ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS EN LAZO CERRADO

Análisis Cualitativo de la Respuesta Temporal de un Sistema

Si se conocen la función de transferencia G(s) de un dado sistema y la entrada **x(t)**, se puede evaluar la salida **y(t)** a partir de:

$$\Delta \mathbf{y(s)} = G(s)\,\Delta \mathbf{x(s)}$$

haciendo luego la transformación inversa:

$$\Delta \mathbf{y(t)} = \mathbf{L}^{-1}\left[\Delta \mathbf{y(s)}\right] = \mathbf{L}^{-1}\left[G(s)\,\Delta \mathbf{x(s)}\right]$$

La función de transferencia G(s) puede expresarse como un cociente de polinomios en s:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

Las raíces del polinomio numerador N(s) se denominan ***ceros*** de la función de transferencia, mientras que a las raíces del denominador D(s) se las llama ***polos***. Casualmente, la naturaleza de las raíces del denominador son las que determinan el patrón de la respuesta temporal a una dada señal de entrada y nos permite un conocimiento cualitativo de la dinámica del sistema. Debido a esta característica tan importante es que al denominador de una función de transferencia, cuando se lo iguala a cero, se lo denomina ***Ecuación Característica del Sistema***:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Se puede hacer las siguientes observaciones respecto a la ubicación de los polos de la función de transferencia:

1. ***Polos reales y distintos p_1, p_2, etc***. La respuesta temporal tendrá componentes de la forma $C_1 e^{p_1 t}$, $C_2 e^{p_2 t}$, etc. de modo que los transitorios convergerán a cero si los polos son negativos.
2. ***Polos reales múltiples***. En este caso, para un polo p con multiplicidad r, la función temporal que resultaría de la transformación inversa contendría términos de la forma

$$\left[C_1 + \frac{C_2}{1\,!}t + \frac{C_3}{2\,!}t^2 + \ldots + \frac{C_r}{(r-1)\,!}t^{r-1}\right]e^{pt}$$

   y vale lo dicho entes, si p es negativo, cuando $t \to \infty$, $\Delta y(t) \to 0$.
3. ***Polos complejos conjugados*** $\alpha \pm j\beta$. La respuesta resulta oscilatoria, con una componente temporal de la forma $Ce^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t + \phi)$. Según cuál sea el signo de α la sinusoide se amplificará ($\alpha > 0$) o decaerá ($\alpha < 0$). β es la frecuencia de la oscilación.

En resumen, en las raíces de la ecuación característica está la información sobre el patrón de la respuesta temporal de un sistema.

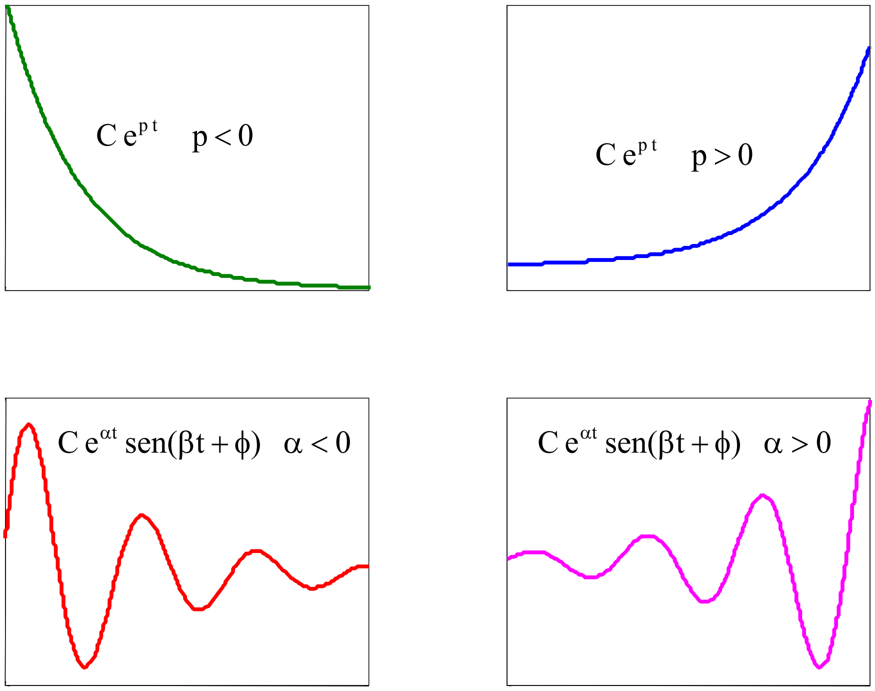

Figura 1: Respuesta temporal según la ubicación de los polos de la ecuación característica

