(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{\Theta}$ vector nulo en R^n.

La transformación lineal "λ" se llama "*diferencial de f en P_0*" y se denota df_{P_0} . La matriz de df_{P_0} respecto de las bases canónicas de R^n y R^m se llama matriz Jacobiana y se denota $f'(P_0)$.

$$f'(P_0)_{m\times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_o) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix}$$

Teorema

Sea $f : A \subset R^n \to R^m$ y $P_0 \in \overset{0}{A}$

$P \mapsto (f_1(P), f_2(P), \ldots, f_m(P))$

f es diferenciable en P_0 $\Leftrightarrow$ $\forall\, j = 1, \ldots, m$ f_j es diferenciable en P_0

En consecuencia por este teorema se tiene que

$$df_{P_0}(\vec{h}) = \left(df_{1P_0}(\vec{h}),\ df_{2P_0}(\vec{h}), \ldots,\ df_{mP_0}(\vec{h}) \right)$$

<u>Ejemplos</u>

1) Sea $f : R^2 \to R^3$ ¿Es f diferenciable en $P_0 = (1, \pi)$? Si existe, encuentre df_{P_0}.

$(u, v) \mapsto (u \cos v, u\ \mathrm{sen}\, v, v)$

Las funciones $f_1(u,v) = u \cos v$, $f_2(u,v) = u\ \mathrm{sen}\, v$ y $f_3(u,v) = v$ tienen derivadas parciales continuas en R^2 por lo tanto, la condición suficiente para la diferenciabilidad indica que son diferenciables en R^2 y en particular en $P_0 = (1, \pi)$.

Por el teorema enunciado anteriormente, f es diferenciable en P_0 de lo que se sigue que existe df_{P_0} y la matriz jacobiana de f en P_0 es la matriz 3×2 que sigue:

$$f'(1,\pi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(1,\pi)}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1(1,\pi)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2(1,\pi)}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2(1,\pi)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_3(1,\pi)}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3(1,\pi)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -u\ \mathrm{sen}\, v \\ \mathrm{sen}\, v & u \cos v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la diferencial de f en $(1, \pi)$ es: $df_{(1,\pi)} : R^2 \to R^3$

$$(h,k) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ -k \\ k \end{pmatrix}$$

ó $df_{(1,\pi)} : R^2 \to R^3$

$(h,k) \mapsto (-h, -k, k)$

2) Encuentre la diferencial de la función diferenciable $\begin{array}{c} f : R^3 \to R^2 \\ (x, y, z) \mapsto \left(x^2 + e^y, x + y\ sen\, z\right) \end{array}$ en $(1,1,\pi)$.

La matriz jacobiana de f en $(1,1,\pi)$ es la matriz 3×2:

$$f'(1,1,\pi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(1,1,\pi)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(1,1,\pi)}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1(1,1,\pi)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2(1,1,\pi)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(1,1,\pi)}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2(1,1,\pi)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & e^y & 0 \\ 1 & sen\, z & y \cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & e & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{array}{c} df_{(1,1,\pi)} : R^3 \to R^2 \\ (h_1, h_2, h_3) \mapsto \begin{pmatrix} 2 & e & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{c} df_{(1,1,\pi)} : R^3 \to R^2 \\ (h_1, h_2, h_3) \mapsto \begin{pmatrix} 2h_1 + e\,h_2 \\ h_1 - h_3 \end{pmatrix} \end{array}$$