Ecuación Característica de los Sistemas en Lazo Cerrado

Consideremos un sistema en lazo cerrado, cuyo diagrama en bloques se representa en la Figura 2.

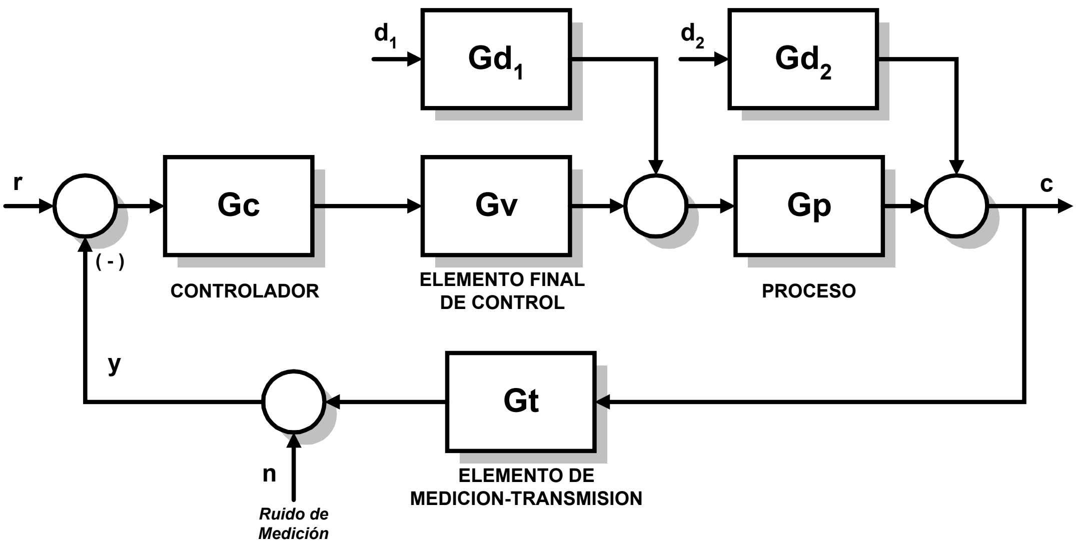

Figura 2: Diagrama en Bloques de un Sistema en Lazo Cerrado

El sistema se ve sometido a distintas perturbaciones (**d_1**, **d_2**, **n**) que inciden en distintos puntos del lazo. La evolución de la variable medida **y** resultará de la contribución de las perturbaciones y los cambios en el valor deseado **r**:

$$\Delta y(s) \;=\; \frac{Gd_1\, Gp\, Gt}{1+Gc\,Gv\,Gp\,Gt}\,\Delta d_1 \;+\; \frac{Gd_2\, Gt}{1+Gc\,Gv\,Gp\,Gt}\,\Delta d_2 \;+$$
$$+\;\frac{1}{1+Gc\,Gv\,Gp\,Gt}\,\Delta n \;+\; \frac{Gc\,Gp\,Gv\,Gt}{1+Gc\,Gv\,Gp\,Gt}\,\Delta r$$

Queda en evidencia que, independientemente de cuál sea la señal de entrada considerada, la ecuación característica siempre es la misma. A tal ecuación se la denominará *Ecuación Característica del Sistema en Lazo Cerrado:*

$$Ec(s) \;=\; \frac{N(s)}{D(s)} \;=\; 1 \;+\; Gc(s)\; Gv(s)\; Gp(s)\; Gt(s) \;=\; 0 \qquad [1]$$

y la naturaleza de sus raíces indicarán cuál es el patrón de la respuesta temporal del lazo cerrado cuando se vea sometido a cambios en las entradas. Observando cuidadosamente la Ecuación Característica, se puede constatar que depende de los elementos que se encuentran "dentro" del lazo, esto es, controlador, elemento final de control, proceso en sí mismo y elemento de transmisión-medición. Por lo tanto, el patrón de respuesta de un lazo viene determinado por lo elementos del lazo, independientemente de cuál sea la perturbación incidente.

Estabilidad de los Sistemas en Lazo Cerrado

El concepto de *Estabilidad* es de importancia medular en Control Automático. Existen distintas formas de definirla. Una definición, elemental si se quiere, pero intuitiva, es la conocida como BIBO-estabilidad (*bounded input – bounded output stability*):

> *Un sistema se dice que es estable si para toda entrada acotada produce una salida acotada, independientemente de su estado inicial.*

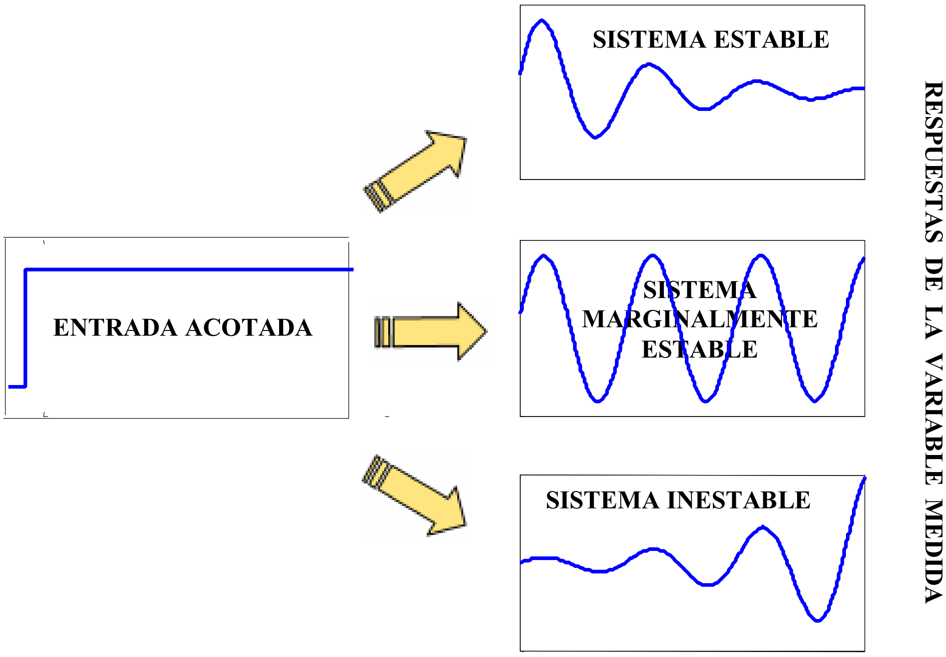

Figura 3: Esquema de sistemas con distintas características de estabilidad

Los transitorios de las salida se pueden relacionar con las raíces de la ecuación característica tal como se vio antes. De modo que el concepto de Estabilidad puede definirse en términos matemáticos más precisos de la siguiente forma:

> *Un sistema es estable si las raíces de la ecuación característica son reales negativas o complejas conjugadas con parte real negativa. O dicho en forma más compacta, si todas las raíces se encuentran en el semiplano izquierdo de la variable compleja s.*

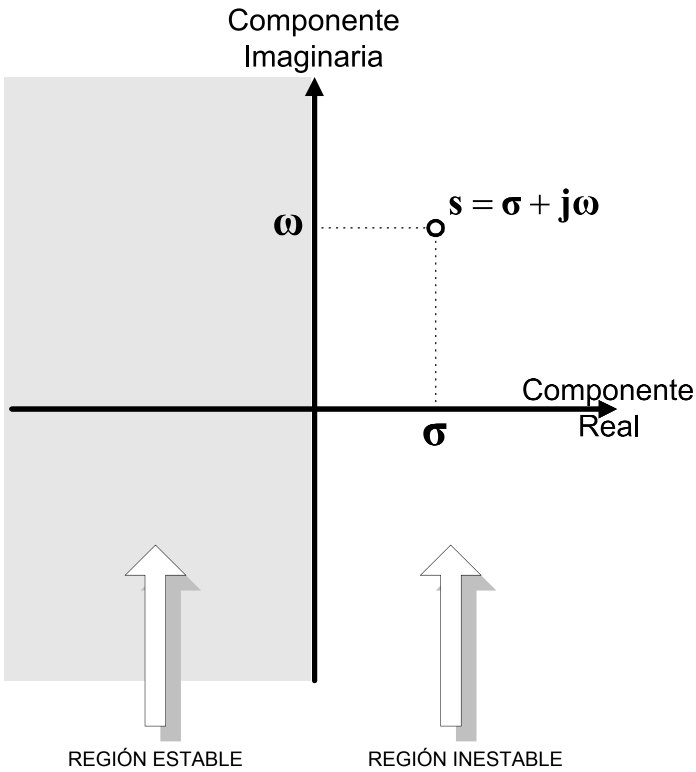

Figura 4: Caracterización de la estabilidad según la ubicación de las raíces de la Ecuación Característica

Si alguna raíz se ubica en el eje imaginario, se obtiene un sistema con estabilidad marginal, es decir, un sistema que se halla en el límite entre la estabilidad y la inestabilidad.

Hay algunas observaciones que es menester realizar:

- Si se quiere saber si un sistema es estable o no, bastaría con analizar las raíces de la ecuación característica. Como se trata de un polinomio, las raíces no se pueden calcular con una fórmula explícita, salvo escasas excepciones. Por lo tanto, para analizar la estabilidad, se debería recurrir a un procedimiento numérico.
- Observando la ecuación característica [1], queda en evidencia que las raíces (y por lo tanto la estabilidad del sistema en lazo cerrado) dependen del Gc(s), esto es, del controlador. Como se sabe, se pueden elegir el tipo de controlador (función de transferencia) y el valor de sus parámetros (sintonización). Si el proceso y los elementos de medición y actuación ya están fijados, se puede concluir entonces que la estabilidad del sistema de control dependerá de una juiciosa elección del tipo y sintonización del controlador.

Criterio de Estabilidad de Routh

Para decidir si un sistema en lazo cerrado es estable solo se requiere saber si existen raíces de la ecuación característica en el semiplano derecho, y no es necesario conocer su valor. El Test de Routh permite identificar el número de raíces en el semiplano derecho a través de un procedimiento relativamente simple.

Primero se debe expresar el numerador de la ecuación característica en forma polinomial:

$$N(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \qquad [2]$$

Hay que verificar que a_0 sea positiva, de lo contrario, debe multiplicarse los miembros de la ecuación por -1.

<u>*PASO 1*</u> (condición necesaria)

El polinomio [2] debe ser completo, esto es, ningún a_i debe ser nulo, de lo contrario, al menos una raíz se encontrará en el semiplano derecho.

> *Si alguno de los coeficientes* $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ *es negativo, entonces al menos una raíz se ubica en el semiplano derecho y no es necesario ningún análisis adicional se requiere. Más aún, el número de cambios de signos es igual a la cantidad de raíces en el semiplano derecho* (Teorema de los signos de Descartes).

<u>*PASO 2*</u> (condición suficiente)

Si todos los coeficientes $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ son positivos se debe construir el ***Arreglo de Routh*** que posee ***n filas***:

$$
\begin{array}{l}
s^n \\ s^{n-1} \\ s^{n-2} \\ s^{n-3} \\ s^{n-4} \\ \cdots \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0
\end{array}
\begin{bmatrix}
a_0 & a_2 & a_4 & .... \\
a_1 & a_3 & a_5 & .... \\
b_1 & b_2 & b_3 & .... \\
c_1 & c_2 & c_3 & .... \\
d_1 & d_2 & d_3 & .... \\
.... & .... & .... & .... \\
e_1 & e_2 & 0 & .... \\
f_1 & 0 & 0 & .... \\
g_1 & 0 & 0 & ....
\end{bmatrix}
$$

Las dos primeras filas se construyen con los coeficientes $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$. Si n es impar se agrega una columna de ceros y si n par, la segunda fila se completa con un 0.

$$
\begin{array}{l}
s^n \\ s^{n-1} \\ s^{n-2} \\ s^{n-3} \\ s^{n-4} \\ \cdots \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0
\end{array}
\begin{bmatrix}
a_0 & a_2 & a_4 & .... \\
a_1 & a_3 & a_5 & .... \\
b_1 & b_2 & b_3 & .... \\
c_1 & c_2 & c_3 & .... \\
d_1 & d_2 & d_3 & .... \\
.... & .... & .... & .... \\
e_1 & e_2 & 0 & .... \\
f_1 & 0 & 0 & .... \\
g_1 & 0 & 0 & ....
\end{bmatrix}
$$

Las dos primeras filas se construyen con los coeficientes del polinomio característico

Los coeficientes de las filas subsiguientes se computan con los coeficientes de las dos filas inmediatas anteriores. Por ejemplo, la tercera fila se construye con las siguientes operaciones:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & \cdots\cdots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \cdots\cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots\cdots \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ e_1 & e_2 & 0 & \cdots\cdots \\ f_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ g_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

(-) (-)

Los coeficientes de la tercera fila en adelante se construyen a través de operaciones empleando las dos filas inmediatas anteriores

Las fórmulas para el cómputo de los distintos elementos del Arreglo de Routh son:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \qquad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \qquad \ldots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \qquad c_1 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \qquad \ldots$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \qquad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \qquad d_3 = \frac{c_1 b_4 - b_1 c_4}{c_1} \qquad \ldots$$

Este procedimiento continua hasta que se completa la fila enésima. El arreglo final tiene una estructura triangular.

Examinando los coeficientes de la primera columna del arreglo $a_0, a_1, b_1, c_1, \ldots e_1, f_1, g_1$, *si algún coeficiente es negativo, al menos una raíz está en el semiplano derecho y el sistema será inestable. Más aún, el número de cambios de signos indica la cantidad de raíces en tal semiplano.*

El número de cambio de signos resulta igual al número de raíces en el semiplano derecho

$$\begin{array}{l} s^n \\ s^{n-1} \\ s^{n-2} \\ s^{n-3} \\ s^{n-4} \\ \ldots \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{bmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & \cdots\cdots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \cdots\cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots\cdots \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ e_1 & e_2 & 0 & \cdots\cdots \\ f_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ g_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

Aplicación del Criterio de Routh

Para ver las posibilidades de estudio de brinda el Test de Routh, se propone estudiar un sistema en lazo cerrado caracterizado por las funciones de transferencia de la Figura 5.

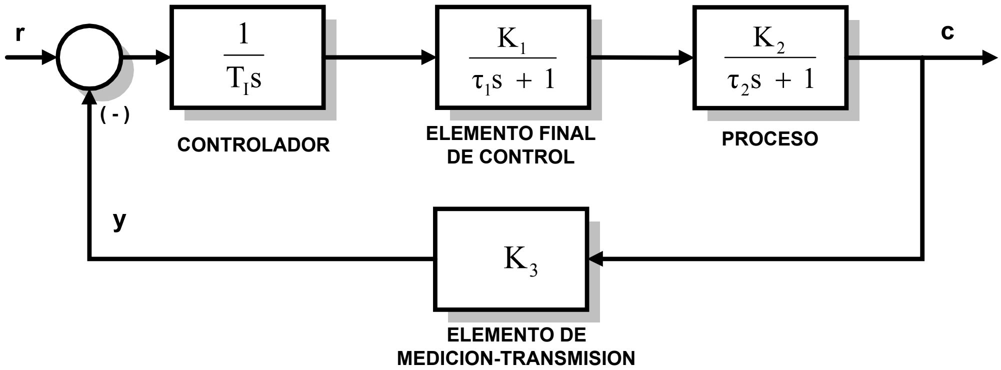

Figura 5. Ejemplo de un sistema en lazo cerrado

En este caso, las funciones de transferencia de los distintos elementos del lazo tienen parámetros que pueden haber sido obtenidos de ensayos (identificación) o a partir de modelos matemáticos. Se las asume que ambas constantes de tiempo son positivas (situación normal en los procesos). El controlador es elegido del tipo integral puro y su único parámetro de sintonía es T_I (tiempo integral). El interrogante que se trata de responder es *¿qué rangos de valores se le podrá asignar a T_I de modo que el sistema tenga un comportamiento estable?*

Es interesante acotar que no se ha incluido ninguna información sobre las perturbaciones que pueden afectar al sistema. Hay que recordar que la estabilidad del sistema en lazo cerrado depende exclusivamente de los elementos del lazo.

Para estudiar la estabilidad debe plantearse la ecuación característica:

$$Ec(s) = 1 + \mathrm{Gc(s)\ Gv(s)\ Gp(s)\ Gt(s)} = 1 + \frac{K_1\, K_2\, K_3}{T_I s\,(\tau_1\, s+1)\,(\tau_2\, s+1)} = 0$$

reduciendo a común denominador resulta:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{T_I s\,(\tau_1\, s+1)\,(\tau_2\, s+1) + K_1\, K_2\, K_3}{T_I s\,(\tau_1\, s+1)\,(\tau_2\, s+1)} = 0$$

Para que este cociente sea igual a cero, el numerador debe ser igual a cero. En consecuencia, la ecuación a la que hay que aplicar el análisis de Routh es:

$$N(s) = \tau_1\, \tau_2\, s^3 + (\tau_1 + \tau_2)\, s^2 + s + \frac{K_1\, K_2\, K_3}{T_I} = 0$$

PASO 1

Como es evidente, el polinomio es completo. Para asegurar que no existan cambios de signo en los coeficientes es menester que se cumpla que

$$\frac{K_1\, K_2\, K_3}{T_I} > 0$$

PASO 2

Se debe construir el arreglo de Routh que constará de cuatro filas, siendo las dos primeras construidas con los coeficientes del polinomio original y resto se obtiene con las operaciones descriptas antes.

$$\begin{array}{c} s^3 \\ \\ s^2 \\ \\ s^1 \\ \\ s^0 \end{array} \begin{bmatrix} \tau_1\,\tau_2 & 1 & 0 \\ \\ \tau_1+\tau_2 & \dfrac{K_1\,K_2\,K_3}{T_I} & 0 \\ \\ \dfrac{\tau_1+\tau_2-\tau_1\,\tau_2\dfrac{K_1\,K_2\,K_3}{T_I}}{\tau_1+\tau_2} & 0 & 0 \\ \\ \dfrac{K_1\,K_2\,K_3}{T_I} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Inspeccionando la primera columna, para que no existan cambios de signos y en consecuencia pueda asegurarse la estabilidad, surge una segunda condición:

$$\frac{\tau_1+\tau_2-\tau_1\,\tau_2\dfrac{K_1\,K_2\,K_3}{T_I}}{\tau_1+\tau_2} > 0$$

y como el denominador es mayor que cero, para que se cumpla esta restricción deberá ser

$$\tau_1+\tau_2-\tau_1\,\tau_2\frac{K_1\,K_2\,K_3}{T_I} > 0$$

y por lo tanto

$$T_I > \frac{\tau_1\,\tau_2\,K_1\,K_2\,K_3}{\tau_1+\tau_2}$$

De esta forma, si el producto de las ganancias es positivo, el valor de tiempo integral mínimo admisible sería:

$$T_I\,(\text{min}) = \frac{\tau_1\,\tau_2\,K_1\,K_2\,K_3}{\tau_1+\tau_2}$$

y correspondería a un sistema con estabilidad crítica o marginal (respuesta a perturbaciones con oscilaciones sostenidas).

Es conveniente hacer una observación en este punto. *El criterio de estabilidad de Routh permite hacer un tratamiento matemático formal y relacionar los parámetros de las funciones de transferencia con los del controlador, estableciendo los límites y las restricciones*. Esto no se podría hacer con el mero cómputo numérico de las raíces de la ecuación que solo aportaría información para valores determinados de los parámetros (en este caso ganancias, constantes de tiempo y tiempo integral).